

Field Theory

Yury Holubeu *

October 3, 2025

The note is not intended for distribution. Classical field theory is discussed in detail. Links below show contents of [solved problems](#) and summary of [special topics](#). Readers who have opened this note for the first time are highly recommended to read the preface.

Contents

Preface and main motivation	20
I — Typical Field Theory in a Nutshell —	23
1 Basic Constructions of Field Theory	23
1.1 Free fields in a nutshell	23
1.1.1 Vector field: Basics	23
1.1.2 Vector field: Typical Models	29
1.1.3 Scalar field: Basics	29
1.1.4 Scalar field: Typical Models	38
1.1.5 Dirac field: Basics	42
1.1.6 Dirac field: Typical Models	53
1.1.7 Weyl, Majorana spinors	55
1.2 Main models of field theory	59
1.2.1 Formalisms, Symmetries	59
1.2.2 Symmetries, SSB, Higgs	63
1.2.3 Nonabelian fields	65
1.2.4 Overview of Gauge Field Models (!?)	66
1.2.5 QCD, Standard Model: main concepts	66
1.2.6 Solitons, monopoles, kinks, vortices: main concepts	66
2 Parts of Typical Field Theory in a Nutshell	66
2.1 Classical electrodynamics and special relativity: basics	66
2.1.1 Main Laws and Ideas of SR	66
2.1.2 Poincare group, rotations	72
2.1.3 Main Laws of Electrodynamics	80
2.1.4 Electromagnetic waves	87
2.1.5 Electrostatics, Magnetostatics	89
2.1.6 Scattering	93
2.1.7 Particle in an Electromagnetic Field	95
2.1.8 Electrodynamics of Continuous Media: Basics	98
2.1.9 Light emission	102
2.2 Gravity in a nutshell	106
2.2.1 Einstein Equations, nNature of Gravity	106
2.2.2 Geometrical properties for gravity	107
2.2.3 Weak and Centrally Symmetric Gravity	108
2.2.4 Black Holes, Stars, Collapsars	108
2.2.5 Gravitational waves	108
2.2.6 Cosmology	108
II Flat Space-Time	110

*<https://yuriholubeu.github.io/>, yuri.holubev@gmail.com

3	Relativity	110
3.1	Main Concepts of Relativity	110
3.1.1	Idea of Relativity	110
3.1.2	Present Moment	110
3.1.3	Concept of Metric	111
3.1.4	How Far Should One Think about Philosophy of Relativity?	111
3.1.5	How Far Should One Think about Mathematics of Relativity?	111
3.1.6	A View on Reality that Makes SR Understandable	111
3.2	Basic Philosophy About Space and Time	114
3.2.1	What is Emptiness?	114
3.2.2	What Is the Time?	114
3.2.3	The Concept of Space-Time	117
4	Galilean Relativity	117
4.1	Ideas of Galilean Relativity	117
4.1.1	Physical Idea of Galilean Relativity	117
4.1.2	Experiments to Confirm of Galilean Relativity	117
4.2	Mathematical Properties of Euclidean Space	117
4.2.1	Metric Isometries (!!?)	117
4.2.2	Galilean Transformations	119
4.2.3	Shifts of Space	120
4.2.4	Rotations of Space	122
4.2.5	Rotation of Scalars, Vectors, Tensors	127
4.2.6	Spin of Fields: Basics	130
4.2.7	Spin of Fields: Deeper Understanding	137
4.2.8	Spin of Fields: Special Constructions	138
4.2.9	Mirror Inversion of Euclidean Space	158
4.2.10	Other Properties of Euclidean Space	166
5	Special Relativity	166
5.1	Basic Physical Ideas of SR	166
5.1.1	Postulates of SR	166
5.1.2	Speed of Light	167
5.1.3	Constancy of the Speed of Light (??)	168
5.1.4	What is Matter?	168
5.1.5	Causality	171
5.1.6	Why There Is No Aether?	171
5.2	Essence of Special Relativity	171
5.2.1	Lorentz Transformations	171
5.2.2	Time Dilation	177
5.2.3	Length Contraction	178
5.3	Experiments about Special Relativity	179
5.3.1	Experiments that are in the Basis of SR	179
5.3.2	Kennedy-Thorndike experiment	180
5.3.3	Overview of Tests of SR (???)	180
5.3.4	Michelson-Morley Experiment	180
5.3.5	Jupiter's Io Eclipses	180
5.3.6	Fizeau's Experiment (??)	181
5.3.7	Other Experiments Measuring the Speed of Light (??)	181
5.3.8	Other Experiments Testing SR and Speed of Light (???)	181
5.4	Advanced Philosophical Ideas About Space and Time	182
5.4.1	Critical Review of SR and Its Details (???)	182
5.4.2	Boundaries of Applicability of SR (????)	188
5.4.3	Overview of Mathematics Generalizations of Special Relativity?	188

5.4.4	The Philosophy Behind Wigner's Scheme	188
5.4.5	On Reference Frames Moving at the Speed of Light (????)	193
5.4.6	Time Travel	193
5.4.7	Time Travel: Facts	193
5.4.8	The Relation of SR with Some Physical Phenomena (????)	193
5.4.9	Idea of Supersymmetry	193
5.5	Lorentz Transformations: Extra Features	193
5.5.1	Intervals and 4-Vectors	193
5.5.2	Velocity Addition Law	195
5.5.3	Relativistic Kinematics	195
5.5.4	Other Properties of Lorentz Transformations	198
5.5.5	Geometry of SR	199
5.5.6	Accelerating Reference Frames and Rindler Coordinates (!!!!???)	201
5.5.7	Special relativity in terms of differential forms (????)	208
5.5.8	Some Extra Topics of Relativistic Mechanics	208
5.6	Main Effects of SR	214
5.6.1	Main Laws of Relativistic Mechanics	214
5.6.2	Aberration of Light	218
5.6.3	Doppler Effect	218
5.6.4	Thomas Precession	222
5.7	Other Effects and Paradoxes of SR	225
5.7.1	Twin Paradox: Basic Theory 1	225
5.7.2	Twin Paradox: Basic Theory 2	236
5.7.3	Twin Paradox: Advanced Ideas	240
5.7.4	The Sagnac Effect: Correct Explanations by G.B. Malykin	241
5.7.5	The Sagnac Effect: Approximately Correct Explanations by G.B. Malykin	256
5.7.6	The Sagnac effect: Attempts of Explanations and Incorrect Explanations	261
5.7.7	Barn and Pole Paradox	279
5.7.8	Submarine Paradox	281
5.7.9	Ehrenfest Paradox on the Rotating Disk	282
5.7.10	Bell's Spaceship Paradox	283
6	Mathematical and Theoretical Special Relativity: Basics	286
6.1	Lorentz Group	286
6.1.1	Basics of Lorentz Group	286
6.1.2	Indexes, minuses, positions	295
6.1.3	Rotations in Minkowski Space	297
6.1.4	Boosts	303
6.1.5	Lie Algebra of the Lorentz Group	308
6.1.6	Spin Tensor $S^{\mu\nu}$	331
6.1.7	Orbital Momenta Tensor $L^{\mu\nu}$	332
6.1.8	Full Orbital Momenta Tensor $J^{\mu\nu}$	333
6.1.9	Casimir operators of Lorentz Group	333
6.1.10	Other Properties of Lorentz Group	335
6.1.11	Overview of Discrete Symmetries of Lorentz Group	335
6.1.12	Reversal of the Arrow of Time in Lorentz Group	335
6.2	Properties of the Poincaré Group and Algebra	335
6.2.1	Translations of Minkowski Space	335
6.2.2	Poincaré Group	337
6.2.3	Lie Algebra of the Poincaré Group	343
6.2.4	Casimir Operators in the Poincaré Group	347
6.2.5	Pauli-Lubanski Pseudovector (??)	348
6.2.6	Transformations of Vectors, Tensors, Spin-Tensors in the Poincaré Group	353
6.2.7	Proofs that Poincaré Group Is Useful	354

6.2.8	Glossary of Notations in the Poincaré Group	354
6.3	Discrete Symmetries in the Poincaré Group (?)	360
6.3.1	C Symmetry	364
6.3.2	T Symmetry	364
6.3.3	P Symmetry	364
6.3.4	CPT Symmetry	364
6.4	Other Properties of the Poincaré Group	364
6.4.1	Various Questions About the Poincaré Group	364
6.4.2	Spinor Homomorphism (??)	364
6.4.3	Lorentz Invariance and Relativistic Symmetry Principles 1	364
6.4.4	Lorentz Invariance and Relativistic Symmetry Principles 2	376
6.4.5	Lorentz Invariance and Relativistic Symmetry Principles 3	382
7	Representations of Poincare Group	388
7.1	Representation Formalism of the Poincaré Group	388
7.1.1	Method of Constructing Representations and General Questions	388
7.1.2	Representations as Action on a Scalar Field	392
7.1.3	Representations as Action on a Vector/Spinor Field	394
7.1.4	Generators of the $SL(2 \mathbb{C})$ Group	396
7.1.5	Irreducible Representation of the Proper Lorentz Group	398
7.1.6	Proper Lorentz Group and the $SL(2 \mathbb{C})$ Group	402
7.1.7	Spinors: from $SO(3,1)$ to $SL(2 \mathbb{C})$	405
7.1.8	Spinors and Lorentz Transformations by Stepanyants	406
7.1.9	Massive Particles	412
7.1.10	Massless Particles (!!?)	414
7.1.11	Helicity Operator	420
7.1.12	Boosts of Fields (???)	422
7.1.13	Representations of the Poincaré Group in the Space of Spin-Tensor Fields	422
7.2	Fields as Representations of Poincare Group	429
7.2.1	Klein–Gordon Equation as Representation $(0,0)$	429
7.2.2	Weyl Spinors or Representations $(0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0)$	429
7.2.3	Derivation of the Dirac Equation from the Poincaré Group	431
7.2.4	Derivation of the Maxwell Equations from the Poincaré Group	434
7.2.5	Derivation of Electromagnetic Field from Lorentz Group (????)	439
7.2.6	Interaction of Fields from the Point of View of the Poincaré Group (????)	450
7.2.7	Derivation of Other Equations from the Poincaré Group	450
7.2.8	Review and Details of Representations of the Poincaré Group	456
7.3	Other about Representations of the Poincaré Group	456
7.3.1	Projective Representations	456
7.3.2	Representations of the Type $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	458
8	Features, Special Effects and Constructions in Scope of SR	458
8.1	Other Conceptual Topics	458
8.1.1	Other Models and Phenomena of SR	458
8.1.2	Some Fals Statements about SR	458
8.1.3	Generalization of SR ot GR in a Nutshell	458
8.1.4	History of SR in a Nutshell	461
8.1.5	Review of Applications of the Philosophy of Time in Everyday Life	461
8.2	Other Mathematical Topics	461
8.2.1	Inönü–Wigner Contraction (??)	461
8.2.2	Group Operators and Homotopy Classes by Weinberg (??)	462
8.2.3	Inversions and Degeneracy of Multiplets by Weinberg (??)	462
8.2.4	Topology of the Poincaré Group	462
8.2.5	Theorem on Representation of Symmetry by Weinberg (??)	468

8.2.6	Overview of Other Mathematical-Theoretical Constructions of Relativity . . .	468

III Formalism, Fields 469

9	Formalism for Describing Fields	469
9.1	Formalism of Field Theory	469
9.1.1	What Is a Field? (?)	469
9.1.2	Intuitive Understanding of the Whole Field Theory	469
9.1.3	Transition from Mechanical Systems to Field Systems (?)	469
9.1.4	Lagrangian Formalism in Field Theory	471
9.1.5	Hamiltonian Formalism of Field Theory	477
9.1.6	Energy momentum tensor	477
9.1.7	Stress–energy Tensor: Other Definitions	481
9.1.8	Mass of Fields	482
9.1.9	Limits of Applicability of Field Theories	482
9.2	Symmetries	482
9.2.1	Concept of Symmetry in Field Theory	482
9.2.2	Noether’s theorem: Basics	484
9.2.3	Noether’s theorem: Advanced Features	493
9.2.4	Global Symmetries	493
9.2.5	Local Abelian Symmetry	496
9.2.6	Other about Spontaneous Symmetry Breaking and Higgs Mechanism	502
9.3	Other General Properties of Fields	503
9.3.1	Connection of Wavefunction in QM and Classical Field	503
9.3.2	Decomposition of Fields into Modes	504
9.3.3	Temperature of Fields: Basic Concepts	513
9.3.4	The Choice of Field for Describing a System (??!!)	513
9.3.5	Invariants of Fields	513
9.3.6	Other Properties of Fields	513
9.4	Overview of Experiments that are Described by Field Theory	514
10	Scalar Fields	514
10.1	Properties of a Scalar Field	514
10.1.1	Real Scalar Field	514
10.1.2	Complex Scalar Field, Mode Decomposition	515
10.1.3	Discrete Symmetries and Transformations of a Scalar Field	525
10.1.4	Other about Scalar Field	533
10.2	Classical Models with a Scalar Field	537
10.2.1	Basics of Scalar Field Again	537
10.2.2	1.5 Energy-Momentum Tensor of the Klein-Gordon Field	546
10.2.3	1.7 Charge Conjugation	558
10.2.4	1.8 Free Spin-0 Particles in the Feshbach-Villars Representation	563
10.2.5	1.9 The Interaction of a Spin-0 Particle with an Electromagnetic Field	571
10.2.6	1.11 The Nonrelativistic Limit With Fields 1	579
10.2.7	1.11 The Nonrelativistic Limit With Fields 2	587
10.2.8	1.12 Interpretation of One-Particle Operators in Relativistic QM 1	592
10.2.9	1.12 Interpretation of One-Particle Operators in Relativistic QM 2	602
10.2.10	1.12 Interpretation of One-Particle Operators in Relativistic QM 3	606

11 Vector Fields	618
11.1 Properties of Vector Fields	618
11.1.1 Construction of Electrodynamics	618
11.1.2 Main Properties of Maxwell Equations	622
11.1.3 Energy-Momentum Tensor of a Vector Field	622
11.1.4 Dynamics of a Massless Vector Field in the General Case	624
11.1.5 Formalism of Differential Forms for Field Theory 1	624
11.1.6 Formalism of Differential Forms for Field Theory 2	632
11.1.7 Mode Decomposition of a Vector Field	640
11.1.8 Laws of Dynamics of a Vector Field in a Medium	644
11.2 Main Modifications of the Electromagnetic Field	644
11.2.1 Construction of a Massive Vector Field	644
11.2.2 Equations of the Electromagnetic Field in Other Dimensions (??)	645
11.2.3 Other Theoretical Properties of the Electromagnetic Field	646
12 Spinor Fields	646
12.1 Dirac Field	646
12.1.1 Fundamentals of Spinor Field	646
12.1.2 Chiral Invariance and Chiral Fermions (???)	664
12.1.3 Plane Waves in the Dirac Theory	671
12.1.4 Other Properties of the Dirac Field	677
12.1.5 Field of Nonrelativistic Spinors and Pauli Equation	677
12.2 Models, and Phenomena with the Dirac Field	677
12.2.1 Solution of the Dirac Equation in a Coulomb Potential	677
12.2.2 Dirac Cone	687
12.2.3 Weyl Spinors by Kiselev	687
12.2.4 Dirac Spinors by Kiselev	692
12.2.5 Zitterbewegung (????)	701
12.3 General Questions and Applications of Dirac Field	703
12.3.1 Other General Questions about the Dirac Theory	703
12.3.2 Historical Derivation of the Dirac Equation (???)	703
12.3.3 Effective Dirac Field in Condensed Matter: An Overview	703
12.4 Properties of Spinor Representations 1	705
12.4.1 Spinors	705
12.4.2 Irreducible Representation of the $SL(2 \mathbb{C})$	707
12.4.3 Relation of Spinor and Space-Time Indices	709
12.4.4 Transformation of Spin-Tensors under Spatial Reflections	715
12.4.5 Spinor Metric	716
12.5 Properties of Spinor Representations 2	716
12.5.1 A Wave Equation for Spin- $\frac{1}{2}$ Particles The Dirac Equation 1	716
12.5.2 A Wave Equation for Spin- $\frac{1}{2}$ Particles The Dirac Equation 2	731
12.5.3 Lorentz-Covariance of the Dirac Equation 1	742
12.5.4 Lorentz-Covariance of the Dirac Equation 2	757
12.5.5 Spinors under Spatial Reflection	761
12.5.6 Bilinear Covariants of the Dirac Spinors	763
12.5.7 Relativistic Way of Constructing Solutions of Free Dirac Equation 1	768
12.5.8 Relativistic Way of Constructing Solutions of Free Dirac Equation 2	780
12.5.9 Projection Operators for Energy and Spin	788
12.6 Properties of Spinor Representations 3	793
12.6.1 Wave Packets of Plane Dirac Waves	793
12.6.2 Dirac Particles in External Fields: Examples and Problems 1	806
12.6.3 Dirac Particles in External Fields: Examples and Problems 2	823
12.6.4 Dirac Particles in External Fields: Examples and Problems 3	838
12.6.5 The Two-Center Dirac Equation	862

12.6.6	The Two-Center Dirac Equation 2: Discussion	877
12.6.7	The Foldy-Wouthuysen Representation for Free Particles	877
12.6.8	11.1 The Foldy-Wouthuysen Representation in the Presence of External Fields	885
12.6.9	The Hole Theory 1	890
12.6.10	The Hole Theory 2	906
12.6.11	The Hole Theory 3	910
12.7	Classical Electrodynamics by Theoretical Approach	923
12.7.1	Classical Electrodynamics by Stepanyants	923
13	Special Models and Methods	931
13.1	Other Free Fields	931
13.1.1	The Weyl Equation - The Neutrino	931
13.1.2	Rarita-Schwinger Field (spin 3/2)	943
13.1.3	Spin-2 Field, Gravitons (!!!)	944
13.1.4	Other Phenomena with the Dirac Field	944
13.1.5	Other Descriptions of Spinor Fields	944
13.2	Special Spinor Fields	945
13.2.1	Algebra of many dimensional γ -matrices	945
13.2.2	Majorana and Weyl Spinors in Arbitrary Dimensions	950
13.2.3	Wave Equations for Particles with Arbitrary Spins 1	957
13.2.4	Wave Equations for Particles with Arbitrary Spins 2	971
13.2.5	Wave Equations for Particles with Arbitrary Spins 3	982
13.2.6	Wave Equations for Particles with Arbitrary Spins 4	987
13.3	Klein's Paradox	996
13.3.1	Typical theory of Klein paradox	996
13.3.2	Taking Into Account Slope of realistic potential barriers	1002
13.3.3	Taking Into Account Slope of realistic potential barriers: Calculations	1014
13.3.4	Klein Paradox: Other Discussion	1015
13.4	Numerical Methods for Field Theory	1016
13.4.1	Overview of Numerical Methods for Field Theory	1016
13.4.2	Overview of Visual Tools	1016
13.5	Other Fundamental Properties of Free Fields	1016
13.5.1	Why Charges are Discrete?	1016
IV	Gauge Fields and Special Models	1017
14	Gauge Fields and Strings by Polyakov	1017
14.1	Statistical Mechanics and Quantum Field Theory	1017
14.1.1	1.1 Quantum Particles	1017
14.1.2	1.2 . Global and Local Symmetries. Preliminary Description	1019
14.1.3	1.3 Discrete Global Symmetries	1020
14.1.4	1.4 Continuum Abelian Global Symmetries	1024
14.1.5	1.5 Non-Abelian Global Symmetries	1025
14.1.6	1.6 Discrete Gauge Symmetries	1026
14.1.7	1.7 $O(2)$ Gauge Systems	1027
14.1.8	1.8 Non-Abelian Gauge Theories	1029
14.2	Asymptotic Freedom and the Renormalization Group	1029
14.2.1	2.1 Principal Chiral Fields	1029
14.2.2	2.2 The n -Fields	1035
14.2.3	2.3 Non-Abelian Gauge Fields for $\mathcal{D} = 4$	1037
14.3	The Strong Coupling Expansion	1039
14.3.1	3.1 Ising Model	1040
14.3.2	3.2 Continuous Global Symmetry	1042

14.3.3	3.3 Gauge Symmetries	1045
14.4	Instantons in Abelian Systems	1050
14.4.1	4.1 Instantons in Quantum Mechanics and the Ising Model	1050
14.4.2	4.2 Instantons in the Global $O(2)$ Model	1053
14.4.3	4.3. Compact QED ($O(2)$ Gauge Model)	1059
14.5	Quark Confinement, Superfluidity, Elasticity. Criteria and Analogies	1067
14.6	Topology of Gauge Fields and Related Problems	1075
14.6.1	6.1 Instantons for $\mathcal{D} = 2, N = 3n$ -Fields	1076
14.6.2	6.2 Instantons in Non-Abelian Gauge Theories	1081
14.6.3	6.3 Qualitative Effects of Instantons	1086
14.7	Analogies Between Gauge and Chiral Fields. Loop Dynamics	1093
14.7.1	7.1 Non-Abelian Phase Factor	1094
14.7.2	7.2 Quantum Theory of Loops	1099
14.8	The Large N Expansion	1102
14.8.1	8.1 $O(N)\sigma$ -Model	1103
14.8.2	8.2 The Principal Chiral Field For $SU(N)$	1109
14.8.3	8.3 The $CP^{N-1}n$ -Model	1113
14.8.4	8.4 Non-Abelian Gauge Theory	1117
14.9	Quantum Strings and Random Surfaces	1120
14.9.1	9.1 Mathematical Preliminaries: Summation of Random Paths	1120
14.9.2	9.2 Measures in the Space of Metrics and Diffeomorphisms	1124
14.9.3	9.3 Closed Paths	1129
14.9.4	9.4 General Theory of Random Hypersurfaces	1133
14.9.5	9.5 Two-Dimensional Surfaces. Geometrical Introduction	1138
14.9.6	9.6 Computation of Functional Integrals	1145
14.9.7	9.7 Scattering Amplitudes	1150
14.9.8	9.8 Scattering Amplitudes and the Operator Product Expansion	1153
14.9.9	9.9 The Energy-Momentum Tensor in Conformal Quantum Field Theory	1159
14.9.10	9.10 Physical States of String Theory in the Critical Dimension	1166
14.9.11	Appendix to 9.10	1173
14.9.12	9.11 Fermi Particles	1173
14.9.13	9.12 Fermionic Strings	1178
14.9.14	9.13 Vertex Operators	1187
14.10	Attempt at a Synthesis	1196
14.10.1	10.1 Long Wave Oscillations of Strings in Critical Dimensions	1196
14.10.2	10.2 Possible Applications of Critical Strings	1205
14.10.3	10.3 The Three-Dimensional Ising Model	1210
14.10.4	10.3.1 The Dirac Equation in the Two-Dimensional Ising Model	1211
14.10.5	10.3.2 The Three-Dimensional Case. The Loop Equation	1214
14.10.6	10.4 Extrinsic Geometry of Strings	1217
15	Other Gauge Fields	1220
15.1	Special models in Electromagnetism by Tong	1220
15.1.1	Magnetic Monopoles (???)	1220
15.1.2	The Theta Term (???)	1220
15.2	Yang–Mills Theory	1221
15.2.1	Construction of Non-Abelian Gauge Fields by Stepanyants	1221
15.2.2	Non-Abelian Gauge Theories by Stepanyants	1226
15.2.3	Theory of Strong Interactions	1232
15.3	Yang-Mills Theory by Tong	1232
15.3.1	Introducing Yang-Mills	1233
15.3.2	The Theta Term	1233
15.3.3	Instantons (!!!!)	1233
15.3.4	The Flow to Strong Coupling	1233

15.3.5	Electric Probes	1233
15.3.6	Magnetic Probes	1233
15.3.7	Dynamical Matter	1234
15.3.8	't Hooft-Polyakov Monopoles	1234
15.4	Anomalies by Tong	1234
15.4.1	The Chiral Anomaly: Building Some Intuition	1234
15.4.2	Deriving the Chiral Anomaly	1234
15.4.3	Fermi Zero Modes	1234
15.4.4	Gauge Anomalies	1234
15.4.5	't Hooft Anomalies	1234
15.4.6	Anomalies in Discrete Symmetries	1234
15.5	Lattice Gauge Theory by Tong	1234
15.5.1	Scalar Fields on the Lattice	1235
15.5.2	Gauge Fields on the Lattice	1235
15.5.3	Fermions on the Lattice	1235
15.5.4	Towards Chiral Fermions on the Lattice	1235
15.6	Chiral Symmetry Breaking by Tong	1235
15.6.1	The Quark Condensate	1235
15.6.2	Miraculously, Baryons	1235
15.6.3	QCD	1235
15.6.4	The Wess-Zumino-Witten Term	1235
15.6.5	't Hooft Anomaly Matching	1235
15.7	Large N by Tong	1235
15.7.1	Large N Yang-Mills	1236
15.7.2	Large N QCD	1236
15.7.3	The Chiral Lagrangian Revisited	1236
16	Interacting and Other Special Fields	1236
16.1	Fields of Fundamental Interactions	1236
16.1.1	Yukawa Interaction	1236
16.1.2	Interaction of Scalar and Spinor Fields by Buchbinder	1236
16.1.3	Interaction of Scalar, Spinor and Vector Fields (??)	1237
16.2	Introduction to the Standard Model	1237
16.2.1	Salam–Weinberg Model in a Nutshell	1237
16.2.2	Weak Interaction	1237
16.2.3	Other Fields in Particle Physics and QFT	1239
16.3	Other Properties of Established Field Models	1241
16.3.1	Similarity between Gluons and Gravitons	1241
16.4	Proposals of Generalizations of Electrodynamics: Basics	1241
16.4.1	Simplest Generalizations of Electrodynamics	1241
16.4.2	Born–Infeld Theory (???)	1242
16.4.3	Electrodynamics of Bialynicki-Birula (??)	1250
16.4.4	ModMax electrodynamics	1251
16.4.5	Heisenberg-Euler-Kockel theory (???)	1251
16.4.6	Chern–Simons Theory	1251
16.4.7	Higher-Rank Tensor Fields	1258
16.4.8	Fields in String Theory (??)	1258
16.4.9	Fields in Curved Space-time	1258
16.4.10	Random Fields	1261

V Electrodynamics of Fields **1262**

17 Fundamentals of Electrodynamics	1262
17.1 Construction of Classical Electrodynamics	1262
17.1.1 Basic Experiments for Construction of Classical Electrodynamics	1262
17.1.2 Axiomatic Approach to Electrodynamics (????)	1262
17.1.3 Units in Electrodynamics	1269
17.1.4 Consequences of the constant speed of light on Electrodynamics	1269
17.1.5 Definition of Parameters of Electrodynamics	1269
17.1.6 Action and Lagrangian of the electromagnetic field and particles in it	1270
17.1.7 More general linear constitutive relations	1272
17.1.8 Intuitive understanding of the electromagnetic field and illustrations (!?)	1274
17.2 Maxwell's Equation: General Properties	1274
17.2.1 Derivation of the equations of electrodynamics	1274
17.2.2 Properties of Maxwell's equations	1275
17.2.3 Solution of Maxwell's equations in general form	1275
17.2.4 Conservation laws in electrodynamics	1276
17.2.5 Maxwell's equations in differential forms	1276
17.2.6 Maxwell's equations in a covariant form	1277
17.2.7 Features of real applications of Maxwell's equations	1278
17.2.8 Maxwell's equations in matter	1279
17.3 Details of Maxwell's Equations	1286
17.3.1 Gauss's law	1286
17.3.2 Faraday's law	1286
17.3.3 Coulomb's law	1286
17.3.4 Ampere's law	1289
17.4 Properties of the Electromagnetic Field	1289
17.4.1 Gauges in Electrodynamics (?)	1289
17.4.2 Field Transformations under Change of Reference Frames (???)	1290
17.4.3 Invariants of the Electromagnetic Field	1291
17.4.4 Other properties of the electromagnetic field	1292
17.5 Electromagnetic Waves	1292
17.5.1 Wave Equation and Parameters of a Plane Wave	1292
17.5.2 Polarization of Waves (!!!!)	1297
17.5.3 Spectral Decomposition of Electromagnetic Waves	1300
17.5.4 Electromagnetic waves at finite temperature	1301
17.5.5 Partially Polarized Light (??)	1301
17.5.6 Other Descriptions of Electromagnetic Waves	1307
18 Electrostatics and Magnetostatics	1307
18.1 Static Electric Field	1307
18.1.1 Energy of the Electrostatic Field	1307
18.1.2 Dipole Moment	1308
18.1.3 Multipole Moments	1310
18.1.4 Energy of a System of Charges in an External Field	1312
18.1.5 Decomposition of the Electrostatic Field	1315
18.1.6 Electric field at finite temperature	1316
18.2 Static Magnetic Field	1316
18.2.1 Main Properties of a Static Magnetic Field	1316
18.2.2 Magnetic Moment	1318
18.2.3 Larmor's Theorem	1321
18.2.4 Magnetic Dipole (??)	1324
18.2.5 Typical Models with Magnetic Dipole: An Overview	1327
18.2.6 Dirac's Monopole	1328
18.2.7 Magnetic field at finite temperature	1332
18.3 Constant Electromagnetic fields	1332

19 Time-Varying Fields	1333
19.1 Field of Moving Charges	1334
19.1.1 Liénard–Wiechert Potentials	1334
19.1.2 Spectral Decomposition of Retarded Potentials	1340
19.1.3 Higher-Order Lagrangian and Hamiltonian Functions	1342
19.2 Radiation: Formalism	1347
19.2.1 Field of a System of Charges at Large Distances	1347
19.2.2 Dipole Radiation (!!)	1350
19.2.3 Dipole Radiation in Collisions	1355
19.2.4 Radiation up to the $o(1/c^2)$: Formalism	1357
19.2.5 Radiation up to the $o(1/c^2)$: Features	1367
19.2.6 Examples of Radiation	1367
19.2.7 Electric field at finite temperature	1368
19.3 Radiation Damping: Formalism and Advanced Properties of Electrodynamics	1369
19.3.1 Radiation Damping: Formalism	1369
19.3.2 Limits of Applicability of Classical ED by Landau	1371
19.3.3 Self-action of a field	1373
19.3.4 Equivalence Principle in Electrodynamics	1373
19.4 Radiation: Basic Models	1384
19.4.1 Radiation Damping: Examples	1384
19.4.2 Low-frequency braking radiation	1386
19.4.3 Radiation from the Coulomb interaction	1387
19.4.4 Overview of Other Radiation Mechanisms and Phenomena in Electrodynamics	1394
19.4.5 Applications of Radiation: An Overview	1394
19.5 Scattering: Formalism	1395
19.5.1 Scattering of Free Particles	1395
19.5.2 How in general to describe scattering of not electromagnetic waves?	1403
19.6 Other Topics of Scattering Theory	1403
19.6.1 Scattering of Low-Frequency Waves	1403
19.6.2 Scattering of High-Frequency Waves	1404
19.6.3 Other Types of Scattering in Electrodynamics	1407
20 Optics: Basics	1407
20.1 Fundamentals of Optics	1407
20.1.1 How Exactly Optics Follows from Maxwell Equations?	1407
20.1.2 Geometrical Optics: Basics	1408
20.1.3 Intensity	1412
20.1.4 Eikonal and Penetration of Light into a Medium	1414
20.1.5 Limits of Geometrical Optics	1416
20.1.6 Phenomena of Diffraction	1418
20.1.7 Fresnel Diffraction	1424
20.1.8 Fraunhofer Diffraction	1428
20.2 Optics: Other Well-known Properties and Models	1432
20.2.1 Overview of Typical Phenomena of Optics	1432
20.2.2 Thin beams of rays (???)	1432
20.2.3 Lenses, Grating	1437
20.2.4 Wide beam mapping (???)	1439
21 Other topics in electrodynamics	1441
21.1 Motion of a Particle in Electromagnetic Field	1441
21.1.1 Equation of Motion of a Particle in a Field	1441
21.1.2 Motion in a Coulomb Field	1447
21.1.3 Motion in a Constant Electromagnetic Field	1449
21.1.4 Movement in a magnetic field 1	1450

21.1.5	Movement in a magnetic field 2	1453
21.1.6	Motion in electric and magnetic fields	1463
21.1.7	Some Typical Models of Motion of Particles	1471
21.1.8	Other about Motion in Fields	1476
21.2	Selected Applications of Electrodynamics	1476
21.2.1	Radio and Wi-Fi	1476
21.2.2	Electromagnetic Phenomena in Nature: An Overview	1476
21.3	Other Topics of Theoretical Electrodynamics	1476
21.3.1	Quantization of Electromagnetic Field	1476
21.3.2	ED in a Curved Space-time 1 [SEE SPECIAL NOTE ABOUT IT]	1476
21.3.3	ED in a Curved Space-time 2 [SEE SPECIAL NOTE ABOUT IT]	1494
21.3.4	Quantum Correction to Electromagnetic Field	1496
21.3.5	Interaction of the Electromagnetic and Gravitational Fields (???)	1496
21.3.6	Some Nonstandard Configurations of the Electromagnetic Field	1496
21.3.7	Electrodynamics as a Particular Case of More General Theory 1	1496
21.3.8	Electrodynamics as a Particular Case of More General Theory 2	1497

VI Typical Gravity 1498

22	Fundamentals of General Relativity	1498
22.1	Nature of Gravity in a Nutshell	1498
22.1.1	Experiments Underpinning the Understanding of the Nature of Gravity	1498
22.1.2	What is a curved spacetime?	1499
22.1.3	Equivalence Principle: Illustrations and Examples	1499
22.1.4	Equivalence Principle: Statement	1502
22.1.5	Equivalence Principle: Tests and Other Properties	1502
22.1.6	Overview of What Gravity is Definitely Not?	1502
22.1.7	Overview of What True Nature of Gravity Can Be?	1503
22.1.8	Overview of What Gravity Really Can Be: Experimental Confirmations	1503
22.2	Really Useful Mathematics of Gravity	1503
22.3	Construction of General Relativity	1503
22.3.1	Gravitational Field in Nonrelativistic Mechanics	1503
22.3.2	Constant Gravitational Field	1505
22.3.3	Newton Gravity as a Particular Case of GR	1511
22.4	Einstein Equations	1515
22.4.1	Derivation of Einstein's Equations	1515
22.4.2	Properties of Einstein's Equations	1518
22.5	Construction of General Relativity: Other Fundamental Properties	1520
22.5.1	Gravity in Coordinate Free Notation	1520
22.5.2	Einstein's Equations in the Tetrad Formalism (??)	1521
22.5.3	Einstein's Equations in the Second Approximation	1523
22.5.4	Palatini Formalism (??)	1531
22.5.5	Cauchy Problem (???)	1534
22.5.6	Harmonic Coordinates	1537
22.6	Conservation Laws in General Relativity	1538
22.6.1	Energy–Momentum Tensor	1538
22.6.2	Energy–Momentum Pseudotensor of the Gravitational Field	1542
22.6.3	4-Momentum and 4-Angular Momentum of the Gravitational Field	1544
22.6.4	Other Statements about Conservation Laws in General Relativity	1550
22.7	Other Equations of General Relativity	1550
22.7.1	Geodesic Deviation Equation	1550
22.7.2	Equation of Motion of Particles in a Gravitational Field (??)	1551
22.7.3	The synchronous reference system	1553

23 Typical Models of General Relativity	1560
23.1 Basic Models of Gravity	1560
23.1.1 Weak Gravitational Fields	1560
23.1.2 Constant Gravitational Field	1571
23.1.3 Einstein Equations in Vacuum	1576
23.1.4 Rotating Reference Frame	1579
23.2 Schwarzschild Solution	1580
23.2.1 Derivation of the Schwarzschild Solution	1581
23.2.2 Typical Consequences of the Schwarzschild Metric	1584
23.2.3 Overview of Applications of the Schwarzschild Model	1591
23.2.4 Kruskal Coordinates	1592
23.2.5 Penrose Diagrams	1592
23.2.6 Centrally Symmetric Gravitational Field (after Landau)	1594
23.2.7 Static Spherically Symmetric Body	1603
23.2.8 Typical Problems in Scope of Newton Gravity	1605
23.2.9 Typical Problems in Scope of Newton Gravity from the GR Framework	1605
23.3 Gravitational Collapses	1605
24 Other about Gravity	1605
24.1 Special, Useful Methods	1605
24.1.1 Feynman Path integrals in GR (??)	1605
24.2 Some Generalizations of General Relativity	1606
24.2.1 Newton–Cartan Theory $R_{\mu\nu} = 4\pi G\rho\Psi_\mu\Psi_\nu$	1606
24.2.2 Brans-Dicke Theory	1606
VII Problems in Field Theory	1607
25 Special Relativity	1607
25.1 Typical Problems in SR	1607
25.1.1 Problems about Relativistic Lengths and Times	1607
25.1.2 Problems about Formalism of Relativity	1610
25.1.3 Problems about Details of Poincaré Group (!!??)	1611
25.1.4 Problems about Speeds, Time and Distances	1612
25.1.5 Problems about Physical Effects of Relativity	1621
25.2 General Questions about SR and the Poincaré Group	1624
25.2.1 Questions to Test Understanding of SR and the Poincaré Group	1624
25.2.2 Short questions about SR	1624
25.2.3 Philosophical Questions about SR	1624
25.2.4 Questions about Well-known Details of Relativity	1625
25.2.5 Questions about Other Details of Relativity and Consequences	1625
26 Free Fields	1625
26.1 Problems on General Properties of Fields	1625
26.1.1 Problems about Symmetries of Fields	1625
26.2 Properties of Free Fields	1625
26.2.1 Problems about Scalar Field	1625
26.2.2 Problems about Dirac Field (?)	1626
26.2.3 Problems about other spinor fields (?)	1626
26.2.4 Problems about Nonabelian Gauge Fields (?)	1626
26.2.5 Typical Problems about the Standard Model (?)	1626
26.3 General questions about free fields	1626
26.3.1 Quick questions to test your understanding of the formalism of field theory	1627
26.3.2 Вопросы об особенностях и деталях формализма теории поля	1627

26.3.3	Questions about Constructing Field Theories	1627
26.3.4	Typical Questions of Field Electrodynamics	1628
27	Gauge Fields	1630
27.1	Problems on Gauge Field Models	1630
27.1.1	Problems about Different Gauge-Field Models	1630
27.2	Problems on Special Fields and Rare Constructions	1631
27.2.1	Problems about Fields in Dimension $d < 3$	1631
27.2.2	Problems about Instantons, Monopoles, Solitons (???)	1631
27.2.3	Problems about Higher-Rank Tensor Fields (?)	1631
27.2.4	Problems about Field Theory in Curved Space (?)	1631
27.2.5	Problems about anomalies in field theory (???)	1631
28	Electrodynamics	1631
28.1	Formalism of electrodynamics	1631
28.1.1	Problems on the properties of Maxwell's equations (!?)	1631
28.1.2	Problems about the free electromagnetic field	1637
28.2	Typical effects	1640
28.2.1	Problems about the static electromagnetic field 1	1640
28.2.2	Problems about the static electromagnetic field 2	1643
28.2.3	Problems about the static electromagnetic field 3	1647
28.2.4	Problems about Radiation 1	1650
28.2.5	Problems about Radiation 2	1661
28.2.6	Problems about Electromagnetic Field of Relativistic Particles	1667
28.2.7	Problems about Scatterings 1	1674
28.2.8	Problems about Scatterings 2	1679
28.3	Specific Problems from Real Applications	1682
28.4	Specific Problems from Hypothetical Applications	1682
28.4.1	Some Problems on Nonstandard Constructions of Electrodynamics	1682
28.5	General Questions about ED	1682
28.5.1	Questions about Understanding Main Ideas of ED	1682
28.5.2	Short Questions for Testing Basic Knowledge of ED	1682
28.5.3	Questions for Testing Deep Knowledge of ED	1683
28.5.4	Problems on the Construction and Properties of Electrodynamics	1683
28.6	Specific Problems from Theoretical Research	1683
28.6.1	Typical Problems of Modified Theories of Electrodynamics	1683
29	Gravity [SEE NOTE ON GRAVITY FOR NOW]	1683
29.1	Typical Technical Questions about Gravity	1684
29.1.1	Problems about Particles in Gravity	1684
29.2	General Problems of Gravity	1684
29.2.1	Questions on Understanding the Nature of Gravity	1684
29.2.2	Typical Problems to Test Knowledge of Typical Gravity	1684
29.2.3	Questions on Understanding Details of GR	1684
29.2.4	Questions on Understanding Modifications of GR	1684
29.3	Some Other Problems of Gravity	1684
29.3.1	Typical Cosmology Problems	1684
29.3.2	Typical problems of modified gravity theories	1684
30	Other Problems and Questionss	1684
30.1	General Questions About Detail of Typical Field Theories	1684
30.1.1	Questions about Checking Basic Knowledge of Gauge Fields	1684
30.1.2	Questions about Checking Knowledge of Details of Gauge Fields	1685
30.2	Advanced Problems About Detail of Typical Field Theories	1685

30.2.1	Technical tasks for the Poincare Group	1685
30.2.2	Problems about Representations of the Poincare group	1685
30.2.3	Questions about rare constructions of the SR and the Poincare group (!?!?)	1685
30.2.4	Questions about Specific Details of Field Theories	1686
30.3	Special Problems about Mathematics for Field Theory	1687
30.3.1	Problems about Mathematics of Spinors	1687
30.3.2	Problems about the motion of a charged particle in fields	1687
VIII	— Special Field Theories in a Nutshell —	1688
31	Other Properties of Fields and Methods for Them, in a Nutshell	1688
31.1	Deeper understanding of the formalism	1688
31.1.1	Choice of Fields for Elementary Particles and Collective Phenomena	1688
31.1.2	Geometric Ideas in Field Theory	1689
31.1.3	General Properties and Meaning of Fields (!?!!)	1690
31.1.4	Stress–Energy Tensor, Energy, Momentum, and Conservation Laws (!!?)	1691
31.1.5	Unit Systems and Practical Applications of Field Theory (!!?)	1697
31.1.6	Quantum Corrections and Field Quantization (!!?)	1697
31.1.7	Typical Mathematics of and for Spinors, γ -matrices (!!?)	1698
31.1.8	General Properties of Spinors	1700
31.1.9	Typical Numerical Methods for Field-Theory Equations (!!!!)	1704
31.1.10	Some Physical ideas about fields (??)	1704
31.2	Other useful math tricks for analysis	1704
31.2.1	Differential Geometry, Vector Analysis for Field Theory (!?!!)	1704
31.2.2	Other mathematical Tricks For Gravity	1708
31.3	Special Spinors and Methods for Them (!?)	1709
31.3.1	Weyl, Majorana Spinors: Other Properties	1709
31.3.2	Spinors in D dimensions	1711
32	Electrodynamics, special relativity: other properties, methods, models	1714
32.1	Deeper Understanding of SR, the Poincaré Group (!?)	1714
32.1.1	Relativistic Mechanics, Effects, and Paradoxes of SR	1714
32.1.2	Other Effects in Scope of Special Relativity	1719
32.1.3	Spacetime Algebra (???)	1719
32.1.4	SUSY Poincare algebra (??)	1719
32.1.5	Philosophical Ideas about Time by Guts (??)	1720
32.1.6	Mathematical Ideas of Space-time by Guts (??)	1725
32.2	Deeper understanding of electrodynamics	1726
32.2.1	Other Typical Properties and Ideas of Other Electrodynamics Models	1726
32.2.2	Constants in Electrodynamics and Typical Values of Quantities	1727
32.2.3	Estimations in Electrodynamics	1728
32.2.4	Overview of Formalisms of Classical Electrodynamics	1728
32.2.5	Field Strengths, Currents, Energy, Potentials, Polarization	1729
32.3	Applications of electrodynamics	1735
32.3.1	Typical Models of Electromagnetic Field	1735
32.3.2	Details of the Electrodynamics of Continuous Media	1735
32.3.3	Creation of New Materials with Electrodynamics	1735
32.3.4	Geometric Optics, Diffraction, Dispersion	1735
32.4	Other Properties and Modifications of Electrodynamics	1736
32.4.1	More Precise Properties of Electrodynamics	1736
32.4.2	Chern-Simons Theory (!?)	1737
32.4.3	Born-Infeld Theory (!?)	1737
32.4.4	Overview of Modifications of QED	1737

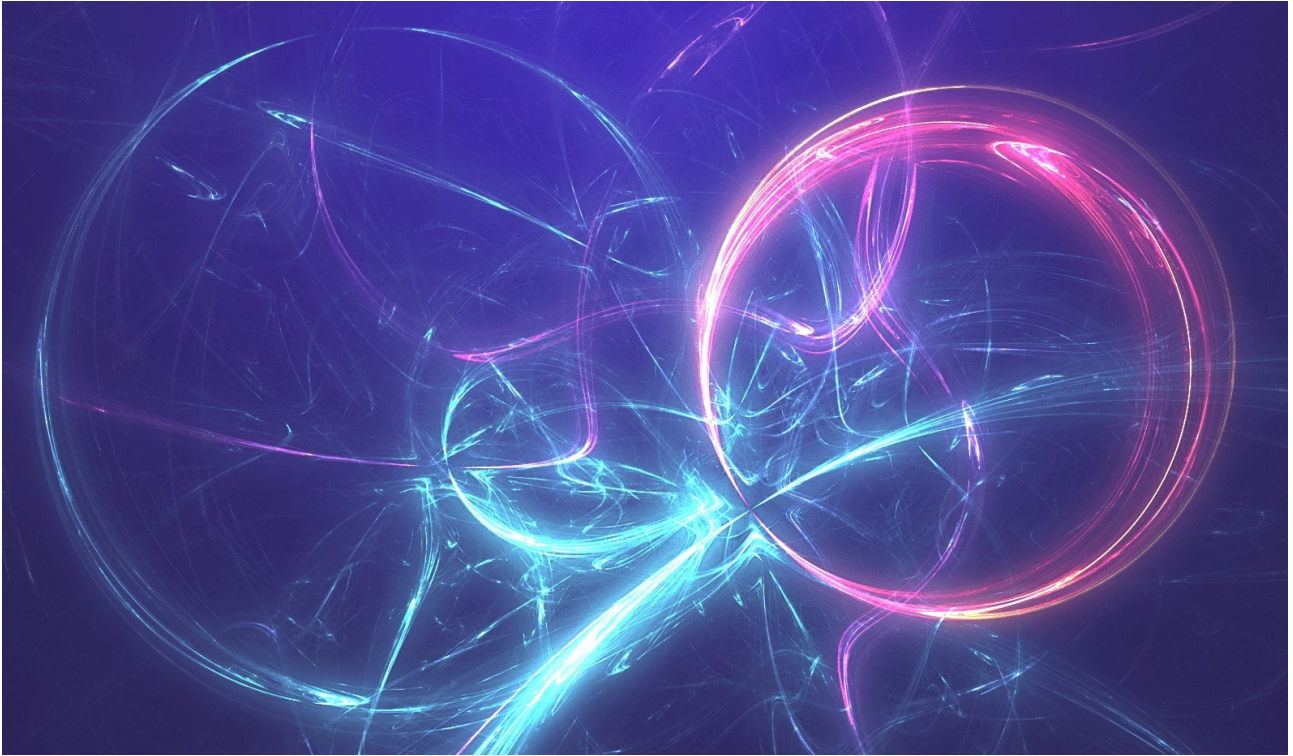
32.4.5	Some Models of QED	1737
32.4.6	Famous ideas about modifications of electrodynamics (!?)	1737
32.5	Special Properties of Fields	1738
32.5.1	Special Duality, Dimensional Reduction, etc. (!??!)	1738
32.5.2	Other consequences of Poincare group (???)	1738
32.5.3	Other Light Waves	1739
32.5.4	Wavefronts, Caustics, and Optics according to Arnold (???)	1739
33	Other Theories in a Nutshell	1739
33.1	On other fields	1739
33.1.1	Other Free Fields from Poincare Group (??)	1739
33.2	Non-abelian fields in a Nutshell	1742
33.2.1	Yang-Mills theory	1742
33.2.2	Non-abelian gauge symmetry in a nutshell (!?!?!?!?)	1743
33.2.3	Some Possible Interaction Between Fields	1743
33.3	Spin Models Using Field Theory	1744
33.3.1	О модели Изинга в теории поля	1744
33.4	On Main Gauge Fields, Special Classical Theories and Solutions	1744
33.4.1	Introducing Yang-Mills	1744
33.4.2	The Theta Term	1745
33.4.3	Instantons (!?!?!?)	1746
33.4.4	The Flow to Strong Coupling	1746
33.4.5	Electric Probes	1746
33.4.6	Magnetic Probes	1746
33.4.7	Dynamical Matter	1746
33.4.8	't Hooft-Polyakov Monopoles	1746
33.4.9	Instantons, Vortices, Dions, monopoles from Stepanyants (??)	1746
33.4.10	The Renormalisation Group	1747
33.4.11	Anomalies	1748
33.4.12	Lattice Gauge Theory	1748
33.4.13	Chiral Symmetry Breaking	1748
33.5	Continuous Symmetries (!?!?!?)	1749
33.5.1	O(N) Models by Tong	1749
33.5.2	Sigma Models by Tong	1749
33.5.3	The Kosterlitz-Thouless Transition by Tong	1749
33.6	Gravity: other important ideas and theories	1749
33.6.1	Other important gravitational laws and properties (!?!?!?)	1749
33.7	Special Constructions and Special Theories in a Very Nutshell	1749
33.7.1	Standard Model	1749
33.7.2	Supersymmetric Fields (??)	1750
33.7.3	string theory	1750
33.7.4	Modifications of General Relativity: An Overview	1751
33.7.5	Supergravity	1751
33.7.6	electrodynamics in a curved space-time	1751
33.7.7	General field theory in a curved space-time by Stepanyantz	1751
33.7.8	General field theory in a curved space-time by Proyen	1751
IX	Other Topics and Models	1752

34 Selected Topics of Particle and Field Dynamics	1752
34.1 Numerical Methods in Field Theory (!?)	1752
34.1.1 Overview of the Basic Numerical Methods for Maxwell's Equation	1752
34.1.2 Overview of Basic Numerical Methods for the Klein-Gorodon Equation	1752
34.1.3 Overview of Basic Numerical Methods for the Dirac Equation (!)	1752
34.1.4 Overview of Other Numerical Methods for Typical Field Theory	1752
34.2 Supersymmetric Fields (!?)	1752
34.3 Other Topics of Spinors and Spinor Representations	1752
34.4 Introduction to Conformal Field Theory	1752
34.5 Field Theory in Condensed Matter: An Overview	1752
34.6 Dynamics of Particles with Spin by Hriplovich	1753
34.6.1 Particles with Spin in a Nutshell	1753
34.6.2 Spin-Orbit Interaction	1753
34.6.3 Spin-Spin Interaction	1753
34.6.4 Precession of the orbit due to the rotation of the central body	1753
34.6.5 Equations of Spin Motion in an Electromagnetic Field	1753
34.6.6 Equations of Spin Motion in a Gravitational Field	1753
34.7 Spacetime algebra as a powerful tool for electromagnetism by Dressel, Bliokh, Nori . .	1753
34.7.1 Introduction	1754
34.7.2 A brief history of electromagnetic formalisms	1761
34.7.3 Spacetime algebra	1765
34.7.4 Spacetime calculus	1792
34.7.5 Maxwell's equation in vacuum	1796
34.7.6 Potential representations	1805
34.7.7 Maxwell's equation with sources	1813
34.7.8 Lagrangian formalism	1827
34.7.9 Conclusion	1848
35 Hypothetical Properties of Nature and Fields	1850
35.1 Supersymmetry, Supergravity	1850
35.2 Deeper Understanding of Time	1850
35.2.1 Overview of the Philosophies of Time	1850
35.2.2 Absolute World of Events	1850
35.2.3 Time and Topology of the Human Body	1850
35.2.4 Time Loops and a Time Machine in a Service Station	1850
35.2.5 Stochastic Properties of Time and Space	1851
35.2.6 Uncertainty Relation for Time and Space	1851
35.2.7 Stochastic Evolution of the Topology and Geometry of the Event World	1852
35.2.8 More About Gutz's Theory of Time	1852
35.2.9 Physical Models Without Time (??)	1853
35.2.10 Other about Time	1854
35.3 Chronogeometry According to A.K. Guts	1854
35.3.1 Overview and Prospects of Chronogeometry (???)	1854
35.3.2 Structure of the World of Events	1854
35.3.3 Causal Theory of the World of Events	1854
35.3.4 Interactive Theory of the World of Events	1854
35.3.5 Connected Relativistic Orders in An	1855
35.3.6 Disconnected Relativistic Orders in An	1855
35.3.7 Homogeneous Orders in A^n	1855
35.3.8 Connected Chronogeometry	1855
35.3.9 Other on Chronogeometry According to Guts	1855
35.4 Hypothetical Experiments and inventions in scope of SR	1857
35.4.1 Idea of a Photon Rocket	1857

36 Worldview Questions from the Point of View of Field Theory	1857
36.1 Physics of Reality, Classical Theory According to A.K. Guts	1857
36.1.1 Space, Time, and Space-Time	1857
36.1.2 Classical Logic and Classical Analysis	1857
36.1.3 Gravitational Field and Space-Time	1858
36.1.4 Exotic Smooth Spacetimes	1858
36.1.5 Jumps in the Dimension of Space and Time	1858
36.1.6 Gaps in Space and Wormholes	1858
36.1.7 Spring-Loaded Space-Time	1859
36.1.8 Topology of Godel's Universe	1859
36.1.9 Dynamics of Space Symmetries	1859
36.1.10 Anti-Gravity	1859
36.1.11 Ghosts and Shadow Particles of Deutsch	1859
36.1.12 Tetrad Theory of Gravity	1860
36.1.13 The Uncertainty Ratio for the Radius of the Universe	1860
36.1.14 Some Ideas of Quantum Gravity	1860
36.1.15 Some Ideas of Quantum Cosmology	1860
36.1.16 Quantum Creation of the Universe by Consciousness	1861
36.2 Physics of Reality, Classical Theory According to A.K. Guts	1861
36.2.1 Nonclassical Logic and Nonclassical Analysis	1861
36.2.2 Intuitionistic Theory of Gravity	1861
36.2.3 Elementary Toposes	1862
37 Other about Field Theory	1862
37.1 Selected Applications of Field Theory Except Electrodynamics	1862
37.2 History of the Creation of Field Theories	1862
37.2.1 History of Electrodynamics	1862
37.2.2 History of Development of Particle Physics and Theories of Interactions of Fields	1862
37.2.3 History of Attempts to Combine Electrodynamics and Gravity	1862
37.3 Unresolved Problems of Field Theory in 2023	1863
37.4 Possible Applications and Other Phenomena	1863
37.4.1 Some Strange Applications of Field Theory	1863
37.4.2 Some Other Hypothetical Fields	1863
37.5 Some Incorrect Theories	1863
37.5.1 Theory of Ether	1863
37.6 Other Philosophical Issues of Field Theory (?)	1863
37.7 Probably Indescribable Phenomena	1864
37.7.1 Field Theory for Dark Matter	1864
37.7.2 Field Theory in Esotericism	1864
X Appendix	1865
A Overview and Introduction	1865
A.1 Another motivation for field theory	1865
A.1.1 Another motivation for field theory in general	1865
A.1.2 Motivation for sections of field theory	1865
A.2 The mindset of professional in field theory	1866
A.2.1 General philosophy in field theory (!!?)	1867
A.2.2 What Happens in Field Theory	1869
A.2.3 How Not to Make Mistakes in Typical Field Theory Problems (!!?)	1871
A.2.4 An Effective Approach to Field Theory Problems (!!)	1871
A.2.5 Ways to Earn Money by Knowing Field Theory (!!)	1872
A.2.6 Ways to Guess the Main Ideas	1872

A.2.7	Which Topics There is a Real Sense To Study?	1872
A.2.8	How To Study Field Theory Effectively?	1873
A.2.9	How Some People See Field Theory	1874
A.3	Acknowledgements	1875
A.4	Literature	1875
A.4.1	Main Literature	1875
A.4.2	Professional Literature	1877
A.4.3	Extra, Pedagogical Literature	1882
A.4.4	Articles on Effects, Models, Special Sections	1883
A.5	A Review of Field Theory	1885
A.5.1	General Overview of Field Theory	1885
A.5.2	Review of Spacetime Theories	1887
A.5.3	Review of Classical Electrodynamics	1887
A.5.4	A Review of Special Field Models	1888
A.5.5	Connections of Field Theory with Other Sciences	1889
A.6	Description of the Note	1889
A.7	Puzzles for various cases	1892
A.7.1	Interesting questions about general field theory just for a nice chat	1892
A.7.2	Interesting questions about special field theories just for a nice chat	1892
A.7.3	Questions to check if a person knows field theory minimally or not?	1893
A.7.4	Questions to check if a person knows field theory professionally?	1893
A.7.5	Questions for those who say they know field theory, to show that it is not true	1893
A.7.6	Puzzles for learning typical concepts	1893
A.8	History of the Development of Field Theory in a Nutshell	1894
A.8.1	History of SR	1894
A.8.2	History of Electrodynamics	1894
A.8.3	About the history of gauge fields, QFT, particle physics	1894
A.8.4	History of other parts of field theory	1894
A.8.5	Biographical Notes about Field Theory Specialists	1894
B	Supplementary Information	1896
B.1	Some Mathematics for Assistance	1896
B.1.1	Vector and Tensor Analysis for Field Theory	1896
B.1.2	Some Differential Geometry	1920
B.1.3	Some PDE	1941
B.2	Some Physics for Assistance	1955
C	Bibliography	1957

Preface and main motivation



Flat Space-Time

Formalism, Fields

Gauge Fields and Special Models

Field Electrodynamics

Typical Gravity

Other Topics and Models

I used the following [literature](#).

Let's discuss some minimum knowledge and motivation that would be good to understand for studying field theory.

Idea of the note in a nutshell

(I'll write very shortly the main idea of this approach later)

В рамках теории поля можно узнать настоящую природу мира глубже, чем в каком угодно предмете, которым можно заняться без подготовки

(Раскрою тут потом, что СТО такая фундаментальная, а другие предметы - там или подготовка по математике нужна, или какие-то другие разделы физики, или очень много моделей, которые что-то говорят, но чтобы понять суть, нужно еще очень много думать про теорию (квантмех))

Теория поля открывает двери в КТП, калибровочные поля, электродинамику сплошных сред и многое другое

Это лишь основные предметы, полный список занял бы минимум половину страницы. Так что вот, можно и заниматься сложными, современными предметами и их понимать, что очень круто. И всего лишь для этого нужно один пройти предмет: теорию поля. Хотя, потом и другие предметы нужно тоже пройти будет, но теория поля для многих предметов - главная.

Можно описывать многие явления

(соберу их тут список, пока не до этого, итак ведь многое решаем мы. пара мотивирующих абзацев будет.)

Очень многие явления станут понятны.

Результаты теории поля

(потом сформулирую, пока не готов писать нормально)

Лучшие идейные головоломки

Тут я приведу одни из лучших вопросов и головоломок, которые мотивируют учить теорию поля. Предлагается над ними подумать, и не читать сразу указания для решения!

О парадоксе близнецов

(приведу потом, а также короткий ответ и другие вопросы для мотивации)

Some instructions

(напишу вопросы)

Лучшие технические головоломки

Тут я приведу одни из технических задач, которые мотивируют учить теорию поля. Предлагается над ними подумать, и не читать сразу указания для решения!

m-te.1 Просто движущийся заряд

Определить напряженности электрического и магнитного поля произвольно движущегося заряда.

Some instructions

(тут не все так просто, напишу потом что-то. формулы большие получаются, да и вообще усвоить тему нужно хорошо, только тогда будешь воспроизводить это.)

m-te.2 А где центр?

(про центр инерции, стр 220 ЛЛ2 или в гравитации тоже про это)

Some instructions

(укажу, что целая куча тут проблем, если в рел случае, если в поле, если в гравитации. так полностью еще не разобрался..)

m-te.2 Лагранжиан с корнем

(приведу эту задачу про Б-И)

Some instructions

(казалось бы, все просто? а нет, тут неведомо особое варьирование нужно знать. как-то что-то укажу про это.)

Part I

Typical Field Theory in a Nutshell

1 Basic Constructions of Field Theory

1.1 Free fields in a nutshell

1.1.1 Vector field: Basics

Об уравнениях Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathcal{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \end{cases} \quad (\text{no source}) \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (\text{with source})$$

$$\mathbf{E} := -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \qquad \mathbf{H} := \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

Constant fields: $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$.

Constant homogeneous fields:

$$\varphi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}, \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H} \mathbf{r}],$$

это доказывается проверкой через формулу $\operatorname{rot}[A, B]$ (??).

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \qquad \left(\frac{1}{2} e^{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0 \quad \forall i \right)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu,$$

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - ie [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \equiv -\frac{i}{e} [\nabla_\mu, \nabla_\nu], \qquad i\nabla_\mu := i\partial_\mu - e\mathcal{A}_\mu$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\mu'\nu'} F_{\mu'\nu'}.$$

$$\mathcal{E}_\alpha^{\mathbb{E}} = F_{0\alpha}$$

$$\mathcal{B}: F_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}} \mathcal{B}_{\mathbb{E}}^\gamma.$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} \equiv 0, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} e^{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0 \quad \forall i,$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G^{\rho\sigma} := 2 \frac{\partial L}{\partial F^{\mu\nu}}:$$

$$\partial^\mu \tilde{G}_{\mu\nu}^a = 0.$$

$$\text{Proof: } 0 \equiv \frac{\delta S}{\delta A^\mu} = \int \frac{\delta F^{\mu\nu}}{\delta A^\mu} \frac{\delta S}{\delta F^{\mu\nu}} = \int \partial_\nu \tilde{G}_{\mu\nu}. \quad (?!?!?)$$

$$d \star F = \frac{4\pi}{c} \star j,$$

$$dF = 0$$

(?!?!????!!)

$$S = S_f + S_m + S_{mf}:$$

$$S_{\text{em-f}} = a \int F_{ik} F^{ik} d^4x \equiv -2a \iint (E^2 - H^2) dV dt, \quad a_g = -\frac{1}{16\pi}, \quad a_{\text{hvs}} = -\frac{1}{4},$$

$$S_{\text{f,prtcl}} = - \sum \int \frac{e}{c} A_k dx^k \quad S_{\text{f,curnt}} = -\frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega.$$

Можно рассмотреть действие как функционал от двух полей: тензорного поля $F_{\mu\nu} := \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$ и 4-векторного поля $\mathcal{A}_\mu$:

$$S = \frac{1}{16\pi c} \int d^4x \{ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2F^{\mu\nu} (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) x \} - \frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu(x) \mathcal{A}_\mu(x),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\frac{1}{c^2} j^\nu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \mathcal{A}_\nu} = -\frac{2}{16\pi c} 2F^{\mu\nu} \quad (F^{\mu\nu} \partial_\nu \mathcal{A}_\mu = -F^{\mu\nu} \partial_\mu \mathcal{A}_\nu \Rightarrow 2),$$

so again $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

(?!!)

О типичных решениях уравнений Максвелла

Свободные колебания

$$\hat{\mathcal{A}}_\perp^\nu(x) = \int \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} \left\{ e^{-ik \cdot x} \epsilon_\lambda^\nu(\mathbf{k}) \mathbf{a}_\lambda(\mathbf{k}) + e^{ik \cdot x} \epsilon_\lambda^{*\nu}(\mathbf{k}) \mathbf{a}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \right\},$$

$$\mathcal{E}(x) = -\partial_0 \mathcal{A}(x) = \int \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} i k_0 \left\{ e^{-ik \cdot x} \boldsymbol{\epsilon}_\lambda(\mathbf{k}) \mathbf{a}_\lambda(\mathbf{k}) - e^{ik \cdot x} \boldsymbol{\epsilon}_\lambda^*(\mathbf{k}) \mathbf{a}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \right\}$$

$$p^2 \mathcal{A}_\perp^\nu(x) = 0, \quad \mathcal{A}_\perp^\nu(x) = \left(g^{\nu\mu} - \frac{p^\nu p^\mu}{p^2} \right) \mathcal{A}_\mu(x)$$

$$P^{\mu\nu} := g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}, \quad P^{\mu\nu} P_\nu^\rho = P^{\mu\rho}.$$

$$S_{\text{g.f.}} = -\frac{1}{2c\hbar^2} \int d^4x \mathcal{A}_\perp^\nu(x) p^2 \mathcal{A}_{\perp,\nu}(x) \equiv -\frac{1}{2c} \int d^4x \partial^\mu \mathcal{A}^\nu (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu),$$

Вынужденные колебания

$$\mathcal{A}^\nu(\omega, \mathbf{k}) = k^\nu f + \mathcal{A}_{\text{free}}^\nu(\omega, k) + \frac{4\pi}{c} \mathcal{P}^{\mu\nu} j_\mu(\omega, \mathbf{k}) \frac{1}{k^2}.$$

$$\epsilon_\lambda^*(\mathbf{k}) = \epsilon_\lambda(-\mathbf{k}), \quad a_\lambda^*(\mathbf{k}) = a_\lambda(-\mathbf{k})$$

Это следует из $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$, или $\partial_\mu (\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu) = -\partial^2 (-g^{\mu\nu} + \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\partial^2}) \mathcal{A}_\mu = \frac{4\pi}{c} j^\nu$
 деление на производную - лишь удобная запись, все равно в Фурье потом перейдем.

Решаем по Фурье:

$$\mathcal{A}_\mu(t, \mathbf{r}) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \mathcal{A}_\mu(\omega, \mathbf{k})$$

$$i\partial_\mu = k_\mu = (\omega/c, \mathbf{k}),$$

$$k^2 \mathcal{P}^{\mu\nu}(k) \mathcal{A}_\mu(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi}{c} j^\nu(\omega, \mathbf{k}),$$

(??? фурье оператора на функцию это что ли просто переписывание его в пространстве фурье? додумая это свойство!) проектор $\mathcal{P}^{\mu\nu}$ имеет свойства

$$\mathcal{P}^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}, \quad -\mathcal{P}^{\mu\nu} \cdot (-\mathcal{P}_\nu^{\mu'}) = -\mathcal{P}^{\mu\mu'}, \quad k_\mu \mathcal{P}^{\mu\nu} = 0$$

(?? откуда эти свойства??)

(???) Продольная компонента - это отражение калибровочной свободы в выборе решения, так как $k_\mu f \mapsto i\partial_\mu f$, что есть просто градиентное преобразование 4-потенциала.

Вынужденные колебания, то есть член с током, требует осторожного обращения, поскольку содержит явную сингулярность при $k^2 = 0$, и с этим мы разберемся чуть позже.

Для свободных волн при (????) $j^\mu \equiv 0$ условимся, что продольная компонента поля равна нулю: $k^\mu \mathcal{A}_\mu = 0$. Скалярный потенциал не распространяется, положи его нулем $\mathcal{A}_0 \equiv 0$, тогда зануление продольной компоненты:

$$\mathbf{k} \cdot \mathcal{A} = 0 \quad \text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (\text{Coulomb gauge})$$

Остается ненулевое двухкомпонентное векторное поле евклидова пространства, ортогональное волновому вектору $k : \mathcal{A}_{\text{free}}^\nu \mapsto \mathcal{A}_\perp$, причем

$$k^2 \mathcal{A}_\perp = 0$$

Значит, при $k^2 \neq 0$ это поле тождественно обращается в нуль, т.е. для ненулевого свободного поля имеет место связь $k^2 = 0 \mapsto k_0^2 = k^2$, и следовательно, имеет место суперпозиция волн с амплитудами a :

$$\mathcal{A}_\perp = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2) \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\lambda(k) a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx}, \quad \epsilon_\lambda : \quad k \cdot \epsilon_\lambda = 0, \quad \epsilon_\lambda \cdot \epsilon_{\lambda'}^* = \delta_{\lambda\lambda'}$$

δ -функция снимается интегрированием по k_0 :
 $\int dk_0 \delta(k_0^2 - \mathbf{k}^2) = \int \frac{dk_0}{2k} \{ \delta(k_0 - k) + \delta(k_0 + k) \}$, в итоге,

$$\mathcal{A}_\perp = \sum_\lambda \int \frac{d^3 k}{2k(2\pi)^3} \{ \epsilon_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \epsilon_\lambda^*(\mathbf{k}) a_\lambda^*(\mathbf{k}) e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \}, \quad \omega = ck$$

условие вещественности поля выполняется при

$$\epsilon_\lambda^*(\mathbf{k}) = \epsilon_\lambda(-\mathbf{k}), \quad a_\lambda^*(\mathbf{k}) = a_\lambda(-\mathbf{k})$$

Поскольку

$$\mathcal{H} = \text{rot } \mathcal{A} \mapsto ik \times \epsilon, \quad \mathcal{E} \mapsto -\partial_0 \mathcal{A} \mapsto ik\epsilon$$

а значит,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{k} k \times \mathcal{E}$$

Действие, лагранжиан, гамильтониан, ТЭИ электромагнитного поля

Типичные свойства электродинамики

$$: H := \int d^3x : \mathcal{E}(x) \mathcal{E}^\dagger(x) := \int \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} k_0 \mathbf{a}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \mathbf{a}_\lambda(\mathbf{k})$$

(откуда формула??? почему упорядочение???) если учесть ортонормированность векторов поляризации

$$\epsilon_\lambda \cdot \epsilon_{\lambda'}^* = \delta_{\lambda\lambda'}$$

(тут абзац про ТЭИ ЭМ поля, какой он и почему?? укажу четко! в теории тоже подробно напишу, пока не дошел еще)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$$

Первая пара уравнений Максвелла быть решена введением φ и $\mathbf{A}$, которые по определению такие, что

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi$$

Мы можем калибровать:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \alpha; \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

О ТЭИ фотона (?????)

(?? почему??) Тензор энергии-импульса электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси x^1 и поляризованной в плоскости (x^1, x^2) :

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} S & S & 0 & 0 \\ S & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = E_0^2 \cos^2 \omega x^-$$

О границах применимости уравнений Максвелла (!?)

(потом напишу, пока не готов писать.)

О поляризациях

Часто есть хаотическая поляризация естественного света, когда в среднем

$$\langle a_\lambda a_{\lambda'} \rangle = a^2 \delta_{\lambda\lambda'}$$

Линейная поляризация: $\arg a_1 = \arg a_2 + \pi n$,

Круговая поляризация: $\arg a_1 = \arg a_2 + (2n+1)\frac{\pi}{2}, |a_1| = |a_2|$

Эллиптическая поляризация: $\arg a_1 \neq \arg a_2 + \pi n, |a_1| \neq |a_2|$.

Об уравнении непрерывности, энергии (!??)

(пока тут об этом!)

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$$

$$e\mathbf{v}\mathbf{E} = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{kin}}.$$

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \quad (\text{energy per unit volume})$$

Изменение полной энергии равно интегралу по поверхности от вектора Пойтинга:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{кин}} \right\} = - \oint \mathbf{S} d\mathbf{f}$$

Уравнение непрерывности говорит о сохранении заряда:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{f}.$$

Через теорему Гаусса $\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \mathbf{j} d\mathbf{f} = - \oint \mathbf{j} d\mathbf{f} = \int \text{div } \mathbf{j} dV$, получаем

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Плотность в виде $\rho = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$ автоматически удовлетворяет уравнению непрерывности.Благодаря уравнению непрерывности можно делать калибровки вида $A_i \rightarrow A_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}$, потому что за счет него лишнее будет сокращаться после теоремы Гаусса.

(тут через ТЭИ по Киселеву напишу)

О пропагаторе фотона

(в КТП еще подробнее будет обсуждаться это.)

О решении в виде волн (??)**Колебания электромагнитного поля в ящике**

$$A_\mu = \sum_{\mathbf{k}, a} \frac{1}{\sqrt{2L^3\omega_{\mathbf{k}}}} \left(e_{\mathbf{k}, \mu}^{(a)} a_{\mathbf{k}, a} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + e_{\mathbf{k}, \mu}^{(a)*} a_{\mathbf{k}, a}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right)$$

 $a_{\mathbf{k}, a} \in \mathfrak{R}$, $a \in \{1, 2\}$ и $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2} = |\mathbf{k}|$.Через $a_{\mathbf{k}, \pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\mathbf{k}, 1} \mp i a_{\mathbf{k}, 2})$; $e_{\mathbf{k}, \mu}^{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{\mathbf{k}, \mu}^{(1)} \pm i e_{\mathbf{k}, \mu}^{(2)})$

$$A_\mu = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2L^3\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\left(e_{\mathbf{k}, \mu}^{(+)} a_{\mathbf{k}, +} + e_{\mathbf{k}, \mu}^{(-)} a_{\mathbf{k}, -} \right) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \text{к.с.} \right).$$

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}, +}^* a_{\mathbf{k}, +} + a_{\mathbf{k}, -}^* a_{\mathbf{k}, -});$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (a_{\mathbf{k}, +}^* a_{\mathbf{k}, +} + a_{\mathbf{k}, -}^* a_{\mathbf{k}, -})$$

$$\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{n} (a_{\mathbf{k},+}^* a_{\mathbf{k},+} - a_{\mathbf{k},-}^* a_{\mathbf{k},-})$$

$\mathbf{n}$ - единичный вектор, направленный вдоль импульса волны. Поэтому состояния с $a_{\mathbf{k},+}$, имеют спин 1, направленный вдоль импульса (спиральность 1), а состояния, которые соответствуют $a_{\mathbf{k},-}$, имеют спин -1, направленный против импульса (спиральность -1). Состояния со спиральностью, равной 0, в данном случае отсутствуют.

(про это отдельно в другом месте напишу)

О групповых свойствах векторного поля и их следствиях

Основное уравнение безмассового векторного поля:

$$\frac{1}{\hbar} W^\nu = \mathfrak{s} p^\nu$$

or in components:

$$\frac{1}{\hbar} W_0 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{s},$$

$$\frac{1}{\hbar} \mathbf{W} = p_0 \mathbf{s} - \text{sign}(\mathfrak{s}) i (\mathbf{p} \times \mathbf{s})$$

(напишу текстом, откуда оно получается???)

Поэтому

$$p^\nu \mathcal{A} = \lambda \frac{1}{\hbar} W^\nu \mathcal{A},$$

or in components:

$$p_0 \mathcal{A}_{\mathbb{E}}^\beta = \lambda (\mathbf{p}_{\mathbb{E}} \cdot \mathbf{s}_{\mathbb{E}})^{\beta\gamma} \mathcal{A}_{\mathbb{E}}^\gamma,$$

$$p_{\mathbb{E}}^\alpha \mathcal{A}_{\mathbb{E}}^\beta = \lambda p_0 (s_{\mathbb{E}}^\alpha)^{\beta\gamma} \mathcal{A}_{\mathbb{E}}^\gamma - i \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta'\gamma'} p^{\beta'} (s_{\mathbb{E}}^{\gamma'})^{\beta\gamma} \mathcal{A}_{\mathbb{E}}^\gamma.$$

(?? лямбда во втором почему только на 1 множитель умножается??? нужно переучивать!)
(далее пара шагов, которые позже напишу.)

Об уравнениях для фотонов

(очень важный раздел, очень много в теорфизе этим разделом и дается. Это же в КТП и подробнее, тут итог обсуждаю!!!)

(эта теория в КЭД волноводов будет использована!)

О другом теоретическом про электромагнитное поле

О лоренц-инвариантности

В произвольной ИСО

$$\mathcal{A}'_\nu(x') = (\Lambda^{-1})^\mu_{\bullet\nu} \mathcal{A}_\mu(x)$$

И также

$$k_\nu \mathcal{A}^\nu = k_0 \mathcal{A}_0 - \mathbf{k} \cdot \mathcal{A} = 0$$

$$\mathcal{A}'_0 = \frac{\mathbf{k}' \cdot \mathcal{A}'}{k'_0}$$

$k'_0 = |\mathbf{k}'|$, так что

$$\mathcal{A}'_\nu = k'_\nu \frac{\mathbf{k}' \cdot \mathcal{A}'}{(k'_0)^2} + \mathcal{A}'_\nu^\perp,$$

$$\mathcal{A}'_0^\perp \equiv 0, \quad \mathbf{k}' \cdot \mathcal{A}'_\perp = 0.$$

1.1.2 Vector field: Typical Models

Вся электродинамика может быть описана как раздел физики про модели с безмассовым векторным полем. Однако есть и чисто теоретические модели, некоторые из них укажем тут.

(задачи порешаю - точно буду понимать, что сюда писать.)

1.1.3 Scalar field: Basics

Основные свойства скалярного поля

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \nabla^2 \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi &= 0, & \text{comes from } E^2 &= p^2 c^2 + m^2 c^4, & E &:= i\hbar \frac{\partial}{\partial t}; & p_\nu &:= i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\
 \square \varphi(x) + m^2 \varphi(x) &= 0, & x &:= (ct, \mathbf{r}), & \square &\equiv \partial_\mu \partial^\mu, & \eta &= (+, -, -, -), \quad \hbar = 1, c = 1; \\
 \square \varphi(x) - m^2 \varphi(x) &= 0, & & & & & \eta &= (-, +, +, +), \quad \hbar = 1, c = 1; \\
 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \omega_0^2 \phi &= 0, & \omega_0^2 &:= \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}, & & & \eta &= (+, -, -, -); \\
 (p^2 - m^2 c^2) \varphi(x) &= 0. & p_\nu &:= i\hbar \partial_\nu, & & & \eta &= (+, -, -, -); \quad \hbar = 1, c = 1; \\
 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{p}^2 + m^2) \right) \phi(\vec{p}, t) &= 0 \\
 \begin{cases} \psi'_E = \chi_E, \\ \chi'_E = -\{[E - U(x)]^2 - m^2\} \psi_E(x), \end{cases} & \Psi_E(x, t) = e^{-iEt} \Psi_E(x), & \Psi_E(x) &\equiv \begin{pmatrix} \psi_E(x) \\ \chi_E(x) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p^2 &:= p_\nu p^\nu, & p_\nu &\equiv i\hbar \partial_\nu, & p_\mu &= i\hbar \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), & p^\mu &= i\hbar \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x^i} \right) & \eta &= (+, -, -, -), \\
 \mathbf{k} &:= \mathbf{p}/\hbar;
 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{E}{\hbar} \right] = \left[\frac{mc^2}{\hbar} \right] = \left[\frac{1}{t} \right], \quad [p] = [mc]$$

Само скалярное поле - физически это ничто (??? не материя), но она связана с амплитудой вероятности частицы находиться в некоторой координате ((??????? перепишу это!!!!)). Математически - это гладкая функция, которая уравнению Клейна-Гордона и/или заданным удовлетворяет граничным условиям или обнуляется на бесконечности. Чаще всего подразумевают, что у нас комплексное поле, но можно рассмотреть и вещественное. Физически это функция, комплексное сопряжение которой это амплитуда вероятности частицы быть в данной точке, что из-за того, что она должна быть пропорциональна $\exp(-iEt)$ (??? еще мб детали допишу!).

(Абзац об эквивалентности скалярного поля и осцилляторов. важно! почему так вообще???)

Частные случаи скалярного поля и другие свойства для приложений

О комплексном скалярном поле

Комплексное поле это два вещественных поля с одинаковой массой: $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2)$, так что $\phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2)$,

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2} m^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) \right\} \\ &= \int d^4x \{ \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \} \equiv \int d^4x \{ (i\partial_\mu \Phi)^* i\partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi \} = \int d^4x \{ \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi \} \\ &= \int d^4x \Phi^*(x) (\hat{p}^2 - m^2) \Phi(x), \end{aligned}$$

Сразу с помощью Эйлера-Лагранжа $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*}$ составляем $(\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2) \phi = 0$ и решаем его по Фурье:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \{ a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_c^*(\mathbf{k}) e^{ikx} \},$$

$k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = m^2$. Это так называемое разложение по модам.

Гамильтониан по $H \equiv \int d^3r \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \partial_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi^*)} \partial_0 \phi^* - \mathcal{L} \right\}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3r \{ \partial_0 \phi^* \partial_0 \phi + \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi \} = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_0 \{ a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + a_c^*(\mathbf{k}) a_c(\mathbf{k}) \}, \end{aligned}$$

последний переход произошел с помощью подстановки поля через моды и скалярных преобразований.

(? еще раз все это сделаю!)

Определяем

$$N(\mathbf{k}) := a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}), \quad N_c(\mathbf{k}) := a_c^*(\mathbf{k}) a_c(\mathbf{k}).$$

Тензор энергии-импульса $T_\mu^\nu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi} \partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi^*} \partial_\mu \phi^* - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}$:

$$T_\mu^\nu = \partial^\nu \phi^* \partial_\mu \phi + \partial^\nu \phi \partial_\mu \phi^* - \delta_\mu^\nu \{ \partial_{\mu'} \phi^* \partial^{\mu'} \phi - m^2 \phi^* \phi \}$$

И для $\phi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e^{\mp i k x}$, $\partial^\alpha = -\nabla_\alpha$

$$T_0^0 \mapsto k_0, \quad T_0^\alpha \mapsto \mathbf{k},$$

Ток (!!! тут про локальные калибровочные преобразования!!!) $j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial u}$:

$$j^\mu = ie \{ \phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^* \}$$

$$\partial_\mu = e (\Phi^* i \partial_\mu \Phi + (i \partial_\mu \Phi)^* \Phi) = ie (\Phi^* \partial_\mu \Phi - (\partial_\mu \Phi)^* \Phi).$$

Для $\phi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e^{\mp i k x}$, $\partial^\alpha = -\nabla_\alpha$

$$j^0 \mapsto \pm e, \quad j^\alpha \mapsto \pm e \mathbf{k},$$

$$J^\mu = i\hbar c^2 (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$$

$$\rho = i\hbar \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \quad \mathbf{J} = -i\hbar c^2 (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)$$

$$Q = i \int d\mathbf{x} (\pi \phi - \phi^* \pi^*) = \int d\mathbf{p} (b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}})$$

Example. Now suppose we have two complex scalar fields ϕ_a of equal mass. Then we have a $U(2)$ symmetry, with the generators of the $SU(2)$ part being

$$Q^i = i \int d\mathbf{x} (\pi_a \sigma_{ab}^i \phi_b - \phi_a^* \sigma_{ab}^i \pi_b^*)$$

$$Q = i \int d^3x \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi,$$

i makes Q real.

$$Q \equiv \int d^3r j^0:$$

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e \{ a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) - a_c^*(\mathbf{k}) a_c(\mathbf{k}) \}.$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Using the four-vector notation, $j^\mu \equiv (j^0, \vec{j}) \equiv (c\rho, \vec{j})$, we can write the continuity equation in the more compact form:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial \cdot j = 0.$$

Integrating the position probability density over a volume, V , large enough to contain all the probability, and using the divergence theorem, we write

$$\int_V d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_V \rho d^3x = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3x = - \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S},$$

(также про симметрии есть темы, но пока не до них, не думаю, что они важные.)

Гамильтониан $H := \phi \dot{\phi} - L$ или из $H := \int d^3x T^{00}$:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3r \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}^2 + (\nabla \varphi)^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi^2 \right\}. \quad \frac{\text{energy}}{c^2}$$

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \omega_p [a(\mathbf{p}) a^*(\mathbf{p}) + a^*(\mathbf{p}) a(\mathbf{p})] \quad \text{моды, нерел. норм.}$$

(? важный комментарий, почему там иногда делят на омегу, а иногда нет??? додумаю!!!)

(!!! тут проблема, что есть разные выражения для тока, додумаю их потом, выведу сам!!!)

Compare with Schrödinger current $\mathbf{J}^S = -\frac{i\hbar}{2m} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) = \frac{1}{2mc^2} \mathbf{J}^{\text{KG}}$, which thus has in fact E/mc^2 particles per unit volume (????).

(абзац про связь с ур Дир и ур Шр!!!!)

О вещественном скалярном поле

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}((\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2) \equiv \frac{1}{2}((\partial_t \phi(x))^2 - (\partial_x \phi(x))^2 - m^2 \phi^2(x)). \quad \left(\frac{1}{2} - \text{кв. норм.}\right)$$

$$S[\phi] = \frac{1}{2c\hbar^2} \int d^4x \phi(x) (p^2 - m^2 c^2) \phi(x) \stackrel{\text{int by p}}{\equiv} \frac{1}{2c} \int d^{d-1}x (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi(x) - \omega_0^2 \phi^2(x))$$

(??? что с константами перед интегралом тут???)

Решаем КГ по Фурье: $\phi(x) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ix^\mu k_\mu} \tilde{\phi}(k)$, решение: $\tilde{\phi}(k) = \delta(k_\mu^2 - m^2) \phi(k)$, $\phi(k)$ - вообще любая функция 4-вектора k , поэтому

$$\phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ix^\mu k_\mu} \delta(k^2 - m^2) \phi(k).$$

$$k_\mu^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = m^2, \quad \delta\left(k^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) = \frac{1}{2|k_0|} \left\{ \delta\left(k_0 - \frac{\omega}{c}\right) + \delta\left(k_0 + \frac{\omega}{c}\right) \right\},$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar \quad \omega := \frac{c}{\hbar} \sqrt{m^2 c^2 + \hbar^2 \mathbf{k}^2} > 0.$$

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{c d^3k}{2\omega(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left\{ \alpha(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t} + \beta(\omega, \mathbf{k}) e^{i\omega t} \right\}.$$

Это решение - сложный вид (т.н. разложение по модам) простой функции, которая удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона. Функции $\alpha(\omega, \mathbf{k})$ и $\beta(\omega, \mathbf{k})$ - по сути почти любые функции, по определению получаемые из домножения дельта-функциями на $\phi(k)$. Для плоской волны у нас $\alpha(\omega, \mathbf{k}) \equiv 1$, поэтому и квантовать удобно в такой форме.

Вещественность $\varphi(t, \mathbf{r}) \equiv \varphi^*(t, \mathbf{r}) \equiv \int \frac{c d^3k}{2\omega(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left\{ \alpha^*(\omega, \mathbf{k}) e^{i\omega t} + \beta^*(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t} \right\}$, дает

$$\beta(\omega, \mathbf{k}) = \alpha^*(\omega, -\mathbf{k}). \quad (\text{"-" fr change int dir, rewr like before})$$

Если ввести моды $\varphi(x) \equiv \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x)$, где $\varphi^{(\pm)}(t, \mathbf{r}) := \int \frac{c d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \alpha(\pm\omega, \pm\mathbf{k}) e^{\mp i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$, то вещественность это

$$\alpha(-\omega, -\mathbf{k}) = \alpha^*(\omega, \mathbf{k})$$

(тут формулы квантования осциллятора, короткая суть Тонга)

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[a_{\vec{p}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right]$$

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left[a_{\vec{p}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right]$$

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] &= [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0 \\ [\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}^\dagger] = 0 \\ [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left[a_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left[a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \right] \end{aligned}$$

(абзац про связь с комплексным полем, там куча всяких нюансов появляется!!! это что ли еще нерел. поле???)

(еще потом формулы про вещь ск поле)

О скалярном поле в ящике с периодическими граничными условиями

$$\phi = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2L^3\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}})$$

Тогда, по теореме Нетер

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*); \quad \mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*); \quad q = -e \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} - b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*),$$

То есть мы просто суммируем энергию, импульсы, заряды квантов, используя то, что $|a_{\mathbf{k}}|^2$ или $|b_{\mathbf{k}}|^2$ - вероятности того, что частица или античастица соответственно находятся в состоянии с импульсом $\mathbf{k}$.

Для вещественного поля $\phi = \phi^*$ имеем $a_{\mathbf{k}} = b_{\mathbf{k}}$, и $\phi = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2L^3\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}})$ и

$$E = \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}; \quad \mathbf{P} = \mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}; \quad q = 0.$$

(?? 2 где???)

Можно поставить двум решениям в соответствие частицу и античастицу: $\phi(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{\sqrt{2L^3\omega_{\mathbf{k}}}} a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}$, $\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2L^3\omega_{\mathbf{k}}}} b_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}}$, $a_{\mathbf{k}}$ и $b_{\mathbf{k}}$ - некоторые постоянные, $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, ну и отдельно для них записать те же формулы..

Нерелятивистский предел скалярного поля и скалярном электроны ($q = -e$)

$$(\partial^2 + m^2) \phi = 0 \quad \phi \equiv e^{-imt} \chi / \sqrt{2m}$$

$$i\dot{\chi} = \frac{\ddot{\chi} - \nabla^2 \chi}{2m}.$$

Noting that $\ddot{\chi}/m \ll \dot{\chi}$, since the field is nonrelativistic, we recover the Schrodinger equation. Similarly, we can go from the Klein-Gordon Lagrangian to the Schrodinger Lagrangian,

$$\mathcal{L} = i\chi^* \dot{\chi} - \frac{1}{2m} \nabla \chi^* \cdot \nabla \chi$$

$$\pi = i\chi^*, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2m} \nabla \chi^* \cdot \nabla \chi, \quad [\chi(\mathbf{x}), \chi^\dagger(\mathbf{y})] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

(!!!!!!!!!!!!!! соединю с теорией Киселева, она очень хорошо написана и очень важная, пропишу потом!!!!!! скоро очень уже!!!!)

(видимо, e - именно положительный заряд тут имеется в виду)

$$i\partial_t \psi_+ = \left(\frac{1}{2m} (-i\nabla - e\mathcal{A})^2 + e\mathcal{A}_0 \right) \psi_+,$$

$$\hat{\mathcal{P}} = -i\nabla - e\mathcal{A}$$

$$\hat{H}_e = \frac{\hat{\mathcal{P}}^2}{2m} + e\mathcal{A}_0,$$

$$\psi_e^{\text{NR}} = \psi_+ \approx e^{imt} \sqrt{2m} \Phi(x)$$

$$i\partial_t \psi_e^{\text{NR}} = \hat{H}_e \psi_e^{\text{NR}}.$$

Вариация нерелятивистского действия (I.4.1) по ψ_-^* приводит к уравнению

$$-i\partial_t\psi_- = \left(\frac{1}{2m}(-i\nabla - e\mathcal{A})^2 - e\mathcal{A}_0 \right) \psi_-,$$

которое не совпадает с уравнением Шрёдингера для волновой функции, так как имеет неверный знак в левой части! Однако комплексное сопряжение этого уравнения дает

$$i\partial_t\psi_-^* = \left(\frac{1}{2m}(-i\nabla + e\mathcal{A})^2 - e\mathcal{A}_0 \right) \psi_-^*,$$

что следует интерпретировать как уравнение Шрёдингера для волновой функции

$$\psi_{-e}^{\text{NR}} = \psi_-^* \approx e^{imt} \sqrt{2m} \Phi^*(x),$$

которая описывает нерелятивистскую частицу с зарядом $-e$ в электромагнитном поле.

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2m}} e^{-imt} \psi_e^{\text{NR}}(t, \mathbf{r}), \quad \Phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2m}} (e^{-imt} \psi_{-e}^{\text{NR}}(t, \mathbf{r}))^*,$$

Величина Φ не может интерпретироваться как волновая функция, поскольку она при разных условиях нерелятивистского предела переходит либо в волновую функцию частицы, либо в комплексно сопряженную волновую функцию античастицы. Во-вторых, временная компонента операторы $\hat{p}_\mu$ при действии на Φ не является энергией, так как для частицы эта компонента совпадает с энергией, а для античастицы $\hat{p}_0$ не совпадает с энергией, а равна энергии античастицы с противоположным знаком. Поэтому отрицательные собственные значения оператора $\hat{p}_0$ соответствуют не отрицательным значениям энергии, а положительным. Наконец, в-четвертых, в нерелятивистском пределе (I.4.4) легко найти и ведущие вклады в ток Нётер (I.2.8): для положительночастотной моды

$$\mathcal{J}_0 = e |\psi_e^{\text{NR}}|^2, \quad \mathcal{J} = -e \frac{i}{2m} ((\psi_e^{\text{NR}})^* \nabla \psi_e^{\text{NR}} - (\nabla \psi_e^{\text{NR}})^* \psi_e^{\text{NR}}),$$

так что закон сохранения тока Нётер сводится к закону сохранения вероятности с 4-током плотности вероятности частицы

$$j^\mu = \frac{1}{e} \mathcal{J}^\mu,$$

а для отрицательночастотной моды

$$\mathcal{J}_0 = -e |\psi_{-e}^{\text{NR}}|^2, \quad \mathcal{J} = e \frac{i}{2m} ((\psi_{-e}^{\text{NR}})^* \nabla \psi_{-e}^{\text{NR}} - (\nabla \psi_{-e}^{\text{NR}})^* \psi_{-e}^{\text{NR}}),$$

так что закон сохранения тока Нётер сводится к закону сохранения вероятности с 4-током плотности вероятности античастицы

$$j^\mu = -\frac{1}{e} \mathcal{J}^\mu.$$

Чтобы перейти к уравнению Шрёдингера, нужно подставить анзац, и у нас один член сократиться. (!?!?!? пропишу эти формулы перехода!)

$$E = \int \frac{d^3k}{2\hbar\omega(2\pi)^3} \hbar\omega |\alpha(\omega, \mathbf{k})|^2.$$

(прокомментирую вывод, тут уже КТП)

- The $U(1)$ symmetry conserves the number of particles. To recover the Schrodinger equation, we must define position and momentum operators. As before, we must have

$$H = \int d\mathbf{p} \frac{p^2}{2m} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{P} = \int d\mathbf{p} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}$$

which are simply the usual definitions in nonrelativistic quantum field theory. - We focus on single particle states, defining $|\mathbf{x}\rangle = \chi^\dagger(\mathbf{x})|0\rangle$ and

$$\mathbf{X} = \int d\mathbf{x} \mathbf{x} \chi^\dagger(\mathbf{x}) \chi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{X}|\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle$$

the latter property is just as expected for a position operator. Note that this step doesn't work in the relativistic case, because the analogues of the $|\mathbf{x}\rangle$ states are not perfectly localized. - Define a wavefunction by

$$|\psi\rangle = \int d\mathbf{x} \psi(\mathbf{x}) |\mathbf{x}\rangle.$$

Then it is straightforward to verify that

$$\mathbf{X}|\psi\rangle = \int d\mathbf{x} \mathbf{x} \psi(\mathbf{x}) |\mathbf{x}\rangle, \quad \mathbf{P}|\psi\rangle = \int d\mathbf{x} (-i\nabla\psi)(\mathbf{x}) |\mathbf{x}\rangle, \quad H|\psi\rangle = \int d\mathbf{x} \left(-\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi \right) |\mathbf{x}\rangle.$$

Hence, by working with the wavefunctions directly, the canonical commutation relations are satisfied and the wavefunction obeys the Schrodinger equation.

Групповые свойства, преобразования скалярного поля

Преобразуется при преобр Лоренца как

$$\phi'(x) = \phi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x)$$

Скалярное поле $\varphi(x)$, реализует базис для полей $(0, 0)$ в представлении группы $SO(3, 1)$.

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} = (x_\nu p_\mu - x_\mu p_\nu), \quad S_{\mu\nu} = 0.$$

Спиновые генераторы $S^{\mu\nu} \equiv 0$, так что и 4-вектор Паули-Любанского $W^\mu \equiv 0$,

или из другого определения $W_\mu := \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\nu J^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\nu (x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha) = 0$ (??? пока не разобрался, какое верное определение). Остается только уравнение казимира $p^2 = m^2$, где $p_\nu := i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu} \equiv i\hbar \partial_\nu$ и $x \equiv (ct, \mathbf{r})$, что и есть уравнение Клейна-Гордона. Именно тут определяется масса.

(??? это спорно. тут тоже стоит на самом деле. с другими определениями массы это непонятно как согласуется. Но это больше вопрос, пока считаю, что это так).

Из уравнения КГ строим действие, которое его должно выдавать, а из него все остальное.

Квантование скалярного поля

$$[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') 2k_0.$$

$$\langle 1_{\mathbf{k}} | 1_{\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') 2k_0.$$

$$\int \frac{d^3 p}{2E_{\vec{p}}} \quad \text{is Lorentz invariant}$$

Proof: $\int d^4p$ is obviously Lorentz invariant. And the relativistic dispersion relation for a massive particle,

$$p_\mu p^\mu = m^2 \Rightarrow p_0^2 = E_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 + m^2$$

is also Lorentz invariant. Solving for p_0 , there are two branches of solutions: $p_0 = \pm E_{\vec{p}}$. But the choice of branch is another Lorentz invariant concept. So piecing everything together, the following combination must be Lorentz invariant,

$$\int d^4p \delta(p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2) \Big|_{p_0 > 0} = \int \frac{d^3p}{2p_0} \Big|_{p_0 = E_{\vec{p}}}$$

which completes the proof.

(ниже про поток квантов??? порешаю задачи еще - точнее напишу!)

$$\mathcal{N} = \langle 1_{\mathbf{k}} | 1_{\mathbf{k}} \rangle = 2k_0 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}) = 2k_0 V_{[3]},$$

$$(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}) = \int_{V_{[3]} \rightarrow \infty} d^3r e^{i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k})} = \int_{V_{[3]} \rightarrow \infty} d^3r = V_{[3]}.$$

Для свободных квантов вектор потока направлен по волновому вектору $\mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$. Тогда за время $T \rightarrow \infty$ через площадь $\mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ с нормалью, параллельной потоку, в ансамбль состояний с одним квантом попадет число событий, равное

$$\mathcal{N} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S} T = j S T.$$

Но если v - скорость движения частицы, то

$$T = \frac{L}{v}, \quad V_{[3]} = S L,$$

и, следовательно,

$$\mathcal{N} = \frac{1}{v} j V_{[3]}$$

а значит,

$$j = 2k_0 \cdot v.$$

Итак, поток состояний с одним квантом поля в выбранной релятивистской нормировке (I.5.7) равен скорости движения кванта, умноженной на его удвоенную энергию.

(по идее вся суть про этот вопрос тут, мб 3/4 страницы будет)

О решениях уравнения Клейна-Гордона и пропагаторе

(тут для задач, на решаю - многое допишу. пока в умф и каталоге про них)

Теория поля учит нас решать через пропагатор, потому что (??? я так пока думаю, что таким методом причинность сохраняется, но потом четко напишу, почему?):

$$\hat{T}\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\} = \vartheta(x_0 - y_0) \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) + \vartheta(y_0 - x_0) \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x),$$

$$\langle 0 | \hat{T}\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\} | 0 \rangle = \vartheta(x_0 - y_0) \int \frac{d^3k_{\mathbb{E}}}{(2\pi)^3 2k_0} e^{-ik \cdot (x-y)} + \vartheta(y_0 - x_0) \int \frac{d^3k_{\mathbb{E}}}{(2\pi)^3 2k_0} e^{-ik \cdot (y-x)}$$

Типичным образом интегрируем по контуру, получаем:

$$\langle 0 | \hat{T}\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\} | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{i}{k^2 - m^2 + i0} \equiv \mathcal{D}^{(2)}(x - y)$$

Фундаментальным решением оператора Клейна-Гордона-Фока $\square_a + m^2$ являются функции

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, t) &= \frac{\theta(at - |x|)}{2a} J_0\left(\frac{m}{a} \sqrt{a^2 t^2 - x^2}\right), \quad n = 1; \\ \mathcal{E}(x, t) &= \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a^2} \frac{\cos\left(\frac{m}{a} \sqrt{a^2 t^2 - x^2}\right)}{\sqrt{a^2 t^2 - x^2}}, \quad n = 2; \\ \mathcal{E}(x, t) &= \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(a^2 t^2 - |x|^2) - \frac{m}{4\pi a^2} \theta(at - |x|) \frac{J_1\left(\frac{m}{a} \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}\right)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, \quad n = 3,\end{aligned}$$

J_0, J_1 - функции Бесселя.

(??? абзац про обоснование формул выше. пока в умф про это.)

$$\mathcal{D}^{(2)}(x - y) = -\frac{i}{4\pi} \delta(s) + \vartheta(s) \frac{im}{8\pi\sqrt{s}} \{J_1(m\sqrt{s}) - iN_1(m\sqrt{s})\} + \vartheta(-s) \frac{m}{4\pi^2\sqrt{-s}} K_1(m\sqrt{-s}),$$

$s = (x - y)^2$ - интервал, ϑ - ступенька Хевисайда, J_1, N_1, K_1 - функции Бесселя, Неймана и Ганкеля, соответственно. (???? см Боголюбов Широков, когда-то додумаю, еще задачи на это решать нужно)

(абзац про зависимость от гран условий?!?!)

Другое о скалярном поле

О ТЭИ, токе

(тут про ТЭИ, у Киселева спишу.)

О двухкомпонентном представлении скалярного поля

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \frac{1}{2} \left[\phi + \frac{i}{m} (\partial^0 + ieA^0) \phi \right], \\ \chi_2 &= \frac{1}{2} \left[\phi - \frac{i}{m} (\partial^0 + ieA^0) \phi \right].\end{aligned}$$

(Pauli-m.: $\tau_3 + i\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
(here - nat. units)

$$\phi = \chi_1 + \chi_2 \quad \chi_1 - \chi_2 = \frac{i}{m} (\partial^0 + ieA^0) \phi.$$

$$\rho := \frac{ie}{2m} [\phi^* (\partial^0 + ieA^0) \phi - \phi (\partial^0 - ieA^0) \phi^*] = e (|\chi_1|^2 - |\chi_2|^2) \equiv e \chi^\dagger \tau_3 \chi,$$

straightforward:

$$\chi := \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (i\partial^0 - eA^0) \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2m} (-i\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 \begin{pmatrix} \chi_1 + \chi_2 \\ -\chi_1 - \chi_2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \chi_1 \\ -\chi_2 \end{pmatrix},$$

and by Pauli matrices we get $(i\partial^0 - eA^0) \chi = \left[\frac{1}{2m} (-i\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 (\tau_3 + i\tau_2) + m\tau_3 \right] \chi$. Tau-3 matrix is here in all expectation values (?!?)

The Klein-Gordon Hamiltonian is

$$H = \frac{1}{2m} (-i\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 (\tau_3 + i\tau_2) + m\tau_3 + eA^0,$$

it is hermitian despite that $(\tau_3 + i\tau_2)^\dagger = \tau_3 - i\tau_2 \neq \tau_3 + i\tau_2$, but from $\langle \chi' | H | \chi \rangle = \int d^3x \chi^\dagger(x) \tau_3 H \chi(x)$

$$\tau_3 H^\dagger \tau_3 = H$$

Now, for free particle: $\partial^0 \phi = -iE\phi$, $\chi_1 = \frac{1}{2} [\phi + \frac{i}{m} \partial^0 \phi]$, $\chi_2 = \frac{1}{2} [\phi - \frac{i}{m} \partial^0 \phi]$, and a wave is $\phi(x) = \sqrt{\frac{m}{E}} e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} = \sqrt{\frac{m}{E}} e^{-i \cdot x \cdot x}$. So

$$\chi \equiv \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{E}} \frac{1}{m} \begin{pmatrix} m + E \\ m - E \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} \equiv \chi^{(+)}(\vec{p}) e^{-i \cdot x \cdot x}, \quad \chi^{(-)}(\vec{p}) = \frac{1}{2\sqrt{mE}} \begin{pmatrix} m - E \\ m + E \end{pmatrix}.$$

$$\text{Nonrel. limit: } \chi^{(+)}(\vec{p}) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -p^2/4m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/4(v/c)^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\chi^{(-)}(\vec{p}) \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Any wavepacket can be expanded in terms of a linear combination of positive- and negative-energy solutions

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \left[a_{\vec{p}}^{(+)}(t) \chi^{(+)}(\vec{p}) + a_{-\vec{p}}^{(-)}(t) \chi^{(-)}(-\vec{p}) \right], \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[a_{\vec{p}}^{(+)}(t) \chi^{(+)}(\vec{p}) e^{\vec{p} \cdot \vec{x}} + a_{\vec{p}}^{(-)}(t) \chi^{(-)}(\vec{p}) e^{-\vec{p} \cdot \vec{x}} \right], \end{aligned}$$

$$\text{also, } 1 \equiv \langle \phi | \phi \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\left| a_{\vec{p}}^{(+)}(t) \right|^2 - \left| a_{\vec{p}}^{(-)}(t) \right|^2 \right].$$

(пока этим не пользовался, потом в теории напишу подробно. см. книгу-сайт Gingrich-a про это. Может, вообще-то это полезный метод?)

О проблемах со скалярном полем

(потом напишу)

Основное про скалярное поле в искривленном пространстве

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0$$

(подробнее напишу, но не много. так или иначе, очень большая тема.)

1.1.4 Scalar field: Typical Models

О решении в виде волн (??)

О скалярном электроны в атоме

Энергия связи:

$$\mathcal{E}_{n,l} := E - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{\nu^2}}} - mc^2 \approx -\frac{mc^2}{2n^2} \alpha_{\text{em}}^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{n^2} \left(\frac{2n}{2l+1} - \frac{3}{4} \right) \right\},$$

$$\nu = 1 + \tilde{l} + n_r, \quad n_r \in \mathbb{N}_{+,0}.$$

(?? добавлю картинку и иллюстрацию!!)

Proof:

$$\left\{ \left(p_0 + \frac{e^2}{cr} \right)^2 - \mathbf{p}^2 - (mc)^2 \right\} \Phi(x) = 0, \quad p_0 \equiv E/c,$$

$$\Phi(x) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \cdot \frac{u(r)}{r} Y_{l,m}(\theta, \varphi),$$

$$\alpha_{\text{em}} := \frac{e^2}{\hbar c}, \quad \epsilon := \frac{E^2 - (mc^2)^2}{2mc^2}$$

$$\left\{ \frac{p_r^2}{2m} - \frac{E}{mc^2} \frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2mr^2} [l(l+1) - \alpha_{\text{em}}^2] \right\} u(r) = \epsilon u(r).$$

Это по сути уравнение для водорода $\left\{ \frac{p_r^2}{2m} - \frac{\tilde{e}^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \tilde{l}(\tilde{l}+1) \right\} u(r) = \epsilon u(r)$, где

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p}_r^2 + \frac{\hbar^2 \hat{\Gamma}^2}{r^2} \right) + U(r),$$

$$\hat{\Gamma}^2 = - \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$$\hat{p}_r \psi = -i\hbar \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \psi,$$

только нужно найти константы в этом уравнении через новую комбинацию параметров:

$$e^2 \mapsto \tilde{e}^2 = \frac{E}{mc^2} e^2, \quad \alpha_{\text{em}} \mapsto \tilde{\alpha}_{\text{em}} = \alpha_{\text{em}} \cdot \frac{E}{mc^2} \quad l(l+1) \mapsto \tilde{l}(\tilde{l}+1) = l(l+1) - \alpha_{\text{em}}^2$$

Напомним, что в водороде уравнение мы вводили $\epsilon := 2mE/\hbar^2$, $\nu : \frac{E_0}{E} = -\nu^2$, где $E_0 = \text{Ry} = \frac{p_0^2}{2m} = \frac{mc^2}{2} \alpha_{\text{em}}^2$, тогда получали диффур $u'' + \frac{2}{ar} u - \frac{l(l+1)}{r^2} u = -\epsilon u$ решалось заменой переменных, так чтобы была только 2я и 0я производные, подстановкой u через две асимптотики, и функцию в виде ряда, дальше находили рекуррентное соотношение на его коэффициенты и узнавали/определяли полиномы Лаггера. Из обнуления коэффициента при некотором n_r получали условие квантования. Основным итог был:

$$E_n = -E_0 \frac{1}{\nu^2} = -\frac{mc^2}{2n^2} \alpha_{\text{em}}^2,$$

поэтому из него же в новых параметрах $-\frac{\alpha_{\text{em}}^2}{2\nu^2} \frac{E^2}{mc^2} = \frac{E^2 - (mc^2)^2}{2mc^2}$ получаем энергию связи, после разложение ν^2 и α_{em}^2 в ряд Тейлора до 2го порядка, получаем ответ.

О других типичных эффектах скалярного поля

Об эффекте Казимира для скалярного поля, типичном

All four of these regulators agree:

$$E(r) = \frac{1}{2} \sum \omega_n \theta(\pi\Lambda - \omega_n) \quad (\text{hard cutoff}),$$

$$E(r) = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n e^{-\frac{\omega_n}{\pi\Lambda}} \quad (\text{heat kernel}),$$

$$E(r) = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n e^{-\left(\frac{\omega_n}{\pi\Lambda}\right)^2} \quad (\text{Gaussian}),$$

$$E(r) = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n \left(\frac{\omega_n}{\mu} \right)^{-s} \quad (\zeta\text{-function}).$$

$$\frac{\pi}{2r} \sum_{n=1}^{\infty} n \rightarrow -\frac{\pi}{24r} \quad 1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$$

Just summation The total energy is the sum of the energy on the right side, $r = (L - a)$, plus the energy on the left side, $r = a$:

$$E_{\text{tot}}(a) = E(a) + E(L - a) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{L - a} \right) \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n.$$

We do not expect the total energy to be finite, but we *do* hope to find a finite value for the force:

$$F(a) = -\frac{dE_{\text{tot}}}{da} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(L - a)^2} \right) \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n.$$

For $L \rightarrow \infty$ this becomes

$$F(a) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{a^2} (1 + 2 + 3 + \dots) = \infty.$$

So the plates are infinitely repulsive. Needless to say, our prediction at this point does not agree with experiment.

Hard cutoff We put in a high-frequency cutoff Λ because very high frequency can't interact with atoms: $\omega < \pi\Lambda$, Λ in $\frac{1}{\text{atomic size}}$ (?? not sure about dimensions), or some other natural scale that limits the high-frequency light. Then

$$n_{\text{max}}(r) = \Lambda r.$$

$$E(r) = \frac{1}{r} \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{n_{\text{max}}} n = \frac{\pi}{2r} \frac{n_{\text{max}}(n_{\text{max}} + 1)}{2} = \frac{\pi}{4r} (\Lambda r)(\Lambda r + 1) = \frac{\pi}{4} (\Lambda^2 r + \Lambda).$$

$$E_{\text{tot}} = E(L - a) + E(a) = \frac{\pi}{4} (\Lambda^2 L + 2\Lambda) \neq E(a).$$

$$F(a) = -\frac{dE_{\text{tot}}}{da} = 0.$$

Now the force is no longer infinite, but vanishes. Is that the right answer? No. (??? why???)
(в КТП в 1й части уже написано, тут коротко укажу суть потом.)

On Zitterbewegung for KG particles

Скалярная частица при свободном распространении будет быстро осциллировать. Считается это прямолинейно, но аккуратно: (??)

$$\langle \phi(t) | \hat{x} | \phi(t) \rangle = \int d^3x \phi^\dagger(\vec{x}, t) \tau_3 \hat{x} \phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\vec{p}}{E_p} t \left(|a_{\vec{p}}^{(+)}(t)|^2 - |a_{\vec{p}}^{(-)}(t)|^2 \right) - \text{Re} \left[i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\vec{p}}{E_p^2} a_{\vec{p}}^{(+)*}(t) a_{\vec{p}}^{(-)}(t) \right]$$

$$a_{\vec{p}}^{(+)*}(t) a_{\vec{p}}^{(-)}(t) \sim e^{2i|E_p|t}$$

we used:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} a_{\vec{p}}^{(+)}(t) \chi^{(+)}(\vec{p}), \quad a_{\vec{p}}^{(+)}(t) = e^{-iE_p t} f(|\vec{p} - \vec{p}_0|^2)$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{p}} E = \frac{\vec{p}}{E}, \quad \vec{\nabla}_{\vec{p}} \chi^{(+)}(\vec{p}) = -\frac{\vec{p}}{2E^2} \chi^{(-)}(\vec{p}), \quad \vec{\nabla}_{\vec{p}} \chi^{(-)}(\vec{p}) = -\frac{\vec{p}}{2E^2} \chi^{(+)}(\vec{p}),$$

(???)

О парадоксе Клейна для скалярного поля на $V(x) = V_0 \vartheta(x)$

(??? тут чуть-чуть осталось додумать тему!)

Допустим, скалярная волна падает на прямоугольную ступеньку. Тогда, согласно парадоксу Клейна, при большом потенциале амплитуда прохождения может быть очень большой, что объясняется рождением частиц-античастиц. Все проблемы - из-за формулы над барьером $p_-^2 = (p_0 - V_0)^2 - m^2$.

$$R = \frac{p - p_-}{p + p_-}, \quad S = \frac{2p}{p + p_-}.$$

$$\mathcal{T} = -\frac{4p|p'|}{(p - |p'|)^2}, \quad \mathcal{R} = \left(\frac{p + |p'|}{p - |p'|}\right)^2 > 1, \quad \mathcal{T} + \mathcal{R} = 1 \quad (\text{strong pot., } p' \text{ real, negative})$$

$$\mathcal{T} = 0, \quad \mathcal{R} = 1, \quad \mathcal{T} + \mathcal{R} = 1 \quad (\text{intermed. pot., } p' \text{ Im})$$

$$\mathcal{T} = \frac{4pp'}{(p + p')^2}, \quad \mathcal{R} = \left(\frac{p - p'}{p + p'}\right)^2, \quad \mathcal{T} + \mathcal{R} = 1. \quad (\text{weak pot., } p' \text{ Re})$$

(!!! тут добавлю иллюстративные графики, нужно только продумать их!!!!!!)

Суть решения в том, что делим пространство на две области, вставляем константный потенциал в уравнение КГ согласно минимальной связи и решаем для коэффициента в волновой функции, дальше по ним - находим ток, а по нему - коэффициенты прохождения и отражения.

$$\begin{aligned} -\partial_t^2 \phi + \nabla^2 \phi - m^2 \phi &= 0 \text{ for } z < 0, & \phi_{<} &= e^{-iEt} [e^{ipz} + R e^{-ipz}] \text{ for } z < 0, \\ (i\partial_t - V_0)^2 \phi + \nabla^2 \phi - m^2 \phi &= 0 \text{ for } z > 0. & \phi_{>} &= T e^{-iEt} e^{iy'z} \text{ for } z > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{p^2 + m^2} \quad \text{for } z < 0, \\ p' &= \pm \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2} \quad \text{for } z > 0. \end{aligned}$$

Отсюда по сшивке на границе $\Psi_+(0) = \Psi_-(0)$, $\Psi'_+(0) = \Psi'_-(0)$, так что $1 + R = S$, $(1 - R) \cdot p = S \cdot p_-$, и ответ: $R = \frac{p - p_-}{p + p_-}$, $S = \frac{2p}{p + p_-}$.

Если $(p_0 - V_0)^2 < m^2$, то $p_- \equiv i\kappa_-$, $\kappa_- := \sqrt{m^2 - (p_0 - V_0)^2}$,

$$R = \frac{p - i\kappa_-}{p + i\kappa_-}, \quad S = \frac{2p}{p + i\kappa_-}.$$

И наконец: $j^x \sim \Psi^* (-i\partial_x \Psi) + (-i\partial_x \Psi)^* \Psi$:

$$j_{\text{in}} = 2p, \quad j_{\text{r}} = -2p, \quad j_{\text{out}} = \frac{4p^2}{p^2 + \kappa_-^2} (p_- + p_-^*) = 0,$$

имеет место полное отражение от потенциального барьера, а ток сохраняется.

Если $(p_0 - V_0)^2 > m^2$, то $p_- = \sqrt{(p_0 - V_0)^2 - m^2} = \sqrt{p^2 + V_0(V_0 - 2p_0)} > 0$,

$$j_{\text{in}} = 2p, \quad j_{\text{r}} = -2p|R|^2 = -2p(1 - S)^2, \quad j_{\text{out}} = 2p_- S^2.$$

$$j_{\text{in}} + j_{\text{r}} = 2pS(2 - S) = 2p_- S^2. \quad x < 0$$

$$j_{\text{in}} + j_{\text{r}} = j_{\text{out}}.$$

Парадоксальность ситуации при условии, что барьер превышает пороговую величину, которая задается массой покоя,

$$V_0 > 2m,$$

у нас происходит прохождение через барьер (кстати, это же, если это супер глубокая яма).
(!!!!!! тут основные графики. проверю их - и вставлю!)

(???? тут про то, что за странное объяснение частица-античастица, почитаю статьи еще про это. Казалось бы, такого мы не имели в нашем формализме!!)

У этой модели есть обобщения на случай кривого потенциала, а также есть схожая модель туннелирования через “потенциальный столик”. (?? мб выпишу из отдельной записи еще что-то про это сюда самое важное.) Вообще, это типичное явление поля Дирака, просто в случае скалярного поля тоже есть такой эффект, так что тоже полезно ему научиться.

О моделях скалярного поля в приложениях к физическим явлениям

О скалярных элементарных частицах (пи-мезонах, бозоне Хиггса) (???)

О скалярном инфлянтном поле в космологии

(абзац про сути инфляции, сути ее общепризнанного решения)

(абзац с основными формулами и моделью)

(абзац с важными дополнениями про инфлянтное поле)

1.1.5 Dirac field: Basics

Самое основное о теории и уравнении Дирака

Основные свойства-определения уравнения и поля Дирака

$$\begin{aligned}
 & (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0, & \hbar = c = 1; \\
 \text{or} & (\hat{p}_\nu \gamma^\nu - mc) \psi(x) = 0, & \hat{p}_\nu := i\hbar \partial_\nu \quad \text{also} \quad \not{p} := p_\mu \gamma^\mu \\
 \text{or} & i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0, & \text{for} \quad \bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma_0 \quad (\text{take c.c.}). \\
 \text{or} & \left(\beta mc^2 + c \left(\sum_{n=1}^3 \alpha_n p_n \right) \right) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} & \text{same: } i\partial_t \psi = (\hat{\alpha} \cdot \hat{p} + m \cdot \hat{\beta}) \psi \\
 \text{or} & \left\{ \gamma^\mu \left(i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) - mc \right\} \Psi(\mathbf{r}, t) = 0 \\
 \text{or} & H_D^{\text{pauli}} = -i\sigma_1 \frac{d}{dx} + \sigma_3 m + U(x); & \begin{cases} \psi'_E = i[E + m - U(x)]\chi_E, \\ \chi'_E = i[E - m - U(x)]\psi_E. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Matrices:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_\mu = (-\mathbb{1}, \sigma_i), \quad \bar{\sigma}_\mu = \sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma_i),$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_4 \quad \eta = (+, -, -, -)$$

($\eta_{\mu\nu}$ - просто числа, которыми домножаем единичную матрицу).

Матрицы с верхним и нижним индексом отличаются знаком, не путаем.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Dirac basis} \\ (-+++) \end{array}$$

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \equiv \sigma_1 \otimes \boldsymbol{\sigma} \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \equiv \sigma_3 \otimes \mathbb{1} \quad \begin{array}{l} \text{Dirac basis} \\ (-+++) \end{array}$$

(?! добавлю альфа матрицы через гамма матрицы!) В многих литературе γ_0 имеет вид матрицы γ_5 , я не могу что-то большее сказать, видимо, есть два определения.

$$\gamma_0 = \gamma^0 \quad \gamma_1 = -\gamma^1. \quad \gamma_2 = -\gamma^2. \quad \gamma_3 = -\gamma^3.$$

$$\gamma_4 \equiv \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma_5 := i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(???? есть еще определение γ_5 со знаком минус. Почему именно такое как выше определение????)

Now, for mostly plus metric:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = -2\eta^{\mu\nu}I_4 \quad \eta = (-, +, +, +)$$

(?????????. пока избегаю работы с ней, в теории пропишу сперва, что за особенности?)

В киральном представлении:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}; \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\alpha} = \gamma_0\gamma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \text{chiral } (\gamma_5 \text{ e.v.}) \text{ basis} \\ (-, +, +, +) \end{matrix}$$

(???????)

А переход из одного представления в другое делается так:

$$\gamma^\mu \rightarrow M\gamma^\mu M^{-1} \quad (M = \text{const}),$$

ибо клиффордово соотношение работает после него.

Спиноры по сути это:

$$\psi \equiv (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T \quad \psi_1\psi_2 = -\psi_2\psi_1; \quad \psi_1^2 = -\psi_1^2 = 0; \quad c\psi_1 = \psi_1c \quad c \in \mathbb{C}$$

А сопряженный спиноры

(?? я так и не понял, там $i\gamma^2\gamma^0$ или просто гамма ноль????)
(??? по сути откуда он напишу?!?!??)

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

$$S_D = \int d^4x \quad \bar{\psi}(x)(\not{p} - mc)\psi(x)$$

$$H_D = \int d^3r \bar{\psi}(x)(\mathbf{p} \cdot \gamma + mc)\psi(x) = \int \frac{d^3p}{2p_0(2\pi\hbar)^3} c p_0 \{ \bar{\mathbf{a}}_\pm(\mathbf{p}) \mathbf{a}_\pm(\mathbf{p}) - \mathbf{b}_\pm(\mathbf{p}) \bar{\mathbf{b}}_\pm(\mathbf{p}) \}.$$

$$H = \beta mc^2 + \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j c \quad \hat{H}_D \xrightarrow{p \rightarrow 0} m \cdot \hat{\beta}, \quad \beta := \gamma_0, \quad \alpha_j := \gamma_0 \gamma_j$$

$$\hat{H}_D^2 = \hat{\mathbf{p}}^2 + m^2,$$

(?? строчка - про то, откуда такие формулы!!!)

Само поле Дирака - по сути распространяющаяся спинорная материя - мы всегда ищем как фурье преобразование от мод, в которых и есть операторы рождения-уничтожения:

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{2p_0(2\pi\hbar)^3} \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar}p \cdot x} u_\pm(\mathbf{p}) \mathbf{a}_\pm(\mathbf{p}) + e^{\frac{i}{\hbar}p \cdot x} v_\pm(\mathbf{p}) \mathbf{a}_{c,\pm}^\dagger(\mathbf{p}) \right\},$$

$\mathbf{a}_{c,\pm}^\dagger(\mathbf{p})$ - рождает античастицы с $\mathbf{p}$, $q = -e, s_z = \pm \frac{1}{2}$; $\mathbf{a}_\pm(\mathbf{p})$ - уничтожает частицы с $\mathbf{p}, q = +e, s_z = \pm \frac{1}{2}$.

$$\pi_\psi = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\psi} = i\psi^\dagger$$

Из $(\not{p} + m)(\not{p} - m)\psi = 0$ следует, что $(p^2 - m^2)\psi = 0$.

Basic Solutions and methods for Dirac equation (!?)

(мб из Степаньянца добавлю формулу)

- **Метод домножения** на что-то, что поможет хорошо его преобразовать.

(пойму как - пропишу. Может, сам переделаю метод Саутера, тогда тут и добавлю указания.)

• **Метод явной матричной записи.** Он полезный, если не требуется чего-то верного в общем случае или углубленного: переходим для упрощения в удобную систему координат, пишем явно гамма матрицы Дирака, подставляем простой анзац, который обнуляет еще пару компонент. Дальше простая система уравнений решается запросто. Например:

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - qA_\mu) - m] \begin{pmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} e^{-i(Et-pz)} = 0.$$

$$\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} (E - qA_0) - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} (p - qA_3) - m \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} = 0,$$

И там дальше получается два уравнения, можно подставить анзац - один 2-спинор в виде (1,0) и так найти второй или аналогично. Мне так кажется, что этот способ - на случай, если совсем все плохо и просто в матричную форму переходим. (?? потом допишу когда-то способы лучше!)

For a free particle $E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \pm E_p$

$$\begin{aligned} E = +E_p : \quad \Psi_1 &= \frac{2E_p}{E_p + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E_p + m} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip_\mu x^\mu}, & \Psi_2 &= \frac{2E_p}{E_p + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-p}{E_p + m} \end{pmatrix} e^{-ip_\mu x^\mu} \\ E = -E_p : \quad \Psi_3 &= \frac{2E_p}{E_p + m} \begin{pmatrix} \frac{-p}{E_p + m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip_\mu x^\mu}, & \Psi_4 &= \frac{2E_p}{E_p + m} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p}{E_p + m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ip_\mu x^\mu} \end{aligned}$$

(Я не понимаю пока, почему такие нормир. коэффициенты???)

Альтернативно, можно записать эти все решения, зная, что из закона дисперсии следует $p/(E + m) = (E - m)/p$:

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{E-m}{p} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(Et-pz)} \quad \dots$$

• **Метод приравнивания амплитуд до и после, поиске $u^\dagger u$ и использовании свойств α и β матриц** (?? этот метод у Грейнера в разделе про парадокс Клейна. Преобразования почти все понятные, но пока не готов выделить суть этого метода. Еще пару раз их сделаю - и пропишу.)

• **Метод математической физики и спецфункций** (!!! У Грейнера это во многих задачах написано, я пока не так понимаю, если у нас именно спиноры, то как это работает? Потом если нужно будет - обязательно допишу этот метод, нужно задачу решить тут!)

- **Переход в систему покоя, и обратно:**

$$u(\mathbf{k}) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{2m(k_0 + m)}} u(0),$$

$$v(\mathbf{k}) = -\frac{\not{k} - m}{\sqrt{2m(k_0 + m)}} v(0),$$

В системе покоя $(m\gamma^0 - m)u(p_0) = m \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u(p_0) = 0$. имеет решение

$$u(p_0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \quad \forall \xi, \quad \xi^\dagger \xi = 1;$$

множитель $\sqrt{m}$ вставлен из соображений удобства. Далее буст:

$$\begin{pmatrix} E \\ p^z \end{pmatrix} = \exp \left[\eta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\text{ch } \eta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \text{sh } \eta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \text{ch } \eta \\ m \text{sh } \eta \end{pmatrix}.$$

Используем $\Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu})$, где $S^{0i} = \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}$, после переписывание экспоненты через синус и косинус, вставления явного вида матриц Паули, подставляем быстроту, получаем (????)

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix} \quad (\sqrt{A} := U^* \sqrt{U A U^*} U).$$

$$\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \equiv \frac{E_p + m - \sigma \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{2(E_p + m)}}$$

$$\sqrt{p \cdot \sigma} \equiv \frac{E_p + m + \sigma \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{2(E_p + m)}}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{E - p^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E + p^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{big boost}} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{E + p^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E - p^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{big boost}} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вывод по Киселеву его следующий:

$$\begin{array}{ll} \text{up, pos.-freq.} & u_{\pm} : \quad (p_{\mu} \gamma^{\mu} - mc) u_{\pm}(\mathbf{p}) = 0, \\ \text{down, neg.-freq.} & v_{\pm} : \quad (p_{\mu} \gamma^{\mu} + mc) v_{\pm}(\mathbf{p}) = 0 \end{array}$$

$$\gamma_0 \mathbf{u}(\mathbf{0}) = +\mathbf{u}(\mathbf{0}),$$

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{p}) \mathbf{u}(\mathbf{p}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{0}) \mathbf{u}(\mathbf{0}) = u^{\dagger}(\mathbf{0}) \gamma_0 \mathbf{u}(\mathbf{0}) = +u^{\dagger}(\mathbf{0}) \mathbf{u}(\mathbf{0}) = 2m,$$

$$\gamma_0 \mathbf{v}(\mathbf{0}) = -\mathbf{v}(\mathbf{0}),$$

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) \mathbf{v}(\mathbf{p}) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{0}) \mathbf{v}(\mathbf{0}) = v^{\dagger}(\mathbf{0}) \gamma_0 \mathbf{v}(\mathbf{0}) = -v^{\dagger}(\mathbf{0}) \mathbf{v}(\mathbf{0}) = -2m$$

$$\mathbf{u}_+(\mathbf{0}) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_-(\mathbf{0}) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_+(\mathbf{0}) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_-(\mathbf{0}) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = \Lambda_D(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{0}).$$

Считаем, что для уравнения $(\not{k} - m)\mathbf{u}(\mathbf{k}) = 0$ решение имеет вид $\mathbf{u}(\mathbf{k}) = B(\not{k} + m)\mathbf{u}(\mathbf{0})$.

$$\begin{aligned}\psi^+ &= e^{-imc^2 t/\hbar} u(\mathbf{0}), & (\text{rest frame}) \\ \psi^- &= e^{-imc^2 t/\hbar} v(\mathbf{0}),\end{aligned}$$

Для них

$$\gamma^0 i\hbar \partial_0 \psi^\pm - mc \psi^\pm = 0$$

В импульсном представлении: (??? подумаю почему???)

$$\begin{aligned}\gamma_0 u_\pm(\mathbf{0}) &= +u_\pm(\mathbf{0}) \\ \gamma_0 v_\pm(\mathbf{0}) &= -v_\pm(\mathbf{0})\end{aligned}$$

В нужную систему перейдем бустом: $\Lambda u_\pm(\mathbf{0}) = u_\pm(\mathbf{p})$, $\Lambda v_\pm(\mathbf{0}) = v_\pm(\mathbf{p})$ у нас $\gamma^0 = \frac{1}{mc} k_\mu \gamma^\mu$ (?? поч???), поэтому имеем

$$\Lambda k_\mu \gamma^\mu \Lambda^{-1} \Lambda u_\pm(\mathbf{0}) = mc \Lambda u_\pm(\mathbf{0}), \quad \Lambda k_\mu \gamma^\mu \Lambda^{-1} \Lambda v_\pm(\mathbf{0}) = -mc \Lambda v_\pm(\mathbf{0})$$

после аккуратной математики

$$\begin{aligned}(p_\mu \gamma^\mu - mc) u_\pm(\mathbf{p}) &= 0, \\ (p_\mu \gamma^\mu + mc) v_\pm(\mathbf{p}) &= 0\end{aligned}$$

Также есть решение - вбить формулу для уравнения Дирака в программу и она численно все решит (!!?!?!?! но я ее не знаю, может, когда-то мне кто-то расскажет о ней)

О плоских волнах в уравнении Дирка (!!?!?)

(?!?!?!? вот номер 1 раздел, который прорабатывать и нужно мне!!! четко напишу его!!!)

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}, a=\pm} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} L^3}} (a_{\mathbf{k},a} u_{\mathbf{k},a} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k},a}^* v_{\mathbf{k},a} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k}\mathbf{x}})$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = \begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 + \sigma \cdot \nabla) \\ i(\partial_0 - \sigma \cdot \nabla) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0.$$

$$\psi(x) = u(p) e^{-ip \cdot x}, \quad p^2 = m^2.$$

В импульсном пространстве $(\gamma^\mu k_\mu - m) \psi(k) = 0$ подставим γ -матрицы, (???? проделаю это????)

$$\begin{cases} (k_0 - \sigma \mathbf{k}) \psi_{34} - m \psi_{12} = 0 \\ (k_0 + \sigma \mathbf{k}) \psi_{12} - m \psi_{34} = 0 \end{cases}$$

это линейно зависимые уравнения, откуда

$$\psi(k) = \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \frac{1}{m} (k_0 + \sigma \mathbf{k}) \psi_{12} \end{pmatrix}$$

Для безмассового поля

$$\psi = \begin{pmatrix} (-k^1 + ik^2) \xi_1 \\ (k^0 + k^3) \xi_1 \\ (k^1 - ik^2) \xi_2 \\ (k^0 - k^3) \xi_2 \end{pmatrix}$$

зависит от двух произвольных величин ξ_1 и ξ_2 .

(??? по итогу у нас обычные волны, только больше степеней свободы что ли???? пока так вижу это, не уверен.)

О сопряженном спиноре

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad (\text{Dirac conj.})$$

$$\bar{\psi}_D \stackrel{\text{def}}{=} \psi_D^\dagger \gamma_0 = (\bar{\theta}, \chi)$$

$$C = i\gamma^2 \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Dirac basis})$$

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

$$\bar{\psi}(x') = \bar{\psi} \cdot \Lambda_D^{-1}, \quad (\gamma_0 \Lambda_D^\dagger \gamma_0 = \Lambda_D^{-1})$$

То есть мы просто берем комплексное сопряжение от уравнения Дирака.

(!! тут из Проена запишу его версию, что происходит!!!)

(тут про майорановском сопряжении и вопросе: какое же настоящее, дираковское или майорановское в некоторых случаях?)

Нерелятивистский предел в дираковском поле и уравнении Паули

(быстро напишу, еще раз подумать и прочесть это только нужно.)

$$i\frac{\partial \psi_c}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m} (-i\partial + e\mathbf{A})^2 - e\varphi + \frac{e}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}) \right) \psi_e$$

(тут Степаньянцевский вывод)

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\partial}{\partial t} - ie\varphi \right) \psi_{12} - i\boldsymbol{\sigma}(\partial + ie\mathbf{A})\psi_{34} - m\psi_{12} &= 0 \\ -i \left(\frac{\partial}{\partial t} - ie\varphi \right) \psi_{34} + i\boldsymbol{\sigma}(\partial + ie\mathbf{A})\psi_{12} - m\psi_{34} &= 0 \end{aligned}$$

(тут словами напишу переходы!!!)

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \psi'_M \right| \ll |m\psi'_M|$$

$$\psi_M \approx e^{-imt} \begin{pmatrix} \psi_e \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi + \mu_0 \mathbf{H}.$$

Собственные значения оператора $(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H})$ равны $\pm |\mathbf{H}|$, так как $(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H})^2 = \sigma_i \sigma_j H_i H_j = \mathbf{H}^2$. Поэтому на классическом уровне электродинамика предсказывает

$$\mu_0 = \frac{e}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\mu} = -g \frac{e}{2m} \mathbf{s},$$

(??? перепису, чтобы было понятно, как вообще дойти до того, что в КТП у нас поправки к фактору Ланде)

Основные свойства спиноров

$$\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$$

$$\theta_{\alpha} \leftrightarrow \left(0, \frac{1}{2} \right)$$

(!!! тут строчка - что за этот точечный индекс!!)

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \chi^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\bar{\chi}^a, \bar{\varphi}_{\dot{a}})$$

Здесь

$$\bar{\chi}^a = (\chi^{\dot{a}})^*, \quad \bar{\varphi}_{\dot{a}} = (\varphi_a)^*.$$

Аналогично

$$\bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi = \bar{\chi}^a (\sigma^{\mu})_{a\dot{a}} \chi^{\dot{a}} + \bar{\varphi}_{\dot{a}} (\tilde{\sigma}^{\mu})^{\dot{a}a} \varphi_a$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix}$$

(корень из матрицы - извлечение положительного корня из каждого собственного значения.) (??? потренируюсь еще с этой формулой!) Это выражение для $u(p)$ не только более компактно, но и сохраняет силу для произвольного направления p (?? проверю!!??).

Полезное тождество:

$$(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = p^2 = m^2.$$

Имеются два линейно независимых решения для $v(p)$:

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2$$

η^s - другой базис двухкомпонентных спиноров. Эти решения нормированы согласно

$$\bar{v}^r(p) v^s(p) = -2m \delta^{rs} \quad \text{или} \quad v^{r\dagger}(p) v^s(p) = +2E_{\mathbf{p}} \delta^{rs}.$$

Столбцы u и v также взаимно ортогональны:

$$\bar{u}^r(p) v^s(p) = \bar{v}^r(p) u^s(p) = 0.$$

Однако $u^{r\dagger}(p) v^s(p) \neq 0$ и $v^{r\dagger}(p) u^s(p) \neq 0$ и

$$u^{r\dagger}(\mathbf{p}) v^s(-\mathbf{p}) = v^{r\dagger}(-\mathbf{p}) u^s(\mathbf{p}) = 0$$

(??? додумаю, проверю!!)

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \gamma \cdot p + m.$$

$$\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \gamma \cdot p - m$$

(в этой же части вдали и другие свойства их будут, тут только самое нужное. пока такая идея.)

(!?!?! про их явный вид важный абзац!!!)

Преобразования спиноров при преобразованиях Лоренца (????)

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu,$$

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp \left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\psi}\psi \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \\ \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \\ \bar{\psi}\gamma^5\psi \end{array} \right\} \text{ transforms as a } \left\{ \begin{array}{l} \text{scalar} \\ \text{vector} \\ \text{antisymmetric 2-nd rank tensor} \\ \text{pseudo-vector} \\ \text{pseudo-scalar} \end{array} \right.$$

или явно:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\chi(x') &\rightarrow \bar{\psi}\chi(x); & \bar{\psi}\gamma_5\chi(x') &\rightarrow \bar{\psi}\gamma_5\chi(x) \\ \bar{\psi}\gamma^\alpha\chi(x') &\rightarrow \Lambda^\alpha_\beta \bar{\psi}\gamma^\beta\chi(x); & \bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma_5\psi(x') &\rightarrow \Lambda^\alpha_\beta \bar{\psi}\gamma^\beta\gamma_5\chi(x); \\ \bar{\psi}\gamma^{\alpha\beta}\chi(x') &\rightarrow \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\chi(x) \end{aligned}$$

(??? додумаю, как понимать, что только один спинор функция координат. или типа второй - тоже функция тех же координат?)

$$\psi'(x') = \exp \left(\frac{1}{4} \alpha_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} \right) \psi(x)$$

Несмотря на наличие лоренцева индекса, γ -матрицы никак не меняются при лоренцевых преобразованиях и просто являются некоторыми постоянными матрицами. Другими словами γ -матрицы представляют собой инвариантный тензор, у которого есть один лоренцев индекс, один верхний и один нижний спинорные индексы.

$$(\gamma^\mu)_a{}^b = \Lambda^\mu_\nu \exp \left(\frac{1}{4} \alpha_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} \right)_{a^c}{}^c (\gamma^\nu)_c{}^d \exp \left(-\frac{1}{4} \alpha_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} \right)^b.$$

(??? Так у Степаньянца. А Киселев написал, что они преобразуются???? что делать???? пока просто не до этого вопроса, но пока это вопрос)

$$P : \psi'(t, \mathbf{x}) = i\gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}); \quad T : \psi'(t, \mathbf{x}) = \gamma^1\gamma^3\psi^*i^*(-t, \mathbf{x})$$

Свойства дираковского поля для типичных приложений

О токах из уравнения Дирака

Ток - вариация действия по комплексной фазе поля $\psi_u = \exp\{-ieu/\hbar c\}\psi$:

$$\frac{1}{c} j^\mu = \frac{\partial L_D}{\partial \partial_\mu \psi} \frac{\partial \psi_u}{\partial u} \Big|_{u=0} = \frac{e}{c} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi,$$

Это потому что в простейшем случае у нас совпадает выражение с $j = dq/dt$, и по смыслу вообще ток - следствие какой-то симметрии системы (?? почему именно такой???). Заряд:

$$Q := \int d^3r j^0(x) = e \int \frac{d^3p}{2p_0(2\pi\hbar)^3} \{ \bar{\mathbf{w}}_\pm(\mathbf{p}) \mathbf{w}_\pm(\mathbf{p}) + \mathbf{b}_\pm(\mathbf{p}) \bar{\mathbf{b}}_\pm(\mathbf{p}) \}$$

(??? слова, как почитать) Смысл очевиден: суммируем просто заряды поля по модами, которые есть.

$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(\gamma^\mu i\partial_\mu - m)\psi$ обладает глобальной калибровочной инвариантностью, $\psi^u(x) = e^{-ieu}\psi(x)$, $\frac{dS_D}{du} \equiv 0$, так что сохраняющийся ток Нётер равен

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} \frac{d\psi}{du} = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi.$$

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x); \quad j^{\mu 5}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x).$$

Ток j - электромагнитный ток, он строится из векторной матрицы. Если ψ удовлетворяет уравнению Дирака, то $\partial_\mu j^\mu = 0$, то есть всегда сохраняется. This can be seen by adding the Dirac and adjoint Dirac equations gives $i((\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi) = 0$ and by Leibniz rule (??? проделаю это потом!).

Or by Nether's theorem $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\delta\bar{\psi} \right)$ with $\psi \mapsto e^{i\alpha}\psi, \bar{\psi} \mapsto e^{-i\alpha}\bar{\psi}$, for which $\delta\psi(x) = i\alpha\psi(x), \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu$.

Ток $j^{\mu 5}$ - псевдовекторный (аксиальный), для него:

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi$$

Если $m = 0$, этот ток также сохраняется, тогда

$$j_L^\mu := \bar{\psi}\gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \psi, \quad j_R^\mu := \bar{\psi}\gamma^\mu \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \psi$$

в случае $m \neq 0$ на классическом уровне

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2imj_5,$$

$j_5 \equiv \bar{\psi}\gamma^5\psi$. Однако, оказывается, что закон сохранения кирального тока в безмассовом случае нарушается квантовыми поправками и не имеет место при переходе к квантовой теории (?? почему?). Такое явление называется квантовой аномалией.

При любом преобразовании Лоренца дираковское поле ψ преобразуется (по исходному определению) как

$$\psi'(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x)$$

О преобразованиях Лоренца поля Дирака и спиноров

Так как у нас представление $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, то буст против (??почему против?) единичного вектора $\mathbf{n}$ для правых спиноров $\Lambda_+(\vartheta)$ и для левых $\Lambda_-(\vartheta)$:

$$\Lambda_+(\vartheta) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \vartheta \right\} = \cosh \frac{\vartheta}{2} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \sinh \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2mc(p_0 + mc)}} (p_0 + mc + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}),$$

$$\Lambda_-(\vartheta) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \vartheta \right\} = \cosh \frac{\vartheta}{2} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \sinh \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2mc(p_0 + mc)}} (p_0 + mc - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}),$$

где $\cosh \vartheta = \frac{p_0}{mc}$, $\sinh \vartheta = \frac{|\mathbf{p}|}{mc}$, и $p^\nu = (p_0, \mathbf{p})$, $\mathbf{p} = \mathbf{n}mc \sinh \vartheta$. Ибо

$$\cosh \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{\cosh \vartheta + 1}{2}} = \sqrt{\frac{p_0 + mc}{2mc}}, \quad \sinh \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{\cosh \vartheta - 1}{2}} = \sqrt{\frac{p_0 - mc}{2mc}}.$$

$$\psi^\alpha(x) \rightarrow S[\Lambda]^\alpha_\beta \psi^\beta(\Lambda^{-1}x)$$

$$\Lambda = \exp \left(\frac{1}{2} \Omega_{\rho\sigma} \mathcal{M}^{\rho\sigma} \right)$$

$$S[\Lambda] = \exp \left(\frac{1}{2} \Omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma} \right)$$

(???? тут разная инфа в разных книгах) Гамма-матрицы Дирака с точки зрения Киселева преобразуются как 4-вектор:

$$\Lambda(\vartheta) = \begin{pmatrix} \Lambda_+ & 0 \\ 0 & \Lambda_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2mc(p_0 + mc)}} (p_0 + mc + \gamma_5 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})$$

(?????)

$$\Lambda_D^{-1} \gamma^\mu \hat{p}_\mu \Lambda_D = \gamma^\mu \hat{p}_\mu, \quad \Lambda_D^{-1} \gamma^\mu \Lambda_D = \Lambda_{\bullet}^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

$$\Lambda_D = \exp \left(\frac{1}{8} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \omega_{\mu\nu} \right)$$

(?????)

(!!! очень важный абзац на указания, как вообще работать с такими матрицами-генераторами, есть спиноры!!! отдельно пару дней тренироваться нужно было бы.)

On energy–momentum tensors for the Dirac field (??????)

(не актуально пока, потом подумаю.)

$$T_{\mu\nu} = \bar{\Psi} \gamma_\mu \partial_\nu \Psi + \eta_{\mu\nu} \mathcal{L},$$

The addition of $\frac{1}{2} \partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi)$ to Lagrangian brings the action to the form

$$S' = - \int d^D x \left[\frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \right] \quad A \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu B \equiv A (\partial_\mu B) - (\partial_\mu A) B$$

The advantage of the form (2.61) of the Dirac theory is that the Lagrangian density $\mathcal{L}'$ is hermitian as an operator in Hilbert space.

Noether stress tensor obtained using $\mathcal{L}'$ is

$$T'_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma_\mu \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu \Psi + \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}'$$

As usual, $T'_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} = \partial^\rho S_{\rho\mu\nu}$, the tensor $S_{\rho\mu\nu}$ satisfies $S_{\rho\mu\nu} = -S_{\mu\rho\nu}$, as in the discussion of improved Noether currents in Sec. 1.3.

Addition of $\Delta T_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \partial^\rho (\bar{\Psi} \{ \Sigma_{\rho\mu}, \gamma_\nu \} \Psi)$ to $T'_{\mu\nu}$ produces the symmetric energy-momentum tensor

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \bar{\Psi} \left(\gamma_\mu \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\nu + \gamma_\nu \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \right) \Psi + \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}'$$

Note that symmetry currents are evaluated 'on-shell', i.e. one should assume that Ψ and $\bar{\Psi}$ satisfy the Dirac equation. The last term $\mathcal{L}'$ then vanishes.

Consider the variation $\delta(\lambda) \Psi = -\frac{1}{2} \lambda^{\rho\sigma} (\Sigma_{\rho\sigma} + L_{[\rho\sigma]}) \Psi$, $L_{[\rho\sigma]}$ was defined in (1.38), under infinitesimal Lorentz transformations and the analogue for $\delta \bar{\Psi}$. These variations may be obtained using (2.21) and (2.23). Show that the Noether current and Lorentz generators $M_{[\rho\sigma]}$ can be written in the form of (1.74), but using the symmetric stress tensor (2.64).

(!!?!? вот с такими формулами и начинает казаться, что ничего я не знаю!!?!?! короче, долго про это нужно думать еще!)

О физических свойствах и смысле дираковских спиноров (??)

(тут абзац про всякие спиральности и киральности, в паре абзацев поясню, что это!!! вечно с этим тормоза, вечно забываешь эти свойства.)

Спиральность частицы h определяется нормированным скалярным произведением векторов спина частицы на её импульс (знак скалярного произведения спина и импульса частицы):

$$h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}| |\vec{p}|}$$

Спиральности:

1. Отрицательная или «левая» - спин направлен против направления движения частицы;

2. Положительная или «правая» - спин направлен по движению частицы.

Теорема Вайнбега: Если неприводимое безмассовое поле задаётся представлением группы Лоренца (j_1, j_2) , то кванты его это безмассовые частицы спиральности $\lambda = j_1 - j_2$ (????? мб когда-то подумаю про нее, вряд ли это особо нужно знать.)

О сумме по поляризациям спинора Дирака (?????)

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{0}) &= \sum_{\lambda} u_{\lambda}(\mathbf{0}) \bar{u}_{\lambda}(\mathbf{0}) = mc(1, 0, 1, 0) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + mc(0, 1, 0, 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = mc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv mc(\gamma_0 + \mathbb{1}) = (k + mc), \quad k_{\mu} = (mc, \mathbf{0}). \quad (\text{covariant form}) \end{aligned}$$

Сумма по поляризациям для движущихся частиц:

$$\Pi(\mathbf{p}) = (\not{p} + mc)$$

и для аналогично:

$$\Pi^c(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda} v_{\lambda}(\mathbf{p}) \bar{v}_{\lambda}(\mathbf{p}) = (\not{p} - mc).$$

Это следует из того, что из $k^{\nu} \rightarrow p^{\nu}$

$$\Lambda \not{k} \Lambda^{-1} \rightarrow \not{p}$$

(???????????)

(!!! очень важный абзац о том, какой в ей смысл и как ее применять?????)

Об историческом выводе уравнения Дирака и альфа матрицах (???)

(тут идея вывода)

(тут основные формулы, у Киселева спишу)

On quantization of Dirac field (???)

(в КТП очень про это много, тут - тоже указание, мб полстраницы, мб 3/4 страницы, супер коротко, просто тема важная.)

О связи уравнения Дирака с другими моделями

Уравнение Клейна-Гордона-Фока из уравнения Дирака $(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = 0$ получается домножением на $(-i\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)$.

Другие общие свойства уравнения Дирака

О дискретных симметриях спиноров Дирака (????)

(???? про это потом подумаю.)

	$\bar{\psi}\psi$	$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$	$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^5\psi$	$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	∂_{μ}
P	+1	-1	$(-1)^{\mu}$	$-(-1)^{\mu}$	$(-1)^{\mu}(-1)^{\nu}$	$(-1)^{\mu}$
T	+1	-1	$(-1)^{\mu}$	$(-1)^{\mu}$	$-(-1)^{\mu}(-1)^{\nu}$	$-(-1)^{\mu}$
C	+1	+1	-1	+1	-1	+1
CPT	+1	+1	-1	-1	+1	-1

Инверсия пространства:

$$\mathbb{P}\mathbf{a}_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{p})\mathbb{P}^{-1} = \xi\mathbf{a}_{\pm}^{\dagger}(-\mathbf{p}), \quad \mathbb{P}\mathbf{a}_{c,\pm}^{\dagger}(\mathbf{p})\mathbb{P}^{-1} = \xi_c\mathbf{a}_{c,\pm}^{\dagger}(-\mathbf{p}),$$

$$\mathbb{P}\hat{\psi}(t, \mathbf{r})\mathbb{P}^{-1} = \hat{\psi}_{\mathbb{P}}(t, -\mathbf{r}) = \xi^*\gamma_0\hat{\psi}(t, \mathbf{r})$$

Зарядовое сопряжение:

$$\mathbb{C}\hat{\psi}(t, \mathbf{r})\mathbb{C}^{-1} = -\eta^*\hat{\epsilon}\gamma_0\gamma_5\hat{\psi}^*(t, \mathbf{r}),$$

$$\mathbb{C}\mathbf{a}_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{p})\mathbb{C}^{-1} = \eta\mathbf{a}_{c,\pm}^{\dagger}(\mathbf{p}), \quad \mathbb{C}\mathbf{a}_{c,\pm}^{\dagger}(\mathbf{p})\mathbb{C}^{-1} = \eta^*\mathbf{a}_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{p}),$$

Инверсия времени:

$$\mathbb{T}s\mathbb{T}^{-1} = -s, \quad \mathbb{T}i\mathbb{T}^{-1} = -i, \quad \mathbb{T}|s, m_s\rangle = \zeta_{m_s}|s, -m_s\rangle, \quad |\zeta_{m_s}| = 1$$

(тут абзац про применение этого. пока не уверен.(???? почему такие свойства, какие в таблице???)

Границы применимости (!?)

(пока не уверен, просто для спина 1/2 и все, для микро его волн...)

1.1.6 Dirac field: Typical Models

О дираковском электроном в центральном поле и поправках к атому водорода (???)

Описание дираковской частицы в Кулоне

(??? тут еще формулы с которых стартуем! в квантмехе вроде написал уже)

$$\left\{ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{E}{mc^2} \frac{e^2}{r} - \frac{\hbar^2\alpha_{\text{em}}}{2mr^2} [\alpha_{\text{em}} \pm i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})] \right\} \Psi_{\pm}(\mathbf{r}) = \epsilon \Psi_{\pm}(\mathbf{r}).$$

$$\mathcal{E}_{n,j} \approx -\frac{mc^2}{2n^2} \alpha_{\text{em}}^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{n^2} \left(\frac{2n}{2j+1} - \frac{3}{4} \right) \right\}.$$

(выпишу суть, в квантмехе уже почти выписана она. такая тут не малая задача... решу в теории обязательно еще раз!!!)

О поправках к водороду

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{(mc^2)^2 + c^2\mathbf{p}^2} = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}^2}{m^2c^2} - \frac{1}{8} \frac{\mathbf{p}^4}{m^4c^4} + \dots \right) \approx mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2}$$

Вклад спин-орбитального взаимодействия требует более тщательного рассмотрения. Во-первых, электрическое поле статического потенциала $\mathcal{E} = -\nabla\mathcal{A}_0 = -\mathbf{r}\mathcal{A}'_0(r)/r$ при переходе в систему, сопутствующую электрону, который движется со скоростью $\mathbf{v}$, согласно преобразованию Лоренца в нерелятивистском пределе дает магнитное поле

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathcal{E}) = -\frac{\mathcal{A}'_0(r)}{mcr}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = -\frac{\mathcal{A}'_0(r)}{mcr}\mathbf{L}.$$

Потенциал взаимодействия магнитного диполя электрона $\boldsymbol{\mu}$ с внешним полем $U_{\text{mag}} = -(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathcal{H})$ приводит к прецессии Лармора для магнитного момента $\boldsymbol{\mu}$ с частотой

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{L}} = -\frac{ge}{2mc}\mathcal{H}$$

и U_{mag} после подстановки магнитного поля (II.8.1) принимает вид

$$U_{\text{mag}} = \frac{\mathcal{A}'_0(r)}{mcr} \frac{ge\hbar}{2mc} (s \cdot \mathbf{L}) = \frac{ge\hbar}{2m^2c^2} \frac{\mathcal{A}'_0(r)}{r} (s \cdot \mathbf{L}),$$

$$\delta_{\text{kin}} E = -\frac{mc^2}{2n^2} \frac{\alpha_{\text{em}}^4}{n^2} \left\{ \frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4} \right\}.$$

$$\delta_{\text{Darwin}} E = \frac{mc^2}{2n^2} \alpha_{\text{em}}^4 \frac{1}{n} \delta_{l0}.$$

Суммируем полученные результаты сначала для $l_- = j - 1/2 \neq 0$. Тогда в силу $2l_- + 1 = 2j$ и связи $l_- (l_- + 1) = j^2 - 1/4$ легко находим

$$\delta_{\text{kin}} E + \delta_{sl} E = -\frac{mc^2}{2n^2} \alpha_{\text{em}}^4 \frac{1}{n} \left\{ \frac{n}{j} - \frac{3n}{4} - \frac{j-1/2}{j^2-1/4} \frac{n}{2j} \right\} = -\frac{mc^2}{2n^2} \alpha_{\text{em}}^4 \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{4} \right\}.$$

(!! о, там уровни энергии тоже есть, приведу этот график)
(добавлю короткие пояснения)

О парадоксе Клейна для дираковского поля, типичном ($V(x) = V_0 \vartheta(x)$, $V_0 > 0$)

(??? как это сделать не через альфа и бета матрицы????)

Two-body Dirac equations

(see that theory from Greiner, I wrote it already, I need to think more about it)

Dirac field for Condensed Matter

(write just an overview)

$$[i\hbar v_D \gamma^a e_a^\mu d_\mu(p) - mv_D^2] \Psi = 0$$

Free Dirac particle: $E = \pm \sqrt{\hbar^2 v_D^2 \mathbf{k}^2 + m^2 c^4}$

Kinetic energy: $E = \frac{m|\mathbf{v}|^2}{2} = \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m}$.

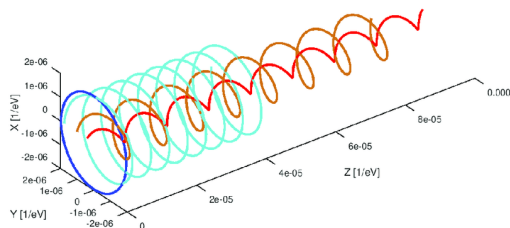
$$E(\mathbf{k}) = \hbar v_D |\mathbf{k}|$$

О других типичных моделях (??)

On Zitterbewegung for Dirac particles

In free space an interference between positive and negative energy states produces an apparent fluctuation (up to the speed of light) of the position of an electron around the median, with an angular frequency of

$$\frac{2mc^2}{\hbar} \approx 1.6 \times 10^{21} \frac{\text{r}}{\text{s}}.$$



(допишу по Грейнеру теорию эту потом тут коротко, пока не актуально)

$$\begin{aligned}
 j^k &= \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}, t) c \hat{\alpha}_k \psi(\vec{x}, t) \\
 &= \int d^3p \left\{ \sum_{\pm s} [|b(p, s)|^2 + |d(p, s)|^2] \frac{p^k c^2}{E} \right. \\
 &\quad + ic \sum_{\pm s, \pm s'} b^*(-p, s) d^*(p, s') e^{2ix_a p_0/\hbar} \bar{u}(-p, s) \sigma^{k0} v(p, s') \\
 &\quad \left. - ic \sum_{\pm s, \pm s'} b(-p, s) d(p, s') e^{-2ix_a p_0/\hbar} \bar{v}(p, s) \sigma^{k0} u(-p, s') \right\}
 \end{aligned}$$

The first term represents the time-independent group velocity that appeared before for positive energy only wave packets. The second and third terms are interferences of the solutions with positive and negative energy, which oscillate time-dependently because of the factors $\exp(\pm 2ip_0 x_0/\hbar)$.

(абзац об экспериментах, которые это подтверждают. такие есть вообще?)

О двухчастичной задаче для дираковских частиц (???)

(в вики есть страница, известная модель, выучу - напишу суть)

О рассеяниях дираковских частиц (???)

(выпишу суть, тут же связка с КТП)

1.1.7 Weyl, Majorana spinors

Приводимость и разложения Дираковских спиноров

Представление Дирака приводимо, оно раскладывается в правый и левый вейлевский спинор. Это следует из тождеств

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0.$$

Тут из последнего свойства следует, что $[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0$. Таким образом, представление Дирака должно быть приводимо, так как собственные векторы матрицы γ^5 , чьи собственные значения различны, преобразуются не смешиваясь (этот критерий приводимости известен как лемма Шура) (??? это отдельно нужно додумать).

$$P_\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5)$$

О вейлевских спинорах и уравнении (??????)

(оказывается, тут не усвоил еще тему)

Формулы

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi = iu_-^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu u_- + iu_+^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu u_+ - m(u_+^\dagger u_- + u_-^\dagger u_+) = 0 \\
 i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu u_+ &= 0 \\
 i\sigma^\mu \partial_\mu u_- &= 0
 \end{aligned}$$

Weyl eq.

Киральные преобразования сводятся к умножению на фазовый множитель для т.н. киральных или вейлевских спиноров [9], которые определяются как собственные векторы матрицы γ_5 :

$$\gamma_5 \psi = \lambda \psi.$$

Умножая уравнение (3.197) на γ_5 и учитывая, что $\gamma_5^2 = 1$, получаем, что $\lambda^2 = 1$ и, следовательно, $\lambda = \pm 1$. Соответствующие собственные векторы могут быть легко построены. Действительно, возьмем произвольный спинор ψ и рассмотрим

$$\psi_R \equiv \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi \quad \text{и} \quad \psi_L \equiv \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi.$$

Тогда мы немедленно получаем, что

$$\gamma_5 \psi_R = \psi_R; \quad \gamma_5 \psi_L = -\psi_L.$$

Уравнение Вейля - это Дирака для безмассовых ($m = 0$) биспиноров $\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$ в киральном представлении:

$$i\partial_t \psi = (\hat{\alpha} \cdot \hat{p}) \psi \Rightarrow \begin{cases} i\partial_t \psi_R = +(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{p}) \psi_R, \\ i\partial_t \psi_L = -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{p}) \psi_L \end{cases}$$

(?? проверю!)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_R - m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L)$$

$$\psi_R \equiv \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi \quad \text{и} \quad \psi_L \equiv \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi$$

$$\gamma_5 \psi_R = \psi_R; \quad \gamma_5 \psi_L = -\psi_L.$$

$$\bar{\psi}_R = \frac{1}{2} \bar{\psi} (1 - \gamma_5); \quad \bar{\psi}_L = \frac{1}{2} \bar{\psi} (1 + \gamma_5).$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \psi &= \bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L \\ \bar{\psi} \gamma^\mu \psi &= \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R, \end{aligned}$$

Киральная инвариантность

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi$$

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi, \quad \alpha \neq \alpha(x)$$

При таких преобразованиях соответствующий сохраняющийся ток:

$$j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$$

в лагранжиане (3.136) нарушает кинематическую инвариантность $\bar{\psi} \psi \rightarrow \bar{\psi} e^{2i\alpha\gamma_5} \psi \neq \bar{\psi} \psi$. Как пока на классическом уровне

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2imj_5, \quad j_5 \equiv \bar{\psi} \gamma_5 \psi$$

О типичных моделях и применениях Вейлевских спиноров

(допишу обязательно)
(!???? квантовая аномалия???)

О майорановских спинорах

Основные формулы

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}$$

$$\psi_M = M\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ -i & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} \quad (\text{real})$$

In the Majorana basis all of the Dirac matrices are imaginary, and the spinors and Dirac equation are real:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix},$$

C is the charge conjugation matrix, which matches the Dirac version $C = i\gamma^2\gamma^0$. (! формулы Проена, так что нужно над метрикой подумать перед применением)

$$\psi_M \equiv M\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \psi,$$

две нижние компоненты которого в системе покоя $k_\mu = (m, 0, 0, 0)$ равны 0 при отсутствии внешнего поля. Спинор ψ_M также удовлетворяет уравнению Дирака с заменой $\gamma^\mu \rightarrow M\gamma^\mu M^{-1}$.

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \bar{\chi} \\ \pm\chi \end{pmatrix}$$

Это абсолютно нейтральный спинор.

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \\ \theta_\alpha \end{pmatrix} = \psi_M.$$

В киральном представлении

$$\mathbb{C}\psi_M = -\hat{\epsilon}\gamma_0\gamma_5\psi_M^* = \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}\theta^* \\ -\hat{\epsilon}\bar{\chi}^* \end{pmatrix}$$

Условие и его следствие:

$$\mathbb{C}\psi_M = \pm\psi_M$$

$$\theta = \pm\chi = \mp\hat{\epsilon}\bar{\chi}^*.$$

Откуда

$$\frac{1}{e}j_M^\mu = \bar{\psi}_M\gamma^\mu\psi_M = \chi\sigma^\mu\bar{\chi} + \bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\chi \equiv 0$$

Из дираковского действия $\frac{1}{2} \int d^4x \bar{\psi}_M(\not{p} - mc)\psi_M$

$$S_M = \frac{1}{2} \int d^4x \{ \chi p_\mu \sigma^\mu \bar{\chi} + \bar{\chi} p_\mu \bar{\sigma}^\mu \chi \mp mc(\chi\chi + \bar{\chi}\bar{\chi}) \},$$

последний вклад носит имя майорановского массового члена.

Опр:

$$\psi = \psi^C = B^{-1}\psi^*, \quad \text{i.e.} \quad \psi^* = B\psi,$$

(??? еще раз укажу, что за B матрица!?!?!)
(??? Chiral???) representation for $D = 4$:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2 \otimes \mathbb{1}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \sigma_3 \otimes \mathbb{1}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 \otimes \sigma_1,$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 \otimes \sigma_3. (\text{most min metr})$$

$$(\bar{\chi}\gamma_{\mu_1\dots\mu_r}\psi)^* = (\bar{\chi}\gamma_{\mu_1\dots\mu_r}\psi)^C = \bar{\chi}(\gamma_{\mu_1\dots\mu_r})^C\psi = \bar{\chi}\gamma_{\mu_1\dots\mu_r}$$

the reality conditions $\psi^C = \psi$ and $\bar{\chi}^C = \chi^C$ as well as (3.77) Hence, bilinears such as $\bar{\chi}\psi$ and $\bar{\chi}\gamma_{\mu_1\dots\mu_r}\psi$ are real.

Если ψ - майорановский спинор, то майорановскими спинорами также будут

$$i\gamma_5\psi; \quad i\gamma^\mu\psi; \quad \gamma^\mu\gamma_5\psi; \quad \gamma^{\mu\nu}\psi$$

Произвольный дираковский спинор ψ всегда можно единственным образом составить из двух майорановских спиноров ψ_- и ψ_+ :

$$\psi = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_- + \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_+.$$

зарядовое сопряжение переводит спиноры ψ_- и ψ_+ друг в друга:

$$\psi^C = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_+ + \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_-.$$

В терминах ψ_+ дираковский лагранжиан может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = \\ &= \frac{i}{2}\bar{\psi}_-\gamma^\mu\partial_\mu\psi_- + \frac{i}{2}\bar{\psi}_+\gamma^\mu\partial_\mu\psi_+ - m\bar{\psi}_-\psi_+ + \text{(full deriv.)} \end{aligned}$$

Пара свойств из Проена

(потом или выше их вставляю, или во 2ю 1ю передвину)

The mass term $m\bar{\chi}\chi = 0$ for a single pseudo-Majorana field. Pseudo-Majorana spinors must be massless (unless paired).

We now consider (pseudo-)Majorana spinors in even dimensions $D = 0, 2, 4 \bmod 8$. We can quickly show using (3.78) that these cases are somewhat different.

For $D = 2 \bmod 8$ we have $(\gamma_*\psi)^C = \gamma_*\psi^C$. Thus the two constraints

$$\text{Majorana: } \psi^C = \psi, \quad \text{Weyl: } P_{L,R}\psi = \psi,$$

are compatible. It is equivalent to observe that the chiral projections of a Majorana spinor ψ satisfy

$$(P_L\psi)^C = P_L\psi, \quad (P_R\psi)^C = P_R\psi$$

For $D = 4 \bmod 8$ dimensions we have $(\gamma_*\psi)^C = -\gamma_*\psi^C$, so that the equations of (3.84) are replaced by

$$(P_L\psi)^C = P_R\psi, \quad (P_R\psi)^C = P_L\psi$$

О типичных моделях и применениях Майорановских спиноров

Правое нейтрино:
(??? формулы)

Его нет в стандартной модели, потому что появился бы член взаимодействия его и левого нейтрино.

(???)
(забил на это, потом напишу когда-то.)

1.2 Main models of field theory

(Очень много книги Полякова сюда напишу. все не такое типичное - во 2ю 1ю часть!)

1.2.1 Formalisms, Symmetries**О лагранжевом формализме теории поля****Обзор лагранжева формализма**

$$S[\phi_i, \partial_\mu \phi_i] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$$

$$\delta S / \delta \phi = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \quad \forall \Phi_i.$$

О поле как пределе дискретных полей (?????)

(про это еще подумать лучше нужно)

Поле определяем как объект с бесконечным числом степеней свободы:

$$S = \int dt \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \Delta^3 x \mathcal{L}[\phi(x_n, t), \dot{\phi}(x_n, t), \nabla \phi(x_n, t)] = \int dt d^3x \mathcal{L}[\phi(x, t), \dot{\phi}(x, t), \nabla \phi(x, t)]$$

(философию наименьшего действия напишу потом, это важно! просто не до этого пока что.)

О других свойствах и деталях гамильтонова формализма в теории поля (??)**О гамильтоном формализме в теории поля****Обзор Гамильтонова формализма в теории поля**

$$H = p_\alpha \dot{r}^\alpha - L$$

$p_\alpha = \partial L / \partial \dot{r}^\alpha$. В частности, при $L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - U(\mathbf{r})$, имеем $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r})$.

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x})}, \quad \mathcal{H} = \pi(\mathbf{x}) \dot{\phi}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}, \quad H = \int d^3x \mathcal{H}$$

Уравнения Гамильтона:

$$\frac{\partial H}{\partial p_\beta} = \dot{r}^\beta, \quad \partial_\beta H = -\dot{p}_\beta,$$

и получаются (?? повторю) элементарно из дифференцирования гамильтониана, или из вариации действия, выраженного через функцию Гамильтона.

Из $S = \int \{p\dot{q} dt - H dt\} = \int_{t_0, q_0}^{t, q} p' dq' - H dt'$ следуют уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

Для движений в полях имеем выражение в виде

$$\left(\text{grad } S - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi\right)^2 + m^2 c^2 = 0,$$

ведь $\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2} + e\varphi$.

(??? тут про Г-Я через метрику, важное указание для метода ГЯ)

Скобки Пуассона это $\{F, H\}_P := \frac{\partial F}{\partial r^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial r^\alpha}$. Из них уравнения движения примут вид:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}_P$$

как раз расписав производные и подставив уравнения Гамильтона.

О других свойствах и деталях гамильтонова формализма в теории поля (??)

О теореме Нетер в теории поля (!!!??!!???????)

Суть теоремы Нетер

Suppose $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu F^\mu$, $S = \text{const}$, then

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) \equiv \partial_\mu F^\mu$$

$$j^\mu := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - F^\mu; \quad \partial_\mu j^\mu = -\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\delta\phi(x),$$

When the equation of motion is satisfied, j^μ is a conserved current:

$$\partial_\mu j^\mu = 0,$$

the spatial integral of j^0 is the conserved charge. This is Noether's theorem.

По Киселеву:

$$\partial^\mu = \sum_\Phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi} \cdot \frac{d\Phi}{du},$$

$$\partial_\mu\partial^\mu = 0,$$

Есть другая формула, более пригодная для вычислений. (? мб потом лучше напишу!!!!!!) Запишем симметрию действия в следующем виде. Пусть есть траектория $q(t)$ движения физической системы с функцией Лагранжа L и известно ее преобразование в другую траекторию, зависящее от непрерывного параметра a , соответствующее системе с той же функцией Лагранжа,

$$q_a(t_a) = q_a(a, q(t), t), \quad t_a = t_a(a, q(t), t),$$

Симметрия $dS/da = 0$, ток Нетер:

$$j^\nu := \mathcal{L} \frac{\partial x^\nu}{\partial a} + \sum_\Phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\nu\Phi} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a} - \frac{\partial x^\lambda}{\partial a} \partial_\lambda\Phi \right).$$

то есть $\frac{dS}{da} = \int_{t_a^{(1)}(a, q_1, t_1)}^{t_a^{(2)}(a, q_2, t_2)} \frac{d}{dt_a} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left(\frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) + L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right\} dt_a, \quad \dot{q}_a \equiv \frac{dq_a}{dt_a}.$

(?????? тут проблема большая, эти формулы просто разные, общая картина так и не сформировалась, нужно все додумать!!!!)

Запомнить j^ν можно так: (!!!!!!!!!)

1) Везде $q_a, t_a, \dot{q}_a$.

2) По размерности имеем функцию Лагранжа на время (?????)

3) В интеграле Нетер есть сумма двух членов: производная от функции Лагранжа по измененной скорости и сама функция лагранжа. Для верной размерности, первый член домножается на $\frac{dq_a}{da} = \frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a}$.

Второй член - просто домножается на производную по времени.

(!!! также все в контексте полей перепису, координаты частицы нам не нужны!!!)

Иллюстративные примеры симметрий

(???? нужно это еще раз вывести!)

- Для пространственных сдвигов (трансляций) сохраняется импульс

(допишу формулу)

- Если имеется потенциал, который меняется во времени, однако в пространстве он постоянен - сохраняется импульс, а что энергия будет меняться - уже другой вопрос. Конечно, это абстрактный пример.

- Для временных трансляций $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}, t_a = t - a$ по теореме Нетер сохраняется энергия:

$$E := \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} - L,$$

Можно представить, что у нас потенциал неоднороден в пространстве, однако во времени он постоянен - поэтому во времени и сохраняется энергия.

- Для вращений $x_a = x \cos a - y \sin a, y_a = y \cos a + x \sin a$ сохраняется момент импульса

$$\ell_z := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(-y) + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}x = xp_y - yp_x.$$

- Для преобразований Галилея $\mathbf{r}_a = \mathbf{r} + \mathbf{v}_a t, t_a = t$, получаем (?? конкретнее как - допишу)

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad L_0 = \frac{1}{2}mv^2$$

- Для преобразований Лоренца $x_u \approx x - ut, t_u \approx t - \frac{u}{c^2}x$ ток равен $\mathcal{I} = \frac{\partial L}{\partial v} \left(-t + v \frac{x}{c^2} \right) - L \frac{x}{c^2}$ для свободной частицы $x(t) = x_0 + vt$ из $\frac{d\mathcal{I}}{dt} \equiv 0$ получаем

$$L(v) = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx L_0 - L_0 \frac{v^2}{2c^2} + \dots$$

О случаях применения теоремы Нетер (?)

(пока это просто теор конструкция для меня, но наверняка от нее разную пользу можно получать. напишу потом)

О доказательствах теоремы Нетер

(привожу лучшее и потом обзор короткий словами разных других)

Запишем преобразования координат и времени в зависимости от параметра в общем случае, дальше просто продифференцируем по параметру (???)

$$\frac{dS}{da} = \frac{d}{da} \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} L(q_a, \dot{q}_a, t_a) dt_a = L \frac{\partial t_a}{\partial a} \Big|_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} + \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} \frac{dq_a}{da} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{d\dot{q}_a}{da} \right\} dt_a.$$

Самое тут сложное в аккуратных технических выкладках.
(потом оттренирую их)

О другом про теорему Нетер

(Указание про тождество Уорда Такахаши, типа в КТП там это обобщает т Нетер, пока в КТП об этом напишу.)

j токи и источники

Токи в общем случае

(Основные формулы тока)
(соберу потом, порешаю еще задачи)
(какая связь тока в теории поля с известным током из теории электричества???)

Токи в электродинамике

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}.$$
$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v};$$
$$j^i = (c\rho, \mathbf{j}).$$

(Другие формулы и свойства токов)

О метрике как внешнем поле

(мощный известный метод, тут суть метода, мб 1/2 страницы, основные формулы)
(тут типичные примеры)
(тут абзац, что в БИ теории тоже это вроде как ключевое для вывода, но это еще перечу)

Classical Field Theory

For an infinitesimal passive translation $x \rightarrow x - a$, we equivalently have $\phi \rightarrow \phi'$ where

$$\phi'(x) = \phi(x + a) = \phi(x) + a^\mu \partial_\mu \phi(x)$$

The total derivative is $a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$, the conserved current is

$$j^\mu = a_\nu (\pi_\mu \partial^\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L})$$

The four conserved currents above may be combined into the stress-energy tensor,

$$T^\mu{}_\nu = \pi^\mu \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}, \quad \partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0.$$

The conserved charges are the physical energy and momenta of the field; $T^{00} = \mathcal{H}$ is the energy density and T^{0i} is the momentum density. Note that these quantities are bilinear in the fields, as physical observables generally are.

Noether charges are tensorial, that is, if $T^{\mu\nu\cdots}$ is a tensor, then

$$Q^{\nu\cdots} = \int d^3x T^{0\nu\cdots}$$

is a tensor as well, which is independent of the spatial surface used for the integral. For example, the total energy and momentum form a four-vector.

- The energy-momentum tensor is ambiguous, as we could also take

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho \Gamma^{\rho\mu\nu}$$

Γ is antisymmetric in its first two indices, so Θ is also conserved. It is convenient to choose Γ so that Θ is symmetric, yielding the so-called Belinfante tensor (??? он нужен??), but this still leaves further freedom; it is removed in general relativity, the physical stress-energy tensor is the one which appears in the Einstein field equation.

If $\omega^\mu{}_\nu x^\nu$ is replacing a^μ , then the current is: (?? проверю??)

$$j^\mu = -\omega^\rho{}_\nu T^\mu{}_\rho x^\nu = \frac{1}{2} \omega_{\rho\nu} (T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu)$$

we used the antisymmetry of $\omega_{\rho\nu}$. Note that this current is only conserved if $T^{\mu\nu}$ is properly symmetrized.

- The six symmetries can hence be packaged into a rank three tensor, representing the relativistic analogue of angular momentum density,

$$(\mathcal{J}^\mu)^{\rho\sigma} = x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho}$$

For each choice of ρ and ω , there is a conserved current. For spacelike indices we get angular momentum, while choosing $\rho = 0$ and $\sigma = i$ gives "conservation of the velocity of the center of energy". When we work with spinor and vector fields, we'll get more terms due to the transformation of the fields themselves, which will correspond to spin angular momentum.

• Stepping back, a field is a map $\phi : M \rightarrow T$ M is the base manifold and T is the target space. Translational symmetry can be thought of as either due to a "horizontal" change in M (by $x \rightarrow x + \delta x$) or due to a "vertical" change in T (by $\phi \rightarrow \phi + \delta x \phi'$). Above we've always chosen the vertical option, and all infinitesimal changes can be written in this form. Allowing horizontal transformations can be occasionally useful for clarity, and adds a factor $\delta x_\nu T^{\mu\nu}$ to the Noether current.

Note. Passive transformations need to be interpreted differently to count as symmetries. It is trivially true that physics is invariant under a change of coordinates. The content of symmetry by a passive transformation is that after such a transformation, the form of the equations remains the same. For example, Maxwell's equations look the same after a Lorentz transformation, but not after a Galilean transformation. We won't worry about this because we'll only use active transformations.

1.2.2 Symmetries, SSB, Higgs

Локальные и глобальные симметрии

Глобальные калибровочные преобразования для $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$ это

$$\phi \rightarrow e^{-ie\alpha} \phi; \quad \phi^* \rightarrow e^{ie\alpha} \phi^*, \quad \alpha \neq \alpha(x).$$

Локальные калибровочные преобразования - это фазовые вращения с $\alpha = \alpha(x)$:

$$\phi \rightarrow e^{-ie\alpha(x)} \phi; \quad \phi^* \rightarrow e^{ie\alpha(x)} \phi^*; \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha(x).$$

Так как $\partial_\mu \phi \rightarrow e^{-ie\alpha(x)} (\partial_\mu \phi - ie \partial_\mu \alpha(x) \phi)$, $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha$, то для калибровочной инвариантности определяем

$$\mathcal{D}_\mu \phi \equiv \partial_\mu \phi - ie A_\mu \phi; \quad \mathcal{D}_\mu \phi^* \equiv \partial_\mu \phi^* + ie A_\mu \phi^*.$$

В итоге лагранжиан состоит из

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{D}_\mu \phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$$

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2$$

и уравнения движения

$$\mathcal{D}_\mu^2 \phi + V'(\phi^* \phi) \phi = 0$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu = -ie(\phi^* \mathcal{D}^\nu \phi - \phi \mathcal{D}^\nu \phi^*)$$

Глобальная абелева симметрия.

Пусть $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$, самосогласованными будут только теории с

$$V(\phi^* \phi) = c_1 + c_2 \phi^* \phi + c_3 (\phi^* \phi)^2$$

$$E' = \int d^3x (\partial_0 \phi^* \partial_0 \phi + \partial_i \phi^* \partial_i \phi + V(\phi^* \phi)),$$

Если $V = m^2 \phi^* \phi$, подставим

$$\phi = P + iS$$

имеем 2 вещественных поля

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu P)^2 - m^2 P^2 + (\partial_\mu S)^2 - m^2 S^2.$$

Если

$$V = m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

Вакуум

$$\phi_0 = 0.$$

симметрии:

$$\phi_0 \rightarrow e^{-ie\alpha} \phi_0 = \phi_0$$

Если

$$V = \lambda (\phi^* \phi - v^2)^2 = \lambda (P^2 + S^2 - v^2)^2$$

Через $P_1 \equiv P - P_0 = P - v$; $S_1 \equiv S - S_0 = S$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu P_1)^2 + (\partial_\mu S_1)^2 - \lambda ((P_1 + v)^2 + S_1^2 - v^2)^2 \approx (\partial_\mu P_1)^2 + (\partial_\mu S_1)^2 - 4\lambda v^2 P_1^2$$

(???? тут про голдст бозоны, ничего не усвоено про них пока что.)

Локальная абелева симметрия

Определим инвариантный относительно локальных калибровочных преобразований спектр электродинамики.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}^\mu \phi^* \mathcal{D}_\mu \phi - V(\phi^* \phi),$$

Если минимум единственный, $V = m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}^\mu \phi^* \mathcal{D}_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \approx -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi.$$

Если минимум не единственный,
Унитарная калибровка:

$$\phi(x) = I'(x),$$

P - вещественное скалярное поле.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + (\partial^\mu P + i\epsilon A^\mu P) (\partial_\mu P - i\epsilon A_\mu P) - \lambda (P^2 - v^2)^2 \\ &\approx -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + e^2 v^2 A_\mu^2 + (\partial_\mu P)^2 - 4\lambda v^2 P^2 \end{aligned}$$

$$\phi(x) \equiv \rho(x) e^{i\varphi(x)},$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |\partial_\mu\rho + i\rho\partial_\mu\varphi - ieA_\mu\rho|^2 - \lambda(\rho^2 - v^2)^2$$

$$B_\mu := A_\mu - \partial_\mu\varphi/e,$$

$$\mathcal{L}(B_\mu, \rho, \varphi) = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + (\partial_\mu\rho)^2 + e^2\rho^2 B_\mu^2 - \lambda(\rho^2 - v^2)^2$$

(??????????????? тут важные соображения, про которые потом подумаю.)

В заключение заметим, что, несмотря на то, что в зависимости от формы потенциала спектр частиц является различным, суммарное число степеней свободы остается неизменным. Действительно, как мы выяснили в Части 2.2, безмассовое векторное поле имеет 2 степени свободы, а массивное - 3.

Каждое вещественное скалярное поле дает еще одну степень свободы. Поэтому в случае тривиального вакуума число степеней свободы есть $2(A_\mu) + 1(P) + 1(S) = 4$, а в случае спонтанного нарушения симметрии - $3(A_\mu) + 1(P_1) = 4$.

Поэтому иногда говорят, что векторное поле "съедает" голдстоуновский бозон и в результате этого приобретает массу.

Механизма Хиггса для скалярного поля и потенциала сомбреро (????)

(тут абзац с сутью происходящего!!! физическая идея!)

$$S = \int d^4x \{ \partial_\mu\phi^* \partial^\mu\phi - V(\phi^*, \phi) \}, \quad V = \frac{\lambda}{4} \left(\phi^*\phi - \frac{v^2}{2} \right)^2,$$

Решаем подстановкой $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \chi(x))e^{-i\sigma(x)/v}$, тогда

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 + \frac{1}{2} \left(1 + 2\frac{\chi}{v} + \frac{\chi^2}{v^2} \right) (\partial_\mu\sigma)^2 - \frac{\lambda}{4} \left(v\chi + \frac{\chi^2}{2} \right)^2$$

Об механизме Хиггса (?????)

(потом напишу, не до него)

$$S = \int d^4x \left\{ (D_\mu\phi)^* D_\mu\phi - \frac{\lambda}{4} \left(\phi^*\phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \right\}, \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x).$$

О теореме Голдстоуна (!!!!!)

(!!! очень хотелось бы дописать!)

Теорема Голдстоуна: При спонтанном нарушении глобальной калибровочной симметрии в спектре теории присутствуют $\dim G - \dim H$ безмассовых скалярных частиц φ_i и $\dim R - \dim G + \dim H$ в общем случае массивных скалярных частиц $\tilde{\varphi}_i$.

При этом безмассовые скалярные частицы, возникающие при спонтанном нарушении глобальной калибровочной симметрии, называются голдстоуновскими бозонами.

О применениях СНС в физике твердого тела (????)

(??? там что-то крайне схожее с этим, я хз. это то же самое или нет????)

1.2.3 Nonabelian fields

Основные формулы полей Янга-Миллса

(запросто выпишу из Степаньянца, там крутая теория, сейчас не до этого просто)

1.2.4 Overview of Gauge Field Models (!?)

(самая суть книги Полякова! подробнее много всего хорошего выделено во 2ю 1ю часть.)

Главные киральные поля по Полякову

Главное киральное поле описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e_0^2} \text{Tr} (\partial_\mu g^{-1} \partial_\mu g), \quad (1/e_0^2 = \beta \gg 1, \quad g \in G).$$

(строчка, почему это такое и откуда это следует?!!)

Инфракрасное взаимодействие безмассовых частиц с ним оказывается логарифмически сильным. Проясним структуру этого логарифмического взаимодействия.

Рассмотрим эффективный лагранжиан для этой теории в однопетлевом приближении. Чтобы найти его, представим квантовое поле $g(x)$ в виде

$$g(x) = h(x)g_{\text{cl}}(x),$$

g_{cl} - какое-нибудь классическое решение соответствующих уравнений движения

$$\partial_\mu R_\mu^{\text{cl}} = 0, \quad R_\mu = \partial_\mu g \cdot g^{-1}.$$

(тут много пояснений коротких, что происходит?!)
(потом самые важные темы допишу тоже!)

Модель n -поля

Неабелевы калибровочные поля при $D = 4$

1.2.5 QCD, Standard Model: main concepts

(For now, see my note on QFT and particle physics. I'll start thinking about it by reading Polyakov's book.)

1.2.6 Solitons, monopoles, kinks, vortices: main concepts

(for now see about it my note on duality and on special physics theories)

2 Parts of Typical Field Theory in a Nutshell

2.1 Classical electrodynamics and special relativity: basics

2.1.1 Main Laws and Ideas of SR

О преобразованиях Лоренца и законах кинематики

Основные упрощенные законы СТО

Пусть система $K'(ct', x')$ движется относительно $K(ct, x)$ со скоростью $v \parallel X$. Преобразования Лоренца имеет вид:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix},$$

$\beta(v) = \frac{v}{c}, \gamma(v) = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. В обратную сторону был бы знак (+) везде в матрице Лоренца, ведь назад переход - буст со скоростью $-v$. Всегда $\gamma \geq 1$. Для теорфиза и анализов уравнений эта форма преобразований Лоренца удобнее всего.

Для задач о простых явлениях скорее всего будут полезны преобразования Лоренца в виде:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$x' \approx x - vt + \frac{xv^2}{2c^2} \quad t' \approx t - \frac{vx}{c^2} + \frac{tv^2}{2c^2},$$

То есть иногда удобно написать $\Delta t' = \frac{\Delta t - \Delta x V/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \beta = V/c$. В частности, изменение времени в K' при сдвигах в K дается дифференциалом при постоянном времени t : $\Delta t'_{A'B'} = -\frac{\Delta x V/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu'}_{\bullet\mu} \Lambda^{\nu'}_{\bullet\nu} g'_{\mu'\nu'}$$

(тут коротко про метрический тензор в этом контексте!)

Через быстроту $\theta := c \operatorname{Arth} \frac{v}{c} = \frac{c}{2} \ln \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}$

$$\gamma \equiv \operatorname{ch} \theta, \quad \beta\gamma \equiv \operatorname{sh} \theta.$$

Для частиц

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$$

$$L(v^2) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\gamma(v)$$

При этом

$$\mathbf{p} = \mathbf{v} \frac{E}{c^2} = \beta E/c = \beta p_0$$

и в ультрарелятивистском случае $p = |\mathbf{p}| \approx E/c = p_0$.

Пусть относительно системы K движутся параллельно частица и другая система $v_{K'}$, причем $v_{K'} \parallel v_p$ относительно K , тогда

$$v'_p = \frac{v_{K'} + v_p}{1 + \frac{v_{K'} v_p}{c^2}}$$

(???? про гамильтонову форму законов напишу еще также, пока это не нужно было.)

Переходы величин интервалов времен и расстояний из одной системы отсчета в другую даются из тождества $ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2 dt^2/\gamma^2 \equiv c^2 d\tau^2$.

Основные формулы СТО в общем случае

Если движение системы происходит произвольном направлении, то

$$\mathbf{v}' = c \frac{d\mathbf{r}'}{dx'_0} = \mathbf{v} \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \frac{v \cdot \mathbf{u}}{c^2}} + \frac{\mathbf{u}}{\gamma} \frac{1}{1 - \frac{v \cdot \mathbf{u}}{c^2}} \left\{ \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}} (\gamma - 1) - \gamma \mathbf{u} \right\}.$$

По отдельности:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_{\perp} &= \mathbf{v}_{\perp} \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}}, & \mathbf{v}_{\perp} &= \mathbf{v}'_{\perp} \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{u}}{c^2}} \\ \mathbf{v}'_{\parallel} &= \frac{\mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{u}}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}}, & \mathbf{v}_{\parallel} &= \frac{\mathbf{v}'_{\parallel} + \mathbf{u}}{1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{u}}{c^2}} \end{aligned}$$

Для скоростей $\frac{\mathbf{u}}{c} = \tanh \vartheta$, $\frac{\mathbf{v}}{c} = \tanh \vartheta_1$, $\frac{\mathbf{v}'}{c} = \tanh \vartheta_2$, поэтому закон сложения скоростей будет иметь вид

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 - \vartheta.$$

(тут идея гиперболической геометрии, про которую я пока не думал, потому что не обязательно ее понимать)

Лоренцев буст в движущуюся K' из неподвижной K имеет вид:

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma \left\{ x_0 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{c} \right\} \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \frac{\mathbf{u}}{u} \left\{ \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{u} (\gamma - 1) - \gamma \beta x_0 \right\} \end{aligned}$$

Для этого разделим $\mathbf{r}_{\parallel} = r_{\parallel} \frac{\mathbf{u}}{u}$, и $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}$. Далее преобразуем продольные координаты, не преобразуем поперечные, собираем $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\perp} + \mathbf{r}'_{\parallel}$, получаю итоговые преобразования. (??? напишу четче, с формулами!)

Через быстроту $\theta = \arctan \frac{v}{c}$:

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0 \cosh \theta - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \sinh \theta \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \mathbf{e} \{ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) (\cosh \theta - 1) - x_0 \sinh \theta \}, \end{aligned}$$

Для малых скоростей:

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0 - (r \cdot \theta) \\ r' &= r - x_0 \theta \end{aligned}$$

в алгебраической форме: (??? тут лучшую формулу поставлю!)

$$\begin{aligned} x^{\mu} &= \left(1 - i \vec{K} \vec{\theta} \right)^n_{\nu} \cdot x^{\nu} \\ x'^k &= x^k + \omega^{kn} x_n \end{aligned}$$

$$\omega^{0\alpha} = -\omega^{\alpha 0} = \theta^{\alpha}.$$

О 4-скоростях и 4-ускорении, 4-импульсе

$$u^i := \frac{dx^i}{ds} \quad \text{or} \quad u^i := \frac{dx^i}{d\tau}.$$

Тут разница на c , суть определения это не меняет. В общем случае кривой метрики $v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{cdl}{\sqrt{g_{00}}dx^0}$. Квадрат скорости:

$$u^i u_i = 1. \quad \text{or} \quad u^i u_i = c^2$$

Из $u^m = \frac{1}{c} \frac{dx^m}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dx^m}{dt} \gamma(v)$ покомпонентно находим

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

4-ускорение

$$w^i := \frac{d^2 x^i}{ds^2} \equiv \frac{du^i}{ds} \quad \text{or} \quad w^i := \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \equiv \frac{du^i}{d\tau}$$

$$u_i w^i = 0$$

ведь $u_n \cdot w^n = u_n \frac{du^n}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} g_{mn} u^n u^m = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} u^2 = 0$.

Если у нас ускорение постоянно относительно покоящейся системы, то школьная кинематика решает задачу.

Если у нас ускорение постоянно относительно подвижной системы.

$$A = \gamma \begin{pmatrix} \dot{\gamma} c \\ \dot{\gamma} u + \gamma a \end{pmatrix} \quad \dot{\gamma} := d\gamma/dt$$

(???? допишу точнее переход!!!)

Связь ускорений в подвижной a' и неподвижной $\dot{u}$ системах отсчета:

$$\dot{u} = (1 - u^2/c^2)^{3/2} a' \quad \gamma^{-3/2} \text{ (law)}$$

If we assume that $u = 0$ when $t = 0$,

$$u = \frac{a' ct}{\sqrt{c^2 + a'^2 t^2}} \Rightarrow \gamma(t) = \sqrt{1 + \frac{a'^2 t^2}{c^2}}$$

$$x = \frac{c}{a'} \left(\sqrt{c^2 + a'^2 t^2} - c \right)$$

Время путешественника τ связано с временем неподвижного наблюдателя T как $\tau = \int_0^T \frac{dt}{\gamma}$. Подставим $dt = \gamma^3 dv/a'$, получим

$$\tau = \frac{1}{a'} \int_0^T \gamma^2 dv = \frac{1}{a'} \int_0^T \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c}{2|\dot{v}|} \ln \left| \frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right|,$$

или через время неподвижного наблюдателя

$$\tau = \int_0^T \frac{cdt}{\sqrt{c^2 + a'^2 t^2}} = \frac{c}{a'} \text{ArcSh} \left(\frac{a' T}{c} \right)$$

(!!! тренирую еще кинематику в задачах, мб какая-то важная формула тут упущена???)
4-импульс:

$$p^\mu = m u^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right).$$

Тут временная компонента: $c \cdot p_0 = E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = mv^2\gamma + mc^2/\gamma = mc^2\gamma$, и пространственная - обычный импульс: $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v}\gamma$.

(???) связать с компонентами 4-скорости - производной координат по инвариантному собственному времени частицы $d\tau = dt/\gamma$:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma(c, \mathbf{v}), \quad u^\mu u_\mu = \gamma^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = c^2.$$

К виду 4-импульса можно прийти, делая переход от времени в интеграле действия к интегралу по собственному времени. (?? поч???) Тогда, расписывая $ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$,

$$S = -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau = -mc \int \sqrt{u^\mu u_\mu} d\tau = \int \tilde{L}(u^2) d\tau,$$

откуда переход от 4-скорости к 4-импульсу в механике дает $p_\mu = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\mu} = mc \frac{2u_\mu}{2\sqrt{u^2}} = mu_\mu$, использовано $u^2 = c^2$ для 4-вектора скорости.

О свойствах пространства Минковского

$$dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} dx^{\nu}$$

Какая компонента больше, так и называется интервал:

$$\begin{aligned} ds^2 > 0 & \quad a = (+\sqrt{a^2}, 0, 0, 0) & \text{времениподобный,} \\ ds^2 = 0 & \quad a = (1, 0, 0, 1) & \text{изотропный,} \\ ds^2 < 0 & \quad a = (0, 0, 0, \sqrt{-a^2}), & \text{пространственноподобный.} \end{aligned}$$

Времениподобные - соответствующие реальным событиям, так как тут $v < c$, временная часть больше, чем пространственная.

О выводах основных законов СТО

Преобразования Лоренца - изометрии пространства Минковского. Рассмотрим для простоты 1+1 мерное пространство, в нам возьмем произвольную матрицу $\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, наложим на нее условие матрицы Лоренца $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$, а также изометрию: $\det \Lambda = 1, \Lambda^0_0 \geq 1$. Получаем $\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a^2 - b^2 = 1$, параметризуем $a = \text{ch } \vartheta, b = -\text{sh } \vartheta$, в итоге:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \text{ch } \vartheta & -\text{sh } \vartheta \\ -\text{sh } \vartheta & \text{ch } \vartheta \end{pmatrix}.$$

Последнее - сказать, что если центр $K', (ct', 0)$, движется со скоростью v , тогда у него $x = vt$. Подставим, получим $\tanh \vartheta = \frac{v}{c} \equiv \beta$, отсюда $\text{ch } \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

О замедлении времени

Время в рамках СТО - просто параметр, который разным образом линейно увеличивается в разных системах отсчета. (? мб когда-то глубже пойму - допишу)

Эффект замедления хода времени:

$$d\tau_0 = \frac{dt}{\gamma} \equiv \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad d\tau_0 \leq dt$$

тут τ_0 - время в движущейся системе, t - время в системе наблюдателя движения. То есть часы в движущейся системе покажут меньшее время за прохождение некоторого расстояния, чем в системе, наблюдается их движение. Или наоборот, часы в системе отсчета, относительно которой они движутся, покажут большее время, чем в собственной системе. Грубо говоря, если движущаяся с некоторой скоростью относительно нас частица прожила 1 секунду, пройдя 1 метр, то мы увидим, что она прожила 1 минуту. Или наоборот, если мы видим движущуюся частицу 1 минуту, а в ее системе проходит 1 секунда.

(абзац про экспериментальную проверку)

О сокращении длины

$$l_0 = \gamma l \equiv \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad l_0 \geq l,$$

l_0 - собственная длина, l - длина в системе отсчета, относительно которой он движется. То есть палка в собственной системе имеет длину большую, чем в системе, она движется (длина сокращается). Или наоборот, палка в системе отсчета, относительно которой она движется, имеет меньшую длину, чем ее собственная длина. Грубо говоря, если движущаяся с некоторой скоростью относительно нас палка имеет длину 1 метр, то мы увидим, что она имеет длину 1 сантиметр. Или наоборот, если мы видим движущуюся палку длиной 1 сантиметр, то в ее настоящая длина может быть 1 метр. Например, длинная палка может в некоторой системе отсчета поместиться в короткий сарай.

(абзац про экспериментальную проверку)

Об идее относительности и ее реализации в рамках СТО

Что такое относительность?

(тут важные рассуждения про скорость, ускорение, пространство, потом допишу)



Хотелось бы, чтобы все было относительно, чтобы один наблюдатель мог описывать весь мир в своей системе отсчета, а при переходе в другую систему отсчета в общем случае все бы менялось.

(абзац про то, что важно не думать про относительность, когда не нужно. много физика была открыта только лишь потому что люди верили, что все работает, и все. а философские идеи относительности только тормозили часто все. А иногда и не тормозили. Просто особо циклиться на этом - плохая идея, если вы не выбрали это отдельно исследовать в данные месяцы.)

Также физично предположить, что должна быть некоторая конечная скорость распространения сигнала. Сигнал - то, что быстрее всего движется, то есть свет. Ничто не мешает предполагать иначе, но если мы верим, что все в мире конечно, то более физично именно иметь конечную скорость света.

Понимая это, можно вообразить переходы в подвижные системы в простейшем случае, так и вывести преобразования Лоренца. Зная их, можно рассмотреть разные частные особые случаи, так и догадаться до Допплера, Томаса, абберрации. Можно про них больше думать, и так развить много практических приложений СТО.

Как догадаться до СТО?

(важный вопрос, потом точно напишу. Так на вскидку - поверить, что скорость света постоянна и от нее вывести, как должна система координат преобразовываться. А поля - функции от координат, из законов их преобразований и находим другие свойства. Однако я напишу точнее потом, пару раз выведу сперва все формулы еще раз!!!)

Об концепции эфира

(Такое скорее всего все-таки существует, однако я про это мало думал и ни одной рабочей формулы не знаю. да и вряд ли кто-то знает)

Суть философии группы Пуанкаре и схемы Вигнера

Считаем, что поля - представления группы Пуанкаре. Ищем представления и получаем свойства всех полей.

(еще раз, абзац про идею вывода уравнений поля, потому что в нее все и упирается. По сути Киселев это же писал, но я понятнее напишу)

Об проверках верности СТО (?)

(постепенно другие общие важные соображения буду вписывать.)

О величине скорости света (!??!)

(тоже укажу суть того, что напишу в 2й части про это. тоже есть вопросы про это.)

О принципе причинности и его следствиях

там из него как-то следует, что производные по времени могут быть не более чем вторые, я хз, почему это так.

(???)

О тестах и экспериментальной проверке СТО

(тоже суть важно написать, но мне вечно не до этого.)

О связи СТО с другими разделами физики (??)

О расширении СТО до ОТО

(пока просто думаю, что метрика становится недиагональной.)

2.1.2 Poincare group, rotations

(пишу упрощенную формулу -> после нее полную)

Инфинитезимальные преобразования и определения генераторов

$$x \rightarrow x' = \Lambda x \quad \rightarrow \quad \Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu.$$

From $\Lambda^\mu_\sigma \eta^{\sigma\tau} \Lambda^\nu_\tau = \eta^{\mu\nu}$

$$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}, \quad (\text{antisymmetric matrices})$$

(! еще раз это перевыведу!)

Преобразования Лоренца при произвольно направленной скорости совместно с поворотами 3-мерного пространства образуют собственную (относительно поворотов, +) ортохронную (относительно бустов $\uparrow$) связную компоненту группы Лоренца:

$$SO^{\uparrow}_+(3,1), \quad \det L = 1, \quad \det R = 1.$$

Алгебра группы Лоренца - алгебра бустов $\mathbf{j}^\gamma$ и вращений γ ,

$$[\mathbf{j}^\alpha, \mathbf{j}^\beta] = +i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{j}^\gamma, \quad [\mathbf{j}^\alpha, \mathbf{K}^\beta] = +i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{K}^\gamma \quad [\mathbf{K}^\alpha, \mathbf{K}^\beta] = -i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{j}^\gamma$$

(пара дополнений про это)

Алгебра Пуанкаре - алгебра Лоренца, а также сдвиги. В пространстве Минковского:

$$p_\nu := i\hbar\partial_\nu \quad (+ \text{ sign is here!})$$

$$p^2 := p_\nu p^\nu, \quad p_\nu \equiv i\hbar\partial_\nu, \quad p_\mu = i\hbar \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad p^\mu = i\hbar \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad \eta = (+, -, -, -),$$

$$\mathbf{k} := \mathbf{p}/\hbar;$$

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu = \exp \{ \partial_\nu a^\nu \} x^\mu \equiv \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} p_\nu a^\nu \right\} x^\mu, \quad (- \text{ sign is here!})$$

В трехмерном пространстве:

$$x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha = T(a)x^\alpha$$

$$T(a)x^\alpha = x^\alpha + a^\alpha = (1 + a^\beta \partial_\beta) x^\alpha = (1 + ip_\beta a^\beta) x^\alpha$$

$$p_\beta = -i\partial_\beta.$$

То есть $-i\hbar\nabla\phi_k(x) = \hbar\mathbf{k}\phi_k(x)$, потому что набла - ковектор. Для полей $A'_\mu(x') = A_\mu(x)$, поэтому из $A'_\mu(x') = A'_\mu(x+a) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} p_\nu a^\nu \right\} A'_\mu(x)$ получим

$$A'_\mu(x) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} p_\nu a^\nu \right\} A_\mu(x). \quad (+ \text{ sign is here!})$$

Вектор Паули-Любанского это $W^\mu := -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\rho}p_\nu S_{\lambda\rho} \equiv \frac{1}{2}p_\nu \tilde{S}^{\mu\nu}$

(???? у Бухбиндера определение через J , не S , почему??? пока считаю что Киселев прав, но это додумывать нужно, допишу тут многие его свойства!!!!),

Вектор ПЛ преобразуется как вектор при вращениях (? додумаю док-во по Киселеву).

Найти его можно перебором комбинаций генераторов и дуальных к ним (? лучшего вывода пока не знаю). W^2 - оператор казимира, он имеет вид

$$W^2 := -\frac{1}{2} \{ p^2 S^2 - 2p_\nu S^{\nu\rho} p^\lambda S_{\lambda\rho} \} \quad (\text{что считается прямо}).$$

$$[p_\mu, p_\nu] = 0, \quad [p_\mu, S_{\lambda\rho}] = 0.$$

Коммутаторы в Евклидовом пространстве:

$$[j_{\mathbb{E}}^\alpha, p_{\mathbb{E}}^\beta] = i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} p_{\mathbb{E}}^\gamma, \quad [j_{\mathbb{E}}^\alpha, p_0] = 0,$$

$$[\tilde{j}_{\mathbb{E}}^\alpha, p_{\mathbb{E}}^\beta] = i\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta} p_0, \quad [\tilde{j}_{\mathbb{E}}^\alpha, p_0] = ip_{\mathbb{E}}^\alpha.$$

$$[j_{\mathbb{E}}^\alpha, p^2] = [\tilde{j}_{\mathbb{E}}^\alpha, p^2] = 0$$

Коммутаторы в Минковском:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\mu'\nu'}] = -i\hbar \{ g_{\mu\mu'} J_{\nu\nu'} - g_{\mu\nu'} J_{\nu\mu'} + g_{\nu\nu'} J_{\mu\mu'} - g_{\nu\mu'} J_{\mu\nu'} \},$$

$$[J_{\mu\nu}, p_\lambda] = -i\hbar \{ g_{\mu\lambda} p_\nu - g_{\nu\lambda} p_\mu \}.$$

(там вообще много разных свойств и выводов, крутая математика, однако я не думаю, что она нужна, так что пока в теории об этом, окажется, что нужна - добавлю сюда.)

Другие свойства группы Пуанкаре

Коммутаторы Паули-Любанского:

$$[j_{\mathbb{E}}^\alpha, W_{\mathbb{E}}^\beta] = i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} W_{\mathbb{E}}^\gamma, \quad [j_{\mathbb{E}}^\alpha, W_0] = 0,$$

$$[\tilde{j}_{\mathbb{E}}^\alpha, W_{\mathbb{E}}^\beta] = i\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta} W_0, \quad [\tilde{j}_{\mathbb{E}}^\alpha, W_0] = iW_{\mathbb{E}}^\alpha,$$

(??? это нужно вообще???)

Алгебра $\mathfrak{so}(3,1)$ - алгебра вращений и бустов

$$\frac{1}{2}\mathfrak{s}_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \equiv \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi} + \tilde{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\vartheta}$$

Генератор спина:

$$(\mathfrak{s}_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma} := i \left\{ \delta_{\beta'}^{\beta} \delta_{\gamma'}^{\gamma} - \delta_{\gamma'}^{\beta} \delta_{\beta'}^{\gamma} \right\} := \frac{1}{\hbar} (S_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma}.$$

$$\mathfrak{s}_{\mu\nu} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^x & \tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^y & \tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^z \\ -\tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^x & 0 & \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^z & -\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^y \\ -\tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^y & -\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^z & 0 & \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^x \\ -\tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^z & \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^y & -\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^x & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha} = \mathfrak{s}_{0\alpha}, \quad \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\alpha} \mathfrak{s}_{\beta\gamma}$$

тут острый $\mathfrak{s}$ - матрица, тильда $\tilde{\mathfrak{s}}$ - дуальный генератор вращений а.к.а. генератор бустов, $\mathbf{s}$ - обычный генератор вращений, а еще можно более матем корректно, говорить, что работаем с генератором со шляпкой $\hat{\mathfrak{s}}$ - генератором на fibre bundle $(\hat{\mathfrak{s}}_{\beta'\gamma'})_{\gamma}^{\beta} := \mathbb{1} \otimes (\mathfrak{s}_{\beta'\gamma'})_{\gamma}^{\beta}$. В явном виде:

$$(\mathfrak{s}_{\beta'\gamma'})_{\gamma}^{\beta} := i \left\{ \delta_{\beta'}^{\beta} \delta_{\gamma'}^{\gamma} - \delta_{\gamma'}^{\beta} \delta_{\beta'}^{\gamma} \right\} g_{\gamma\gamma} := \frac{1}{\hbar} (S_{\beta'})_{\gamma}^{\beta}; \quad (S_{\rho\lambda})^{\mu\nu} = i\hbar \left\{ \delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\lambda}^{\nu} - \delta_{\rho}^{\nu} \delta_{\lambda}^{\mu} \right\}$$

$$\Lambda = \exp\{-i(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi} + \tilde{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\vartheta})\} \quad (\text{boosts+rot})$$

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega_{\mu\nu} x^{\nu}$$

$$A^{\mu'}(x) = \left\{ g^{\mu'\nu'} - \frac{i}{2\hbar} J_{\mu\nu}^{\mu'\nu'} \omega^{\mu\nu} \right\} A_{\nu'}(x) \equiv \left\{ g^{\mu'\nu'} - \frac{i}{2} j_{\mu\nu}^{\mu'\nu'} \omega^{\mu\nu} \right\} A_{\nu'}(x)$$

(???? я вот хотел бы все-таки проэкспоненциировать это преобразование и увидеть макро вид преобразования! пока не уверен, как это будет выглядеть???)

$$J_{\mu\nu} = \hat{L}_{\mu\nu} + \hat{S}_{\mu\nu} \equiv \hbar j_{\mu\nu}$$

$$(L_{\mu\nu})^{\mu'\nu'} := i\hbar g^{\mu'\nu'} (x_{\mu} \partial_{\nu} - x_{\nu} \partial_{\mu}), \quad (S_{\mu\nu})^{\mu'\nu'} := i\hbar \left\{ \delta_{\mu}^{\mu'} \delta_{\nu}^{\nu'} - \delta_{\nu}^{\mu'} \delta_{\mu}^{\nu'} \right\}$$

Генератор углового момента - аналогичен:

$$\ell_{\mu\nu} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \tilde{l}_{\mathbb{E}}^x & \tilde{l}_{\mathbb{E}}^y & \tilde{l}_{\mathbb{E}}^z \\ -\tilde{l}_{\mathbb{E}}^x & 0 & l_{\mathbb{E}}^z & -l_{\mathbb{E}}^y \\ -\tilde{l}_{\mathbb{E}}^y & -l_{\mathbb{E}}^z & 0 & l_{\mathbb{E}}^x \\ -\tilde{l}_{\mathbb{E}}^z & l_{\mathbb{E}}^y & -l_{\mathbb{E}}^x & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{\rho\lambda} := \{x_{\rho} p_{\lambda} - x_{\lambda} p_{\rho}\} := \hbar \ell_{\rho\lambda}, \quad p_{\lambda} \equiv i\hbar \partial_{\lambda}, \quad (\hat{\ell}_{\rho\lambda})^{\mu\nu} := \ell_{\rho\lambda} \otimes g^{\mu\nu}.$$

$$[\mathbf{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \mathbf{j}_{\mathbb{E}}^{\beta}] = +i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{j}_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad [\mathbf{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{\mathbf{j}}_{\mathbb{E}}^{\beta}] = +i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \tilde{\mathbf{j}}_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad [\tilde{\mathbf{j}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{\mathbf{j}}_{\mathbb{E}}^{\beta}] = -i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{j}_{\mathbb{E}}^{\gamma}$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\mu'\nu'}] = -i\hbar \{g_{\mu\mu'} J_{\nu\nu'} - g_{\mu\nu'} J_{\nu\mu'} + g_{\nu\nu'} J_{\mu\mu'} - g_{\nu\mu'} J_{\mu\nu'}\},$$

Генератор полного момента:

$$(\mathbf{j}_{\beta'\gamma'})_{\gamma}^{\beta} := (\hat{\ell}_{\beta'\gamma'})_{\gamma}^{\beta} + (\hat{\mathfrak{s}}_{\beta'\gamma'})_{\gamma}^{\beta},$$

Казимиры (???)

$$\mathbf{s}^{\uparrow} = \frac{1}{2}(\mathbf{s} + i\tilde{\mathbf{s}}), \quad \mathbf{s}^{\downarrow} = \frac{1}{2}(\mathbf{s} - i\tilde{\mathbf{s}})$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^\uparrow \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{s}^\downarrow, \quad \tilde{\mathbf{s}} = -\mathbf{i} (\mathbf{s}^\uparrow \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes \mathbf{s}^\downarrow)$$

$$\left[\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\uparrow\alpha}, \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\uparrow\beta} \right] = \mathbf{i} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\uparrow\gamma}, \quad \left[\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\downarrow\alpha}, \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\downarrow\beta} \right] = \mathbf{i} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\downarrow\gamma}, \quad \left[\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\uparrow\alpha}, \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\downarrow\beta} \right] = 0,$$

$$\left[\left(\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\uparrow} \right)^2, \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\uparrow\beta} \right] = 0, \quad \left[\left(\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\downarrow} \right)^2, \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\downarrow\beta} \right] = 0.$$

$$(\mathbf{s}^\uparrow)^2 \bar{\chi}(x) = \mathbf{s}_u (\mathbf{s}_u + 1) \bar{\chi}(x), \quad \mathbf{s}_u - \text{полуцелое или целое, } \mathbf{s}_u \geq 0,$$

$$\mathbf{s}_3^\uparrow \bar{\chi}(x) = m_u \bar{\chi}(x), \quad m_u \in \{\mathbf{s}_u, \mathbf{s}_u - 1, \dots, 1 - \mathbf{s}_u, -\mathbf{s}_u\},$$

$$(\mathbf{s}^\downarrow)^2 \theta(x) = \mathbf{s}_d (\mathbf{s}_d + 1) \theta(x), \quad \mathbf{s}_d - \text{полуцелое или целое, } \mathbf{s}_d \geq 0,$$

$$\mathbf{s}_3^\downarrow \theta(x) = m_d \theta(x), \quad m_d \in \{\mathbf{s}_d, \mathbf{s}_d - 1, \dots, 1 - \mathbf{s}_d, -\mathbf{s}_d\}.$$

$$J_{kn} = L_{kn} + S_{kn}, \quad L_{kn} = \mathbf{i} \hbar (x_k \partial_n - x_n \partial_k), \quad S_{kn}^{ml} = \mathbf{i} \hbar \{ \delta_k^m \delta_n^l - \delta_n^m \delta_k^l \}$$

$$A^m(x) = \left\{ \delta^{ml} - \frac{i}{2\hbar} J_{kn}^{ml} \omega^{kn} \right\} A_l(x)$$

(???????)
малого буста θ^α

$$\omega^{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \phi^\gamma, \quad \omega^{0\alpha} = \theta^\alpha$$

Вращения в (3+1)D пространстве

$$x'^\alpha = x^\alpha + \omega^{\alpha\beta} x_\beta$$

$$\delta_S A^\beta = \omega^{\beta\gamma} A_\gamma = -\frac{i}{2} (\mathfrak{s}_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma} \omega^{\beta'\gamma'} A_\gamma$$

$$\delta_L A^\beta = \frac{1}{2} l_{\alpha'\beta'} \omega^{\alpha'\beta'} A^\beta(r)$$

$$A'^\beta(x) = f^\beta(x) - \frac{i}{2} \omega^{\beta'\gamma'} (\mathbf{j}_{p'\gamma'})^{\beta\gamma} A_\gamma(x)$$

(???)

$$\begin{aligned} A'^\beta(\mathbf{r}) &= A^\beta(\mathbf{r}) + \delta_s A^\beta(\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{i}}{2} \ell_{\beta'\gamma'} \omega^{\beta'\gamma'} A^\beta(\mathbf{r}) = \\ &= A^\beta(\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{i}}{2} (\mathfrak{s}_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma} \omega^{\beta'\gamma'} A_\gamma - \frac{\mathbf{i}}{2} \ell_{\beta'\gamma'} \omega^{\beta'\gamma'} A^\beta(\mathbf{r}) = \\ &= (\mathbb{1} - (????)) \end{aligned}$$

Алгебра (3+1)D вращений:

$$(\mathfrak{s}_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma} := \mathbf{i} \left\{ \delta_{\beta'}^\beta \delta_{\gamma'}^\gamma - \delta_{\gamma'}^\beta \delta_{\beta'}^\gamma \right\} := \frac{1}{\hbar} (S_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma}.$$

$$L_{\alpha\beta} := \mathbf{i} \hbar \{ x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha \} = \{ x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha \}, \quad p_\alpha \equiv \mathbf{i} \hbar \partial_\alpha,$$

$$\ell_{\alpha\beta} := \mathbf{i} \{ x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha \} = \frac{1}{\hbar} L_{\alpha\beta},$$

(?? коммут соотн???)

Бусты

$$\Lambda(\vartheta) = \exp\{-i\tilde{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\vartheta}\} \equiv \text{ch } \vartheta - \sigma_1 \text{sh } \vartheta = \begin{pmatrix} \text{ch } \vartheta & -\text{sh } \vartheta \\ -\text{sh } \vartheta & \text{ch } \vartheta \end{pmatrix},$$

Действие на координаты, скаляры векторы:

$$x'^\mu = x^\mu + \{\delta_0^\mu \delta_\alpha^\nu - \delta_0^\nu \delta_\alpha^\mu\} \vartheta^\alpha x_\nu := x^\mu - i \{(\tilde{\mathbf{s}}_\mathbb{E})^{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_\mathbb{E}\} x_\nu,$$

$$A'^\mu(x') = \{\mathbb{1} - i(\tilde{\mathbf{s}}_\mathbb{E} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_\mathbb{E})\}^{\mu\nu} A_\nu(x) \equiv \left\{ \mathbb{1} - \frac{i}{2} \omega^{\rho\lambda} \mathfrak{s}_{\rho\lambda} \right\}^{\mu\nu} A_\nu(x) \equiv \left\{ \mathbb{1} - \frac{i}{2} \omega^{\rho\lambda} (\hat{\ell}_{\rho\lambda} + \hat{\mathbf{s}}_{\rho\lambda}) \right\}^{\mu\nu} A_\nu(x)$$

Генераторы:

$$\omega^{0\alpha} = -\omega^{\alpha 0} := \vartheta_\mathbb{E}^\alpha,$$

$$(\tilde{\mathbf{s}}_\mathbb{E}^\alpha)^{\mu\nu} = -(\tilde{s}_\alpha)^{\mu\nu} = i \{\delta_0^\mu \delta_\alpha^\nu - \delta_0^\nu \delta_\alpha^\mu\}$$

$$\mathfrak{s}_{0\alpha} := -\tilde{\mathbf{s}}_\alpha = \tilde{\mathbf{s}}_\mathbb{E}^\alpha := \frac{1}{\hbar} S_{0\alpha},$$

$$\ell_{0\alpha} = -\ell_{\alpha 0} := \tilde{\mathbf{l}}_\mathbb{E}^\alpha = i(x_0 \partial_\alpha - x_\alpha \partial_0).$$

$$\tilde{\mathbf{l}}_\mathbb{E}^\alpha \vartheta_\mathbb{E}^\alpha = \frac{1}{2} (\ell_{0\alpha} \omega^{0\alpha} + \ell_{\alpha 0} \omega^{\alpha 0}).$$

$$\hbar \tilde{\mathbf{j}}_\mathbb{E}^\alpha := \hat{L}_{0\alpha} + \hat{S}_{0\alpha} := \hbar \tilde{\mathbf{l}}_\mathbb{E}^\alpha + \hbar \tilde{\mathbf{s}}_\mathbb{E}^\alpha = -\hbar \tilde{\mathbf{j}}_\alpha$$

$$\tilde{\mathbf{j}}_\mathbb{E}^\alpha \mapsto \frac{1}{\hbar} L_{0\alpha}, \text{ т. е. } \tilde{\mathbf{j}}_\mathbb{E} \mapsto i \left(ct \boldsymbol{\nabla} + \frac{\mathbf{r}}{c} \partial_t \right) = \tilde{\mathbf{l}}_\mathbb{E}^\alpha$$

$$[\tilde{\mathbf{s}}_\mathbb{E}^\alpha, \tilde{\mathbf{s}}_\mathbb{E}^\beta] = -i \epsilon_\mathbb{E}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{s}_\mathbb{E}^\gamma$$

$$[\mathbf{l}_\mathbb{E}^\alpha, \tilde{\mathbf{l}}_\mathbb{E}^\beta] = -i \epsilon_\mathbb{E}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{l}_\mathbb{E}^\gamma.$$

Дуальность:

$$\tilde{\ell}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\rho} \ell_{\lambda\rho}.$$

$$\ell_{0\alpha} = \tilde{\mathbf{l}}_\mathbb{E}^\alpha, \quad \ell_{\beta\gamma} = \epsilon_\mathbb{E}^{\beta\gamma\alpha} \mathbf{l}_\mathbb{E}^\alpha,$$

$$\tilde{\ell}^{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{\beta\gamma 0\alpha} 2\tilde{\mathbf{l}}_\mathbb{E}^\alpha = \epsilon_\mathbb{E}^{\beta\gamma\alpha} \tilde{\mathbf{l}}_\mathbb{E}^\alpha,$$

$$\tilde{\ell}^{0\alpha} = \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \epsilon_\mathbb{E}^{\beta\gamma\alpha'} \mathbf{l}_\mathbb{E}^{\alpha'} = \mathbf{l}_\mathbb{E}^\alpha.$$

$$\ell_{\mu\nu} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\ell}_{\mu\nu}, \quad \mathbf{l}_\mathbb{E}^\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{l}}_\mathbb{E}^\alpha, \quad \tilde{\mathbf{l}}_\mathbb{E}^\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} -\mathbf{l}_\mathbb{E}^\alpha.$$

$$\tilde{S}^{\mu\nu} = -\hat{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\rho} S_{\lambda\rho}$$

(??? что за формула???)

Переход из 3D пространства в (3+1)D пространство

$$x_\alpha = g_{\alpha\beta} \mathbf{r}_E^\beta = -\mathbf{r}_E^\alpha, x^\alpha = g^{\alpha\gamma} x_\gamma = r_E^\alpha.$$

$$\phi_\beta = -\phi_E^\beta$$

$$A_E^\gamma = g^{\gamma\gamma'} A_{\gamma'} = -A_\gamma$$

$$\omega^{\alpha\beta} := -\hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \phi_\gamma,$$

$$(\mathbf{s}^\alpha)^{\mu\nu} = i\hat{\epsilon}^{0\alpha\mu\nu}$$

$$\left\{ (\mathbf{s}_E)^{\beta\gamma} \cdot \phi_E \right\} A_E^\gamma = \frac{1}{2} (\mathbf{s}_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma} \omega^{\beta'\gamma'} A_\gamma,$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}') = \mathbf{A}'(\mathbf{r}) + \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \phi_\beta x_\gamma \partial_\alpha \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}'(\mathbf{r}) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r_E^\alpha} \delta r_E^\alpha \equiv \mathbf{A}'(\mathbf{r}) + \delta r_E^\alpha \partial_\alpha \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

$$l^\alpha = \mathbf{l}_E^\alpha = \frac{i}{2} \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \{x_\beta \partial_\gamma - x_\gamma \partial_\beta\} = \frac{1}{2} \epsilon_E^{\alpha\beta\gamma} \ell_{\beta\gamma}.$$

$$\{\mathbf{l}_E \cdot \phi_E\} A_E^\beta = \frac{1}{2} \left(\hat{\ell}_{\beta'\gamma'} \right)^{\beta\gamma} \omega^{\beta'\gamma'} A_\gamma,$$

$$\mathbf{l} \cdot \phi = \mathbf{l}_E^\gamma \phi_E^\gamma = -l^\gamma \phi_\gamma = -\frac{1}{2} \ell_{\alpha\beta} \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \phi_\gamma := \frac{1}{2} \ell_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta},$$

$$\mathcal{A}_G(\mathbf{r}) = \left(1 - i\hat{j}_\gamma \phi_\gamma \right) \mathcal{A}(\mathbf{r}) = A'^\beta(\vec{r}) = A^\beta(\vec{r}) - \frac{i}{2} (\hat{l}_{\beta'\gamma'} + \hat{s}_{\beta'\gamma'})_\gamma^\beta \omega^{\beta'\gamma'} A^\gamma(\vec{r})$$

О 3D евклидовом пространстве

Вращения в 3D пространстве

(??? я про это уже писал, в квантмехе что ли?)

$$\Lambda = \exp(-i\mathbf{s} \cdot \phi)$$

$$\delta_S r_E^\alpha = -i \left(\vec{s}_E \cdot \vec{\phi}_E \right)^{\alpha\gamma} r_E^\gamma$$

$$\left(s_E^\beta \right)_E^{\alpha\gamma} = -i\epsilon_E^{\beta\alpha\gamma}.$$

$$\delta_S A^\alpha = -i \left(\vec{s}_E \cdot \vec{\phi}_E \right)^{\alpha\gamma} A^\gamma \quad \delta_S A_E^\beta := -i (s_E^\alpha)_E^{\beta\gamma} \phi_E^\alpha A_E^\gamma,$$

$$\delta_L A^\beta = i(\vec{l} \cdot \vec{\phi}) A^\beta(r)$$

$$\hat{l}_\alpha = -\frac{i}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (r_\beta \partial_\gamma - r_\gamma \partial_\beta)$$

$$\mathcal{A}_G(\mathbf{r}) = \left(1 - i\hat{j}_\gamma \phi_\gamma \right) \mathcal{A}(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{j} := \mathbf{l} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{s} \cong \mathbf{l} + \mathbf{s}.$$

$$\left(s_E^\beta \right)_E^{\alpha\gamma} = -i\epsilon_E^{\beta\alpha\gamma},$$

$$s_{\mathbb{E}}^x = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{\mathbb{E}}^y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{\mathbb{E}}^z = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{\ell} = \hbar \hat{l} = -i \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}$$

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$$

$$\mathbf{j} := \mathbf{l} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{s} \cong \mathbf{l} + \mathbf{s}$$

$$\mathbf{J} := \hbar \mathbf{j} \quad \mathbf{L} := \hbar \mathbf{l} \quad \mathbf{S} := \hbar \mathbf{s}$$

$$\mathbf{l} = \frac{1}{\hbar}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) := \frac{1}{\hbar} \mathbf{L},$$

$$[\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\beta}] = i\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad [\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^2, \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}] = 0$$

$$[\mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\beta}] = i\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad [\mathbf{l}_{\mathbb{E}}^2, \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}] = 0$$

$$[\mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\beta}] \equiv 0$$

$$s_{\pm} = s_x \pm i s_y, \quad s_+^{\dagger} = s_-, \quad s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Используем цилиндрические координаты $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, пусть новые имеют вместо угла θ угол $\theta + \varphi$, тогда

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv R_2(\phi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Свойства:

- ортогональность, O ,

$\det R = 1$, - специальные преобразования, S ,

$$R_2(\phi) R_2(-\phi) = \mathbb{1},$$

$$R_2(-\phi) = R_2^T = R_2^{-1}(\phi).$$

$$R_2(\phi_1) R_2(\phi_2) = R_2(\phi_1 + \phi_2)$$

$$R \cdot R^T = \mathbb{1},$$

и генераторы $l_z := i \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \phi} R_2(\phi) = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$(\gamma_{\alpha})_{\beta\gamma} = -i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

или

$$l_z = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad l_y = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad l_x = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[l_x, l_y] = i l_z, \quad [l_y, l_z] = i l_x, \quad [l_z, l_x] = i l_y$$

В общем случае

$$\delta_G f(\mathbf{x}) = f_G(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}} d_G \mathbf{x}^{\alpha}.$$

$$(1 + \delta_G) f(\mathbf{x}) \equiv (1 - i l_{\beta} \phi_{\beta}) f(\mathbf{x}),$$

так что можно найти

$$l_{\alpha} = -i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_{\beta} \partial_{\gamma} = -\frac{i}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (x_{\beta} \partial_{\gamma} - x_{\gamma} \partial_{\beta})$$

О квантовании спина (??)

(пара абзацев про это будет!)

О преобразовании полей

(не уверен, тут ли писать про это или в разделе про каждое поле выше, но пока тут пусть побудет этот раздел тоже.)

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x).$$

$$\partial_\mu \phi(x) \rightarrow \partial_\mu (\phi(\Lambda^{-1}x)) = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu (\partial_\nu \phi)(\Lambda^{-1}x)$$

при трехмерных вращениях $V^i(x) \rightarrow R^{ij}V^j(R^{-1}x)$;

при преобразованиях Лоренца $V^\mu(x) \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu(\Lambda^{-1}x)$.

(мб добавлю указание на глубокое понимание, почему конкретно именно такая конструкция, типа в двух местах матрицы преобразования, пока на уровне формул понимаю, но визуально плохо представляю. не актуально про это думать. будет время - спокойно поразмыслию и додумаю, все тут идейно понятно.)

Об алгебраических свойствах группы Пуанкаре (???)**Основные свойства**

$$\mathrm{SO}(3,1) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$$

$\mathrm{SU}(2)$ является двойным покрытием группы вращений $\mathrm{SO}(3)$.

(нужно алгебру додумывать тут, там всякие разные свойства есть, не готов писать, да и не нужно это было пока что никогда.)

(????????????!!!!)

Об определениях теории групп и алгебр Ли для группы Пуанкаре (!!?)

(!!?!?! свяжу это с записью по алгебре потом, мб в декабре 2023!!!)

Алгебра Ли γ - вещественное векторное пространство γ , в котором определена скобка Ли, коротая обладает 1) антисимметрией, 2) линейностью по элементам из γ , 3) тождеством Якоби.

Операторы Картана C_k :

$$[C_k, \gamma_n] = 0, \quad \forall \gamma_n \in \gamma$$

Ранг алгебры (или группы) - это число линейно независимых операторов Казимира. Свойство: ранг алгебры равен числу линейно независимых генераторов, образующих т. н. коммутативную подалгебру Картана H : все $h_1, h_2 \in H$: $[h_1, h_2] = 0$.

О представлениях группы Пуанкаре и выводе уравнений полей (????)

(тут отдельно статьи нужно еще почитать, но пока как есть. мб сделаю параграф на каждый подпараграф тут, но пока так)

Векторные представления группы Пуанкаре (!!!!)

Для безмассовых векторных полей:

$$\frac{1}{\hbar} W^\nu = \mathfrak{s} p^\nu$$

$$p \cdot W = 0, \quad [p^\mu, W^\nu] = 0.$$

Это следует из преобразований второго казимира с учетом нулевого первого (??? додумаю их суть - напишу суть сюда. Что-то в духе расписываем через векторное и скалярное произведение и дуальные операторы, далее вводим повышающие и понижающие операторы для двух подалгебр и каким-то образом получается простое выражение. Раза 3 перевыведу - пойму мб).

$$\frac{1}{\hbar}W_0 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{s}, \quad \frac{1}{\hbar}\mathbf{W} = p_0\mathbf{s} - \text{sign}(\mathbf{s})i(\mathbf{p} \times \mathbf{s}),$$

(???? важный абзац с обзором полученных представлений. как все-таки это делать? что-то для старших спинов я это не вижу, так что нужно доучивать!)

Спин- $\frac{1}{2}$ представления группы Пуанкаре (!!!!)

(про вывод ур Дирака всякое тут!!!!!!!!!!!!!!)

О переходе к Лагранжиану полей (??)

(пропишу потом.)

О других представлениях группы Пуанкаре и других уравнениях полей (????)

(??? как вывести ур для спина 3/2?? это по сути заново учить нужно, тут будут указания, мб на 2/3 страницы.)

О других возможных симметриях группы Пуанкаре

О дискретных симметриях (????)

(ни разу не было нужно, мб потом допишу. тут много вопросов, мб 2 страницы про это будет)

О суперсимметрии (????)

(в модиф теориях поля написано, но вообще отдельно про это нужно думать и это не нужно было вообще.)

2.1.3 Main Laws of Electrodynamics

Конструкция классической электродинамики

On minimal coupling (!!!)

(та типичная теория, скоро пропишу! формулы, идея)

Требование локальной калибровочной инвариантности действия Дирака означает введение ковариантной производной ∇_μ с калибровочным векторным полем $\mathcal{A}_\mu$:

$$i\nabla_\mu = i\partial_\mu - e\mathcal{A}_\mu, \quad (\text{or } \partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ie\mathcal{A}_\mu)$$

(видимо, именно минус перед векторным потенциалом просто по определению(???) и видимо, e - это заряд электрона, то есть отрицательная величина (?? проверю!)) Таким образом просто меняем именно ∂_ν на ее же, но с добавкой. Важно следить за мнимой единицей, потому что часто за счет них другие знаки.

$$S = \int d^4x \bar{\psi}(\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi = \int d^4x \bar{\psi}(\not{p} - e\mathcal{A} - m)\psi = \int d^4x \bar{\psi}(\not{p} - m)\psi - \int d^4x \mathcal{A}_\mu j^\mu.$$

(???? я вот насколько понял, также важно понимать, что у нас если есть поле E , то от него если мы получаем вектор-потенциал, то это именно A^i , поэтому для вставки в калибровочное взаимодействие нужно еще добавить минус!)

О законах скалярной электродинамике

О калибровках

Физический смысл имеют лишь те величины, которые инвариантны по отношению к преобразованию потенциалов, поэтому все уравнения должны быть инвариантны по отношению к этому преобразованию. То есть одному и тому же полю $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ могут соответствовать различные вектор-потенциалы A . Так можно упрощать уравнения.

Если заменить $A'_k = A_k - \frac{\partial f}{\partial x^k}$, то в лагранжиане появится полный дифференциал: $\Delta L = \frac{e}{c} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = d\left(\frac{e}{c} f\right)$ что не влияет на уравнения движения. Эта же калибровка имеет вид:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

То есть потенциалы определены поэтому не однозначно.

Поэтому мы можем и положить скалярный потенциал φ равным 0 в любой точке (зафиксировать калибровку). Сделать же векторный потенциал равным нулю, вообще говоря, невозможно, так как условие $\mathbf{A} = 0$ представляет собой три дополнительных условия (для трех компонент A).

Лоренцева калибровка

$$\partial_m A^m = 0.$$

Кулоновская калибровка

$$\text{div } A = 0$$

О калибровке Фока-Швингера или калибровкой фиксированной точки

$$x^\mu \mathcal{A}_\mu(x) = 0 \quad \text{Калибровка Фока-Швингера}$$

В ней $\mathcal{A}_\nu(x) = \int_0^1 \lambda x^\mu F_{\mu\nu}(\lambda x) d\lambda$, что получается из уравнений движения.

В частности, если нет электрическое поля ($F_{0\alpha} = 0$), то $\mathcal{A}(x) = - \int_0^1 \lambda (\mathbf{r} \times \mathcal{H}(\lambda x)) d\lambda$. А если еще и магнитное поле постоянно и однородно $\mathcal{H}(\mathbf{r}) = \mathcal{H}_0$, то

$$\mathcal{A}(r) = -\frac{1}{2} r \times \mathcal{H}_0.$$

Используется для движения в магнитном поле.

(?? почему там?? еще??? потом пройду, пока не до этого.)

При введении неоднородности поля, его можно рассматривать вблизи некоторой точки, считая ее началом отсчета, так что $\mathcal{H}(\lambda \mathbf{r}) = \mathcal{H}_0 + \lambda(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathcal{H}_0 + \dots$, тогда с точностью до членов высшего порядка

$$\mathcal{A} \approx -\frac{1}{2} r \times \mathcal{H}_0 - \frac{1}{3} r \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathcal{H}_0$$

Поскольку $\nabla_\alpha \mathcal{H}^\gamma$ по порядку величины задается отношением величины магнитного поля к пространственной шкале неоднородности, то второй член в этом выражении подавлен

малым фактором отношения рассматриваемого расстояния от реперной точки к пространственному масштабу неоднородности и выражение выше справедливо в ведущем приближении.

Формулы и указания для варьирования полей (????!)

(тут нужно еще много практики! пока не актуально еще это.)
 Может быть удобно писать действие именно в ковариантной форме.

$$F^{ik}\delta F_{ik} = F_{ik}\delta F^{ik}$$

У нас всегда на бесконечности все обнуляется или потому что там все в ноль убывает, или потому что считаем, что там все задано. Ни разу не встречал, чтобы граничные члены были важны.

Полезные возможные ходы: 1) заменить индексы на другие, 2) Проинтегрировать по частям с теоремой Гаусса,
 (потренируюсь еще раз на этом!)

О преобразовании электромагнитного поля при переходе в другую систему отсчета

Формулы преобразования полей

$$\varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z.$$

Отсюда (?????)

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

При $V \ll c$ в первом порядке по V/c :

$$E_x = E'_x, \quad E_y = E'_y + \frac{V}{c}H'_z, \quad E_z = E'_z - \frac{V}{c}H'_y;$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = H'_y - \frac{V}{c}E'_z, \quad H_z = H'_z + \frac{V}{c}E'_y.$$

или

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c}[\mathbf{H}'\mathbf{V}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c}[\mathbf{E}'\mathbf{V}].$$

Об инвариантах электромагнитного поля (!?)

$$F_{ik}F^{ik} = \text{inv} \quad \Leftrightarrow \quad H^2 - E^2 = \text{inv},$$

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \text{inv} \quad \mathbf{EH} = \text{inv}.$$

(и там еще у Ландау теория про это, которую я не очень усвоил.)

О переходе электрического поля в магнитное (????)

(потом подумаю про это, это не простой вопрос)

О частных случаях уравнений Максвелла

О плоской волне (!?!)

(??? это точно где-то выше было написано!)

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0$$

Получаем из $\text{rot } \mathbf{E} = i\frac{\omega}{c} \mathbf{H}$, $\text{rot } \mathbf{H} = -i\frac{\omega}{c} \mathbf{E}$ подстановкой одного в другое.

О законе Кулона

$$\mathcal{E} = \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\text{div } \mathcal{E}_0 = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\int_V dV \text{div } \mathcal{E} = 4\pi \int_V dV \rho,$$

ρ - плотность заряда.

Действительно, для этого нужно вычислить поток электрического поля через сферу радиуса r с элементом площади $d^2\Sigma = r^2 d\Omega r/r$, $d\Omega = d\phi d\cos\theta$,

$$\oint_{\partial V_r} d^2\Sigma \cdot \mathcal{E} = e \int d\Omega = 4\pi e$$

Согласно теореме Гаусса, $\oint_{\partial V} d^2\Sigma \cdot \mathcal{E} = \int_V dV \text{div } \mathcal{E}$. Считаем, что у нас охватывающая поверхность деформируется, так что никакой более точной математики мы не используем.

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi \delta(\mathbf{R})$$

Важная математическая формула.

(абзац про границу применимости)

(абзац про подтверждения экспериментально)

Закон Био-Савара-Лапласа

$$\mathcal{H} = \frac{e}{c} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

То есть, $H \sim 1/r^2$, $H \sim v$, константы - чтобы была размерность тока, направление - чтобы поле крутилось вокруг тока.

Для малого заряда $d\mathcal{E} = \rho(r') dV'$, находящегося в точке r' поле:

$$d\mathcal{H} = \frac{dV' \rho(r')}{c} \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Для зарядов во многих точках:

$$\mathcal{H}(r) = \frac{1}{c} \int_{V'} dV' \frac{j(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3}, \quad j = v\rho.$$

Вычислим ротор магнитного поля стационарных токов, используя равенство для двойного векторного произведения $\text{rot}(a \times b(r)) = a \text{div } b(r) - (a \cdot \nabla)b(r)$,

$$\text{rot } \mathcal{H} = \frac{1}{c} \int_{V'} dV' (j(r') \text{div } \mathcal{E}_0 - (j(r') \cdot \nabla) \mathcal{E}_0)$$

где $\mathcal{E}_0 = \frac{r-r'}{|r-r'|^3}$ - это поле единичного заряда, помещенного в точку r' . Также $\text{div } \mathcal{E}_0 = 4\pi\delta(r-r')$, так что

$$\text{rot } \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} j(r) - \frac{1}{c} \int_{V'} dV' (j(r') \cdot \nabla) \mathcal{E}_0,$$

второе слагаемое можно преобразовать, заметив, что дифференцирование по штрихованным координатам связано с дифференцированием по не штрихованным координатам: $\nabla_\alpha \mathcal{E}_0 = -\nabla'_\alpha \mathcal{E}_0$, и проведя интегрирование по частям (в случае стационарных токов полагаем, что интеграл по границе объема с замкнутыми токами, т.е. по замкнутой поверхности, по которой токи не текут, равен нулю), так что

$$\int_{V'} dV' (j(r') \cdot \nabla) \mathcal{E}_0 = - \int_{V'} dV' (j(r') \cdot \nabla') \mathcal{E}_0 = \int_{V'} dV' \mathcal{E}_0 (\nabla' \cdot j(r')) = 0$$

поскольку для стационарных токов $\partial_t \rho = 0$ и в силу закона сохранения заряда $\text{div } j = 0$. В итоге, локальная форма закона Био-Савара для стационарных токов принимает вид

$$\text{rot } \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} j.$$

(абзац про границу применимости)
(абзац про подтверждения экспериментально)

Отсутствие магнитных зарядов

$$\text{div } \mathcal{H} = 0$$

Для магнитного поля стационарных токов можно вычислить дивергенцию

$$\text{div } \mathcal{H} = \frac{1}{c} \int dV' \nabla \cdot (j(r') \times \mathcal{E}_0) = -\frac{1}{c} \int dV' j(r') \cdot (\nabla \times \mathcal{E}_0)$$

мы поменяли местами векторы в смешанном произведении, причем $\mathcal{E}_0$ - это электрическое поле покоящегося единичного заряда. Заметим теперь, что ротор электрического поля стационарного точечного заряда, т.е. заряда, который покоится, тождественно обращается в нуль согласно закону индукции (2.16), поскольку магнитное поле такого заряда тождественно равно нулю: $\text{rot } \mathcal{E}_0 = 0$. Значит,

$$\text{div } \mathcal{H} = 0$$

(абзац про границу применимости)
(абзац про то, почему же тогда все-таки столько много в теории попыток с магн зарядами теории создать?)
(абзац про подтверждения экспериментально)

Закон индукции Фарадея (?)

Пусть есть замкнутый проводник и есть поток, проходящий через него. По закону Фарадея, если поток меняется, то в проводнике возникает ЭДС по закону индукции Фарадея:

$$\oint_{\partial S} d\ell \cdot \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S d^2\Sigma \cdot \mathcal{H}$$

or
$$\text{rot } \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

Ведь по теореме Стокса $\oint_{\partial S} d\ell \cdot \mathcal{E} = \int_S d^2\Sigma \cdot \text{rot } \mathbf{E}.$

(мб еще пара абзацев будет с важными комментариями.)

(абзац про границу применимости)

(абзац про подтверждения экспериментально)

О построении и выводах уравнений электродинамики

(мб это выше уже будет написано, потом подумаю.)

О построении электродинамики по, например, Ландау как уравнений на вектор потенциал

Добавляем:

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c} \int ds \frac{dx^m}{ds} \mathcal{A}_m$$

О выводе уравнений Максвелла из обобщений физических законов

(вывод из представлений группы Пуанкаре)

О построении электродинамики из группы Пуанкаре

О выводе уравнений Максвелла из дифференциальной геометрии (!???)

(хз, но пока в теории напишу это)

О границе применимости классической электродинамики

(напишу потом)

Формула $\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}$ для торможения излучением применима только в том случае, если длина падающей на заряд волны велика по сравнению с «радиусом» заряда e^2/mc^2 . Мы видим, что расстояния порядка e^2/mc^2 опять оказываются той границей, за которой электродинамика приходит в противоречие сама с собой (см. §37).

On duality in electrodynamics (!!!!!!!)

(???? пока об этом в модиф теор поля написано, потом сюда перепишу)

Main properties of duality

Есть разные определения, с i и без. Обсудим дуальность в формализме:

$$\tilde{H}^{\mu\nu} := -\frac{1}{2} i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} H_{\rho\sigma} \quad \Rightarrow \quad \text{Re}(\tilde{H}^{\mu\nu}) = 0.$$

$$H_{\mu\nu}^{\pm} := \frac{1}{2} \left(H_{\mu\nu} \pm \tilde{H}_{\mu\nu} \right), \quad H_{\mu\nu}^{\pm} = (H_{\mu\nu}^{\mp})^*.$$

$$-\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{H}_{\rho\sigma} = H^{\mu\nu}.$$

$$-\frac{1}{2} \epsilon^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma}^{\pm} = \pm H_{\mu\nu}^{\pm}.$$

Let $G_{\mu\nu}$ be another antisymmetric tensor with $G_{\mu\nu}^{\pm}$

$$G^{+\mu\nu} H_{\mu\nu}^{-} = 0, \quad G^{\pm\rho(\mu} H_{\rho}^{\pm\nu)} = -\frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} G^{\pm\rho\sigma} H_{\rho\sigma}^{\pm}, \quad G_{\rho[\mu}^{+} H_{\nu]}^{\rho} = 0.$$

$$\tilde{G}^{\rho\mu} \tilde{H}_{\rho}^{\nu} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} G^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma} - G^{\rho\nu} H_{\rho}^{\mu}.$$

We can now consider the change of variables (the i is included to make the transformation real):

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} = i\tilde{F}^{\mu\nu}$$

Since $F'^{\mu\nu}$ also obeys both equations of (4.41) we have defined a symmetry of the free electromagnetic field.

Exercise 4.8 Show that the symmetry (4.42) exchanges the electric and magnetic fields: $E_i \rightarrow E'_i = -B_i$ and $B_i \rightarrow B'_i = E_i$.

The self-dual combinations $F_{\mu\nu}^{\pm}$ contain only photons of one polarization in their plane wave expansions:

$$F_{\mu\nu}^{\pm} = 2i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \left[e^{ik \cdot x} k_{[\mu} \epsilon_{\nu]}(\vec{k}, \pm) a(\vec{k}, \pm) - e^{-ik \cdot x} k_{[\mu} \epsilon_{\nu]}^*(\vec{k}, \mp) a^*(\vec{k}, \mp) \right].$$

To show this, check first that with the polarization vectors given in Sec. 4.1.2, one has

$$-\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_{\rho} \epsilon_{\sigma}(\vec{k}, \pm) = \pm k^{[\mu} \epsilon^{\nu]}(\vec{k}, \pm)$$

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -i \partial_{\mu} (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_{\nu} F_{\rho\sigma}).$$

$$(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})(x) \rightarrow \det \Lambda^{-1} (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})(\Lambda x).$$

(??????)

Thus $F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ transforms as a scalar under proper Lorentz transformations but changes sign under space or time reflections. Use the Schouten identity (3.11) to prove that

$$F_{\mu\rho} \tilde{F}_{\nu}^{\rho} = \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tilde{F}^{\rho\sigma}.$$

О применениях дуальности

(нормальный разделчик тут про настоящие применения. нужна ли она вообще? пока в отдельной записи про нее, там много деталей, много скорее всего применений. А может, это другие дуальности там, может, в другом разделе про это напишу?)

Duality for gauge field and complex scalar by Proeyen (!?!?!?!?)

(пока в отдельной записи об этом)

Electromagnetic duality for coupled Maxwell fields by Proeyen (?!?!?!?!?)

(пока в отдельной записи об этом)

2.1.4 Electromagnetic waves

О простейшей плоской электромагнитной волне

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} \equiv g^{kl} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0.$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = f_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) + f_2 \left(t + \frac{x}{c} \right)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

ПОЭТОМУ:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{A}', \quad \mathbf{H} = [\nabla \mathbf{A}] = \left[\nabla \left(t - \frac{x}{c} \right) \cdot \mathbf{A}' \right] = -\frac{1}{c} [\mathbf{n} \mathbf{A}'],$$

$$S'_x = c W' \cos \alpha', \quad \sigma'_{xx} = -W' \cos^2 \alpha',$$

α' - угол (в системе K') между осью x' (вдоль которой направлена скорость V) и направлением распространения волны. В результате находим:

$$W = W' \frac{\left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'\right)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Поскольку $W = E^2/4\pi = H^2/4\pi$, то абсолютные величины напряженностей поля волны преобразуются как $\sqrt{W}$.

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0.$$

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A}_0 e^{-i\omega(t-x/c)} \right\}.$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$$

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right\}$$

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = i[\mathbf{k}\mathbf{A}]$$

$$T^{ik} = \frac{W c^2}{\omega^2} k^i k^k$$

О поле равномерно движущегося заряда

В системе K' имеется постоянное электрическое поле с $\mathbf{A}' = 0$ и $\varphi' = e/R'$; $R'^2 := x'^2 + y'^2 + z'^2$. В системе K :

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{e}{R' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

$$R' = R(x, y, z) = ?$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

(далее еще подумаю раз, формулы большие, словами укажу их.)

В итоге:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}.$$

При заданном расстоянии R от заряда величина поля E возрастает с увеличением θ от нуля до $\pi/2$ (или при уменьшении от π до $\pi/2$). Наименьшее значение поле имеет в направлении, параллельном направлению движения ($\theta = 0, \pi$); оно равно

$$E_{\parallel} = \frac{e}{R^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right).$$

Наибольшее поле - поле, перпендикулярное к скорости ($\theta = \pi/2$), равное

$$E_{\perp} = \frac{e}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Отметим, что при увеличении скорости поле $E_{\parallel}$ падает, а $E_{\perp}$ возрастает. Можно сказать наглядно, что электрическое поле движущегося заряда как бы «сплюсывается» по направлению движения. При больших скоростях поле большое вокруг $\theta = \pi/2$. Ширина этого интервала:

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Таким образом, электрическое поле быстро движущегося заряда, на заданном расстоянии от него, заметно отлично от нуля лишь в узком интервале углов вблизи экваториальной плоскости, причем ширина этого интервала падает с увеличением V как $\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Магнитное поле в системе K равно

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{E}]$$

(см. (24.5)). В частности, при $V \ll c$ электрическое поле приближенно дается обычной формулой закона Кулона $\mathbf{E} = e\mathbf{R}/R^3$, и тогда магнитное поле

$$\mathbf{H} = \frac{e}{\varepsilon} \frac{[\mathbf{V}\mathbf{R}]}{R^3}.$$

О спектральном разложении

$$\overline{f^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \int_0^{\infty} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_0 n t}, \quad f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega_0 t} dt$$

Собственные колебания поля

(подумаю потом про это еще)

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = i \sum_{\mathbf{k}} [\mathbf{k} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

Аналогичным образом можно вычислить полный импульс поля:

$$\frac{1}{c^2} \int \mathbf{S} dV = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E}\mathbf{H}] dV,$$

причем получается

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{c}$$

(тут мб абзац про квантование поля добавлю!! пока для начала КТП проделаю!)

Другое о волнах

О волнах не плоского вида (!?!?!?)

(что-то пока так и не разобрался, как их описывать????)

О волнах через формализм интеграла по траекториям

(в линзировании это в одной статье отлично сработало, так что думаю, можно указать этот метод тут. мб во 2ю 1ю перенесу потом)

(формулы)

Данный переход нам идейно говорит многое о свете: свет можно рассматривать и в квантовой форме, даже если это макроскопическая волна. (??? да??)

2.1.5 Electrostatics, Magnetostatics

О диполе, дипольном моменте

In a very nutshell, one can just use formulas for the dipole to solve many problems.

$$\mathbf{d} := \sum_q e_q \mathbf{r}_q.$$

$$\phi_{(1)}(\mathbf{R}) = - \sum_q e_q \mathbf{r}_q^\alpha \frac{\partial}{\partial R_\alpha} \frac{1}{|\mathbf{R}|} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}}{R^2}, \quad \mathbf{n} := \frac{\mathbf{R}}{R}$$

$$\mathcal{E}_{(1)} = -\nabla \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}}{R^2} \equiv \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{R^3}$$

(абзац про применения, много задач на это есть.)

Основная идея электростатики

Мы просто раскладываем общие формулы и получаем удобные конструкции для вычислений энергии статических зарядов (или контуров с током, если это магнитостатика), а по ней и находим силу.

$$\phi(\mathbf{R}) = \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}$$

$$\mathcal{E} = \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3} \longleftrightarrow \mathcal{H} = \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}}{r^3}$$

Об электростатической энергии (!!?)**Об энергии от собственного поля**

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV$$

переписывая напряженность через потенциал, применяя теорему Гаусса, получаем:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV.$$

Для системы точечных зарядов e_a :

$$U = \frac{1}{2} \sum e_a \varphi_a,$$

φ_a - потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке, находится заряд e_a .

В частности, энергия взаимодействия двух зарядов

$$U' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}.$$

(еще какие-то есть детали, знаю.)

(абзац про заблуждения, там как-то в школе я путался, когда-то напишу точно!)

Об энергии во внешнем поле

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots$$

$$U^{(0)} = \varphi_0 \sum_a e_a$$

φ_0 - значение потенциала в начале координат. В этом приближении энергия системы такова, как если бы все заряды находились в одной точке. Второй член разложения

$$U^{(1)} = (\text{grad } \varphi)_0 \cdot \sum e_a \mathbf{r}_a.$$

$$U^{(1)} = -\mathbf{d} \mathbf{E}_0.$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}_0 \sum e_a + (\text{grad } \mathbf{d} \mathbf{E})_0.$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d} \nabla) \mathbf{E},$$

Тогда

$$U = -\mathbf{d}_2 \mathbf{E}_1,$$

$\mathbf{E}_1$ - поле первой системы. Подставляя $\mathbf{E}_1$, находим:

$$U = \frac{(\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2) R^2 - 3(\mathbf{d}_1 \mathbf{R})(\mathbf{d}_2 \mathbf{R})}{R^5}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} r^l \sum_{m=-l}^l a_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

r, θ, φ - сферические координаты точки, а a_{lm} - постоянные коэффициенты. Составляя сумму (42.1) и учитывая определение (41.13), получим:

$$U^{(l)} = \sum_{m=-l}^l a_{lm} Q_m^{(l)}$$

О магнитном моменте и теореме Лармора (!!!!!)

О средних магнитных полях

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{H}} = 0.$$

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}.$$

$$\Delta \bar{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}.$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} dV,$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \frac{e_a \bar{\mathbf{V}}_a}{R_a},$$

(пока это похоже просто на усреднения и все. потом подумаю над смыслом.)

О магнитном моменте

$$\mathbf{m} := \frac{1}{2c} \sum e[\mathbf{rv}]$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{[\bar{\mathbf{m}} \mathbf{R}_0]}{R_0^3} = \left[\nabla \frac{1}{R_0} \cdot \bar{\mathbf{m}} \right].$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{3\mathbf{n}(\bar{\mathbf{m}}\mathbf{n}) - \bar{\mathbf{m}}}{R_0^3}$$

Proof: (напишу словами ходы)

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{cR_0} \sum e\bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{c} \sum e\mathbf{v} \left(\mathbf{r} \nabla \frac{1}{R_0} \right).$$

$$\sum e\bar{\mathbf{v}} = \overline{\frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e[\mathbf{rv}] = \frac{e}{2mc} \sum m[\mathbf{rv}]. \xrightarrow{v \ll c} \frac{e}{2mc} \sum [\mathbf{rp}] = \frac{e}{2mc} \mathbf{M},$$

$\mathbf{M} := \sum [\mathbf{rp}]$.

(абзац про применения гиромагн отношения! их много, словами скорее всего напишу, мб ключевые формулы добавлю)

О теореме Лармора

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}} &= \sum \frac{e}{c} [\mathbf{vH}] = \frac{d}{dt} \sum \frac{e}{c} [\mathbf{rH}] & \bar{\mathbf{K}} &= \sum \frac{e}{c} [\mathbf{r}[\mathbf{vH}]] = [\bar{\mathbf{m}}\mathbf{H}] \\ L &= \sum \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2c} \sum e[\mathbf{Hr}]\mathbf{v} - U \\ \frac{d\bar{\mathbf{M}}}{dt} &= -[\boldsymbol{\Omega}\bar{\mathbf{M}}]\end{aligned}$$

Это уравнение означает, что вектор $\bar{\mathbf{M}}$ (а с ним и магнитный момент $\bar{\mathbf{m}}$) вращается с угловой скоростью $-\boldsymbol{\Omega}$ вокруг направления поля, сохраняя при этом свою абсолютную величину и угол, образуемый им с этим направлением (так называемая ларморова прецессия).

О квадруполе, окутполе и других мультипольных моментах

$$\begin{aligned}\phi_{(2)}(\mathbf{R}) &= \sum_q e_q \frac{(-1)^2}{2} (\mathbf{r}_q)_\alpha (\mathbf{r}_q)_\beta \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}_\alpha \partial \mathbf{R}_\beta} \frac{1}{|\mathbf{R}|} \cdot \\ \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}_\alpha \partial \mathbf{R}_\beta} \frac{1}{|\mathbf{R}|} &= -\partial_\beta \frac{\mathbf{R}_\alpha}{R^3} = 3 \frac{\mathbf{R}_\beta \mathbf{R}_\alpha}{R^5} - \frac{\delta_{\beta\alpha}}{R^3} = \frac{3\mathbf{n}_\beta \mathbf{n}_\alpha - \delta_{\beta\alpha}}{R^3}, \\ \phi_{(2)}(\mathbf{R}) &= \frac{1}{2} \sum_q e_q (\mathbf{r}_q)_\alpha (\mathbf{r}_q)_\beta \frac{3\mathbf{n}_\beta \mathbf{n}_\alpha - \delta_{\beta\alpha}}{R^3} = \\ &= \frac{\mathbf{n}_\beta \mathbf{n}_\alpha}{2R^3} \sum_q e_q \left[3(\mathbf{r}_q)_\alpha (\mathbf{r}_q)_\beta - (\mathbf{r}_q)^2 \delta_{\alpha\beta} \right] \equiv \\ &\equiv \frac{\mathbf{n}_\beta \mathbf{n}_\alpha}{2R^3} D_{\alpha\beta}, \\ D_{\alpha\beta} &:= \sum_q e_q \left[3(\mathbf{r}_q)_\alpha (\mathbf{r}_q)_\beta - (\mathbf{r}_q)^2 \delta_{\alpha\beta} \right].\end{aligned}$$

Now, third order:

$$\phi_{(3)}(\mathbf{R}) = \sum_q e_q \frac{(-1)^3}{3!} (\mathbf{r}_q)_\alpha (\mathbf{r}_q)_\beta (\mathbf{r}_q)_\gamma \frac{\partial^3}{\partial \mathbf{R}_\alpha \partial \mathbf{R}_\beta \partial \mathbf{R}_\gamma} \frac{1}{|\mathbf{R}|} = \frac{1}{6R^4} \mathbf{n}_\alpha \mathbf{n}_\beta \mathbf{n}_\gamma Q_{\alpha\beta\gamma}$$

(?????)

Now, general case:

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + r^2 - 2rR_0 \cos \chi}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R_0^{l+1}} P_l(\cos \chi),$$

χ - угол между $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$. Введем сферические углы Θ, Φ и θ, φ , образуемые соответственно векторами $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$ с фиксированными осями координат. Полиномы Лежандра раскладываются через другие полиномы, а те - выражаются через сферические функции, в итоге:

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r^l}{R_0^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\Theta, \Phi) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\varphi^{(l)} = \frac{1}{R_0^{l+1}} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Q_m^{(l)} Y_{lm}^*(\Theta, \Phi),$$

$$Q_m^{(l)} = \sum_a e_a r_a^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta_a, \varphi_a).$$

(?? еще на решаю задачи! напишу обзор применений этих формул!! очень типичное разложение вообще, нпр в сверхтонких вз-ях видел её. допишу потом примеры с формулами.)

О разложении электростатического поля

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r}),$$

$$\varphi \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad d^3k = dk_x dk_y dk_z, \quad \varphi_{\mathbf{k}} = \int \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dV.$$

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2}$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} = -i \frac{4\pi e k}{k^2}$$

(????)

О симметриях в электростатике

(тут хорошие методы для супер ускорения задач, тренировать нужно, пока забил.)

2.1.6 Scattering

(за часа 3 доработал бы, задачи дорешал быстро, из ЛЛ2 еще параграфы укажу тут)

Основные формулы рассеяния

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2, \quad r_0 := \frac{e^2}{mc^2} \text{ - классический радиус электрона.}$$

Сечение рассеяния Томсона - сечение рассеяния в (?? дипольном приближении для свободных частиц без учета изменения их движения за счет излучения?)

Для магнитного дипольного рассеяния

$$\overline{|\mathbf{S}_{\parallel}|} = \frac{cH^2}{4\pi}, \quad dI_{\mu} = \frac{d\Omega}{4\pi c^3} (\ddot{\mu}^2 - (\ddot{\mu}\mathbf{n})^2), \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\overline{I}_{\mu}}{c^4 H^2}.$$

(??? тут дальше все про него!!!) Дальше гиромагнитное отношение дает вращение магнитного момента:

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \gamma_e \dot{\mathbf{M}} = \gamma_e [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}].$$

Может помочь то, что гиромагнитное соотношение мало.

Средняя сила дается через импульс поля

$$\overline{\mathbf{F}} = \sigma_T \bar{w} \mathbf{n}$$

σ_T - томсоновское сечение, $\bar{w} = \overline{E^2}/(4\pi)$ - средняя плотность энергии поля (импульс поля равен его энергии, деленной на скорость света), $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении распространения падающей волны.

(?!?!?!?! важный абзац про экспериментальную проверку, что показывает, что вообще наши формулы верные???)

О рассеянии Релея

Для рассеивания на осциляторе массы m , с зарядом q и собственной частотой ν_0 сечение рассеяния σ_R пропорционально четвёртой степени частоты рассеиваемого света ν :

$$\sigma_R = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^4. \quad (\text{формула Релея})$$

Сечение σ_R зависит от угла рассеяния θ между направлениями падающей и рассеянной волн:

$$d\sigma_R(\theta) = \frac{3}{8} \sigma_R (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

(абзац мелкий о цвете неба)

Обзор рассеяния

(там что просто диполи колеблются и за счет этого излучают дальше волну, а первая что ли полностью поглощается? что делать кстати с полем, которое проходит мимо всех диполей??)

(абзац про сравнение классического полевого описания и квантовомеханического. какое верное?)

О методах для задач рассеяния

(пока что из белоусова скопирована теория)

Природа рассеяния в том, что падающая волна колеблет частицы, которые излучают волны - это и есть рассеянная волна.

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{|\mathbf{S}|}$$

$\overline{dI}$ - интенсивность излучения, уходящего от системы зарядов в данном направлении в элемент телесного угла $d\Omega$ в единицу времени, $|\mathbf{S}|$ - плотность потока энергии поля, падающего на единицу площади системы зарядов в единицу времени.

В плоской монохроматической волне $|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} (\text{Re} \{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \})^2 = \frac{1}{8\pi} (E_{01}^2 + E_{02}^2)$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{n}]^2$$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + \mathbf{F}_{\text{rad}}, \quad \text{или} \quad \ddot{\mathbf{r}} - \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} \text{Re} \{ e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \}$$

Частное решение

$$r = \frac{e^2}{m\omega^2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{1 + i\gamma} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \right\},$$

$\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3} \omega$, при $\gamma < 1$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{[\mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{n}]^2 + (E_{01}/E_{02})^2 [\mathbf{e}^{(2)} \times \mathbf{n}]^2}{1 + (E_{01}/E_{02})^2}$$

О типах рассеяния света

(добавлю формулу на каждое!)

- Рассеяние Рэлея - упругое рассеяние на малых частицах, размером много меньше длины волны.
- Рассеяние Ми - упругое рассеяние на крупных частицах.
- Томсоновское рассеяние - упругое рассеяние на заряженных частицах.
- Комптоновское рассеяние - упругое рассеяние высокоэнергетических (рентгеновских и гамма) фотонов на заряженных частицах.
- Рассеяние Мандельштама - Бриллюэна - неупругое рассеяние на колебаниях решётки.
- Комбинационное (рамановское) рассеяние - неупругое рассеяние на атомных колебаниях в молекуле.
- Рассеяние Тиндаля - упругое рассеяние света неоднородными средами.

2.1.7 Particle in an Electromagnetic Field**Основные формулы****Уравнение движения**

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) u^\nu,$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}],$$

или $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - e\text{grad}\varphi + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\text{rot}\mathbf{A}]$. Все это по Эйлеру-Лагранжу следует из исходного действия, там же и можно ввести тензор напряженности поля. В нерелятивистском случае у нас получается очевидное уравнение изменения энергии и динамика под действием силы Лоренца:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \stackrel{\text{non-rel.}}{=} e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad \frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v},$$

что получается из определения энергии и уравнений движения.

Лагранжиан, гамильтониан

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi \approx \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi,$$

что по сути и есть в действии частицы с взаимодействием $-\frac{e}{c}\int_a^b A_i dx^i$.

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \equiv \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$$

$$\mathcal{H} := E \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\varphi \approx \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi$$

О движении в постоянном электрическом поле

(???? перерешаю еще!!!)

$$x(y) = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \operatorname{ch} \frac{eEy}{p_0c}.$$

Имеем движение по цепной линии. (картинку добавлю!) В нерелятивистском случае, при $v \ll c$, имеем $p_0 = mv_0$, $\mathcal{E}_0 = mc^2$, $\text{ch}(x) \approx 1 + x^2/2$, поэтому имеем движение по параболе:

$$x(y) \approx \frac{eE}{2mv_0^2} y^2 + \text{const},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}_{\text{кин}}} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}} \text{ Интегрируя, находим:}$$

$$x = \frac{1}{eE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}$$

$$\text{Для определения } y(t) \text{ имеем: } \frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{\mathcal{E}_{\text{кин}}} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}, \text{ откуда}$$

$$y = \frac{p_0 c}{eE} \text{Arsh} \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}.$$

О движении в магнитном поле в двух словах (!!!!!!!)

О движении в однородном магнитном поле

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t} \mathcal{E}}{ecH} = \frac{cp_{\perp}}{eH}$$

$$\omega = \frac{eH}{mc}.$$

О движении в неоднородном магнитном поле (????)

Радиус вращения

$$r_{\perp} = \frac{p_{\perp} c}{e\mathcal{H}}$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{P}_t d\mathbf{r},$$

$$p \sim \sqrt{H}$$

ведь

$$I = \frac{cp_t^2}{2eH}$$

Сила, действующая в неоднородном поле:
(!! нужно решить эту задачу!)

О движении в кулоновском поле

Движение в кулоновском поле в нерелятивистском случае

Опишем вкратце движение в кулоновском поле.
(потом суть напишу, уже выгружено про это теория)

Об излучении при движении в кулоновском поле

(еще раз решу - впишу, 2/3 страницы максимум будет)
(строчка про северное сияние)

Движение в кулоновском поле в релятивистском случае

(почитаю в других местах, нормально написано, а не у Ландау)

Можно решать по Гамильтону-Якоби, но тогда получаются сложные большие интегралы, их доудмаю потом (??). Из $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0$ при $H = \mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + \frac{\alpha}{r}}$,

$p^2 \equiv \frac{M^2}{r^2} + p_r^2$, $\alpha \equiv ee'$, получаем уравнение

$$-\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\alpha}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

Отсюда $S = -\mathcal{E}t + M\varphi + \int \sqrt{\frac{1}{c^2} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2 c^2} \cdot dr$. Траектория находится из $\partial S / \partial M = \text{const}$:

а) если $Mc > |\alpha|$:

$$(c^2 M^2 - \alpha^2) \frac{1}{r} = c \sqrt{(M\mathcal{E})^2 - m^2 c^2 (M^2 c^2 - \alpha^2)} \cos \left(\varphi \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2 M^2}} \right) - \mathcal{E} \alpha$$

б) если $Mc < |\alpha|$:

$$(\alpha^2 - c^2 M^2) \frac{1}{r} = \pm c \sqrt{(M\mathcal{E})^2 + m^2 c^2 (\alpha^2 - M^2 c^2)} \operatorname{ch} \left(\varphi \sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2 M^2} - 1} \right) + \mathcal{E} \alpha$$

в) если $Mc = |\alpha|$:

$$\frac{2\mathcal{E}\alpha}{r} = \mathcal{E}^2 - m^2 c^4 - \varphi^2 \left(\frac{\mathcal{E}\alpha}{cM} \right)^2$$

(????? это у Ландау ужасно написано, у меня такое не получается, думать - трата времени. Потом в теории приведу вычисления, на которых остановился. Скорее всего по нормальной книге перерешаю.) Константа занесена в н.у..

Для притяжения ($\alpha < 0$) имеем финитное движение, если $\mathcal{E} < mc^2$. Если же $\mathcal{E} > mc^2$, то движение инфинитно. В релятивистской же механике траектория никогда не может быть замкнутой, потому что уравнению траектории не инвариантно по отношению к замене угла φ на 2π , а в нерелятивистской механике финитное движение в кулоновом поле всегда происходит по замкнутым орбитам.

При $\alpha < 0$ траектории представляют собой спирали с радиусом r , стремящимся к нулю при $\varphi \rightarrow \infty$. Время падения в начало координат, конечно, что следует из $\partial S / \partial \mathcal{E} = \text{const}$, откуда видим, что время определяется интегралом, сходящимся при $r \rightarrow 0$ (? продумаю потом еще раз, это не важный вопрос).

(абзац про сравнение с движением по ОТО!)

Движение спиноров в кулоновском поле (????)

(?? это важная задача, которую нужно сесть и продумать. тут у нас шаровые функции, да??)

Другое о движении в полях

(задачи есть на это, когда-то и посижу на них! нарисовать еще минимум 1 день это нужно!)

Еще раз о сечениях, углах отклонения

(то же, что и в механике по сути, это же тот же раздел.)
 (по идее углы из формулы из решения Г-Я получаются.)

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho \frac{d\rho}{d\chi} d\chi = \rho \frac{d\rho}{d\chi} \frac{d\sigma}{\sin\chi},$$

$d\sigma = 2\pi \sin\chi d\chi$ (см. ЛЛ1 §18).

(??? попрактикуюсь тут еще когда-то!)

О симметриях и обращении времени.

Если в электромагнитном поле возможно некоторое движение, то возможно и обратное движение в поле с обратным направлением $\mathbf{H}$.

Уравнения движения не меняются при

$$t \rightarrow -t, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}$$

2.1.8 Electrodynamics of Continuous Media: Basics**Основные законы ЭСС****Основные формулы**

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \{ j^\nu + j_{\text{med.}}^\nu + \tilde{j}_{\text{dis.}}^\nu \}$$

$$j_{\text{med.}}^0 = -c \operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \mathbf{j}_{\text{med.}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad \tilde{j}_{\text{dis.}}^0 = 0, \quad \tilde{\mathbf{j}}_{\text{dis.}} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}.$$

$$\delta S = -\frac{1}{8\pi c} \int d^4x F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \int d^4x \{ j^\nu + j_{\text{med.}}^\nu + \tilde{j}_{\text{dis.}}^\nu \} \delta \mathcal{A}_\nu$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{B}, \quad \frac{dE}{dt} = e(\mathcal{E} \cdot \mathbf{v}).$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{E} + 4\pi\mathcal{P} = \epsilon\mathcal{E}, \quad \mathcal{P} = \alpha\mathcal{E}$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{H} + 4\pi\mathcal{M} = \mu\mathcal{H}, \quad \mathcal{M} = \beta\mathcal{H}$$

О граничных условиях

(тут все самое главное про них. потом добавлю.)

Граничные условия на поверхности идеально проводящего тела (тела с импедансом $\zeta = 0$):

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad \mathbf{H}_n = 0$$

Обзор электродинамики в среде

Измеряемые суммарные электрические и магнитные поля, сглаженные усреднением по микроструктуре вещества, обозначают $\langle \mathcal{E} \rangle = \mathcal{E}$ и $\langle \mathcal{H} \rangle = \mathcal{B}$ и называют соответственно электрическим полем и магнитной индукцией.

Электрическая поляризация

$$\mathbf{d} = \int d^3r \rho_{\text{med}} \mathbf{r} = \int d^3r \mathcal{P}$$

мы ввели плотность микрочарядов в среде ρ_{med} и плотность электрических диполей $\mathcal{P}$.
(?? потом подумаю лучше, что за зависимость от начала отсчета??)

Тогда, поскольку $\partial_\alpha r^\beta = \delta_\alpha^\beta$

$$\int d^3r \mathcal{P} = \int d^3r (\mathcal{P} \cdot \nabla) r = \int d^3r \nabla_\alpha (\mathcal{P}^\alpha r) - \int d^3r r (\nabla \cdot \mathcal{P})$$

откуда с учетом теоремы Гаусса

$$\int d^3r \mathcal{P} = \int_{\partial V} ds_\alpha (\mathcal{P}^\alpha r) - \int d^3r r \operatorname{div} \mathcal{P}$$

(?!!!! тут потом подумаю, что за переходы???)

Поскольку мы можем вынести границу интегрирования в область, нет никакого вещества, плотность электрических диполей обращается в нуль, так что интеграл равен нулю.

Тогда плотность микрочарядов в среде есть:

$$\rho_{\text{med}} = -\operatorname{div} \mathcal{P}$$

Теперь уравнение для усредненного электрического поля при наличии плотности внешних зарядов $\operatorname{div} \langle \mathcal{E} \rangle = 4\pi (\rho + \rho_{\text{med}})$ запишется в виде

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = 4\pi \rho,$$

вводится $\mathcal{D} = \mathcal{E} + 4\pi \mathcal{P}$ - так называемый вектор электрической индукции.

(?? ниже - не усвоено)

Отсюда в точности с рассуждениями о введении тока смещения в случае уравнений в вакууме теперь в среде заключаем, что ток смещения принимает вид

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{dis.}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t},$$

в явном виде мы показали вклад за счет электрической поляризации среды.

Намагничивание

(суть пока не совсем понимаю, нужно предыдущую теорию усвоить.)

Наведенные токи в среде $\mathbf{j}_{\text{med}} = \rho_{\text{med}} \mathbf{v}$ создают магнитный момент

$$\boldsymbol{\mu} = \int d^3r \frac{1}{2c} \mathbf{r} \times \mathbf{j}_{\text{med}} \equiv \int d^3r \mathcal{M}$$

намагниченность $\mathcal{M}$ имеет смысл плотности магнитных диполей в среде с наведенными токами.

Далее, (?? тут что ли симметризация тензора???) не знаю переход этот)

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{M} (\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\mathcal{M} \cdot \nabla) \mathbf{r} \} = -\frac{1}{2} (\mathcal{M} \times \nabla) \times \mathbf{r}$$

$$\int d^3r \mathcal{M} = \int d^3r \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathcal{M}$$

так что ток в среде есть

$$\frac{1}{c} j_{\text{med.}} = \text{rot } \mathcal{M}$$

В итоге

$$\text{rot } \langle \mathcal{H} \rangle = \frac{4\pi}{c} \{ j + j_{\text{med.}} \} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$$

примет вид

$$\text{rot } \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$$

вводится $\mathcal{H} = \mathcal{B} - 4\pi \mathcal{M}$ - так называемый вектор магнитного поля.

Уравнения Максвелла и действие в среде

Уравнения Максвелла без источников переписываются в терминах усредненных полей как:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathcal{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, & \text{rot } \mathcal{H} &= \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \\ \text{div } \mathcal{B} &= 0, & \text{div } \mathcal{D} &= 4\pi \rho \end{aligned}$$

Первая пара уравнений такая же, так что она по-прежнему может быть получена как тождество для дуального тензора напряженностей

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathcal{A}_\beta - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha$$

для векторного поля потенциалов $\mathcal{A}_\mu$ со стандартной связью для усредненных полей

$$\mathcal{E}^\alpha = F_{0\alpha}, \quad F_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{B}^\gamma.$$

(кстати, потренируюсь потом в этом.)

Вторая пара может быть записана в виде

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \{ j^\nu + j_{\text{med.}}^\nu + \tilde{j}_{\text{dis.}}^\nu \}$$

микротоки есть

$$j_{\text{med.}}^0 = -c \text{div } \mathcal{P}, \quad j_{\text{med.}} = c \text{rot } \mathcal{M},$$

а 4 -ток смещения есть

$$\tilde{j}_{\text{dis.}}^0 = 0, \quad \tilde{j}_{\text{dis.}} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}$$

Из $\delta S = -\frac{1}{8\pi c} \int d^4x F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \int d^4x \{ j^\nu + j_{\text{med.}}^\nu + \tilde{j}_{\text{dis.}}^\nu \} \delta \mathcal{A}_\nu$ после преобразований приходим к

$$S = \frac{1}{8\pi c} \int d^4x \{ \mathcal{D} \cdot \mathcal{E} - \mathcal{H} \cdot \mathcal{B} \} - \frac{1}{c^2} \int d^4x j^\nu \cdot \mathcal{A}_\nu$$

Сила Лоренца определяется вкладом последнего члена в этом действии, т.е. 4 -потенциалом $\mathcal{A}_\nu$, а значит,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{B}, \quad \frac{dE}{dt} = e(\mathcal{E} \cdot \mathbf{v})$$

(про силу Лоренца усвою потом лучше, пока не знаю! пример приведу мб)

Связи между параметрами среды (??)

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \mathcal{E} + 4\pi\mathcal{P} - \epsilon\mathcal{E}, & \mathcal{P} &= \alpha\mathcal{E} \\ \mathcal{B} &= \mathcal{H} + 4\pi\mathcal{M} = \mu\mathcal{H}, & \mathcal{M} &= \beta\mathcal{H}\end{aligned}$$

тут α - коэффициент электрической поляризации, β - коэффициент магнитной поляризации, а ϵ и μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

(хз по поводу того, что тут)

Имеется связь

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{E}(t) + \int_0^{+\infty} f(\tau)\mathcal{E}(t-\tau)d\tau$$

$f(\tau)$ называется функцией влияния.

О известных свойствах и моделях

Крамерса–Кронига: связь мнимой и вещественной части функции

$$\begin{aligned}\epsilon'(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon''(\tilde{\omega}) \frac{d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} - \omega} \\ \epsilon''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\epsilon'(\tilde{\omega}) - 1] \frac{d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} - \omega}\end{aligned}$$

чтобы к ним дойти нужно 15 минут комплексным интегрированием заниматься, посчитать двумя способами $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\tilde{\omega})-1}{\tilde{\omega}-\omega-i0} d\tilde{\omega}$, получить тождество

$$i\pi[\epsilon(\omega) - 1] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\epsilon(\tilde{\omega}) - 1] \frac{d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} - \omega} \quad (????), \text{ дальше взять вещественную и мнимую части.}$$

(??? для любой функции это работает???)

Например, для диэлектрической проницаемости, зная, что $\epsilon''(\omega) = 4\pi \frac{Ne^2}{m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$,

можем ее преобразовать к $\epsilon''(\omega) = 4\pi \frac{Ne^2}{m} \pi \delta(\omega_0^2 - \omega^2)$, и Крамерс-Кронинг дадут $\epsilon'(\omega) = 1 + 4\pi \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

(абзац про их смысл в теории восприимчивости и линейном отклике)

О черенковском излучении

Для $v > c_n$

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\omega} = \frac{e^2 v}{c^2} \omega \left(1 - \frac{c_n^2}{v^2} \right)$$

Это следует из $\mathcal{I} = -e\mathbf{v} \cdot \mathcal{E}(t, \mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}t}$, $\mathcal{E}$ находится из уравнения Максвелла в Фурье пространстве $i\mathbf{k} \times \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - i\frac{\omega}{c} n^2(\omega) \mathcal{E}$, в которое нужно подставить из другого уравнения Максвелла $\mathcal{H} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathcal{E}$, получить

$$\mathcal{E} = -i \frac{4\pi\rho}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2(\omega) - \mathbf{k}^2 + i\omega 0} \left[\frac{\omega}{c} \frac{\mathbf{v}}{c} - \frac{\mathbf{k}}{n^2(\omega)} \right],$$

а дальше снова вернуться в обычное пространство и очень аккуратным образом преобразовать большой интеграл с помощью δ -функции и формулы Сохоцкого.

(???? нужно будет - еще раз переделаю в теории, тут или выше укажу мелочи какие-то)

(??? тут про применение черенковского излучения, досмотрю!)

О скин-эффекте (????)

Внутри металла

$$\mathcal{E}(\omega, \mathbf{r}) = \mathcal{E}(\omega) f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |f(r)| \sim e^{r/\delta}, \quad \delta \equiv \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma}}.$$

Это следует из нескольких уравнений Максвелла, которые дадут $\nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) = i \frac{\omega^2}{c^2} \frac{4\pi\sigma}{\omega} \mathcal{E}$, а дальше можно перейти к волновому уравнению и решить через ряды, используя условие малости производных.

(??? про этот метод еще подумаю, пока им не овладел.)

2.1.9 Light emission

(скоро начну тренировать финально, каталог ждет меня!)

Основное об излучении

(абзац про качественно, откуда все получается? от того, что у нас всегда есть взаимодействие с э.м. полем!!!)

Вводят три зоны излучения:

- волновая зона: $a \ll \lambda \ll r$,
- квазистационарная зона: $a \ll r \ll \lambda$,
- индукционная зона: $a \ll \lambda \sim r$

Характерное время изменения движения зарядов δt можно связать с длиной волны электромагнитных колебаний λ , $\delta t \sim \lambda/c$. Оценим (??)

$$\dot{d} \sim \frac{d}{\delta t} \sim d \frac{c}{\lambda}, \quad \ddot{d} \sim \frac{\dot{d}}{\delta t} \sim d \frac{c^2}{\lambda^2}$$

Это значит, что разные вклады по обратным степеням расстояния ведут себя как

$$\frac{\dot{d}}{cr^2} \sim \frac{d}{r^2\lambda}, \quad \frac{\ddot{d}}{c^2r} \sim \frac{d}{r\lambda^2}$$

Здесь, условие $a \ll \lambda$ означает, что разность фаз для волн из разных точек системы пренебрежимо мала, что необходимо для применимости дипольного приближения.

В квазистационарной или ближней зоне доминирует вклад электрического поля, имеющего вид поля стационарного диполя, который очень медленно зависит от времени.

В индукционной зоне все вычисленные слагаемые имеют сравнимый вклад в электрическое и магнитное поля. В волновой зоне

$$\mathcal{H} \approx -\frac{1}{c^2r} \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}, \quad \mathcal{E} \approx \mathcal{H} \times \mathbf{n}$$

т.е. в волновой зоне векторы $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ и $\mathbf{n}$ образуют взаимно ортогональную правую тройку.

О решениях в форме запаздывающих потенциалов

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{m}}}{cr} + \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}}{cr} + \frac{1}{2c^2r} \ddot{\mathbf{D}} + \frac{1}{2c^2r} \ddot{\mathcal{M}}_{ikl} n_k n_l \mathbf{e}_i,$$

r.h.s. is at the retarded time $\tau = t - r/c$.

$$\mathbf{m} := \frac{1}{2c} \sum_i e_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i, \quad \mathcal{M}_{ikl} := \frac{1}{c} \int_V dV' j_i x'_k x'_l, \quad \mathcal{D}_j := \sum_k Q_{jk} n_k, \quad Q_{jk} := \sum_i e_i \left\{ x_j^{(i)} x_k^{(i)} - \frac{r_i^2}{3} \delta_{jk} \right\}.$$

Proof:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_V dV' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right),$$

$$dV' \equiv dx' dy' dz'.$$

(little picture for r, r' is needed!)

$$\mathbf{A}_{\text{one prtcl}}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{c} \int \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{v}(t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')) d^3 \mathbf{r}' dt',$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e \mathbf{v}}{cR(1 - (\mathbf{nv})/c)} \Big|_{t'} \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R(1 - (\mathbf{nv})/c)} \Big|_{t'}$$

$$t' = t - \frac{R(t')}{c}. \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dt'} = 1 - \frac{(\mathbf{nv})}{c}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \simeq \frac{1}{r}, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r - \mathbf{r}' \cdot \nabla r = r - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r}.$$

Now, magnetic field:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_d + \mathbf{B}_m + \mathbf{B}_Q + \mathbf{B}_M,$$

$$\mathbf{B}_d = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r} \propto \frac{1}{c^2},$$

$$\mathbf{B}_m = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}})}{c^2 r} \propto \frac{1}{c^3},$$

$$\mathbf{B}_Q = \frac{\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}}{2c^3 r} \propto \frac{1}{c^3},$$

$$\mathbf{B}_M = \frac{1}{2c^3 r} \ddot{M}_{ikl} n_k n_l \varepsilon_{irs} n_r \mathbf{e}_s \propto \frac{1}{c^4},$$

(mind the $1/c$ in the definitions of the $\mathbf{m}$!)

(есть большие формулы для явного вида полей, но их никто никогда не использует, так что не привожу их пока что, может, потом допишу их.)

На больших расстояниях от частицы в волновой зоне поле равно

$$\mathbf{E} = \frac{e[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \mathbf{w}]]}{c^2 R(1 - (\mathbf{nv})/c)^3}, \quad \mathbf{H} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$$

$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}(t')$ - ускорение заряда. Энергия электромагнитного поля $d\varepsilon$, испускаемая зарядом в элемент Телесного угла $d\Omega$ в направлении $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ В Течение интервала времени $t' \div t' + dt'$, пройдет через элемент площади $dS = R^2 d\Omega$ в течение времени от t до $t + dt$, причем момент излучения t' и момент наблюдения t связаны соотношением (I.58).

На больших расстояниях от излучающего заряда (в волновой зоне, при $|\mathbf{r}_0| \ll |\mathbf{r}|$) эта энергия равна

$$d\varepsilon = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}|^2 R^2 d\Omega dt$$

(по итогу в общем случае очень уж большие формулы, так что их никто не запоминает и очень редко используют.)

О дипольном приближении в излучении

Вектор-потенциал системы зарядов с токами $\mathbf{j}(t', \mathbf{r})$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{c} \sum_q \frac{e_q \mathbf{v}_q(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

в дипольном приближении отвечает одинаковому времени запаздывания для всех зарядов в системе:

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \mapsto t'_0 = t - \frac{r}{c}$$

Это означает, что мы пренебрегаем разностью фаз для сигналов, приходящих в точку наблюдения на большом расстоянии $r \gg r' \sim a$, a - размер системы с зарядами. Если λ - длина волны электромагнитного поля, то разность фаз от разных зарядов в системе можно оценить как $ka = 2\pi a/\lambda \ll 2\pi$, т.е. приближение применимо при $a \ll \lambda$. Тогда.

$$\mathcal{A}(t, \mathbf{r}) \approx \frac{1}{c} \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \sum_q e_q \mathbf{r}_q(t'_0) = \frac{1}{cr} \dot{\mathbf{d}}(t'_0) \Big|_{t'_0=t-r/c}$$

мы использовали определение электрического дипольного момента системы зарядов. Из калибровки Лоренца $\mathcal{A}_0 = -c \int dt \operatorname{div} \mathcal{A}$, в дипольном приближении

$$\mathcal{A}_0 = -c \frac{1}{c} \int dt \frac{d}{dt} \operatorname{div} \frac{\mathbf{d}}{r} = -\operatorname{div} \frac{\mathbf{d}(t'_0)}{r} = \frac{\mathbf{d}(t'_0) \cdot \mathbf{n}}{r^2} + \frac{\dot{\mathbf{d}}(t'_0) \cdot \mathbf{n}}{cr}$$

так как $\nabla t'_0 = -\mathbf{n}/c$.

Магнитное поле получается прямым вычислением ротора от вектор-потенциала

$$\mathcal{H} = \nabla \times \mathcal{A} = \frac{1}{c} \left\{ \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times \dot{\mathbf{d}}(t'_0) + \frac{1}{r} \nabla t'_0 \times \ddot{\mathbf{d}}(t'_0) \right\} = -\frac{1}{cr^2} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{d}} - \frac{1}{c^2 r} \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}$$

Электрическое поле $\mathcal{E} = -\nabla \mathcal{A}_0 - \frac{1}{c} \partial \mathcal{A} / \partial t$, прямо считается

$$-\nabla \mathcal{A}_0 = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) \frac{3\mathbf{n}}{r^3} - \frac{1}{r^3} \mathbf{d} + \frac{1}{cr^2} (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{d}}) \mathbf{n} + (\dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}) \frac{2\mathbf{n}}{cr^2} - \frac{1}{cr^2} \dot{\mathbf{d}} + \frac{1}{c^2 r} (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}}) \mathbf{n}$$

и учитывая, что $-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = -\frac{\ddot{\mathbf{d}}}{c^2 r}$ находим

$$\mathcal{E} = \frac{1}{r^3} \{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{d}\} + \frac{1}{cr^2} \{3(\dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \dot{\mathbf{d}}\} + \frac{1}{c^2 r} \{(\ddot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \ddot{\mathbf{d}}\}.$$

О мультипольных разложениях в излучении

О силе радиационного трения

$$\mathbf{F}_{\text{fric.}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}},$$

Её нужно понимать в смысле возмущения: сначала находится траектория частицы без силы радиационного трения, по ней вычисляем интенсивность излучения и, как следствие, поправки к траектории за счет силы радиационного трения.

Она взялась из сравнения изменения кинетической энергии частицы с потерей энергии на излучение.

Интенсивность излучения заряда определяет средний темп потери энергии частицей, для которой $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{J} = -\frac{2e^2}{3c^3} \langle \dot{\mathbf{r}}^2 \rangle$$

Здесь $\langle \dot{\mathbf{r}}^2 \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \right\rangle - \langle \mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}} \rangle = -\langle \mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}} \rangle$, значит, потерю энергии можно представить в виде

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \langle \mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}} \rangle$$

Если на частицу действует внешняя сила $\mathbf{F}$, то эта сила совершает работу над частицей $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt$, а значит, изменение энергии частицы в среднем

$$\frac{dE}{dt} = \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rangle$$

О синхротронном излучении (!?!?!)

(позже добавлю это! там подумать есть над чем)

При движении в магнитном поле формула (8.33) дает мощность потерь на синхротронное излучение

$$\mathcal{W} = \frac{2e^4}{3c^5 m^4} \mathcal{H}^2 p_{\perp}^2$$

Релятивистская формула:

$$\mathcal{W} = -\frac{2e^2}{3c^3} w^{\mu} w_{\mu}$$

О синхротронном,..... излучениях в электродинамике

(короткий обзор и идея каждого, подробнее - в записи по ЭД в 1й тоже части)

Заряд, движущийся с произвольной скоростью по окружности в постоянном однородном магнитном поле имеет магнито-тормозное излучение. Формула для него огромная.

О спонтанном излучении

(короткий обзор и формулы, подробнее - в записи по квантмеху в 1й тоже части)

Считаем матричный элемент при дипольных переходах, считая, что сначала было возбужденное состояние, а потом фотон:

$$A_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega_{fi}t} \langle f | \hat{V}_{E1}(t) | i \rangle, \quad \omega_{fi} := \frac{1}{\hbar} \{E_{1s} - E_{2p}\} < 0,$$

$$V_{E1} = -\mathbf{d} \cdot \mathcal{E}(t),$$

$\mathbf{d} = e \sum_f \mathbf{r}_f$ - дипольный момент атома в системе отсчета с центром в точке, покоится

неподвижное ядро: сумма берется по электронам атома, а электрическое поле в центре системы $r = 0$ в момент времени t . Последующие члены высших порядков включают в себя энергию квадруполь (E2) и других 2^{ℓ} -польных электрических моментов (E ℓ), а также магнитный момент (M1) и высшие магнитные мультиполи.

$$|i\rangle = |\text{vac}\rangle |2p, m\rangle \mapsto \langle \mathbf{r} | i \rangle = |\text{vac}\rangle \psi_{2p,m}(\mathbf{r}) = |\text{vac}\rangle R_{2p}(r) y_{1,m}(\theta, \phi).$$

$$y_{1,\alpha}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} n_{\alpha},$$

$$\langle 1s | \mathbf{d}^{\beta} | 2p, \alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{\alpha\beta} e r_{fi}.$$

Матричный элемент в фоковском пространстве ³ -

$$\langle \mathbf{k}_f, \lambda_f | \mathbf{a}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) | \text{vac} \rangle = 2\hbar\omega_f (2\pi)^3 \delta_{\lambda_f \lambda} \delta(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}).$$

$$dw_{fi} = \frac{1}{2l+1} \frac{|A_{fi}|^2}{T} \frac{d^3 k_f}{2\hbar\omega_f (2\pi)^3} = 2\pi \delta(\omega_{fi} + \omega_f) \frac{e^2 r_{fi}^2}{9} \omega_f^2 \frac{d^3 k_f}{2\hbar\omega_f (2\pi)^3},$$

мы учли, что вектор поляризации нормирован на единицу: $\epsilon^* \cdot \epsilon = 1$, если провести суммирование по всем проекциям орбитального момента в состоянии $2p$. Интегральная вероятность в единицу времени, или обратное время жизни уровня, вычисляется как

$$\frac{1}{\tau} = \int dw_{fi},$$

так что с учетом $|\mathbf{k}_f| = \omega_f/c$,

$$d^3k_f = \frac{1}{c^3} d^2\Omega \cdot \omega_f^2 d\omega_f$$

легко находим

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3c^3} \omega_f^4 d_{fi}^2 \frac{1}{\hbar \omega_f},$$

где

$$d_{fi} = \frac{e}{\sqrt{4\pi}} \frac{r_{fi}}{\sqrt{3}}$$

(еще пару формул добавлю, решу еще раз задачу!)

О типичных темах квантового излучения

О правилах отбора в атомах

(сперва в квантмехе напишу, тут мб добавлю это тоже, а мб и нет, не знаю, посмотрим.)

О фотоэффекте

(просто на 2/3 страницы решение этой модели по КТП, а также основные графики и формулы. немного теории, в квантмехе и ктп это подробнее)

2.2 Gravity in a nutshell

(пока в основном это в отдельной записи, сюда постепенно тоже буду дописывать суть)

2.2.1 Einstein Equations, nNature of Gravity

Об уравнениях Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

(тут минимальные геометрические формулы)

О границах применимости уравнений Эйнштейна

(на самом деле куча тут проблем, напишу потом)

О принципе эквивалентности

(тут про переход метрикой в нее)

Что такое гравитационная постоянная и откуда она?

(важный вопрос)

Об уравнении геодезической

$$\begin{aligned}
 u^\nu \nabla_\nu u^\alpha &= 0; & \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha &:= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} [\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda}] \\
 \frac{dU^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\alpha U^\beta &= 0 & \nabla_\nu u^\alpha &:= u^\alpha_{;\nu} = \partial_\nu u^\alpha + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha u^\lambda, \\
 U^\alpha \left(\frac{\partial U^\mu}{\partial X^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\beta \right) &= 0 \\
 P^\alpha \frac{\partial P^\mu}{\partial X^\alpha} &= -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta. & (P^\mu &\equiv mU^\mu)
 \end{aligned}$$

Получаем просто из $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\mu} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\mu}$ для $S = -mc^2 \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}$, аккуратно нужно подставить $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ и $u^2 = c^2$, а также разбить $u^\nu u^\lambda \partial_\nu g_{\mu\lambda}$ на два слагаемых по симметрии.

(!!! тут очень важное указание, как решаем это!!!)

В частности, [геодезическая в нерелятивистском пределе](#):

$$\ddot{\mathbf{r}} \approx -\nabla \phi(\mathbf{r}), \quad \text{where} \quad \phi(\mathbf{r}) \approx \frac{c^2}{2} g_{00} + \text{const.} \quad \Leftrightarrow \quad g_{00}(\mathbf{r}) \approx 1 + 2 \frac{\phi(\mathbf{r})}{c^2},$$

а $\phi(\mathbf{r})$ ищем по Ньютоновской механике.

Нерелятивистский предел - это по сути $u^\mu \approx c(1, \frac{v^\alpha}{c})$, $v^\alpha = \frac{dr^\alpha}{dt}$, поэтому $u^\nu \nabla_\nu u^\alpha \approx u^0 \frac{1}{c} \partial_t u^\alpha + \gamma_{00}^\alpha u^0 u^0 \equiv 0$, и эти два слагаемых и составляют типичное уравнение геодезической в нерелятивистском пределе.

В частности, [геодезическая в расширяющейся Вселенной](#):

(из космологии перепишу потом)

On conservation of energy in gravity (!!!!)

(тут тонкостей очень много, укажу там потом их только. пока в основной записи)

On continuity equation

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^\lambda_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T^\mu_\lambda = 0$$

For example, in FLRW metric for $\nu = 0$ we have $\Gamma_{\mu 0}^\lambda = \frac{\dot{a}}{a}$, the continuity equation is

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + P) = 0.$$

And after considering matter ($P = 0$), radiation ($P = \frac{\rho}{3}$), dark energy $P = -\rho$, we have

$$\rho \propto \begin{cases} a^{-3} & \text{matter} \\ a^{-4} & \text{radiation} \\ a^0 & \text{vacuum} \end{cases}$$

(мб тут про идеальную жидкость еще напишу что-то, не работал пока с ней)

2.2.2 Geometrical properties for gravity

(напишу и сюда все известные формулы и смысл параметров, уже писал про них в др записях!)

Основные геометрические формулы

$$R_{\mu\nu} \equiv \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\lambda,$$

$$R = R^\mu_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Свойства:

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc};$$

$$R_{abcd} = R_{cdab};$$

$$R_{a(bcd)} \equiv R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adb c} = 0 \quad (1 \text{ тождество Бьянки});$$

$$R_{ab(cd;e)} \equiv R_{abcd;e} + R_{abde;c} + R_{abec;d} = 0 \quad (2 \text{ тождество Бьянки}).$$

О метрике, кривизне

2.2.3 Weak and Centrally Symmetric Gravity

(пока в записи про гравитацию!)

О пределе слабого поля

О метрике Шварцшильда

2.2.4 Black Holes, Stars, Collapsars

(в том числе ЛЛ2 модели коротко напишу, но пока это в записи про гравитацию!!!)

Hawking radiation

2.2.5 Gravitational waves

2.2.6 Cosmology

(пока в основном это в отдельной записи, сюда постепенно тоже буду дописывать суть
!!!! добавлю много графиков)

Основные наблюдения в основе космологии (!!!)

О красном смещении

(суть напишу, вообще большая тема.)

Идея космологии и моделей в ней (!!!)

(очень важный общий параграф, потому что эти идеи дальше будут реализовываться.
продумаю - напишу)

On Friedmann equations and FLRW metric

On FLRW metric

(тут формулы метрики и кристоффелей)

Ricci curvature:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{ij} &= -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right]g_{ij}. \\ R &= -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]. \end{aligned}$$

Einstein tensor $G^\mu{}_\nu \equiv g^{\mu\lambda}G_{\lambda\nu}$:

$$\begin{aligned} G_0^0 &= 3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right], \\ G_j^i &= \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]\delta_j^i. \end{aligned}$$

(мб потом укажу их вывод, пока вообще не до этого всегда, так или иначе задачи про это будут)

On Friedmann equations

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \end{aligned}$$

or the first one in another form

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

or with $\Omega_{I,0} \equiv \frac{\rho_{I,0}}{\rho_{\text{crit},0}}$, $\Omega_{k,0} \equiv -k/(a_0 H_0)^2$

$$H^2(a) = H_0^2 \left[\Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{k,0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \right]$$

(!!!! в чем идея этих омег??? разложение по отношению к современным значениям?) or dropping the '0' subscripts and setting $a_0 \equiv 0$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda$$

Here from experiments

$$\begin{aligned} |\Omega_k| &\leq 0.01, \quad \Omega_r = 9.4 \times 10^{-5}, \quad \Omega_m = 0.32, \quad \Omega_\Lambda = 0.68. \\ \Omega_{\text{baryons}} &= 0.05, \quad \Omega_{\text{cold dark matter}} = 0.27 \end{aligned}$$

On geodesics in FLRW

On inflation

On thermal history

(а вот об этом пока в космологии пишу, потом только сюда буду переносить.)

On tests and confirmations of cosmological models

(очень важные указания, потом додумаю, как тестируем, какие конкретно данные получаем)

Part II

Flat Space-Time

Опишем подробно плоское пространство-время и следствия размышлений о нем.
(тут много доработок нужно, однажды точно нормально все напишу, пока как есть.)

3 Relativity

3.1 Main Concepts of Relativity

3.1.1 Idea of Relativity

(why we need to think about relativity at all? it is not obvious, if one would erase this part from school book, I am not sure that people would restore it. why in general we are using this concept? relative, not relative... I'll answer it later)

3.1.2 Present Moment

(I'll discuss how it fits to the SR. Or maybe I'll create a section about the real relativity, and section of SR will be after it? anyway, a good discussion of this topic is a very good idea!)

Can There be Something beyond mathematical concepts?

(I'll write this intro later...)

Idea of the aether

(this is the fundamental idea, though a false idea, but it is important to discuss it)

Важность критического мышления

Сколько миллионов человек верили в преобразования Галилея и постоянство скорости света, пока им не показали, что все-таки они не работают? Математики у них хватало, знаний тоже, нужно было просто подумать критически. Полный провал образования в прошлом, что такие вещи с огромным трудом дались людям.

В 2020-х годах в физтехе огромные проблемы с теорией поля и СТО, парадокс близнецов так написан, что нужно только увольнять автора того, кто это писал и какие лекции вел. Мало того, что тема парадокса близнецов раскрыта заумно, шаблонно, так еще и делается вид, что все там объяснено, просто, понятно. В итоге гарантировать можно, что тот, кто живет в рамках тех лекций никогда ничего не поймет. Его никто увольнять не будет, потому что если говорить в двух словах физтех говно. И дело не в нехватке технологий, не в отсутствии доступа к информации, а только лишь в том, что вместо критического мышления, люди только имитируют его. Когда-то они даже осознавали это, потом забыли. И это повсеместно, это не исключения, лучших лекций в физтехе по этой теме и нету.

СТО учит нас очень критически думать! Это очень важный навык, и точно стоит того, понять СТО, чтобы убедиться в том, что он есть тем, у кого он есть.

3.1.3 Concept of Metric

Евклидова и минковского метрики как просто удобный способ поднимать индексы

(она вроде ни для чего другого не нужна.)

Аналогии с картами

Составляющие метрики

Другие вопросы

Как связаны составляющие метрики с параметрами бустов (??)

это параметры ли бустов? (!?!?!?)

(пока такой вопрос появился, мб да, просто тут 2 разных интерпретации. пока так, на таком понимании нахожусь.)

3.1.4 How Far Should One Think about Philosophy of Relativity?

(there is a big problem that philosophers come and start talking a lot about useless questions and don't want to move anyway. so I'll write here, when it is not a fundamental physics, and one should not ask abstract questions anymore?)

3.1.5 How Far Should One Think about Mathematics of Relativity?

(there is a big problem that a lot of mathematics was developed, but it is not clear, if it is useful or no? maybe no. I'll discuss it here)

Which mathematics is really needed and important and which is not?

(???)

3.1.6 A View on Reality that Makes SR Understandable

(?? по идее во введении короткая суть, а тут подробно это обсудим. если еще что-то вспомню, то добавлю!)

Ничего, кроме пространства и времени фундаментального нету, а все объекты опираются на эти свойства

Все события - это только параметры пространства и времени. Все. Никаких там обстоятельств по жизни, никаких других псевдо энергий, влияний сил. Вообще ничего. Просто вечное бесконечное пространство и время, только это. Поэтому сразу о лишнем и не думаем.

Возможно, есть что-то, что обеспечивает передачу информации всем системам о ее природе, а может и нет, это неизвестно и мы останавливаемся на том, что системы просто как-то об этом знают, и идем изучать с этой установкой природу.

(это же то, к чему приходит парадокс близнецов)

Желание, чтобы законы физики должны быть вне зависимости от системы отсчета

"The laws of physics must be of such a nature that they apply to systems of reference in any kind of motion."

Einstein 1916

(что-то еще напишу. Глубокая все-таки философия.)

Все описывается в нашей системе отсчета, а переходить в другие не обязательно и требует вдумчивости

Да, можно переходить в другие. Но зачем? Абсолютно все можно понимать о мире, имея просто здравый рассудок и находясь в одной системе отсчета.

Нигде нет в мире какого-то выделенного места в пространстве и во времени, (разве что в черных дырах), поэтому то, что сейчас и здесь ровно так же бесконечно ценно, как и то, что где-то там вдали, в будущем, или в прошлом

Конечно, это не значит, что не нужно ценить то, что когда-то было, или что не нужно стремиться к улучшению настоящего, или что нужно специально жить в плохих условиях. Это уже дело каждого человека.

А вот что важно - что физически все одинаково. Так что повода для страданий почти никогда нету! А очень часто может казаться, что тут принципиально что-то не то. Нет, в природе все то, это уже в людях дело, многие люди очень неосознанно живут.

Также многие начинают убеждать, что нужно куда-то поехать, где жизнь лучше чувствуется, или в каком-то месте может быть работа хорошая не из-за того, что там какая-то есть техника, которой нету в других местах, а просто из-за такого особого пространства. Это полнейший бред и манипуляции, мы знаем свойства пространства: такого быть не может.

Поняв переход в другие системы отсчета можно открывать новые законы

Очень многое было открыто именно таким методом (впишу, что конкретно потом, ниже это уже написано).

(чуть подробнее про это напишу.)

Пространство и время связаны между собой

Суть взгляда

Почему это так?

Объекты в пространстве-времени имеют свойства, следующие из свойств пространства-времени

Суть взгляда

Почему это так?

Пока мы не занимаемся переходом в другую систему отсчета, у нас такая же физика, только закон дисперсии другой (!??!)

(пока так это вижу)

Убежденность в постоянстве скорости света

(в этом мы тоже ни разу не сомневаемся, когда занимаемся этими вопросами)

Суть взгляда

Даже не задаемся вопросом, почему это так, когда работаем в рамках СТО, потому что СТО даст много результатов, именно на результаты хочется посмотреть.

Почему это так?

Все свойства пространства-времени можно узнать, изучая их преобразования

Суть взгляда

Почему это так?

Не нужно почем зря переходить в другую систему отсчета, а если мы делаем это, то делать это очень аккуратно

Переходы в другую систему отсчета крайне не очевидны.

(пропишу потом)

(тут следствия про мировоззрение тоже)

Другие философские выводы из СТО

(пока мало про это думал, напишу потом подробнее)

Пространство бесконечно

Бесконечное множество всего, что везде и всюду...

(потом раскрою.)

То, что мы не замечаем, может быть нетривиально и важно

Можно даже не заметить пространство время, а из него следуют прямо все уравнения движения и вся теория поля.

3.2 Basic Philosophy About Space and Time

3.2.1 What is Emptiness?

Вакуум как пространство, в котором живут представления группы Пуанкаре (???)

(продумаю потом)

Пространство бесконечно, но двигаться мы можем только в новые места, старые никогда мы больше не встретим

Потому что оно очень быстро движется, улетает.
(тут про то, что в прошлое вернуться нельзя.)

Какая может быть минимальная длина пространства? (???)

<https://arxiv.org/pdf/1307.5618.pdf> (2013)

(интересный вопрос, но тут какой-то теорфиз используется, так что не тот у меня уровень еще.)

Many generic arguments support the existence of a minimum spacetime interval L_0 . Such a "zeropoint" length can be naturally introduced in a locally Lorentz invariant manner via Synge's world function bi-scalar $\Omega(p, P)$ which measures squared geodesic interval between spacetime events p and P . I show that there exists a non-local deformation of spacetime geometry given by a disformal coupling of metric to the bi-scalar $\Omega(p, P)$, which yields a geodesic interval of L_0 in the limit $p \rightarrow P$. Locality is recovered when $\Omega(p, P) \gg L_0^2/2$. I discuss several conceptual implications of the resultant small-scale structure of spacetime for QFT propagators as well as spacetime singularities.

Другие свойства пустоты

Об эффекте Унру и относительности пустоты

(напишу потом, в КТП скорее всего отдельный раздел про этот эффект будет.)

Как так, что скорость объектов в пространстве это свойство пространства? (????)

(пока не отвеченный вопрос.)

Какое свойство пространства-времени обеспечивает свойства объектов в нем иметь постоянную скорость?

Представим пустоту. Там нет полей, которые двигались бы с фиксированной скоростью, называемой скоростью света. Какое такое тогда свойство самого пространства наделяет все объекты в ней максимальной скоростью?

(!?!?!?!?!?!?! Жесть, я не знаю, приехали прямо полностью.)

3.2.2 What Is the Time?

(I'll write later, there are a lot of good ideas, but I am not sure, which are really important)

Основные философские соображения про время

Возможно, мы живем вечно

Возможно, будущее известно

Возможно, прошлое не имеет никакого отношения к настоящему, пока наш мозг не начнет работать в таком формате, что оно начнет иметь отношение

Событие характерно только лишь точкой в пространстве времени. И ни чем другим.

Что такое настоящий момент? (!?!??!)

(на ютубе про это говорится, в книгах пишется, напишу и я тоже это.)

О влиянии философского видения времени на жизнь

(тоже интересно, какие следствия этого?)

Как понимать, что два одновременных события не одновременны в другой системе отсчета? (???)

(пока хз)

О свойствах времени по ОТО

В присутствии массивных тел время идет медленнее

In the Newtonian potential that arises from a spherical object of mass M $\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$ the resulting shift in the spacetime metric g_{00} means that an observer sitting at a fixed distance r will measure a time interval,

$$d\tau^2 = g_{00}dt^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2$$

This means that if an asymptotic observer, at $r \rightarrow \infty$, measures time t , then an observer at distance r will measure time T given by

$$T(r) = t\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}$$

We learn that time goes slower in the presence of a massive, gravitating object.

О других известных свойствах времени

Обращение времени - только лишь инструмент анализа уравнений, не более

Время никогда не обращается. Хотя этого и нет в наших аксиомах.

О связи течения времени с измерениями и взаимодействиями (????)

Кирилл Песочный сказал, что:

Течение времени связано со взаимодействиями со внешними полями. Именно из-за этого объекты стареют. Если бы не было взаимодействия с какими-то внешними полями или телами, то и не было бы старения.

И в самом деле, если бы все оставалось ровно таким же, каким и было, то невозможно было бы сказать, что прошло какое-то время.

Тем не менее, думаю, это бред. Потому что частица будет распадаться в среднем за одно и то же время, вне зависимости от чего угодно. И время мы всегда рассматриваем априори как линейно растущий параметр и вся физика у нас только на этом и базируется.

Что можно сказать про тайм менеджмент, зная свойства времени? (?)

(пока могу сказать лишь то, что я написал ниже)

У нас все релятивистские эффекты ничтожны для времен людей на Земле, так что можно сказать лишь то, что: абсолютно везде можно в абсолютно любой скорости делать свою работу, разве что есть факторы, которые не связаны со свойствами пространства и временем, например, обстоятельства по жизни, обстоятельства вокруг, наличие сил и ресурсов для выполнения данной работы. Так что возникают вопросы, которые не связаны с физикой пространства-времени.

Однако важный вывод в том, что все везде эквивалентно, так что нет и не может быть никакой выделенной точки в пространстве и во времени, когда что-то происходит супер особенное по своей природе, а не из-за обстоятельств.

(? мб потом подумаю еще про это.)

О других гипотетических свойствах времени

Может ли силовое воздействие изменять ход времени?

Такого свойства как-то нам не известно, но тогда возникает вопрос о том, как частица поймет, что ее время на самом деле должно замедляться и она на самом деле ускоряется? (отсылка к парадоксу близнецов, потом напишу нормально.)

Пока считаю, что нет такого, но это место, над которым точно нужно много подумать.

Что топология может сказать о времени?

(указание на Гуца тут. пока считаю, что это заумно и интересно, но вряд ли что-то содержательно там сказано.)

О квантовании времени (???)

Об исчезновении понятия времени в начале Вселенной (???)

Кто думал про квантовую космологию, так говорят.

(я ничего не понимаю про это, думаю пока, что это бред. но потом мб подумаю про квантовую космологию, мб напишу что-то более содержательно.)

А что если время можно описывать теорией графов?

Вот пусть какие-то умники так и делают, в первом приближении это бред, на этом я и остановился.

3.2.3 The Concept of Space-Time

Аффинная структура

(у Гуца потом спишу, не до этого.)

О важности аффинной структуры (???)

(?? остается вопрос, зачем она нужна?)

Пространство-время как концепция, заменяющее понятие эфира (???!!!)

(тоже важно понимать, как иначе могло бы быть?)

4 Galilean Relativity

(a very similar theory is in the note on mechanics)

4.1 Ideas of Galilean Relativity

(write that idea from school and from mechanics)

4.1.1 Physical Idea of Galilean Relativity

(write that idea from school and from mechanics)

4.1.2 Experiments to Confirm of Galilean Relativity

(??? I don't know them yet, but they should have been done)

4.2 Mathematical Properties of Euclidean Space

4.2.1 Metric Isometries (!!!?)

(!!! допишу хорошо, с обозначениями Киселева!!!!)

Изометрии евклидовой метрики (!?)

Найдем преобразования координат, которые не меняют вид метрики, - изометрии, которые оставляют тензор метрики инвариантным. Для этого сначала запишем закон преобразования метрики при произвольных обратимых заменах координат:

$$dC^2 = g'_{\alpha'\beta'} dr'^{\alpha'} dr'^{\beta'} = g'_{\alpha'\beta'} \Lambda^{\alpha'}_{\alpha} \Lambda^{\beta'}_{\beta} dr^{\alpha} dr^{\beta} = g_{\alpha\beta} dr^{\alpha} dr^{\beta},$$

где матрица преобразований координат задается частными производными $\Lambda^{\alpha}_{\beta} = \partial_{\beta} r'^{\alpha}$. В этом выражении тензор смешанного типа Λ^{α}_{β} имеет один контрвариантный индекс α , который в матричной записи мы трактуем как столбцовый, и один ковариантный индекс β , который мы трактуем как строчный, так что Λ^{α}_{β} - это матрица 3×3 , для которой можно пользоваться обычной операцией матричного умножения, и, при этом, расположение индексов у Λ^{α}_{β} однозначно задает законы преобразования тензора по каждому из индексов. Тензор метрики $g_{\alpha\beta}$ имеет 2 ковариантных индекса. Для того, чтобы использовать матричное умножение и при этом однозначно определять закон

преобразования при смене базиса в векторном пространстве, введем операцию транспонирования так, как мы это уже делали в разделе §. Транспонирование определяется инвариантно в любом базисе как координат, так и представлений группы преобразований и в случае 3-вектора с контрвариантным индексом, который в матричных обозначениях нумерует позицию в столбце, переводит его в транспонированный вектор с контрвариантным индексом, который нумерует позицию в строке, что мы указываем порядком следования индексов для использования матричного умножения,

$$dx^\alpha \equiv dx^\alpha \mapsto (dx^T) \stackrel{\text{def}}{=} dx^{\alpha*}.$$

По построению, транспонированный вектор $(dx^T)^{\alpha*}$ преобразуется транспонированной матрицей Λ^T , если использовать матричные обозначения:

$$dx'^T = dx^T \circ \Lambda^T,$$

или в индексах

$$(dx'^T)^{\alpha*} = (dx')^{\alpha*} = \Lambda_{\beta}^{\alpha} dx^{\beta*} = (dx^T)^{\beta*} (\Lambda^T)_{\beta}^{\alpha} = (dx^T \circ \Lambda^T)^{\alpha*},$$

где мы воспользовались определением транспонирования матрицы (1.22) в разделе §с. Из этих выкладок также ясно видно, что переход к матричному умножению с транспонированием абсолютно сочетается с ковариантными свойствами тензорных величин с соблюдением всех свойств преобразования по ковариантным и контрвариантным индексам: например, контрвектор преобразуется по закону преобразования контрвекторов. Вместе с тем, говорят, что транспонированные тензорные величины (1.71) преобразуются по транспонированному представлению, поскольку в записи с матричным умножением последовательная композиция двух обратимых преобразований сводится к левому умножению матриц в контрвариантном пространстве и к правому множению транспонированных матриц в транспонированном контрвариантном пространстве.

После перехода к записи с привычным матричным умножением квадрат длины можно записать в терминах транспонированного контрвектора и матрицы метрики,

$$d\mathcal{C}^2 = dx^T \circ \hat{g} \circ dx, \quad \hat{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta},$$

а преобразование тензора метрики можно переписать в виде умножения матриц,

$$\hat{g} = \Lambda^T \circ \hat{g}' \circ \Lambda,$$

Тогда и закон изометрии, когда $\hat{g}' = \hat{g}$,

$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta} \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\beta'}^{\beta} = (\Lambda^T)_{\alpha'}^{\alpha*} g_{\alpha\beta} \Lambda_{\beta'}^{\beta}$$

согласно (1.74) можно записать с матричным умножением как ортогональные преобразования 3-х пространственных координат пространства ²¹,

$$\hat{g} = \Lambda^T \circ \hat{g} \circ \Lambda,$$

откуда сразу следует специальное условие на детерминант матрицы преобразований ²²

$$(\det \Lambda)^2 = 1.$$

В декартовых координатах метрика - единичная матрица: $\hat{g} = \mathbb{1}$, а изометрия удовлетворяет условию

$$\Lambda^T \circ \Lambda = \mathbb{1}.$$

Преобразования, удовлетворяющие условию (1.78) называются ортогональными (символ O), а условию $|\det \Lambda| = 1$ - специальными (символ S), а при $\det \Lambda = 1$ - собственными. Собственные непрерывные изометрии - это повороты пространства, группа поворотов 3-мерного евклидова пространства $SO(3)$, $r'^\alpha = \mathcal{R}_*^\alpha(\phi)r^\beta$, т.е. в случае бесконечно малого поворота $\mathbf{r}' \approx \mathbf{r} + \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}$ при $\phi \rightarrow 0$, и пространственные сдвиги $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$, когда соответственно, $\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \mathfrak{R}_{\beta}^{\alpha}$ с углом поворота ϕ и $\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}$ при $\mathbf{a}$, которое не зависит от координат. Зеркальное отражение пространства $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ (символ $\mathbb{P}$) или нечетного числа его осей приводит, очевидно, к $\det \Lambda = -1$, а в общем случае подобные (несобственные) преобразования являются комбинацией поворотов с отражением. В итоге, изометрии трехмерного евклидова пространства задаются шестью непрерывными параметрами: три угла поворота вокруг трех независимых осей и три сдвига координат при трансляции вдоль трех независимых осей, неоднородная (inhomogeneous, символ I) группа $ISO(3)$, - а также дискретным преобразованием зеркального отражения $\mathbb{P}$. Преобразования $SO(3)$ вместе с $\mathbb{P}$ образуют группу $O(3)$.

Поскольку законы механики записываются в евклидовом пространстве во всех декартовых системах отсчета одинаково, преобразование координат при переходе из одной декартовой системы в другую должно быть изометрией евклидовой метрики векторных пространств координат и скоростей, а действие должно быть евклидовым скаляром, т.е. инвариантом, так как иначе по значению действия мы могли бы отличить одну декартову систему от другой, что означало бы нарушение принципов однородности и изотропности евклидова пространства для замкнутой физической системы. При этом время, течение которого не зависит от координат, в такой механике также является скаляром. Отсюда следует, что функции Лагранжа и Гамильтона - скаляры, и следовательно, скорость $dr^\alpha/dt = v^\alpha$ - это вектор, а импульс $p_\alpha = \partial_\alpha S$ - евклидов ковектор. При этом скорости и координаты при поворотах, очевидно, преобразуются по одному и тому же закону, только если углы поворотов не зависят от времени и координат. Эта эквивалентность преобразований скоростей и координат нарушалась бы, если бы угол поворота зависил от времени или от координат, т.е. если повороты становились бы локальными или ускоренными.

Что касается трансляций, то зависимость сдвига координат от времени приводит к нарушению эквивалентности преобразований скорости и дифференциалов координат. В частности, специальное преобразование Галилея - это трансляция с параметром сдвига $\mathbf{a} = \mathbf{v}_a t$. Допустимость линейной зависимости сдвига координат от времени, как и независимость угла поворота от времени являются, конечно, следствиями галилеевского постулата об инерциальных системах.

В специальной теории относительности, во-первых, зависимость параметра трансляции от времени становится недопустимой, что исключает из числа сдвигов специальные преобразования Галилея, но оставляет в силе, конечно, все другие перечисленные нами изометрии евклидова пространства как преобразования, не изменяющие уравнения движения, а во-вторых, само евклидово пространство становится подмножеством более общей структуры - пространства-времени Минковского с более широкой группой изометрий, включающей в себя преобразования Лоренца, которые не только сохраняют уравнения движения, но оставляют инвариантным действие релятивистской частицы и полей.

4.2.2 Galilean Transformations

Обсудим подробно преобразования Галилея.

Обзор

Группа Галилея

Геометрия преобразований Галилея

тут картинка, которую Суслов сказал и её обсуждение.
потом напишу

Как понять, что с преобразованиями Галилея что-то не то?

Нековариантность уравнений Максвелла относительно преобразований Галилея

(тут явные формулы, проверка этого)

4.2.3 Shifts of Space

Трансляции определяются преобразованием

$$r_T^\alpha = r'^\alpha = r^\alpha + a^\alpha$$

Оператор трансляций

Преобразование трансляций можно записать как действие оператора трансляций $\hat{T}(a)$, зависящего от параметра a

$$r_T^\alpha = r'^\alpha = \hat{T}(a)r^\alpha$$

Имеются следующие свойства трансляций:

1. Последовательное действие двух трансляций опять является трансляцией. Действительно,

$$\hat{T}(a) \cdot \hat{T}(b)r^\alpha = \hat{T}(a)(r^\alpha + b^\alpha) = r^\alpha + (b + a)^\alpha = \hat{T}(a + b)r^\alpha$$

или, что то же,

$$\hat{T}(b) \cdot \hat{T}(a) = \hat{T}(a + b)$$

Более того, последовательное действие трех трансляций в силу

$$\hat{T}(c) \cdot (\hat{T}(b) \cdot \hat{T}(a)) = \hat{T}(a + b + c) = (\hat{T}(c) \cdot \hat{T}(b)) \cdot \hat{T}(a)$$

как видим, не зависит от их группировки посредством скобок.

2. Существует тождественное преобразование $\mathbb{1} = \hat{T}(0)$, такое что

$$\hat{T}(0)r^\alpha = r^\alpha$$

и

$$\hat{T}(a) \cdot \hat{T}(0) = \hat{T}(0) \cdot \hat{T}(a) = \hat{T}(a), \quad \forall a$$

3. После любого сдвига можно сделать обратное преобразование, сводящее действие двух трансляций к тождественному преобразованию,

$$\hat{T}(a) \cdot \hat{T}(-a) = \hat{T}(0) = \mathbb{1}, \quad \forall a$$

Генераторы трансляций и их алгебра

Генераторы трансляций Γ_α вводятся из рассмотрения бесконечно малых преобразований вблизи единичного элемента:

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \approx \hat{1} - i\Gamma_\alpha a^\alpha, \quad \mathbf{a} \rightarrow 0,$$

как

$$\Gamma_\alpha \equiv i \lim_{\mathbf{a} \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial a^\alpha} \hat{T}(\mathbf{a})$$

Рассмотрим бесконечно малые (инфинитезимальные) трансляции координат вблизи единичного элемента $\mathbb{1}$, т.е. в окрестности тождественного преобразования,

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \approx \mathbb{1} - i\Gamma_\alpha a^\alpha, \quad \mathbf{a} \rightarrow 0,$$

где мы ввели генераторы инфинитезимальных преобразований

$$\Gamma_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} i \lim_{\mathbf{a} \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial a^\alpha} \hat{T}(\mathbf{a}).$$

Для закона преобразования скалярной, векторной или тензорной функции, т.е. поля $\Phi(\mathbf{r})$, важно знать

$$\frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} = \frac{\partial (r^\alpha + a^\alpha)}{\partial r^\beta} = \delta_\beta^\alpha,$$

а значит, в законе преобразования тензорных величин ранга n в индексных обозначениях

$$\Phi'^{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\mathbf{r}') = \frac{\partial r'^{\alpha_1}}{\partial r^{\beta_1}} \dots \frac{\partial r'^{\alpha_n}}{\partial r^{\beta_n}} \Phi^{\beta_1 \dots \beta_n}(\mathbf{r})$$

как для контравариантных, так для ковариантных индексов, все индексы умножаются на символ Кронекера, т.е. не меняются, а значит, тензорные индексы у величин можно опустить, что мы и сделаем при рассмотрении трансляций.

Действие оператора трансляций на скалярную функцию

Преобразование при трансляциях евклидова пространства теперь можно записать в виде $\hat{T} \circ \Phi(\mathbf{r}) = \Phi_T(\mathbf{r}_T)$, или

$$\Phi_T(\mathbf{r}_T) = \Phi(\mathbf{r}),$$

т.е.

$$\Phi_T(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{r})$$

И для бесконечно малых преобразований

$$\Phi_T(\mathbf{r}) \approx \Phi(\mathbf{r}) - a^\alpha \partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}), = \left(\mathbb{1} - i\hat{k}_\alpha a^\alpha \right) \Phi(\mathbf{r})$$

где генератор трансляций

$$\hat{k}_\alpha = -i\partial_\alpha$$

Тогда функция после действия оператора трансляций имеет вид:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r} + \mathbf{a}) &= \sum_n \frac{1}{n!} a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_n} \frac{\partial^n f(\mathbf{r})}{\partial r^{\alpha_1} \dots \partial r^{\alpha_n}} = \\ &= \sum_n \frac{1}{n!} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^n f(\mathbf{r}) \\ &= e^{a^\alpha \partial_\alpha} f(\mathbf{r}) = e^{ia^\alpha \hat{k}_\alpha} f(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

и, в частности, для собственной функции генератора с определенной нормировкой

$$f(\mathbf{a}) = e^{i\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_\alpha}, \quad \text{если} \quad f(0) = 1, \quad -i\partial_\alpha f(\mathbf{r}) = \hat{k}_\alpha f(\mathbf{r}) = k_\alpha f(\mathbf{r}).$$

Таким образом, генератор $\hat{k}_\alpha$ задает волновой вектор плоской монохроматической волны. Заметим, что последнее условие - это уравнение на вещественные собственные значения и собственные функции генератора пространственных трансляций, откуда становится ясным введение мнимой единицы в определение генератора трансляций: эта мнимая единица связана с ясным физическим смыслом собственных функций генераторов с вещественными собственными значениями, отвечающими наблюдаемым величинам.

О квантовой механике (?)

Отметим, что плоская монохроматическая волна отвечает амплитуде вероятности достоверности траектории свободной частицы и, согласно гипотезе де Бройля, волновой вектор $\mathbf{k}$ связан с импульсом: $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$. Таким образом, генератор трансляций после умножения на постоянную Планка с чертой становится оператором импульса, который действует в пространстве амплитуд вероятности Ψ : $-i\hbar\partial_\alpha = \hat{p}_\alpha$. В пространстве амплитуд вероятности достоверности траекторий оператор импульса имеет вещественные собственные значения. Такие операторы называются эрмитовыми. Теория операторов в пространстве амплитуд траекторий относится не к классической, а к квантовой механике, так что мы здесь не будем развивать эту тему.

³ Амплитуда вероятности достоверности траектории Ψ определяется через действие S как $\Psi = \exp\{iS/\hbar\}$, где S удовлетворяет уравнениям Гамильтона-Якоби $\nabla_\alpha S = p_\alpha$, $\partial S/\partial t = -E(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Отсюда сразу следует утверждение для волны де Бройля, например. При этом для траектории на уравнениях движения вероятность достоверности такой траектории равна $W = |\Psi|^2 = 1$.

Коммутативность трансляций

Вычислим разность действия двух инфинитезимальных операторов

$$(\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(\mathbf{b}) - \hat{T}(\mathbf{b}) \cdot \hat{T}(\mathbf{a}))f(\mathbf{r}) = -a^\alpha b^\beta (\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta - \hat{k}_\beta \hat{k}_\alpha) f(\mathbf{r})$$

Для генераторов трансляций в силу перестановочности частного дифференцирования по различным переменным в декартовых координатах $\partial_\alpha \partial_\beta f(\mathbf{r}) = \partial_\beta \partial_\alpha f(\mathbf{r})$, следует, что

$$\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta - \hat{k}_\beta \hat{k}_\alpha = 0,$$

т.е. результат не зависит от порядка преобразований.

О случаях применений трансляций

(тут развернутый ответ на вопрос, зачем мы их изучали вообще?)

4.2.4 Rotations of Space

Обсудим подробно вращение евклидова пространства.

Вращения в двух словах

(потом перепишу и многое удалю, пока теорию ниже улучшаю.)

Бесконечно малые вращения координат 3-мерного евклидова пространства вокруг оси, направленной вдоль единичного вектора $\mathbf{e}$, на угол $\phi \rightarrow 0$ в декартовой системе координат даются

$$\delta \mathbf{r} = [\boldsymbol{\phi}, \mathbf{r}]$$

где псевдовектор поворота $\boldsymbol{\phi} = \phi \mathbf{e}$. Покомпонентно:

$$\mathbf{r}'_{\alpha} = (\mathbf{r} + \delta \mathbf{r})_{\alpha} = (\delta_{\alpha\gamma} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \phi_{\beta}) r_{\gamma}$$

или в матричном, операторном, виде

$$\mathbf{r}' = (\mathbb{1} - i \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi}) \mathbf{r}$$

матрица $\mathbf{s}$ должна иметь вид:

$$(s_{\beta})_{\alpha\gamma} = -i \epsilon_{\beta\alpha\gamma}$$

таким образом, алгебра генераторов имеет вид

$$[\mathbf{s}_{\alpha}, \mathbf{s}_{\beta}] = i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{s}_{\gamma}$$

s_z - элемент алгебры Картана, а s^2 - оператора Казимира.

значение казимира и максимальная проекция на ось z задает представление.

так как s_z - коммутирующий между собой представитель набора.

то можно построить базис из собственных значений.

$$\|(s_z)_{\alpha\beta}\| = -i \epsilon_{3\alpha\beta} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

можно найти собственные векторы.

$$e_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

таким образом, вращения могут быть записаны в этом базисе

$$\mathbf{A} = A_- \mathbf{e}_+ + A_+ \mathbf{e}_- + A_0 \mathbf{e}_0$$

где связь с компонентами в исходном базисе декартовых координат, очевидно,

$$A_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{A_x \pm i A_y\}, \quad A_0 = A_z$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}') = (1 - i \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi}) \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}') = \mathbf{A}'(\mathbf{r}) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_{\alpha}} \delta x^{\alpha} \equiv \mathbf{A}'(\mathbf{r}) + \delta x^{\alpha} \partial_{\alpha} \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

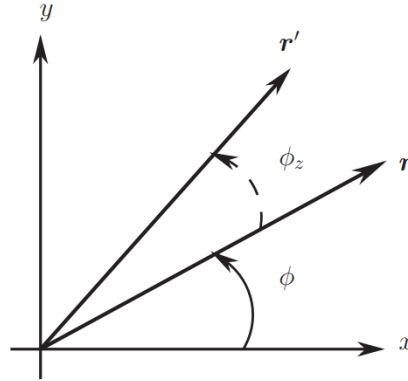
$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}') = \mathbf{A}'(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \epsilon^{0\alpha\beta\gamma} \phi_{\beta} \{x_{\gamma} \partial_{\alpha} - x_{\alpha} \partial_{\gamma}\} \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

(про орбитальный момент нужно подробно написать!!!)

$$\vec{A}'(\vec{r}) = (1 - i \vec{\varphi}(\vec{s} + \hat{\ell})) \vec{A}(\mathbf{r})$$

Вращение в двумерном случае

Рассмотрим повороты радиуса r при фиксированной системе координат на плоскости, т.е. в 2-мерном евклидовом пространстве.



Для координат r $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ поворот запишется в виде:

$$\begin{cases} x' = r \cos(\theta + \phi) = x \cos \phi - y \sin \phi \\ y' = r \sin(\theta + \phi) = x \sin \phi + y \cos \phi \end{cases},$$

или в матричных обозначениях

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_2(\phi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Все свойства вращений отражены в матрице R , поэтому далее изучим ее свойства: Детерминант матрицы 2-мерного поворота равен:

$$\det R_2(\phi) = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

Вращение на нулевой угол является тождественным преобразованием

$$R_2(0) = \hat{1}.$$

А также матрицы поворотов в одну сторону и в противоположную связаны:

$$R_2(\phi) R_2(-\phi) = \hat{1}.$$

причем обратная матрица является транспонированной

$$R_2(-\phi) = R_2^T = R_2^{-1}(\phi)$$

После несложных тригонометрических выкладок находим, что два последовательных поворота есть

$$R_2(\phi_1) R_2(\phi_2) = R_2(\phi_1 + \phi_2)$$

генераторы вращений

Генераторы вращений определяется по формуле для любого генератора:

$$s_z \stackrel{\text{def}}{=} i \lim_{\phi_z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \phi_z} R_2(\phi_z) = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В 3-мерном евклидовом пространстве с правой тройкой базисных векторов легко получить обобщение матриц поворотов с осями вдоль базисных векторов. При этом для генераторов, пользуясь правилом циклической перестановки индексов: при повороте в плоскости $\{x, y\}$, т.е. с осью вдоль z , ненулевыми значениями в матрице генератора s_z являются только элементы

$$(s_z)^x_y = -i \quad (s_z)^y_x = i$$

и далее по циклу, - находим выражения

$$\begin{aligned} s_z &= i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{- поворот в плоскости } \{x, y\}, \\ s_y &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{- поворот в плоскости } \{z, x\}, \\ s_x &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} && \text{- поворот в плоскости } \{y, z\}. \end{aligned}$$

Другими словами матрица генератора

$$(s_\alpha)^\beta \cdot \gamma = -i\epsilon_{\alpha\beta\gamma},$$

что в матричных обозначениях в точности совпадает с приведенной записью в явном виде.

О некоммутативности вращений (!!!)

Рассмотрим, возникает ли различие в преобразовании векторов при смене порядка двух поворотов по разным осям. Для этого вычислим коммутаторы, пользуясь явным видом генераторов:

$$[s_x, s_y] = is_z, \quad [s_y, s_z] = is_x, \quad [s_z, s_x] = is_y,$$

где опять важно заметить циклическую перестановку индексов. Отсюда видим, например, что повороты последовательно сначала вокруг оси y , а потом вокруг оси x , и наоборот - сначала вокруг оси x , а потом вокруг оси y , в результате не совпадают, а отличаются на поворот вокруг оси z и тп. Нетрудно убедиться, что тождества Якоби для генераторов группы поворотов справедливы. В итоге, в 3-мерном евклидовом пространстве алгебра генераторов группы поворотов некоммутативна.

С использованием тензора Леви-Чивиты коммутационные соотношения для генераторов группы поворотов (т.е. алгебра генераторов) примут вид

$$[s_\alpha, s_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma.$$

Мы видим, что это - некоммутативная алгебра Ли.

О следствиях некоммутативности вращений (??)

(это тоже важно)

Явный пример вращения под произвольным углом (!!!)

(распишу формулу по компонентно, чтобы выделить фи-хб фи-у, фи-з. мы ведь в любой последовательности можем вращать их?????)

Что такое спин (!?!!)

(тут четкий ответ на этот вопрос.)

тензорный вид вращений

Преобразованные координаты можно записать покомпонентно

$$r'_\alpha = (r + \delta r)_\alpha = (\delta_{\alpha\gamma} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\phi_\beta) r_\gamma$$

или в матричном, операторном, виде ¹

$$r' = (\mathbb{1} - i s \cdot \phi) r$$

ства, т.е. в векторном представлении, принимает значение

$$C_2 = s^2 = (s_\alpha)^\beta \cdot \gamma (s_\alpha)^\gamma \beta' = (-i)^2 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\gamma\beta'} = 2\delta_{\beta\beta'} = 2 \cdot \mathbb{1}.$$

Таким образом, непрерывные симметрии 3-мерного пространства без смены ориентации базиса с правой на левую образованы группой трансляций и поворотов. 13.3. Группа $O(3)$ Группа поворотов 3-мерного евклидова пространства состоит из двух связанных непрерывными преобразованиями компонент ⁷ с детерминантом, равным ± 1 (собственные и несобственные повороты). Переход же от одной связной компоненты к другой осуществляется с помощью дискретных преобразований зеркального отражения по каждой из осей декартова пространства $\mathbb{P} = \mathbb{P}_x \mathbb{P}_y \mathbb{P}_z$. Так что схематически можно записать:

$$SO_+(3), \quad \det R = +1$$

$$\mathbb{P} \uparrow \downarrow \mathbb{P}$$

$$SO_-(3), \quad \det R = -1$$

Полная же группа изометрии евклидова пространства включает в себя наряду с поворотами $O(3)$ (с учетом отражений) еще и трансляции, так что говорят о неоднородной (inhomogeneous, I) группе $IO(3)$ или, в случае без отражений, о неоднородной группе $ISO(3)$.

О связности компонент

Здесь термин связности компонент употребляется в "интуитивном" смысле, в то время как строгая математическая теория вводит понятия гомотопий (классов непрерывных однопараметрических траекторий в группе) и гомотопических групп, которые мы не рассматриваем (см. [5]).

Интуитивное понимание генераторов вращений (???)

Именно преобразования векторов и изучаются в группах.

Поэтому можно нарисовать тройку и смотреть, какие станут другие координаты при прямой, идущей уже под другим углом.

Об ошибках в понимании вращений

Ошибка - считать, что вращение происходит координатной сетки

На самом деле координатную сетку мы не вращаем.

(?? кст, а если бы саму сетку вращали, это что было бы? это вообще ни при чем, да?)

4.2.5 Rotation of Scalars, Vectors, Tensors

(??? и при этом кроме 2д и 3д пространства так ничего и не написано, отдельно статьи про это посмотрю!)

Вращение скалярного поля

Обсудим общий вид генераторов поворотов для произвольной скалярной функции от координат $\mathbf{r}$, т.е. для скалярного поля $\Phi = f(\mathbf{r})$. По определению, скалярная функция f , это функция

$$f_G(\mathbf{r}_G) = f(\mathbf{r}),$$

тут, через оператор поворотов G запишем

$$f_G(\mathbf{r}_G) = G \circ f(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r}_G = G \cdot \mathbf{r},$$

Для бесконечно малых преобразований

$$f_G(\mathbf{r}_G) = f_G(\mathbf{r}) + \frac{\partial f_G}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha = f_G(\mathbf{r}) + \frac{\partial f}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha$$

и

$$d_G \mathbf{r} = -i s_\alpha \phi_\alpha \mathbf{r}$$

где во втором слагаемом мы заменили преобразованную функцию на исходную, потому что эта операция приводит в разнице второго порядка малости, не существенной здесь для нашего рассмотрения, так что согласно (3.8) вариация скалярного поля в точке $\mathbf{r}$

$$\delta_G f(\mathbf{r}) = f_G(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = -\frac{\partial f}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha$$

Тогда по построению

$$f_G(\mathbf{r}) = (1 + \delta_G) f(\mathbf{r}) \equiv \left(1 - i \hat{l}_\beta \phi_\beta\right) f(\mathbf{r})$$

где уже $\hat{l}_\beta$ - оператор на функциях, и

$$i \hat{l}_\beta \phi_\beta f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha$$

Генератор вращений двумерного пространства

В случае вращения в 2-мерном пространстве (вокруг оси z) на угол $\phi \rightarrow 0$

$$f_G(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \approx -i \hat{l}_z \phi f(\mathbf{r}) = -\left(dy \frac{\partial f}{\partial y} + dx \frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\phi \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}\right) \Rightarrow$$

$$i \hat{l}_z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

и в общем случае (в декартовых координатах нижние и верхние индексы не отличают!)

$$\hat{l}_\alpha = -i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}r_\beta\partial_\gamma = -\frac{i}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(r_\beta\partial_\gamma - r_\gamma\partial_\beta) = -i(\mathbf{r} \times \nabla)_\alpha$$

Поскольку в пространстве амплитуд траекторий величина $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ отвечает оператору импульса, то величина

$$\hat{\ell} = \hbar\hat{l} = -i\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}$$

является орбитальным моментом импульса ℓ .

Коммутаторы генератора орбитальных поворотов l

Легко вычислить

$$[\hat{l}_\alpha, r_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}r_\gamma, \quad [\hat{l}_\alpha, \hat{k}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{k}_\gamma.$$

(тут добавлю простую проверку эту)

Казалось бы, вектор координат и генератор трансляций поворачиваются по одному и тому же закону при действии $\hat{l}_\alpha$, т.е. генераторы трансляций - векторы. Однако генераторы трансляций задаются частной производной, т.е. строкой, а не столбцом, как координаты, и соответствующие операторы преобразования являются сопряженными к операторам поворота (простым транспонированием), то есть $\hat{k}_\alpha$ преобразуется через $R^T(\phi) \approx 1 + i s_\alpha \phi_\alpha$, так как $s_\alpha^T = -s_\alpha$.

(мб подумаю потом про это больше, пока просто как факт, который скорее всего верный, но в явном виде не проверял его.)

Имеются коммутационные соотношения:

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{l}_\gamma,$$

которые можно найти, используя явный вид $\hat{l}_\alpha$. (мб сделаю потом, пока лень проверять.)

Вращение векторного поля

Рассмотрим преобразование векторного поля $\mathcal{A}(\mathbf{r})$ при вращениях. По определению оно преобразуется как

$$\mathcal{A}'^\alpha(\mathbf{r}') = \frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} \mathcal{A}^\beta(\mathbf{r})$$

в случае поворотов можно представить в виде действия на нее оператора G как $G \circ \mathcal{A}(\mathbf{r}) = S(G) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r})$, так что

$$\mathcal{A}_G(\mathbf{r}_G) = S(G) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r})$$

где $S_\beta^\alpha(G) = \partial r'^\alpha / \partial r^\beta$ - матрица поворотов векторного пространства, которая для инфинитезимальных поворотов равна

$$S(G) = \mathbb{1} - i s_\gamma \phi_\gamma,$$

Учитывая это определение и повторяя выкладки для бесконечно малых преобразований, найдем, что

$$(1 + \delta_G) \mathcal{A}(\mathbf{r}) = (1 - i \hat{j}_\alpha \phi_\alpha) \mathcal{A}(\mathbf{r})$$

где

$$\hat{j} = \hat{l} + s$$

т.е. полный генератор $\hat{j}$ есть сумма дифференциального оператора орбитальных вращений $\hat{l}$ и матрицы спина векторного поля s . Конечно, после умножения на $\hbar$ эти величины

приобретают смысл операторов полного момента импульса $\hat{\mathbf{J}} = \hbar \hat{\mathbf{j}}$, орбитального момента импульса $\hat{\mathbf{L}} = \hbar \hat{\mathbf{l}}$ и спинного момента собственного вращения $\mathbf{s} = \hbar \mathbf{s}$ в пространстве амплитуд вероятности траекторий Ψ .

(???? тут про строгость укажу, что за сумма двух генераторов на два независимых пространства.)

(там вообще неправильно, нужно два индекса у матрицы поворота писать!!!)

Другие обозначения

Для примера, локальное векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ принадлежит 3-мерному пространству представления со спином $s = 1$, так что закон его преобразования

$$A'^{\alpha}_{\mathbb{E}}(\mathbf{r}') = \left(\hat{R}_{\mathbb{E}}(\phi) \right)^{\alpha\beta} A^{\beta}_{\mathbb{E}}(\mathbf{r}),$$

где 3×3 -матрица - это та же матрица преобразований, что и матрица преобразований вектора координат в (17.4).

Согласно (17.14) преобразование векторной функции поля в заданной точке есть

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = (\mathbb{1} - i(\mathbf{l} + \mathbf{s}) \cdot \boldsymbol{\phi}) \mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

и, следовательно, можно ввести комбинированный оператор, который действует в пространстве векторного поля как локального векторного расслоения $\mathbf{r} \times v$ (fibre bundle) для векторного представления v группы поворотов,

$$\mathbf{j} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{l} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{s} \cong \mathbf{l} + \mathbf{s},$$

причем формально $\mathbf{l} \cong \mathbf{l} \otimes \mathbb{1}$, где первый множитель в тензорном произведении $\mathbf{l}$ это дифференциальный оператор на функциях от координат, а второй множитель $\mathbb{1}$ действует в пространстве представления v , и $\mathbf{s} \cong \mathbb{1} \otimes \mathbf{s}$, где уже первый множитель в тензорном произведении $\mathbb{1}$ действует как тождественное преобразование на функции от координат, а второй - матрица в пространстве представления v . От безразмерной величины j переходят к размерной

$$\mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} \hbar \mathbf{j}.$$

Этот оператор называют полным моментом импульса векторного поля, который составлен из суммы дифференциального оператора орбитального момента $\mathbf{L} = \hbar \mathbf{l}$ и матричного оператора спина $\mathbf{S} = \hbar \mathbf{s}$.

Вращение тензорного поля ранга k

В случае тензорного поля ранга k по каждому из индексов тензора $\alpha_n, n = \{\overline{1, n}\}$, при вращениях необходимо ввести действие матрицы спина векторного поля $(s^{(n)})^{\alpha_n}_{\beta_n}$, в то время как матрица инфинитезимальных поворотов примет вид

$$S(G) \mapsto \mathbb{1} - i\phi_{\gamma} \sum_{n=1}^k s_{\gamma}^{(n)}$$

где сумма

$$\mathbf{S} = \sum_{n=1}^k \mathbf{s}^{(n)}$$

называется полным спином тензора.

4.2.6 Spin of Fields: Basics

Квантование спина в общем случае

Подготовка

(тут все свойства и определения укажу, которые нужно знать.)

(про совместный базис напишу лучше в дополнения, пока не глубоко въехал в то, какой конкретно он?)

Квантование

(тут абзац - суть идеи квантования. что квадрат нормировочного коэффициента для повышающего оператора положительный, а он определяется действиями собственными значениями)

Пусть s - эрмитовы матрицы, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям генераторов группы поворотов:

$$[s_\alpha, s_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma.$$

Отсюда следует, что в полный набор наблюдаемых можно включить лишь один из генераторов, например, s_z , так как два других генератора не коммутируют с ним и не могут иметь совместного с ним базиса собственных векторов.

Ясно, что нулевой коммутатор у генератора поворотов может быть только с самим собой или со скалярной величиной, которая не преобразуется при поворотах, поскольку собственное значение скалярной величины до поворота и после поворота не изменяется. Из генераторов группы поворотов можно построить лишь один независимый скаляр¹¹, s^2 . Вычислим коммутатор

$$[s^2, s_\alpha] = [s_\beta s_\beta, s_\alpha]$$

с помощью тождества

$$[AB, C] = ABC - CAB = ABC - ACB + ACB - CAB = A[B, C] + [A, C]B,$$

откуда

$$[s_\beta s_\beta, s_\alpha] = s_\beta [s_\beta, s_\alpha] + [s_\beta, s_\alpha] s_\beta = i\epsilon_{\beta\alpha\gamma}(s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\beta).$$

Здесь в круглых скобках - симметричный относительно перестановок индексов β и γ тензор второго ранга - сворачивается с тензором $\epsilon_{\beta\alpha\gamma}$, антисимметричным по перестановкам тех же индексов β и γ , но такая свертка симметричного тензора с антисимметричным всегда тождественно равна нулю. В итоге,

$$[s^2, s_\alpha] = 0,$$

и полный набор наблюдаемых составляют $\{s^2, s_z\}$. Базис тензорных полей удовлетворяет уравнениям на собственные значения полного набора наблюдаемых для группы поворотов:

$$s^2 |\lambda_s, m_s\rangle = \lambda_s |\lambda_s, m_s\rangle, \quad s_z |\lambda_s, m_s\rangle = m_s |\lambda_s, m_s\rangle$$

Будем считать этот базис ортонормированным. В силу (3.31) повышающий и понижающий генераторы

$$s_\pm = s_x \pm is_y,$$

коммутируют с квадратом спина:

$$[s^2, s_\pm] = 0$$

и это означает, что значение λ_s не меняется при действии бесконечно малых преобразований с генераторами $s_{x,y}$, но при действии тех же преобразований меняется значение m_s , так как в противном случае, эти генераторы коммутировали бы с s_z , что неверно. Такое положение указывает, что одному и тому же значению λ_s отвечают несколько значений m_s , т.е. имеет место вырождение спектра собственных значений λ_s по значениям m_s . Между прочим, мы установили общее условие вырожденности спектра эрмитовой матрицы A : если эрмитова матрица A коммутирует с эрмитовыми матрицами B и C , но сами матрицы B и C не коммутируют между собой, то спектр собственных значений матрицы A вырожден, например, по собственным значениям в совместном базисе с матрицей B .

Найдем действие повышающего и понижающего генератора на совместный базис $|\lambda_s, m_s\rangle$. Для этого сначала вычислим коммутаторы

$$[s_{\pm}, s_z] = [s_x, s_z] \pm i[s_y, s_z] = -is_y \pm iis_x = \mp s_{\pm}$$

Тогда

$$s_z s_{\pm} |\lambda_s, m_s\rangle = (s_{\pm} s_z \pm s_{\pm}) |\lambda_s, m_s\rangle = (m_s \pm 1) s_{\pm} |\lambda_s, m_s\rangle.$$

Значит, вектор $s_{\pm} |\lambda_s, m_s\rangle$ имеет собственные значения s_z , равные $m_s \pm 1$:

$$s_{\pm} |\lambda_s, m_s\rangle = N_{\pm}(\lambda_s, m_s) |\lambda_s, m_s \pm 1\rangle \Rightarrow (s_{\pm} |\lambda_s, m_s\rangle)^{\dagger} = \langle \lambda_s, m_s | s_{\mp} = N_{\pm}(\lambda_s, m_s) \langle \lambda_s, m_s \pm 1 |$$

где мы задали комплексную фазу собственного вектора $|\lambda_s, m_s\rangle$ так, чтобы нормировочный коэффициент был бы вещественным. Найдем нормировочный коэффициент $N_{\pm}(\lambda_s, m_s)$. Для этого выразим выражения $s_{\pm} s_{\mp}$, расписав дважды s^2 :

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_+ s_- + i[s_x, s_y] + s_z^2 = s_+ s_- - s_z + s_z^2,$$

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_- s_+ - i[s_x, s_y] + s_z^2 = s_- s_+ + s_z + s_z^2.$$

Тогда

$$\langle \lambda_s, m_s | s_{\mp} s_{\pm} | \lambda_s, m_s \rangle = (s_{\pm} |\lambda_s, m_s\rangle)^{\dagger} s_{\pm} |\lambda_s, m_s\rangle = N_{\pm}^2(\lambda_s, m_s),$$

Т.е.

$$N_{\pm}^2(\lambda_s, m_s) = \langle \lambda_s, m_s | s_{\mp} s_{\pm} | \lambda_s, m_s \rangle = \langle \lambda_s, m_s | (s^2 - s_z^2 \mp s_z) | \lambda_s, m_s \rangle = \lambda_s - m_s(m_s \pm 1).$$

Поскольку нормировка вектора не может быть отрицательной, $N_{\pm}^2(\lambda_s, m_s) \geq 0$. Это условие может быть выполнено, только если в цепочках многократного действия повышающего и понижающего операторов, во-первых, значения m_s не произвольны, а принимают такие значения, чтобы

$$m_s(m_s \pm 1) \leq \lambda_s,$$

и во-вторых, должны существовать максимальное $m_s^{\max}$ и минимальное $m_s^{\min}$ значения, которые дают в точности нулевые значения нормы вектора после повышения и понижения, соответственно, так как в противном случае повышение и понижение приводило бы к возникновению векторов с отрицательной нормой, что недопустимо, т.е.

$$m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) = \lambda_s, \quad m_s^{\min}(m_s^{\min} - 1) = \lambda_s.$$

Вместе с тем, действуя многократно на вектор $|\lambda_s, m_s^{\max}\rangle$ понижающим оператором n раз, мы получим $m_s = m_s^{\max} - n$ и в конце концов вектор, в точности равный $|\lambda_s, m_s^{\min}\rangle$, в силу существования минимально допустимого значения m_s , т.е. для некоторого неотрицательного целого значения n верно $m_s^{\min} = m_s^{\max} - n$. Тогда связь минимального

и максимального значений проекции спина на ось z с собственным значением квадрата спина λ_s приводит к единственному решению в виде

$$m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) - m_s^{\min}(m_s^{\min} - 1) = 0, \Rightarrow m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) - (m_s^{\max} - n)(m_s^{\max} - n - 1) = 0,$$

$$m_s^{\max} = \frac{n}{2}, \quad m_s^{\min} = -\frac{n}{2}.$$

Максимальное значение проекции спина на ось z обозначают символом s , так что

$$s = \frac{n}{2},$$

т.е. допустимые значения проекции спина - это положительные полуцелые и целые значения. Целые значения отвечают полям, которые называют тензорными, а полуцелые - спинорным полям.

Базис полей, таким образом, образуют совместные собственные векторы квадрата спина и его проекции на выбранную ось, так что изменяя обозначения путем подстановки $\lambda_s = s(s + 1) \mapsto s$ запишем его в виде

$$|s, m_s\rangle, \quad m_s \in \{-s, -s + 1, \dots, s - 1, s\}.$$

Действие повышающей и понижающей матриц спина на базисные вектора строго определено,

$$s_{\pm} |s, m_s\rangle = \sqrt{s(s + 1) - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle.$$

В частном случае $s = 1$, мы убедились, что соотношения (3.36) являются тождествами согласно проведенной нами процедуре прямого построения матриц спина и собственных векторов для матрицы s_z . Размерность пространства собственных векторов квадрата спина и его проекции на выбранную ось равна один старший вектор с максимальным значением проекции и n шагов от старшего вектора до младшего, т.е. вектора с минимальным значением проекции, а значит,

$$k = 1 + n = 1 + 2s.$$

Это число компонент называют мультиплетностью неприводимого представления группы поворотов для поля. Неприводимым это представление называют потому, что при поворотах, а значит, при многократном действии генераторов спина, вектор с заданной проекцией спина на ось z перемешивается со всеми другими векторами базиса с тем же значением квадрата спина, т.е. пространство собственных векторов с заданным квадратом спина не содержит в себе подпространств, вектора которых не смешивались бы друг с другом при действии группы поворотов.

Для скаляра $s = 0$, и поле имеет одну единственную компоненту, поэтому скаляр называют синглетом и обозначают символом 1. У вектора $s = 1$, и поле имеет три компоненты, это — триплет (символ 3), у спинора $s = 1/2$, и поле имеет две компоненты, это — дублет (символ 2).

Напомним, что построенный нами базис называют стандартным, он решает задачу классификации полей по базису собственных векторов генераторов спина. Задача 47. Найдите преобразование матриц спина векторного поля, которое переводит эти матрицы из базиса декартовых координат к матрицам в стандартном базисе собственных векторов с заданными значениями проекции спина на ось z .

Иллюстрация квантованного спина (???)

(как можно представить тот результат, который мы получили?)

Как догадаться до того, что спин квантуется (???)

(потом подумаю, пока так)

О том, когда квантование спина переходом к нормировочному коэффициенту для повышающего или понижающего оператора не работает или дает не такой результат (???)

(не всегда такой спин, укажу, почему и как мог бы он быть другим.)

(мб если пространство двумерное, там вообще нет такой алгебры? пока остался вопрос.)

Вращение поля со спином $s = 1$

(?? это же было про векторное поле, тут к чему мы вообще готовимся, просто параметры находим?? мб вставлю сюда часть про вект поле)

Собственные значения

Собственные значения эрмитовой матрицы s_z находятся из

$$\det(s_z - \lambda \cdot \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -i & 0 \\ i & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1) = 0.$$

Итак, проекция спина имеет три собственных значения $\lambda = \{-1, 0, +1\}$ в трехмерном пространстве, так что спектр собственных значений невырожден. Отнормируем собственные кет-вектора $|\lambda\rangle$ на единицу, так что с точностью до комплексной фазы найдем

$$|+1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные вектора матрицы спина s_z не являются собственными для матриц s_x и s_y . Более того, вводят повышающие и понижающие матрицы

$$s_{\pm} = s_x \pm is_y, \quad s_+^\dagger = s_-, \quad s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Легко найти, что повышающий оператор увеличивает значение проекции на единицу,

$$s_+|+1\rangle = 0, \quad s_+|0\rangle = \sqrt{2}|+1\rangle, \quad s_+|-1\rangle = \sqrt{2}|0\rangle$$

О деталях (?)

Вращение со спином $s = 1/2$

Вращение со спином $s = 1/2$

Рассмотрим поле с полуцелым спином, $s = \frac{1}{2}$. В этом случае соответствующая спиновая матрица представляется в виде

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma},$$

где σ - матрицы Паули. Найдем явный вид матриц Паули, используя общие выражения для действия матриц спина на базисные поля. Базис спиновых состояний для краткости обозначений записывают как

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = |+\rangle, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |-\rangle,$$

причем это - собственные векторы проекции спина

$$s_z |+\rangle = \frac{1}{2} |+\rangle, \quad s_z |-\rangle = -\frac{1}{2} |-\rangle.$$

Следовательно, эта матрица в рассматриваемом базисе имеет диагональный вид

$$s_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Согласно (3.36) ненулевые матричные элементы повышающего и понижающего операторов

$$\begin{aligned} \langle + | s_+ | - \rangle &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - (-1) \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right)} = 1, \\ \langle - | s_- | + \rangle &= (\langle + | s_+ | - \rangle)^\dagger = 1, \end{aligned}$$

откуда

$$s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратное преобразование $s_\pm \leftrightarrow s_{x,y}$ дает

$$s_x = \frac{1}{2} (s_+ + s_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$s_y = \frac{1}{2i} (s_+ - s_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому сигма-матрицы Паули - это

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы отличать фиксированный набор матриц (3.51) от матриц, которые получаются при проецировании на произвольно заданные оси декартовых координат $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ часто для матриц Паули используют обозначения $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Поле со спином $\frac{1}{2}$, которое называют спинором, обладает двумя поляризациями¹⁵

$$|\theta^\alpha\rangle, \quad \alpha = \{1, 2\}, \quad |\theta^{(1)}\rangle = |+\rangle, \quad |\theta^{(2)}\rangle = |-\rangle,$$

Далее будем использовать для спинорных индексов греческие буквы в начале алфавита: $\alpha, \beta, \dots$, а для векторных индексов латинские буквы: $a, b, \dots$ поле спинора

$$\langle \psi(\mathbf{r}) | \theta^\alpha \rangle = \psi^\alpha(\mathbf{r})$$

- это так называемый двухкомпонентный спинор Паули. Преобразования спинора при поворотах имеют такой же вид, как и для тензоров:

$$R(\phi) \circ \psi(\mathbf{r}) = \hat{R}_S(\phi) \cdot \psi(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \psi_\phi(\mathbf{r}_\phi) = \hat{R}_S(\phi) \cdot \psi(\mathbf{r}),$$

где $\phi = \phi \mathcal{O}$ - вектор поворота на угол ϕ вокруг оси $\mathcal{O}$, $R(\phi)$ операция преобразования поля спинора, а $\hat{R}_S(\phi)$ спиновое преобразование компонент спинора, которое при бесконечно малых углах равно

$$\hat{R}_S(\phi) \approx \mathbb{1} - i s_c \phi_c, \quad \phi \rightarrow 0$$

Поскольку матрицы спина не зависят от угла поворота, можно записать, что

$$\hat{R}_S(\phi + d\phi) = (\mathbb{1} - i \mathbf{s} \cdot d\phi) \cdot \hat{R}_S(\phi)$$

а значит, имеет место дифференциальное уравнение

$$\frac{d\hat{R}_S(\phi)}{d\phi} = -i \mathbf{s} \cdot \hat{R}_S(\phi),$$

которое легко интегрируется

$$\hat{R}_S(\phi) = e^{-i \mathbf{s} \cdot \phi}.$$

Итак, при поворотах спинор преобразуется согласно

$$\psi_\phi^\alpha(\mathbf{r}_\phi) = \{e^{-i \mathbf{s} \cdot \phi}\}_{\cdot\beta}^\alpha \psi^\beta(\mathbf{r}),$$

где мы указали матричные индексы в явном виде. Для вычисления матричной экспоненты установим два факта: 1. коммутационные соотношения

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma_c$$

следуют из коммутационных соотношений для момента импульса: $[\frac{1}{2}\sigma_a, \frac{1}{2}\sigma_b] = i\epsilon_{abc}\frac{1}{2}\sigma_c$; 2. антикоммутационные соотношения

$$\{\sigma_a, \sigma_b\} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_a = 2\delta_{ab}$$

устанавливаются прямыми вычислениями произведений матриц Паули (с использованием повышающей и понижающей матриц с учетом их размера 2×2).

В самом деле, двукратное повышение приводит к нулю, поскольку при спине $s = \frac{1}{2}$ допустим только один шаг от младшего вектора к старшему, а последующие шаги уже действуют на нулевой вектор. Значит,

$$\sigma_+^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_x^2 + i(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x) - \sigma_y^2 = 0,$$

Но с учетом того, что, очевидно, $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \mathbb{1}$, сразу находим антикоммутатор

$$\{\sigma_x, \sigma_y\} = 0.$$

Точно также, вычисляя значение проекции спина на ось z до и после повышения, устанавливаем, что на базисных векторах

$$\sigma_+\sigma_z + \sigma_z\sigma_+ = 0 \quad \Rightarrow \quad \{\sigma_x, \sigma_z\} + i\{\sigma_y, \sigma_z\} = 0.$$

Но антикоммутатор сигма-матриц Паули - это эрмитово самосопряженная матрица, так что в последнем равенстве антикоммутаторы независимо обращаются в нуль, что, конечно, завершает доказательство (3.57). Поскольку

$$\sigma_a\sigma_b = \frac{1}{2}[\sigma_a, \sigma_b] + \frac{1}{2}\{\sigma_a, \sigma_b\}$$

находим

$$\sigma_a\sigma_b = i\epsilon_{abc}\sigma_c + \delta_{ab}.$$

Домножая это тождество на векторы A_a и B_b , получаем

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = i(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B},$$

где $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ - векторное произведение векторов. В частности,

$$(\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \phi^2.$$

Тогда в экспоненте матрицы конечных поворотов

$$\hat{R}_S = e^{-i \cdot \boldsymbol{\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i^n}{2^n n!} (\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma})^n$$

четные степени разложения пропорциональны единичной матрице, а нечетные - оператору где $\mathcal{O}$ - единичный вектор вдоль оси поворота. Тогда суммирование четных и нечетных степеней дает

$$\hat{R}_S = e^{-i \cdot \boldsymbol{\phi}} = \cos\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi} \cdot \mathcal{O})\right) - i(\mathcal{O} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi} \cdot \cdot)\right).$$

При повороте вокруг оси на угол $2\pi = (\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{o})$ получаем $\mathbf{r}^\phi = \mathbf{r}$ и

$$e^{-1/\phi}\big|_{2\pi} = -1.$$

Значит,

$$\psi^\alpha(\mathbf{r})\big|_{2\pi} = -\psi^\alpha(\mathbf{r}),$$

т.е. пале спинора меняет знак после поворота на угол 2π . Это свойство, очевидно, является общим для всех частиц с полуцелым спином, которых называют фермионами.

Напомним теперь, что мы стартовали с алгебры группы поворотов 3-мерного евклидова пространства. Как видим, среди представлений этой алгебры имеются спинорные, причем группа поворотов спиноров не совпадает с группой $SO(3)$. В самом деле ¹⁷,

$$\det \hat{R}_S = \exp\left\{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\phi} \cdot \text{tr}\boldsymbol{\sigma}\right\} = 1,$$

и это специальные преобразования 2-мерных комплексных столбцов, т.е. группа $SU(2)$. Существует гомоморфизм $SU(2) \mapsto SO(3)$. Действительно, сигма-матрицы Паули - генераторы группы преобразований спиноров Паули ψ^α , и, следовательно, они переводят спинор в спинор, а значит, имеют матричные индексы σ_α^β , где верхний индекс β относится к столбцам (исходное 2-мерное векторное пространство), которые преобразуются матрицами $\hat{R}_S$, а нижний индекс α относится к строкам (пространство, сопряженное к исходному 2-мерному пространству столбцов, т.е. ковекторное пространство), которые преобразуются, конечно, обратными матрицами $\hat{R}_S^{-1}$, а они совпадают с эрмитово сопряженными $\hat{R}_S^\dagger = \hat{R}_S^{-1}$. Это значит, что закон преобразования сигма-матриц в группе $SU(2)$ выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} \mapsto \hat{R}_S \boldsymbol{\sigma} \hat{R}_S^\dagger$$

Рассмотрим теперь 2×2 -матрицу

$$\hat{V} = V_a \sigma^a,$$

где V_a - 3-мерный ковектор. По матрице $\hat{V}$ можно определить вектор

$$V^b = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma^b \hat{V}),$$

поскольку

$$\text{tr}(\sigma^b \sigma^a) = \text{tr}(\sigma^a \sigma^b) = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma^b \sigma^a + \sigma^a \sigma^b) = \frac{1}{2} 2\delta^{ab} \text{tr} \mathbb{1} = 2\delta^{ab}.$$

Детерминант матрицы $\hat{V}$ является инвариантом,

$$\det(\hat{R}_S \hat{V} \hat{R}_S^\dagger) = \det(\hat{V} \hat{R}_S^\dagger \hat{R}_S) = \det \hat{V}.$$

Этот инвариант легко вычисляется из явного вида сигма-матриц,

$$\det \hat{V} = \det \begin{pmatrix} V_z & V_x - iV_y \\ V_x + iV_y & -V_z \end{pmatrix} = -(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = -\mathbf{V}^2,$$

и $(-1) \det \hat{V}$ - это квадрат длины вектора $\mathbf{V}$, который не меняется при поворотах. Разложим преобразованную матрицу по матрицам Паули,

$$\hat{V}' = \hat{R}_S \hat{V} \hat{R}_S^\dagger = V'_a \sigma^a,$$

откуда

$$V'^b = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma^b \hat{V}') = V_a \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma^b \hat{R}_S \sigma^a \hat{R}_S^\dagger).$$

Но это значит, что 3-вектор $\mathbf{V}$ преобразуется 3×3 матрицей

$$V^b = R_a^b V^a, \quad R_a^b = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma^b \hat{R}_S \sigma_a \hat{R}_S^\dagger).$$

Покажем, что это - матрица поворотов евклидова пространства. Для этого рассмотрим бесконечно малые преобразования

$$\hat{R}_S \approx \mathbb{1} - \frac{i}{2} \phi^c \sigma_c, \quad \hat{R}_S^\dagger \approx \mathbb{1} + \frac{i}{2} \phi^c \sigma_c.$$

Тогда

$$R_a^b \approx \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma^b \sigma_a) - \frac{i}{2} \phi^c \text{tr}(\sigma^b \sigma_c \sigma_a - \sigma^b \sigma_a \sigma_c) = \delta_a^b - \frac{i}{2} \phi^c \text{tr}(\sigma^b 2i\epsilon_{caa'} \sigma^{a'}) = \delta_a^b + \epsilon_{ca}^b \phi^c.$$

Значит, инфинитезимальное преобразование вектора имеет вид

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{V},$$

и оно действительно представляет собой поворот на угол ϕ . В итоге, гомоморфизм $SU(2)$ на $SO(3)$ задается формулой преобразования матриц

$$R_a^b = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma^b \hat{R}_S \sigma_a \hat{R}_S^\dagger).$$

Отсюда сразу следует, что матрицы $\hat{R}_S$ и $-\hat{R}_S$ приводят к одной и той же матрице преобразований $SO(3)$, и, в частности, ядро гомоморфизма, т.е. преобраз единицы, нетривиально и это $\pm \mathbb{1}$. Ясно, что группа $SU(2)$ дважды накрывает $SO(3)$. Итак, представления алгебры группы $SO(3)$ дают представления универсальной накрывающей группы $SU(2)$. Термин «универсальная накрывающая» относится к гомотопическим свойствам гладких многообразий, которые мы здесь не рассматриваем (см. [5]).

4.2.7 Spin of Fields: Deeper Understanding

(there are a lot of information about it, on youtube for example, I'll look later)

4.2.8 Spin of Fields: Special Constructions

Спинорная метрика in Euclidian space

(it should be not that important concept, so a paragraph is enough about it)

Суть и основные формулы спинорной метрики (!?!)

(пройду - сразу же напишу это тут.)

Теория

Введем вещественную матрицу $\hat{\epsilon}$,

$$\hat{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \quad \hat{\epsilon}^2 = -\mathbb{1} = \hat{\epsilon}, \quad \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon}^T = -\hat{\epsilon},$$

и определим сопряженный к спинору ψ спинор ψ_c с помощью комплексного сопряжения и матричного умножения,

$$\psi_c \stackrel{\text{def}}{=} -\hat{\epsilon}\psi^* = -i\sigma_2\psi^*,$$

а затем рассмотрим, как как он преобразуется при поворотах,

$$\psi_c^\phi = -\hat{\epsilon} \left(\hat{R}_S \psi \right)^* = \hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1} (-\hat{\epsilon}\psi^*) = \hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1} \psi_c$$

Значит, нам необходимо найти матрицу $\hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1}$. При этом, матрица поворотов спиноров $\hat{R}_S$ имеет вид экспоненты (3.60). В общем случае, так как $\hat{\epsilon} \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \mathbb{1}$, разложение экспоненты от матрицы в ряд Тейлора приводит к

$$\hat{\epsilon} \circ \exp\{A\} \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon} \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{ \hat{\epsilon} \circ A \circ \hat{\epsilon}^{-1} \}^n = \exp \{ \hat{\epsilon} \circ A \circ \hat{\epsilon}^{-1} \}.$$

В случае матрицы поворотов

$$\begin{aligned} \hat{R}_S &= \exp \left(-\frac{i}{2} \phi (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}), \right. \\ \hat{R}_S^* &= \exp \left(\frac{i}{2} \phi (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}). \right. \end{aligned}$$

так что Для вычисления $\hat{\epsilon} \circ \boldsymbol{\sigma}^* \circ \hat{\epsilon}^{-1}$ заметим, что матрицы σ_x, σ_z симметричные и вещественные, так что

$$\sigma_x^* = \sigma_x^T = \sigma_x, \quad \sigma_z^* = \sigma_z^T = \sigma_z,$$

а матрица σ_y чисто мнимая и антисимметричная, так что

$$\sigma_y^* = \sigma_y^T = -\sigma_y.$$

Поэтому в силу

$$\sigma_x \hat{\epsilon} = -\hat{\epsilon} \sigma_x, \quad \sigma_z \hat{\epsilon} = -\hat{\epsilon} \sigma_z, \quad \sigma_y \hat{\epsilon} = \hat{\epsilon} \sigma_y,$$

получаем

$$\hat{\epsilon} \circ \boldsymbol{\sigma}^* \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon} \circ \boldsymbol{\sigma}^T \circ \hat{\epsilon}^{-1} = -\boldsymbol{\sigma}.$$

Значит,

$$\hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon} \exp \left(\frac{i}{2} \phi (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}) \right) \hat{\epsilon}^{-1} = \exp \left(\frac{i}{2} \phi (\hat{\epsilon} \boldsymbol{\sigma}^* \hat{\epsilon}^{-1} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}}) \right) = \hat{R}_S,$$

Напомним, что контравариантные спиноры ψ^α , которые при матричной записи можно по договоренности считать столбцами ψ^α , преобразуются матрицами $\hat{R}_S$, а ковариантные спиноры ψ_α , которые можно считать строками $\psi \cdot \alpha$, преобразуются обратными матрицами $\hat{R}_S^{-1}$. При этом, R_S - это унитарная матрица:

$$R_S \cdot R_S^\dagger = \mathbb{1}, \quad R_S^\dagger = R_S^{-1},$$

и поэтому эрмитово сопряженный спинор преобразуется как ковариантный. Говорят, что соотношение (3.70) устанавливает эквивалентность транспонированного представления группы поворотов спиноров эрмитово сопряженному представлению этой группы или, в данном случае, еще и эквивалентность транспонированного контравариантного представления ковариантному, а соотношение (3.69) - эквивалентность комплексно сопряженного представления контравариантному спинорному представлению. Итак, при поворотах

$$\psi_c^\phi = \hat{R}_S \psi_c,$$

где мы воспользовались соотношением (3.69). Значит, этот спинор при поворотах преобразуется также, как и сам спинор ψ . Поэтому произведение двух любых спиноров

$$\psi_c^\dagger \chi = (-\hat{\epsilon} \psi^*)^\dagger \chi = \psi^T (-\hat{\epsilon})^\dagger \chi = \psi^T \hat{\epsilon} \chi = \psi^\alpha \hat{\epsilon}_{\alpha\beta} \chi^\beta$$

является скаляром, т.е. инвариантом группы поворотов спиноров. Значит, формула определяет скалярное произведение двух спиноров. Поэтому согласно общему представлению о метрическом тензоре как о квадратичной инвариантной линейной функции $\hat{\epsilon}_{\alpha\beta}$ - полностью антисимметричный ковариантный тензор второго ранга в двумерном пространстве:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}, \quad \epsilon_{12} = 1.$$

В терминах метрики скалярное произведение двух произвольных спиноров ψ и χ

$$\psi \cdot \chi = \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\alpha \chi^\beta.$$

Метрика определяет ковариантные спиноры с нижними индексами

$$\chi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \chi^\beta,$$

так что скалярное произведение

$$\psi \cdot \chi = \psi^\alpha \chi_\alpha = -\psi_\beta \chi^\beta$$

Обратная метрика $\epsilon^{\alpha\beta}$ определяется согласно

$$\epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha.$$

Очевидно,

$$\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}, \quad \epsilon^{12} = -1.$$

Определенный выше спинор ψ_c обозначают также спинором с чертой, который имеет верхний индекс с точкой, так как он преобразуется по представлению, эквивалентному представлению, которое действует в комплексно сопряженном спинорном пространстве:

$$\bar{\psi} \dot{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} (-\hat{\epsilon} \psi^*)^{\dot{\alpha}}.$$

Как мы показали, этот спинор при поворотах преобразуется также, как и обычный спинор. Поэтому скаляром будет величина (см. знаки в (3.72))

$$-\chi^\dagger \cdot \psi_c = -\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}},$$

где мы ввели обозначение для спинора с чертой и с нижним индексом с точкой как эрмитово сопряженного к обычному спинору-столбцу:

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = (\chi^{\dagger})_{\dot{\alpha}}$$

Элементарно

$$\chi^{\dagger} = \{\chi^*\}^T = \{\hat{\epsilon}(-\hat{\epsilon}\chi^*)\}^T = \{\hat{\epsilon}\bar{\chi}\}^T = -\bar{\chi}^T\hat{\epsilon}.$$

Поэтому

$$-\bar{\chi} \cdot \bar{\psi} = \bar{\chi}^T \hat{\epsilon} \bar{\psi} = \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}}, \quad \epsilon_{12} = 1,$$

т.е. метрика $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ в спинорных индексах с точкой совпадает с метрикой $\epsilon_{\alpha\beta}$ в спинорных индексах без точек.

Метрика остается инвариантной при поворотах спиноров. Действительно, справедливо соотношение изометрии:

$$\hat{R}_S^T \hat{\epsilon} \hat{R}_S = -\hat{R}_S^T \hat{\epsilon}^{-1} \hat{R}_S = \hat{\epsilon} \left(\hat{\epsilon} \hat{R}_S^T \hat{\epsilon}^{-1} \right) \hat{R}_S = \hat{\epsilon} \hat{R}_S^{\dagger} \hat{R}_S = \hat{\epsilon}$$

где мы воспользовались тождеством (3.70). Группа инвариантности спинорной метрики с $\det \hat{R}_S = 1$ называется специальной унитарной группой на двухкомпонентных спинорах: $SU(2)$. Это трехпараметрическая группа.

Мы исследовали алгебру генераторов группы при построении поворотов спиноров. Эта алгебра совпадает с алгеброй генераторов группы поворотов трехмерного евклидова пространства $SO(3)$. Тем не менее, сами группы отличаются, так как в $SU(2)$ допустимы и полуцелые собственные значения генератора s_z , а в $SO(3)$ - только целые значения s_z . Это особенно ярко проявляется при проведенном выше рассмотрении поворота на угол 2π : для спиноров этот поворот дает фактор -1 , а для бозонов, полей с целым значением спина, - фактор $+1$. Существование полей с полуцелым спином возможно, но оно не следует, вообще говоря, из группы поворотов евклидова пространства. Факт такого существования экспериментальный. Подчеркнем, что спинорная метрика задает инвариант

$$\psi \cdot \psi = \psi^{\alpha} \epsilon_{\alpha\beta} \psi^{\beta} = \psi^{(1)} \psi^{(2)} - \psi^{(2)} \psi^{(1)}$$

и это инвариант обратился бы в нуль¹⁸, если бы спиноры описывались обычными комплексными числами! Этот факт напрямую связан с тем, что спиноры - частный случай фермионов с полуцелым спином, для которых имеет место принцип запрета Паули. Из принципа запрета Паули, как мы знаем (см. стр. 11 раздел 1.1.), следует, что перестановка наблюдаемых параметров тождественных фермионов, в данном случае, перестановка номеров поляризации (проекции спина на ось z) в амплитуде вероятности должна сопровождаться сменой знака амплитуды. В частности, следует положить, что

$$\psi^{(1)} \psi^{(2)} = -\psi^{(2)} \psi^{(1)}$$

что в математике называют алгеброй Грассмана, а сами числа с такими свойствами - грассмановыми переменными.

Укажем лишь, что в релятивистской теории устанавливается связь спина со статистикой: собственное значение оператора перестановок тождественных частиц равно $+1$ для частиц с целым спином (бозонов) и -1 для частиц с полуцелым спином (фермионов).

Тогда становится понятным, почему метрика пространства как инвариантная квадратичная форма на вещественных векторах симметрична, а метрика спинорного пространства на грассмановых спинорах антисимметрична.

О произвольном спине (!!!)

Обсудим произвольный спин.

Коротко сам алгоритм определения генераторов произвольного спина

Можно делать методом Крамера, а можно угадыванием.

Заметим, что там могут быть разные вообще матрицы, если брать разные знаки у их элементов! (?? так и должно быть, что много есть спинных матриц вообще? похоже что.)

Preparation: $SU(2)$, $O(3)$ and all that.

(!!! в теории групп напишу это!!!!!!)

I begin with brief review of some standard material, partly to underscore how elementary are the essential ideas, and partly to establish some notational conventions. It is upon this elementary foundation that we will build.

Let $\mathbb{M}$ be any 2×2 matrix. From $\det(\mathbb{M} - \lambda \mathbb{I}) = \lambda^2 - (\text{tr} \mathbb{M})\lambda + \det \mathbb{M}$ we by the Cayley-Hamilton theorem have (??? проверю потом)

$$\mathbb{M}^{-1} = \frac{(\text{tr} \mathbb{M})\mathbb{I} - \mathbb{M}}{\det \mathbb{M}} \quad \text{unless } \mathbb{M} \text{ is singular}$$

which gives for “unimodular” $\mathbb{M}$ ($\det \mathbb{M} = 1$)

$$\mathbb{M}^{-1} = (\text{tr} \mathbb{M})\mathbb{I} - \mathbb{M}$$

Trivially, any 2×2 matrix $\mathbb{M}$ can be written

$$\mathbb{M} = \frac{1}{2}(\text{tr} \mathbb{M})\mathbb{I} + \underbrace{\left\{ \mathbb{M} - \frac{1}{2}(\text{tr} \mathbb{M})\mathbb{I} \right\}}_{\text{traceless}}$$

while we have just established that in unimodular cases

$$\mathbb{M}^{-1} = \frac{1}{2}(\text{tr} \mathbb{M})\mathbb{I} - \left\{ \mathbb{M} - \frac{1}{2}(\text{tr} \mathbb{M})\mathbb{I} \right\}$$

Evidently such a matrix will be unitary if and only if

- $a_0 \equiv \frac{1}{2}\text{tr} \mathbb{M}$ is real, and
- $\mathbb{A} \equiv \left\{ \mathbb{M} - \frac{1}{2}(\text{tr} \mathbb{M})\mathbb{I} \right\}$ is antihermitian: $\mathbb{A}^t = -\mathbb{A}$.

The Pauli matrices $\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ are traceless hermitian, and permit the most general such $\mathbb{A}$ -matrix to be notated

$$\mathbb{A} = i \{a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3\}$$

We then have

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}$$

and recover unimodularity by imposing upon the real numbers $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ the requirement that

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

Such matrices will henceforth be denoted $\mathbb{S}$, to emphasize that they have been Specialized; they provide the natural representation of the special unimodular group $SU(2)$. In terms of the so-called Cayley-Klein parameters ⁸

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\equiv a_0 + ia_3 \\ \beta &\equiv a_2 + ia_1 \end{aligned} \right\}$$

we have

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \alpha^* \alpha + \beta^* \beta = 1$$

Note the several points at which the argument has hinged on circumstances special to the 2-dimensional case.

Swifter and more familiar is the line of argument that proceeds from the observation that

$$\mathbb{S} = e^{i\mathbb{H}}$$

is unitary if and only if $\mathbb{H}$ is hermitian, and by $\det \mathbb{S} = e^{\text{tr}(i\mathbb{H})}$ will be unimodular if and only if $\mathbb{H}$ is also traceless. The most general such $\mathbb{H}$ can in 2-dimensions be written

$$\mathbb{H} = h_1 \sigma_1 + h_2 \sigma_2 + h_3 \sigma_3 = \begin{pmatrix} h_3 & h_1 - ih_2 \\ h_1 + ih_2 & -h_3 \end{pmatrix}$$

Then

$$\mathbb{H}^2 = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

which implies and is implied by the statements

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^2 &= \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbb{I} \\ \sigma_1 \sigma_2 &= -\sigma_2 \sigma_1 \\ \sigma_2 \sigma_3 &= -\sigma_3 \sigma_2 \\ \sigma_3 \sigma_1 &= -\sigma_1 \sigma_3 \end{aligned} \right\}$$

Also demonstrably true-but not implicit in the preceding line of argument are the statements

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 &= i\sigma_3 \\ \sigma_2 \sigma_3 &= i\sigma_1 \\ \sigma_3 \sigma_1 &= i\sigma_2 \end{aligned} \right\}$$

Results now in hand lead us to write

$$\mathbf{h} = \theta \mathbf{k} \quad : \quad \mathbf{k} \text{ a real unit 3-vector}$$

and obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \exp [i\theta \{k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 + k_3 \sigma_3\}] \\ &= \cos \theta \cdot \mathbb{I} + i \sin \theta \cdot \{k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 + k_3 \sigma_3\} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta + ik_3 \sin \theta & (k_2 + ik_1) \sin \theta \\ -(k_2 - ik_1) \sin \theta & \cos \theta - ik_3 \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in which notation the Cayley-Klein parameters (4) become

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos \theta + ik_3 \sin \theta \\ \beta &= (k_2 + ik_1) \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

The Cayley-Klein parameters were introduced by Felix Klein in connection with the theory of tops; i.e., as aids to the description of the 3-dimensional rotation group $O(3)$, with which we have now to establish contact. This we will accomplish in two different ways. The more standard approach is to introduce the traceless hermitian matrix

$$\mathbb{X} \equiv x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

and to notice that $\mathbb{X} \mapsto \mathbb{X} \equiv \mathbb{S}^{-1} \mathbb{X} \mathbb{S}$ sends $\mathbb{X}$ into a matrix which is again traceless hermitian, and which has the same determinant:

$$\det \mathbb{X} = \det \mathbb{X} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

Evidently

$$\mathbb{X} \mapsto \mathbb{S}^{-1} \mathbb{X} \mathbb{S} \equiv \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} : \quad \mathbb{S} \in SU(2)$$

and

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \mathbb{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \quad \mathbb{R} \in O(3)$$

say substantially the same thing, but in different ways.

The simplest way to render explicit the $SU(2) \leftrightarrow O(3)$ connection is to work in the neighborhood of the identity; i.e., assume θ to be small and to retain only terms of first order. Thus

$$\mathbb{S} = \mathbb{I} + i\delta\theta \cdot (k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 + k_3 \sigma_3) + \cdots$$

and $\mathbb{X} \equiv \mathbb{S}^{-1} \mathbb{X} \mathbb{S}$ becomes

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &= \{\mathbb{I} - i\delta\theta \cdot (k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 + k_3 \sigma_3)\} (x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3) \{\mathbb{I} + i\delta\theta \cdot (k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 + k_3 \sigma_3)\} \\ &= \mathbb{X} - i\delta\theta [(k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2 + k_3 \sigma_3), (x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3)] + \cdots \\ &= \mathbb{X} + \delta\mathbb{X} \end{aligned}$$

But by (6)

$$\begin{aligned} [\text{etc.}] &= (k_1 x_2 - k_2 x_1) [\sigma_1, \sigma_2] + (k_2 x_3 - k_3 x_2) [\sigma_2, \sigma_3] + (k_3 x_1 - k_1 x_3) [\sigma_3, \sigma_1] \\ &= 2i \{(k_1 x_2 - k_2 x_1) \sigma_3 + (k_2 x_3 - k_3 x_2) \sigma_1 + (k_3 x_1 - k_1 x_3) \sigma_2\} \end{aligned}$$

so we have

$$\delta\mathbb{X} = \delta x_1 \sigma_1 + \delta x_2 \sigma_2 + \delta x_3 \sigma_3 = 2\delta\theta \{\text{etc.}\}$$

which can be expressed

$$\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} = 2\delta\theta \begin{pmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

More compactly $\delta\mathbf{x} = 2\delta\theta \cdot \mathbb{K}\mathbf{x}$ with $\mathbb{K} = k_1\mathbb{T}_1 + k_2\mathbb{T}_2 + k_3\mathbb{T}_3$, which entails

$$\mathbb{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The real antisymmetric matrices $\mathbb{T}$ are-compare (6.3) -not multiplicatively closed, but are closed under commutation:

$$\left. \begin{aligned} [\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2] &= \mathbb{T}_3 \\ [\mathbb{T}_2, \mathbb{T}_3] &= \mathbb{T}_1 \\ [\mathbb{T}_3, \mathbb{T}_1] &= \mathbb{T}_2 \end{aligned} \right\}$$

Straightforward iteration leads now to the conclusion that

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \exp[i\theta \{k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3\}] \\ \mathbb{R} &= \exp[2\theta \{k_1\mathbb{T}_1 + k_2\mathbb{T}_2 + k_3\mathbb{T}_3\}] \end{aligned}$$

If $\{x_1, x_2, x_3\}$ refer to a right hand frame, then $\mathbb{R}$ describes a right handed rotation through angle 2θ about the unit vector $\mathbf{k}$. Notice that-and how elementary is the analytical origin of the fact that - the association (15) is biunique: reading from (7.1) we see that

$$\mathbb{S} \rightarrow -\mathbb{S} \text{ as } \theta \text{ advances from } 0 \text{ to } \pi$$

and that $\mathbb{S}$ returns to its initial value at $\theta = 2\pi$. But from the quadratic structure of $\mathbb{X} \equiv \mathbb{S}^{-1}\mathbb{X}\mathbb{S}$ we see that $\pm\mathbb{S}$ both yield the same $\mathbb{X}$; i.e., that $\mathbb{R}$ returns to its initial value as θ advances from 0 to π , and goes twice around as $\mathbb{S}$ goes once around. One speaks in this connection of the "double-valuedness of the spin representations of the rotation group," and it is partly to place us in position to do so - but mainly to prepare for things to come - that I turn now to an alternative approach to the issue just discussed.

Introduce the

$$\text{2-component spinor } \xi \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

(which is by nature just a complex 2-vector) and consider transformations of the form

$$\xi \longmapsto \xi' \equiv \mathbb{S}\xi$$

From the unitarity of $\mathbb{S}$ (unimodularity is in this respect not needed) it follows that

$$\xi'^t \xi' = \xi^t \xi$$

In more explicit notation we have

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

and

$$u'^* u' + v'^* v' = u^* u + v^* v$$

At (8) we acquired descriptions of α and β to which we can now assign rotational interpretations in Euclidean 3-space. But how to extract $O(3)$ from (19) without simply hiking backward along the path we have just traveled?

Kramer's method for recovering $O(3)$. (!!!!!)

In 1930/31 Kramers developed an algebraic approach to the quantum theory of spin/angular momentum which - though clever, and computationally powerful-gained few adherents.

We proceed from this question:

What is the $\begin{pmatrix} uu \\ uv \\ vv \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u'u' \\ u'v' \\ v'v' \end{pmatrix}$ induced by $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$?

Immediately

$$\begin{pmatrix} u'u' \\ u'v' \\ v'v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha u + \beta v)(\alpha u + \beta v) \\ (\alpha u + \beta v)(-\beta^* u + \alpha^* v) \\ (-\beta^* u + \alpha^* v)(-\beta^* u + \alpha^* v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\beta & \beta^2 \\ -\alpha\beta^* & \alpha\alpha^* - \beta\beta^* & \beta\alpha^* \\ (\beta^*)^2 & -2\alpha^*\beta^* & (\alpha^*)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} uu \\ uv \\ vv \end{pmatrix}$$

which we agree to abbreviate

$$\zeta' = \mathbb{Q}\zeta$$

where $\mathbb{Q}$ is intended to suggest "quadratic."

At an early point in his argument Kramers develops an interest in null 3-vectors $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$. Such a vector, if we are to avoid triviality, must necessarily be complex. He writes

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + i\mathbf{c} \quad : \quad \text{require } b^2 = c^2 \text{ and } \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$$

Since $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ entails $a_3 = \pm i\sqrt{(a_1 + ia_2)(a_1 - ia_2)}$ it becomes fairly natural to introduce complex variables

$$\begin{aligned} u &\equiv \sqrt{a_1 - ia_2} \\ v &\equiv i\sqrt{a_1 + ia_2} \end{aligned}$$

Then

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ a_2 &= i\frac{1}{2}(u^2 + v^2) \\ a_3 &\equiv -iuv \end{aligned} \right\}$$

The $\mathbf{a}(u, v)$ thus defined has the property that

$$\mathbf{a}(u, v) = \mathbf{a}(-u, -v)$$

We conclude that, as (u, v) ranges over complex 2-space, $\mathbf{a}(u, v)$ ranges twice over the set of null 3-vectors, of which a_1, a_2, a_3 provides a parameterized description.

Thus prepared, we ask: What is the $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}'$ that results when $\mathbb{S}$ acts by $\xi \mapsto \xi \equiv \mathbb{S}\xi$ on the parameter space? We saw that

$$\zeta \mapsto \zeta' = \mathbb{Q}\zeta$$

while at (23) we obtained

$$\mathbf{a} = \mathbb{C}\zeta \text{ with } \mathbb{C} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 0 & i \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

So we have

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\mapsto \mathbf{a}' = \mathbb{R}\mathbf{a} \\ \mathbb{R} &\equiv \mathbb{C}\mathbb{Q}\mathbb{C}^{-1} \end{aligned}$$

Mathematica is quick to inform us that, while $\mathbb{R}$ is a bit of a mess, it is a mess with the property that every element is manifestly conjugation-invariant (meaning real). And, moreover, that $\mathbb{R}^\top \mathbb{R} = \mathbb{I}$. In short,

$\mathbb{R}$ is a real rotation matrix, an element of $O(3)$

To sharpen that statement we again (in the tradition of Sophus Lie) retreat to the neighborhood of the identity and work in first order; from (8) we have

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 1 + ik_3 \delta\theta \\ \beta &= (k_2 + ik_1) \delta\theta \end{aligned} \right\}$$

Substitute into $\mathbb{Q}$, abandon terms of second order and obtain

$$\mathbb{Q} = \mathbb{I} + \begin{pmatrix} 2ik_3 & 2(k_2 + ik_1) & 0 \\ -(k_2 - ik_1) & 0 & (k_2 + ik_1) \\ 0 & -2(k_2 - ik_1) & -2ik_3 \end{pmatrix} \delta\theta + \dots$$

whence (by calculation which I have entrusted to Mathematica)

$$\mathbb{R} = \mathbb{I} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Note!}}}{\begin{pmatrix} 0 & -k_3 & +k_1 \\ +k_3 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & +k_2 & 0 \end{pmatrix}} 2\delta\theta + \dots$$

This describes a doubled-angle rotation about $\mathbf{k}$ which is, however, retrograde.

The preceding argument has served-redundantly, but by different means to establish

$$SU(2) \longleftrightarrow O(3)$$

The main point of the discussion lies, however, elsewhere. We now back up to $\zeta' = \mathbb{Q}\zeta$ and head off in a new direction.

(то есть я удалю кучу теории раньше, потому что она не по теме!)

Spin matrices by Kramer's method.

For reasons that will soon acquire a high degree of naturalness, we agree at this point in place of (17) to write

$$\xi \left(\frac{1}{2} \right) \mapsto \xi \left(\frac{1}{2} \right) \equiv \mathbb{S} \left(\frac{1}{2} \right) \xi \left(\frac{1}{2} \right)$$

and to adopt this abbreviation of $\zeta' = \mathbb{Q}\zeta$:

$$\zeta(1) \mapsto \zeta(1) \equiv \mathbb{Q}(1)\zeta(1)$$

Mathematica informs us that the 3×3 matrix $\mathbb{Q}(1)$ is unimodular

$$\det \mathbb{Q}(1) = 1$$

but not unitary... nor do we expect it to be: the invariance of $u^*u + v^*v$ implies that not of $(uu)^*(uu) + (uv)^*(uv) + (vv)^*(vv)$ but of

$$\begin{aligned} (u^*u + v^*v)^2 &= (uu)^*(uu) + 2(uv)^*(uv) + (vv)^*(vv) \\ &= \zeta^\dagger(1) \mathbb{G}(1) \zeta(1) \\ \mathbb{G}(1) &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Define

$$\xi(1) \equiv \sqrt{\mathbb{G}}\zeta(1) \quad \text{with} \quad \sqrt{\mathbb{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Then the left side of

$$\xi^t(1)\xi(1) = (u^*u + v^*v)^2 = \left[\xi^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^2$$

is invariant under the induced transformation

$$\begin{aligned} \xi(1) &\longmapsto \xi'(1) \equiv \mathbb{S}(1)\xi(1) \\ \mathbb{S}(1) &\equiv \mathbb{G}^{+\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{Q}(1) \cdot \mathbb{G}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

because the right side is invariant under $\xi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longmapsto \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{S} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

We are not surprised to discover that the 3×3 matrix

$$\mathbb{S}(1) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \sqrt{2}\alpha\beta & \beta^2 \\ -\sqrt{2}\beta^*\alpha & (\alpha^*\alpha - \beta^*\beta) & \sqrt{2}\alpha^*\beta \\ (\beta^*)^2 & -\sqrt{2}\alpha^*\beta^* & (\alpha^*)^2 \end{pmatrix}$$

is unitary and unimodular:

$$\mathbb{S}^t(1)\mathbb{S}(1) = \mathbb{I} \quad \text{and} \quad \det \mathbb{S}(1) = 1$$

In the infinitesimal case we have

$$\mathbb{S}(1) = \mathbb{I} + \begin{pmatrix} +2ik_3 + \sqrt{2}(k_2 + ik_1) & & 0 \\ -\sqrt{2}(k_2 - ik_1)0 & & +\sqrt{2}(k_2 + ik_1) \\ 0 - \sqrt{2}(k_2 - ik_1) & & -2ik_3 \end{pmatrix} \delta\theta + \dots$$

which (compare (12)) can be written

$$\mathbb{S}(1) = \mathbb{I} + i\delta\theta \cdot (k_1\sigma_1(1) + k_2\sigma_2(1) + k_3\sigma_3(1)) + \dots$$

with

$$\begin{aligned} \sigma_1(1) &\equiv \begin{pmatrix} 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & +\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2(1) &\equiv i \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3(1) &\equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

The 3×3 matrices $\sigma_j(1)$ are manifestly traceless hermitian—the generators, evidently, of a representation of $SU(2)$ contained within the 8-parameter group $SU(3)$. They are, unlike the Pauli matrices (see again (6.3)), not closed under multiplication, but are closed under commutation. In the latter respect they precisely mimic the 2×2 Pauli matrices:

$$\left. \begin{aligned} \left[\sigma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \sigma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] &= 2i\sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \left[\sigma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] &= 2i\sigma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \text{similarly} \\ \left[\sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \sigma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] &= 2i\sigma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} [\sigma_1(1), \sigma_2(1)] &= 2i\sigma_3(1) \\ [\sigma_2(1), \sigma_3(1)] &= 2i\sigma_1(1) \\ [\sigma_3(1), \sigma_1(1)] &= 2i\sigma_2(1) \end{aligned} \right\}$$

There are, however, some notable differences, which will acquire importance:

$$\begin{aligned}\sigma_1^2\left(\frac{1}{2}\right) + \sigma_2^2\left(\frac{1}{2}\right) + \sigma_3^2\left(\frac{1}{2}\right) &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_1^2(1) + \sigma_2^2(1) + \sigma_3^2(1) &= 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

We are within sight now of our objective, which is to say: we are in possession of technique sufficient to construct $(2\ell + 1)$ -dimensional traceless hermitian triples

$$\{\sigma_1(\ell), \sigma_2(\ell), \sigma_3(\ell)\} \quad : \quad \ell = \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$$

with properties that represent natural extensions of those just encountered. But before looking to the details, I digress to assemble the...

Bare bones of the quantum theory of angular momentum.

Classical mechanics engenders interest in the construction $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$; i.e., in

$$\begin{aligned}L_1 &= x_2 p_3 - x_3 p_2 \\ L_2 &= x_3 p_1 - x_1 p_3 \\ L_3 &= x_1 p_2 - x_2 p_1\end{aligned}$$

The primitive Poisson bracket relations

$$[x_m, x_n] = [p_m, p_n] = 0 \quad \text{and} \quad [x_m, p_n] = \delta_{mn}$$

are readily found to entail

$$\begin{aligned}[L_1, L_2] &= L_3 \\ [L_2, L_3] &= L_1 \\ [L_3, L_1] &= L_2\end{aligned}$$

and

$$[L_1, L^2] = [L_2, L^2] = [L_3, L^2] = 0$$

where $L^2 \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$.

In quantum theory those classical observables become hermitian operators $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$ and $\mathbf{L}^2 \equiv \mathbf{L}_1^2 + \mathbf{L}_2^2 + \mathbf{L}_3^2$ and Dirac's principle $[x_m, p_n] = \delta_{mn} \longrightarrow [\mathbf{x}_m, \mathbf{p}_n] = i\hbar \mathbf{l}$ gives rise to commutation relations that mimic the preceding Poisson bracket relations:

$$\left. \begin{aligned}[\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] &= i\hbar \mathbf{L}_3 \\ [\mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3] &= i\hbar \mathbf{L}_1 \\ [\mathbf{L}_3, \mathbf{L}_1] &= i\hbar \mathbf{L}_2\end{aligned} \right\}$$

The function-theoretic approach to the subject ¹⁶ proceeds from

$$x \rightarrow \mathbf{x} \cdot \quad \text{and} \quad \mathbf{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

and leads (one works actually in spherical coordinates) to the theory of spherical harmonics

$$Y_\ell^m(\mathbf{x}) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell = 0, 1, 2, \dots \\ m = -\ell, -(\ell-1), \dots, -1, 0, +1, \dots, +(\ell-1), +\ell \\ L^2 Y_\ell^m = \ell(\ell+1) \cdot Y_\ell^m \\ L_3 Y_\ell^m = m\hbar \cdot Y_\ell^m \end{array} \right\}$$

But the subject admits also of algebraic development, and that approach, while it serves to reproduce the function-theoretic results just summarized, leads also to a physically important algebraic extension

$$\ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$$

of the preceding theory.

One makes a notational adjustment

$$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{J}$$

to emphasize that one is talking now about an expanded subject (fusion of the "theory of orbital angular momentum" and a "theory of intrinsic spin") and introduces non-hermitian "ladder operators"

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{J}_+ = \mathbf{J}_1 + i\mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_- = \mathbf{J}_1 - i\mathbf{J}_2 \end{array} \right\}$$

One finds the ℓ^{th} eigenspace of $\mathbf{J}^2$ to be $(2\ell+1)$ -dimensional, and uses $\mathbf{J}_3$ to resolve the degeneracy. Let the normalized simultaneous eigenvectors of $\mathbf{J}^2$ and $\mathbf{J}_3$ be denoted $|\ell, m\rangle$:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{J}^2 |\ell, m\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2 \cdot |\ell, m\rangle \\ \mathbf{J}_3 |\ell, m\rangle = m\hbar \cdot |\ell, m\rangle \\ m|\ell', m'\rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \end{array} \right\}$$

One finds that

$$\left. \begin{array}{ll} \mathbf{J}_+ |\ell, m\rangle \sim |\ell, m+1\rangle & : \quad m < \ell \\ \mathbf{J}_+ |\ell, m\rangle = 0 & : \quad m = \ell \\ \mathbf{J}_- |\ell, m\rangle \sim |\ell, m-1\rangle & : \quad m > -\ell \\ \mathbf{J}_- |\ell, m\rangle = 0 & : \quad m = -\ell \end{array} \right\}$$

and that one has to introduce ugly renormalization factors $\frac{1}{\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm 1)}}$ to turn the $\sim$'s into = 's.

My plan is not to make active use of this standard material, but to show that the results we achieve by other means exemplify it. We note in that connection that if matrices $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ satisfy commutation relations of the form (38), then the matrices

$$\mathbb{J}_n \equiv \frac{1}{2}\hbar\sigma_n \quad : \quad n = 1, 2, 3$$

bear the physical dimensionality of $\hbar$ (i.e., of angular momentum) and satisfy (41); such matrices are called "angular momentum matrices" (more pointedly: spin matrices).

To reduce notational clutter we agree at this point to adopt units in which $\hbar$ is numerically equal to unity. Simple dimensional analysis would serve to restore all missing $\hbar$ -factors.

Look now to particulars of the case $\ell = \frac{1}{2}$. We have

$$\mathbb{J}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

whence

$$\begin{aligned}\mathbb{J}^2 &\equiv \mathbb{J}_1^2 + \mathbb{J}_2^2 + \mathbb{J}_3^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)\end{aligned}$$

All 2-vectors are eigenvectors of $\mathbb{J}^2$. To resolve that universal degeneracy we select $\mathbb{J}_3$ which, because it is diagonal, has obvious spectral properties:

$$\left. \begin{array}{l} \text{eigenvalue } +\frac{1}{2} \text{ with normalized eigenvector } |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{eigenvalue } -\frac{1}{2} \text{ with normalized eigenvector } |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

17 The commutators of the generators $\mathbb{T}_n$ of $O(3)$ were found at (14) to mimic the Poisson bracket relations $[L_1, L_2] = L_3$, etc. But if, in the spirit of the preceding discussion, we construct $\mathbb{J}_n \equiv i\hbar\mathbb{T}_n$ we obtain $[\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2] = -i\hbar\mathbb{J}_3$, etc. which have reverse chirality. $\mathbb{J}_1$ and $\mathbb{J}_2$ have spectra identical to that of $\mathbb{J}_3$, but distinct sets of eigenvectors. The ladder operators (45) become non-hermitian ladder matrices

$$\mathbb{J}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbb{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

By inspection we have

$$\begin{array}{l} \text{action of } \mathbb{J}_+ : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \nearrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \nearrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{action of } \mathbb{J}_- : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \searrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \searrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

which are illustrative of (47). Note the absence in this case of normalization factors; i.e., that the $\sim$'s have become equalities.

Case Spin 1

A better glimpse of the situation-in-general is provided by the case $\ell = 1$. Reading from (37) we have

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{J}_1(1) \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & +\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & +\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{J}_2(1) \equiv i\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{J}_3(1) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

whence

$$\begin{aligned}\mathbb{J}^2 &\equiv \mathbb{J}_1^2 + \mathbb{J}_2^2 + \mathbb{J}_3^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad 2 = 1(1 + 1)\end{aligned}$$

All 3 -vectors are eigenvectors of $\mathbb{J}^2$. To resolve that universal degeneracy we select $\mathbb{J}_3$ which, because it is diagonal, has obvious spectral properties:

$$\left. \begin{array}{l} \text{eigenvalue } +1 \text{ with normalized eigenvector } |1, +1) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{eigenvalue } 0 \text{ with normalized eigenvector } |1, 0) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{eigenvalue } -1 \text{ with normalized eigenvector } |1, -1) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

The ladder matrices become

$$\mathbb{J}_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbb{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

which by quick calculation give

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_+|1, -1) &= \sqrt{2}|1, 0) \\ \mathbb{J}_+|1, 0) &= \sqrt{2}|1, +1) \\ \mathbb{J}_+|1, +1) &= 0 \\ \mathbb{J}_-|1, +1) &= \sqrt{2}|1, 0) \\ \mathbb{J}_-|1, 0) &= \sqrt{2}|1, -1) \\ \mathbb{J}_-|1, -1) &= 0 \end{aligned}$$

Normalization now is necessary, and the factor

$$N_{\pm}(\ell, m) \equiv \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)}}$$

advertised at (48) does in fact do the job, since

$$\begin{aligned} N_+(1, -1) &= 1/\sqrt{2} \\ N_+(1, 0) &= 1/\sqrt{2} \\ N_-(1, +1) &= 1/\sqrt{2} \\ N_-(1, 0) &= 1/\sqrt{2} \end{aligned}$$

Case Spin 3/2.

We look now to the case $\ell = \frac{3}{2}$, which was of special interest to Penrose or in QFT, and is of special interest therefore also to us. The simplest extension of the argument that gave $\zeta' = \mathbb{Q}\zeta$ now gives

$$\begin{pmatrix} u^p r u^p r u^p r \\ u^p r u^p r v^p r \\ u^p r v^p r v^p r \\ v^p r v^p r v^p r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2\beta & 3\alpha\beta^2 & \beta^3 \\ -\alpha^2\beta^* & \alpha^2\alpha^* - 2\alpha\beta\beta^* & 2\alpha\alpha^*\beta - \beta^2\beta^* & \alpha^*\beta^2 \\ \alpha(\beta^*)^2 & -2\alpha\alpha^*\beta^* + \beta(\beta^*)^2 & \alpha(\alpha^*)^2 - 2\alpha^*\beta\beta^* & (\alpha^*)^2\beta \\ -(\beta^*)^3 & 3\alpha^*(\beta^*)^2 & -3(\alpha^*)^2\beta^* & (\alpha^*)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} uuu \\ uuv \\ uvv \\ vvv \end{pmatrix}$$

which we agree to abbreviate

$$\zeta^{pr} \left(\frac{3}{2} \right) = \mathbb{Q} \left(\frac{3}{2} \right) \zeta \left(\frac{3}{2} \right)$$

Write

$$\begin{aligned} (u^*u + v^*v)^3 &= (uuu)^* \quad (uuu) + 3(uuv)^*(uuv) + 3(uvv)^*(uvv) + (vvv)^*(vvv) \\ &= \zeta^t \left(\frac{3}{2} \right) \mathbb{G} \left(\frac{3}{2} \right) \zeta \left(\frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\mathbb{G} \left(\frac{3}{2} \right) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Define

$$\xi \left(\frac{3}{2} \right) \equiv \sqrt{\mathbb{G}} \zeta \left(\frac{3}{2} \right) \quad \text{with} \quad \sqrt{\mathbb{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Then the left side of

$$\xi^t \left(\frac{3}{2} \right) \xi \left(\frac{3}{2} \right) = (u^*u + v^*v)^3 = \left[\xi^t \left(\frac{1}{2} \right) \xi \left(\frac{1}{2} \right) \right]^3$$

is invariant under the induced transformation

$$\begin{aligned} \xi \left(\frac{3}{2} \right) &\longmapsto \xi' \left(\frac{3}{2} \right) \equiv \mathbb{S} \left(\frac{3}{2} \right) \xi \left(\frac{3}{2} \right) \\ \mathbb{S} \left(\frac{3}{2} \right) &\equiv \mathbb{G}^{+\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{Q} \left(\frac{3}{2} \right) \cdot \mathbb{G}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Mathematica informs us - now not at all to our surprise - that the 4×4 matrix

$$\mathbb{S} \left(\frac{3}{2} \right) = \begin{pmatrix} \alpha^3 & \sqrt{3}\alpha^2\beta & \sqrt{3}\alpha\beta^2 & \beta^3 \\ -\sqrt{3}\alpha^2\beta^* & \alpha^2\alpha^* - 2\alpha\beta\beta^* & 2\alpha\alpha^*\beta - \beta^2\beta^* & \sqrt{3}\alpha^*\beta^2 \\ \sqrt{3}\alpha(\beta^*)^2 & -2\alpha\alpha^*\beta^* + \beta(\beta^*)^2 & \alpha(\alpha^*)^2 - 2\alpha^*\beta\beta^* & \sqrt{3}(\alpha^*)^2\beta \\ -(\beta^*)^3 & \sqrt{3}\alpha^*(\beta^*)^2 & -\sqrt{3}(\alpha^*)^2\beta^* & (\alpha^*)^3 \end{pmatrix}$$

is unitary and unimodular:

$$\mathbb{S}^t \left(\frac{3}{2} \right) \mathbb{S} \left(\frac{3}{2} \right) = \mathbb{I} \quad \text{and} \quad \det \mathbb{S} \left(\frac{3}{2} \right) = 1$$

Drawing again upon $\left. \begin{array}{l} \alpha = 1 + ik_3\delta\theta \\ \beta = (k_2 + ik_1)\delta\theta \end{array} \right\}$ we in leading order have

$$\mathbb{S} \left(\frac{3}{2} \right) = \begin{pmatrix} \alpha^3 & \sqrt{3}\beta & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}\beta^* & \alpha^2\alpha^* & 2\beta & 0 \\ 0 & -2\beta^* & \alpha(\alpha^*)^2 & \sqrt{3}\beta \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}\beta^* & (\alpha^*)^3 \end{pmatrix} + \dots$$

which becomes

$$\mathbb{S} \left(\frac{3}{2} \right) = \mathbb{I} + i\delta\theta \cdot \left(k_1\sigma_1 \left(\frac{3}{2} \right) + k_2\sigma_2 \left(\frac{3}{2} \right) + k_3\sigma_3 \left(\frac{3}{2} \right) \right) + \dots$$

with

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \left(\frac{3}{2} \right) &\equiv \begin{pmatrix} 0 & +\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & +2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & +\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 \left(\frac{3}{2} \right) &\equiv i \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 \left(\frac{3}{2} \right) &\equiv \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

By quick computation we verify that

$$\begin{aligned} [\sigma_1 \left(\frac{3}{2} \right), \sigma_2 \left(\frac{3}{2} \right)] &= 2i\sigma_3 \left(\frac{3}{2} \right) \\ [\sigma_2 \left(\frac{3}{2} \right), \sigma_3 \left(\frac{3}{2} \right)] &= 2i\sigma_1 \left(\frac{3}{2} \right) \\ [\sigma_3 \left(\frac{3}{2} \right), \sigma_1 \left(\frac{3}{2} \right)] &= 2i\sigma_2 \left(\frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

and find that (compare (39))

$$\sigma_1^2 \left(\frac{3}{2} \right) + \sigma_2^2 \left(\frac{3}{2} \right) + \sigma_3^2 \left(\frac{3}{2} \right) = 15 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Thus are we led by (49 : $\hbar = 1$) to the spin matrices

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_1 \left(\frac{3}{2} \right) &\equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & +\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & +2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & +\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{J}_2 \left(\frac{3}{2} \right) &\equiv i\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{J}_3 \left(\frac{3}{2} \right) &\equiv \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{which give } \mathbb{J}^2 \left(\frac{3}{2} \right) \equiv \mathbb{J}_1^2 \left(\frac{3}{2} \right) + \mathbb{J}_2^2 \left(\frac{3}{2} \right) + \mathbb{J}_3^2 \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{15}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ here } \frac{15}{4} = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right).$$

All 4 -vectors are eigenvectors of $\mathbb{J}^2 \left(\frac{3}{2} \right)$. To resolve that universal degeneracy we select $\mathbb{J}_3 \left(\frac{3}{2} \right)$ which, because it is diagonal, has obvious spectral properties:

$$\begin{aligned}
 \text{eigenvalue } +\frac{3}{2} \text{ with normalized eigenvector } |\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle &\equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{eigenvalue } +\frac{1}{2} \text{ with normalized eigenvector } |\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{eigenvalue } -\frac{1}{2} \text{ with normalized eigenvector } |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{eigenvalue } -\frac{3}{2} \text{ with normalized eigenvector } |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$\mathbb{J}_1\left(\frac{3}{2}\right)$ and $\mathbb{J}_2\left(\frac{3}{2}\right)$ have spectra identical to that of $\mathbb{J}_3\left(\frac{3}{2}\right)$, but distinct sets of eigenvectors. The ladder operators (45) become non-hermitian ladder matrices

$$\mathbb{J}_+\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbb{J}_-\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

By inspection we have

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbb{J}_+\left(\frac{3}{2}\right)|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle &= \sqrt{3}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle & \text{with } N\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) &= 1/\sqrt{3} \\
 \mathbb{J}_+\left(\frac{3}{2}\right)|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= 2|\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle & \text{with } N\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= 1/2 \\
 \mathbb{J}_+\left(\frac{3}{2}\right)|\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{3}|\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle & \text{with } N\left(\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\right) &= 1/\sqrt{3} \\
 \mathbb{J}_+\left(\frac{3}{2}\right)|\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle &= 0
 \end{aligned} \right\}$$

and similar equations describing the step-down action of $\mathbb{J}_-\left(\frac{3}{2}\right)$. Matrices identical to (60.1) and (60.5) appear on p. 203 of Schiff and p. 345 of Powell & Crasemann. ⁷

Case Spin 2.

Let's use Kramer's method to find matrices for spin 2. We start with considering

$$\zeta(2) \equiv \begin{pmatrix} uuuu \\ uuuu \\ uuvv \\ uvvv \\ vvvv \end{pmatrix}$$

and obtain $\zeta'(2) = \mathbb{Q}(2)\zeta(2)$ where $\mathbb{Q}(2)$ is a 5×5 mess. From

$$\begin{aligned}
 (u^*u + v^*v)^4 &= \zeta^\dagger(2)\mathbb{G}(2)\zeta(2) \\
 \mathbb{G}(2) &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(вычислениям верю, потом проделаю.) we are led to write

$$\xi(2) \equiv \sqrt{\mathbb{G}}\zeta(2) \quad \text{with} \quad \sqrt{\mathbb{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

giving

$$\xi(2) \mapsto \xi'(2) \equiv \mathbb{S}(2)\xi(2)$$

$$\mathbb{S}(2) \equiv \mathbb{G}^{+\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{Q}(2) \cdot \mathbb{G}^{-\frac{1}{2}}$$

where $\mathbb{S}(2)$ is again a patterned mess (Mathematica assures us that $\mathbb{S}(2)$ is unitary and unimodular) which, however, simplifies markedly in leading order:

$$\mathbb{S}(2) = \begin{pmatrix} \alpha^4 & 2\beta & 0 & 0 & 0 \\ -2\beta^* & \alpha^3\alpha^* & \sqrt{6}\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6}\beta^* & \alpha^2(\alpha^*)^2 & \sqrt{6}\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{6}\beta^* & \alpha(\alpha^*)^3 & 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & -2\beta^* & (\alpha^*)^4 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \mathbb{I} + i \begin{pmatrix} 4k_3 & 2(k_1 - ik_2) & 0 & 0 & 0 \\ 2(k_1 + ik_2) & 2k_3 & \sqrt{6}(k_1 - ik_2) & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}(k_1 + ik_2) & 0 & \sqrt{6}(k_1 - ik_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}(k_1 + ik_2) & -2k_3 & 2(k_1 - ik_2) \\ 0 & 0 & 0 & 2(k_1 + ik_2) & -4k_3 \end{pmatrix} + \dots$$

From it we extract

$$\mathbb{J}_1(2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & +2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & +\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & +\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & +2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_2(2) = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & -\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

And $\mathbb{J}_1^2(2) + \mathbb{J}_2^2(2) + \mathbb{J}_3^2(2) = 6\mathbb{I}$, where $6 = 2(2+1)$.

The ladder matrices become

$$\mathbb{J}_+(2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_-(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

in which connection we notice that

$$\begin{aligned} N_+(2, +2) &= \infty & N_-(2, +2) &= 1/2 \\ N_+(2, +1) &= 1/2 & N_-(2, +1) &= 1/\sqrt{6} \\ N_+(2, 0) &= 1/\sqrt{6} & N_-(2, 0) &= 1/\sqrt{6} \\ N_+(2, -1) &= 1/\sqrt{6} & N_-(2, -1) &= 1/2 \\ N_+(2, -2) &= 1/2 & N_-(2, -2) &= \infty \end{aligned}$$

(??? проверю потом, если не будет лень.)

Extrapolation to the general case with guessing method.

The method just reviewed, as it relates to the case $\ell = 2$, can in principle be extended to arbitrary ℓ , but the labor increases as ℓ^2 . The results in hand are, however, so highly patterned and so simple that one can readily guess the design of $\{\mathbb{J}_1(\ell), \mathbb{J}_2(\ell), \mathbb{J}_3(\ell)\}$, and then busy oneself demonstrating that one's guess is actually correct.

Case Spin $\frac{5}{2}$

I illustrate how one might proceed in the case $\ell = \frac{5}{2}$. We expect in any event to have

$$\mathbb{J}_3\left(\frac{5}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & & & & \\ & \frac{3}{2} & & & \\ & & \frac{1}{2} & & \\ & & & -\frac{1}{2} & \\ & & & & -\frac{3}{2} \\ & & & & & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

where (as henceforth) the omitted matrix elements are 0's. And we guess that $\mathbb{J}_1\left(\frac{5}{2}\right)$ and $\mathbb{J}_2\left(\frac{5}{2}\right)$ are of the designs

$$\mathbb{J}_1\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & +a & & & \\ a & 0 & +b & & \\ & b & 0 & +c & \\ & & c & 0 & +d \\ & & & d & 0 & +e \\ & & & & e & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_2\left(\frac{5}{2}\right) = i\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -a & & & \\ a & 0 & -b & & \\ & b & 0 & -c & \\ & & c & 0 & -d \\ & & & d & 0 & -e \\ & & & & e & 0 \end{pmatrix}$$

To achieve $\mathbb{J}_1\mathbb{J}_2 - \mathbb{J}_2\mathbb{J}_1 = i_3$ we ask Mathematica to solve the equations

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a^2) &= +\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}(b^2 - a^2) &= +\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}(c^2 - b^2) &= +\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(d^2 - c^2) &= -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(e^2 - d^2) &= -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}(-e^2) &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

and are informed that

$$\begin{aligned} a &= \pm\sqrt{5} \\ b &= \pm\sqrt{8} \\ c &= \pm\sqrt{9} \\ d &= \pm\sqrt{8} \\ e &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

where the signs are independently specifiable. Take all signs to be positive (any of the $2^5 - 1 = 31$ alternative sign assignments would, however, work just as well) and obtain

$$\mathbb{J}_1 \left(\frac{5}{2} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & +\sqrt{5} & & & & \\ \sqrt{5} & 0 & +\sqrt{8} & & & \\ & \sqrt{8} & 0 & +\sqrt{9} & & \\ & & \sqrt{9} & 0 & +\sqrt{8} & \\ & & & \sqrt{8} & 0 & +\sqrt{5} \\ & & & & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{J}_2 \left(\frac{5}{2} \right) = i \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{5} & & & & \\ \sqrt{5} & 0 & -\sqrt{8} & & & \\ & \sqrt{8} & 0 & -\sqrt{9} & & \\ & & \sqrt{9} & 0 & -\sqrt{8} & \\ & & & \sqrt{8} & 0 & -\sqrt{5} \\ & & & & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

The commutation relations check out, and we have

$$\mathbb{J}_1^2 \left(\frac{5}{2} \right) + \mathbb{J}_2^2 \left(\frac{5}{2} \right) + \mathbb{J}_3^2 \left(\frac{5}{2} \right) = \frac{35}{4} \mathbb{I}$$

$$\frac{35}{4} = \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} + 1 \right)$$

We observe that for $N_{\pm}(\ell, m) \equiv \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm 1)}}$

$$\begin{array}{ll} N_+ \left(\frac{5}{2}, +\frac{5}{2} \right) = \infty & N_+ \left(\frac{5}{2}, +\frac{5}{2} \right) = 1/\sqrt{5} \\ N_+ \left(\frac{5}{2}, +\frac{3}{2} \right) = 1/\sqrt{5} & N_+ \left(\frac{5}{2}, +\frac{3}{2} \right) = 1/\sqrt{8} \\ N_+ \left(\frac{5}{2}, +\frac{1}{2} \right) = 1/\sqrt{8} & N_+ \left(\frac{5}{2}, +\frac{1}{2} \right) = 1/\sqrt{9} \\ N_+ \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right) = 1/\sqrt{9} & N_+ \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right) = 1/\sqrt{8} \\ N_+ \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right) = 1/\sqrt{8} & N_+ \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right) = 1/\sqrt{5} \\ N_+ \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right) = 1/\sqrt{5} & N_+ \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right) = \infty \end{array}$$

General case

In the general case we would

(i) compute the numbers

$$1/N_+(\ell, m) \quad : \quad m = -\ell, \dots, +(\ell-1)$$

(ii) insert them into off-diagonal positions in the now obvious way to construct $\mathbb{J}_1(\ell)$ and $\mathbb{J}_2(\ell)$, (iii) adjoin

$$\mathbb{J}_3 = \begin{pmatrix} \ell & & & & \\ & (\ell-1) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -(\ell-1) & \\ & & & & -\ell \end{pmatrix}$$

and be done.

Другое о спине

Бытовые аналогии спина (??)

(тоже потом напишу, не до этого пока)

Когда нужны спины более чем 1? (!!??)

(напишу потом с примером!)

(p. 454 in I. Duck & E. C. G. Sudarshan, Pauli and the Spin-Statistics Theorem) for a charged spin- $\frac{3}{2}$ field the anticommutator... depends on the external field in such a manner that quantization becomes inconsistent."

Когда и почему спин может быть не целый и не полуцелым (???)

(пока все еще есть этот вопрос, не до этого. распишу потом с формулами.)

4.2.9 Mirror Inversion of Euclidean Space

Прежде, чем описывать операции зеркальной инверсии пространства и обращения стрелы времени в пространстве-времени Минковского, рассмотрим случай 3-мерного евклидова пространства.

Зеркальная инверсия евклидова пространства

(перекину что ли потом в другой раздел?)

Рассмотрим пару векторных координатных пространств V_E и V_P : V_E построено как линейная оболочка на правой тройке базисных векторов декартовых координат $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, а V_P - на левой тройке базисных векторов декартовых координат $\{\mathbf{e}_1^P, \mathbf{e}_2^P, \mathbf{e}_3^P\}$, - и зададим вопрос: как могут быть связаны тензорные величины], определенные на векторах этих пространств? Поскольку законы физики формулируются в терминах тензоров, что называют ковариантным описанием физических систем, ответ на этот вопрос позволяет сравнить V_g и V_p , зеркально сопряженные друг к другу 2 Итак, нас интересует, как тензоры T_z из V_z могут быть связаны с тензорами T_P из V_P . В основу такого сравнения можно положить 4 постулата.

Первый постулат, об инверсии координат

$$r_P^\alpha = -r_E^\alpha.$$

То есть координаты r_P^α в зеркальном мире V_P обратны координатами r_E^α в реальном мире V_E .

Смысл этого постулата становится понятным, если рассмотреть преобразование зеркальной инверсии в реальном мире V_z , которое определяется заменой исходного базиса на штрихованный

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \xrightarrow{P} \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} = \{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}.$$

При этой инверсии штрихованный базис в V_z становится левым. Ясно, что при операции зеркального отражения пространства V_z , которую обозначают символом $\mathbb{P}$, как мы это сделали в 17.63, матрица преобразований координат совпадает со своей обратной и равна

$$\mathcal{P}_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}^2 = \mathbb{1},$$

так что в зеркальном, штрихованном базисе пространства V_z согласно общему закону преобразования тензорных величин компоненты координат равны

$$r_{\mathbb{E}}'^{\alpha} = \mathcal{P}_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta} r_{\mathbb{E}}^{\beta} = -r_{\mathbb{E}}^{\alpha}.$$

Мы определяем координаты точки r_p^{α} в зеркальном базисе $\mathbf{e}_{1,2,3}$ зеркального пространство V_p так, чтобы они совпадали с координатами $r_z'^{\alpha}$, которые получаются после перехода от правой тройки базисных векторов к левой в исходном пространстве V_z ,

$$r_p^{\alpha} = r_{\mathbb{E}}'^{\alpha} = \mathcal{P}_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta} r_{\mathbb{E}}^{\beta} = -r_{\mathbb{E}}^{\alpha},$$

что также записывают в виде связи компонент контрвектора координат в зеркальных пространствах V_p и $V_{\mathbb{E}}$,

$$r_p^{\alpha} = \lambda_p \cdot \mathcal{P}_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta} r_{\mathbb{E}}^{\beta} = \lambda_p \cdot (-1) r_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \quad \lambda_p = +1.$$

В этом случае говорят, что вектор координат имеет положительную пространственную четность λ_p , и мы видим, что это значение четности задается по построению.

Второй постулат, про инверсию объема

ориентированный объем vol на базисной тройке в зеркальном мире V_F

$$\text{vol}_p(\mathbf{e}_1^p, \mathbf{e}_2^p, \mathbf{e}_3^p),$$

связан с ориентированным объемом vol на зеркально отраженной базисной тройке исходного пространства $V_{\mathbb{E}}$,

$$\text{vol}_z(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$$

соотношением

$$\text{vol}_i(\mathbf{c}_1^p, \mathbf{e}_2^p, \mathbf{e}_3^p) = -\text{vol}_E(\mathbf{e}'_1, \mathbf{c}'_2, \mathbf{e}'_3)$$

Смысл этого постулата легко объяснить из самого определения ориентированного объема в пространствах V_z и V_F . Ориентация в пространстве задается по правилу «буравчика»: при повороте первого базисного вектора ко второму буравчик движется по третьему базисному вектору. Таким образом, ориентация в пространстве определяется выбором порядка базисных векторов, а ориентированный объем на упорядоченной ортонормированной базисной тройке принимается равным $+1$,

$$\text{Vol}_{\mathbb{P}}(\mathbf{e}_1^p, \mathbf{e}_2^p, \mathbf{e}_3^p) = \text{vol}_{\mathbb{E}}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = +1.$$

Ясно, что после зеркальной инверсии в пространстве V_z , во-первых,

$$\text{vol}_{\mathbb{E}}(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = \text{vol}_{\mathbb{E}}(-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3) = -\text{vol}_{\mathbb{E}}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = -1$$

т.е. на зеркальной ортонормированной тройке векторов в $V_{\mathbb{F}}$ ориентированный объем равен -1 , а во-вторых, движение буравчика для базиса $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{c}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ и базиса $\{\mathbf{e}_1^p, \mathbf{e}_2^p, \mathbf{e}_3^{\bar{F}}\}$ становятся одинаковыми. Поэтому прямое сравнение ориентированных объемов, определенных согласно упорядочению базисов в пространствах V_z и V_z , однозначно дает связь 17.68, которую можно переписать в виде

$$\text{vol}_p(\mathbf{e}_1^p, \mathbf{e}_2^p, \mathbf{e}_3^p) = \lambda_p \cdot \text{vol}_{\mathbb{E}}(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3). \quad \lambda_p = -1.$$

В этом случае говорят, что ориентированный объем имеет отрицательную пространственную четность λ_F - четность относительно зеркальной инверсии 3-мерного евклидова пространства. Так как ориентированный объем - это число, инвариантное при замене базиса в пространстве, то он является скаляром с отрицательной пространственной четностью, а такой инвариант называют псевдоскаляром.

Третий постулат, о тензоре Леви-Чивиты

$$\epsilon_p^{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma}.$$

То есть полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты $\epsilon_p^{\alpha\beta\gamma}$ в зеркальном мире V_p задается точно так же, как и тензор Леви-Чивиты $\epsilon_z^{\alpha\beta\gamma}$ в мире V_z , т.е. на упорядоченных базисных тройках в обоих пространствах он полагается равным $+1$, при смене порядка в тройке он меняет знак на -1 , а при совпадении какой-либо пары из индексов, нумерующих тройку, он равен 0 .

Раскроем эту формулировку более подробно. Данное нами чуть выше определение ориентированного объема можно записать с помощью тензора Леви-Чивиты. В пространстве V_p

$$\text{vol}_p(\mathbf{e}_1^p, \mathbf{e}_2^p, \mathbf{e}_3^p) = \epsilon_p^{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{e}_1^p)^\alpha (\mathbf{e}_2^p)^\beta (\mathbf{e}_3^p)^\gamma = \epsilon_p^{\alpha\beta\gamma} \delta_1^\alpha \delta_2^\beta \delta_3^\gamma = \epsilon_p^{123} = +1.$$

Точно также в пространстве $V_{\mathbb{E}}$

$$\text{vol}_z(\mathbf{e}_1^z, \mathbf{e}_2^z, \mathbf{e}_3^z) = \epsilon_z^{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{e}_1^z)^\alpha (\mathbf{e}_2^z)^\beta (\mathbf{e}_3^z)^\gamma = \epsilon_z^{\alpha\beta\gamma} \delta_1^\alpha \delta_2^\beta \delta_3^\gamma = \epsilon_z^{123} = +1.$$

В итоге, 17.72 и 17.73) означают, что имеет место постулированное нами тождество (17.71).

Тензор Леви-Чивиты в пространстве $V_{\mathbb{E}}$ при зеркальной инверсии 17.65 преобразуется как

$$\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{P}_{\mathbb{E}}^{\alpha\alpha'} \mathcal{P}_{\mathbb{E}}^{\beta\beta'} \mathcal{P}_{\mathbb{E}}^{\gamma\gamma'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha'\beta'\gamma'} = (-1)^3 \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma},$$

Третий постулат 17.71 означает, что связь тензора Леви-Чивиты $\epsilon_p^{\alpha\beta\gamma}$ в зеркальном мире V_p с тензором Леви-Чивиты $\epsilon_z^{\alpha\beta\gamma}$ после зеркальной инверсии в мире V_z имеет вид

$$\epsilon_p^{\alpha\beta\gamma} = \lambda_F \cdot \epsilon_z^{\alpha\beta\gamma}, \quad \lambda_F = -1,$$

Т.е.

$$\epsilon_p^{\alpha\beta\gamma} = \lambda_{\mathbb{E}} \cdot \mathcal{P}_{\mathbb{E}}^{\alpha\alpha'} \mathcal{P}_{\mathbb{E}}^{\beta\beta'} \mathcal{P}_{\mathbb{E}}^{\gamma\gamma'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha'\beta'\gamma'} = \lambda_p \cdot (-1)^3 \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma}, \quad \lambda_p = -1,$$

и мы заключаем, что тензор Леви-Чивиты обладает отрицательной пространственной четностью, или, как говорят, он является псевдотензором 3-его ранга.

Следствия постулатов

Из первых трех постулатов логически следует четвертый постулат: из тензоров с определенной пространственной четностью мы можем строить их тензорные произведения, которые также будут обладать определенной пространственной четностью, равной произведению пространственных четностей тензоров в произведении.

Например, векторное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ с положительной пространственной четностью будет обладать отрицательной пространственной четностью, поскольку это тензорное произведение включает в себя еще и тензор Леви-Чивиты с отрицательной пространственной четностью,

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad c_{\mathbb{E}}^{\gamma} = \epsilon_{\mathbb{E}}^{\gamma\alpha\beta} a_{\mathbb{E}}^{\alpha} b_{\mathbb{E}}^{\beta}.$$

Значит, c - это псевдовектор,

$$c_p^{\gamma} = \lambda_p \cdot \mathcal{P}_{\mathbb{E}}^{\gamma\gamma'} c_{\mathbb{E}}^{\gamma'} = \lambda_p \cdot (-1) c_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad \lambda_p = -1.$$

Псевдовектор называют также аксиальным вектором.

Почему зеркальные инверсии не очевидны? (????)

(не знаю, пока казалось бы, что простая тема, на которую хочется забить.)

Где нужны зеркальные инверсии? (????)

(не знаю, пока казалось бы, что простая тема, на которую хочется забить.)

Без аж 3-х постулатов никак не построить инверсию? (????)**Четность тензора при инверсиях**

Скалярное произведение псевдовектора на вектор - это псевдоскаляр, который в случае, когда он принимает вещественные значения, называют также аксионом.

Приведенное нами наблюдение носит общий характер: если тензор ранга k в зеркальном пространстве V_F связан с исходным тензором в пространстве V_E соотношением

$$T_F^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \lambda_F \cdot \mathcal{P}_F^{\alpha_1 \alpha'_1} \dots \mathcal{P}_F^{\alpha_k \alpha'_k} T_E^{\alpha'_1 \dots \alpha'_k} = \lambda_F \cdot (-1)^k T_E^{\alpha_1 \dots \alpha_k},$$

то при $\lambda_F = -1$ говорят, что это - псевдотензор с отрицательной $\mathbb{P}$ -четностью, а при $\lambda_F = +1$, что тензор имеет положительную $\mathbb{P}$ -четность. При введении новой физической величины, свойства которой относительно зеркальной инверсии пространства не определены по её построению из величин с известными пространственными четностями, необходимо указывать пространственную четность новой величины в качестве гипотезы модельного рассмотрения. В электродинамике мы согласуем, например, свойства векторов электрического и магнитного полей с эмпирическими данными о свойствах зеркальной симметрии электродинамики. Фактически мы считаем, что электродинамика инвариантна относительно зеркальной инверсии пространства: естествоиспытатель не сможет определить, видит ли он мир V_E или только его зеркальное изображение V_F , так как законы электродинамики не позволяют установить такие различия. В теории слабого взаимодействия токи устроены как разность вектора и псевдовектора, которая в зеркальном мире будет переходить в сумму вектора и псевдовектора. Это значит, что реальный мир и его зеркальное отражение обладают совершенно разными свойствами, или, как говорят, слабое взаимодействие нарушает пространственную четность. Теперь в качестве примера мы можем сделать ремарки и о физически значимых величинах в евклидовом пространстве в случае нерелятивистской динамики. Мы будем полагать, что в зеркальном мире V_F время идентично времени в реальном мире V_E : $t_F = t$, - и, стало быть, время имеет положительную пространственную четность, время - скаляр. Отсюда сразу следует, что скорость $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ - вектор с положительной $\mathbb{P}$ -четностью, так как скорость построена из дифференциала вектора координат $d\mathbf{r}$ и дифференциала времени dt , каждый из которых обладает положительной четностью относительно зеркальной инверсии пространства. Для определения свойств импульса при переходе в зеркальный мир, постулируем, что масса это скаляр с положительной четностью. Тогда и импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ - вектор с положительной $\mathbb{P}$ -четностью. Наконец, момент импульса $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ включает в свое определение тензор Леви-Чивиты с отрицательной пространственной четностью, и, следовательно, момент импульса - псевдовектор, а тензор момента количества движения 17.20 - тензор второго ранга $L_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha$ обладает положительной пространственной четностью.

Инверсии пространства-времени Минковского

Несобственные ортохронные преобразования $SO_-^\uparrow(3, 1)$ с

$$\det \Lambda = -1, \quad \Lambda_0^0 \geq 1,$$

получаются из собственных ортохронных домножением на матрицу отражения координат пространства $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$,

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Поскольку $\mathcal{P}^2 = \mathbb{1}$, зеркальная инверсия вместе с тождественным преобразованием образует циклическую группу второго порядка. Что же касается преобразования $SO_-^\uparrow(3, 1)$, то они сохраняют метрику Минковского, но сами по себе, изолированно, не являются группой, так как последовательное действие пары несобственных преобразований является собственным. Группа собственных ортохронных преобразований $SO_+^\uparrow(3, 1)$ вместе с циклической группой зеркальной симметрии пространства образуют группу, в состав которой входит $SO_-^\uparrow(3, 1)$. Действие несобственных антиортохронных преобразований $SO_-^\downarrow(3, 1)$ с

$$\det \Lambda = -1, \quad \Lambda_0^0 \leq -1,$$

связано с обращением стрелы времени $t \rightarrow -t$, которое задается матрицей преобразования

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Так же, как и для зеркальной инверсии пространства, $\mathcal{J}^2 = \mathbb{1}$, и операция обращения стрелы времени вместе с тождественным преобразованием образуют циклическую группу второго порядка, а преобразования $SO_+^\uparrow(3, 1)$ вместе с циклической группой обращения стрелы времени образуют группу изометрий, в состав которой входят преобразования $SO_-^\downarrow(3, 1)$.

Сформулируем прямое обобщение рассмотрения, проведенного в предыдущем разделе в случае 3-мерного евклидова пространства, на случай 4-мерного пространства-времени Минковского на примере контрвариантных величин ранга k .

Тензоры T_p в зеркальном мире M_F , построенном на левой тройке пространственных базисных векторов, и тензоры U_T в мире с обращенной стрелой времени M_T , построенном на правой тройке пространственных векторов, но при $t_T = -t$, связаны с тензорами T и U в реальном мире M при условии, что эти тензоры обладают определенной Р- и Т-четностью, соотношениями

$$\begin{aligned} T_P^{\mu_1 \dots \mu_k} &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda_P \cdot P_{\mu'_1}^{\mu_1} \cdot \dots \cdot P_{\mu'_k}^{\mu_k} T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}, \\ U_T^{\mu_1 \dots \mu_k} &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda_T \cdot T_{\mu'_1}^{\mu_1} \cdot \dots \cdot T_{\mu'_k}^{\mu_k} U^{\mu'_1 \dots \mu'_k} \\ \lambda_P &\in \{-1, +1\}, \quad \lambda_T \in \{-1, +1\}. \end{aligned}$$

Согласно 17.82) в зависимости от значения величины λ_2 , выделяются тензоры с положительной и отрицательной пространственной четностью $\lambda_P = \pm 1$, а также с положительной и отрицательной четностью по отношению к обращению стрелы времени

$\lambda_T = \pm 1$. Например, 4-импульс свободной частицы $p^\mu = (p_0, \mathbf{p})$ как произведение массы на 4-скорость $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ при обращении стрелы времени соответствует 4-импульсу движения с той же энергией в обратном направлении, поскольку $x_0 \mapsto -x_0$, $r^\alpha \mapsto r^\alpha$, а собственное время $\tau \mapsto -\tau$, т.е. $p_T^\mu = (p_0, -\mathbf{p})$, в то время как умножение p^μ на матрицу обращения стрелы времени 17.81 дает результат с противоположным знаком, откуда мы сразу заключаем, что 4-вектор импульса обладает отрицательной Т-четностью. Очевидно, что Р-четность 4-импульса положительна. Другой пример - 4-координата x^μ : Р- и Т-четность 4-вектора координат являются положительными по определению связи реального мира с зеркальным и с миром с обратным течением времени. Подчеркнем, что не все тензорные величины обладают определенной четностью: ясно, что сумма четного и нечетного тензора, к примеру, уже не имеет определенной четности. Это значит, что использование подобных конструкций в теории при описании реального мира нарушает соответствующую дискретную симметрию: при переходе в обращенное пространство-время эта полевая конструкция распадается, т.е. сопряженный относительно дискретного преобразования мир обладает существенно другими физическими свойствами, и следовательно, он отличим от реального мира, а не симметричен реальному миру.

Пространственная четность и Т-четность наблюдаемых величин могут рассматриваться как дополнительные квантовые числа в квантовой теории.

Преобразование генераторов при дискретной симметрии

Генераторы инфинитезимальных преобразований группы Лоренца включают в себя мнимые единицы, т. е. комплексные множители, а значит, соответствуют комплекснозначным тензорным величинам. В этой связи в квантовой механике возникает дополнительный вопрос о том, является ли оператор дискретной симметрии линейным - сохраняющим суперпозицию с заданными комплексными коэффициентами - или антилинейным, т. е. переводящим суперпозицию в суперпозицию с комплексно сопряженными коэффициентами. Проиллюстрируем этот вопрос на двух примерах. Так, с одной стороны, орбитальный момент $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ является в классической физике псевдовектором:

$$L \xrightarrow{\mathcal{P}} L$$

С другой стороны, при квантовании в координатном представлении ему отвечает генератор пространственных поворотов 1

$$\hat{\mathbf{L}} = -i\hbar(\mathbf{r} \times \nabla) = \hbar \mathbf{l}_{\mathbb{E}}$$

построенный из оператора набла и вектора координат. Все операторы, которые мы рассматриваем, действуют на полях, т.е. на гладком расслоении (fibre bundle) $v(x) \cong x \times v$, где v - представление алгебры изометрии метрики Минковского. Действие оператора зеркальной инверсии пространства в композиции с другими операторами, которые сами также преобразуют поле $v(x)$, можно представить посредством следующей записи на примере преобразования вектора координат $\mathbf{r}$:

$$\mathbb{P}\mathbf{r}v(x) = \mathbb{P}\mathbf{r}\mathbb{P}^{-1}\mathbb{P}v(x) = \mathbb{P}\mathbf{r}\mathbb{P}^{-1}\{\mathbb{P}v(x)\} = \mathbf{r}_{\mathbb{P}}v_{\mathbb{P}}(x_{\mathbb{P}}), \quad \mathbf{r}_{\mathbb{P}} = \mathbb{P}\mathbf{r}\mathbb{P}^{-1}.$$

Эта запись имеет общий характер, так что действие оператора $\mathbb{P}$ на координаты и оператор набла запишется в виде

$$\mathbb{P}\mathbf{r}\mathbb{P}^{-1} = \mathbf{r}_{\mathbb{P}} = -\mathbf{r}, \quad \mathbb{P}\nabla\mathbb{P}^{-1} = \nabla_{\mathbb{P}} = -\nabla,$$

и это приведет к

$$\mathbb{P}\mathbf{l}_{\mathbb{E}}\mathbb{P}^{-1} = \mathbf{l}_{\mathbb{E}}$$

только если

$$\mathbb{P}i\mathbb{P}^{-1} = i$$

а значит, оператор не преобразует мнимую единицу и переводит комплексные числа самих в себя, т.е. этот оператор линейный: линейный оператор переводит суперпозицию полей с заданными комплексными коэффициентами в суперпозицию образов тех же полей при действии этого линейного оператора с теми же значениями комплексных коэффициентами, что и в исходной суперпозиции.

Отсюда сразу следует, что дифференциальный генератор бустов, который согласно определениям 17.31 имеет вид $\tilde{l}_z = i(x_0\nabla + \mathbf{r}\partial_0)$, меняет знак,

$$\mathbb{P}\tilde{l}_z\mathbb{P}^{-1} = -\tilde{l}_z$$

т.е. $\tilde{l}_z$ - вектор с положительной пространственной четностью. А вот при обращении стрелы времени движение частицы заменяется на противоположное, так что «в классике»

$$\mathbf{L} \xrightarrow{\tau} -\mathbf{L}.$$

С учетом естественного определения действия обращения времени на координаты

$$\mathbb{T}\mathbb{T}^{-1} = \mathbf{r}, \quad \mathbb{T}\nabla\mathbb{T}^{-1} = \nabla$$

находим, что

$$\mathbb{T}l_z\mathbb{T}^{-1} = -l_z$$

если только

$$\mathbb{T}i\mathbb{T}^{-1} = -i,$$

а значит, оператор обращения стрелы времени антилинейный: антилинейный оператор переводит суперпозицию полей с заданными комплексными коэффициентами в суперпозицию образов тех же полей при действии этого

антилинейного оператора с комплексно сопряженными значениями коэффициентов, заданных в исходной суперпозиции.

К такому же выводу об антилинейности инверсии времени можно прийти, если рассмотреть преобразование энергии и импульса частицы, которая движется по траектории в обратную сторону, а именно, в классической физике

$$p_0 \xrightarrow{\tau} p_0, \quad \mathbf{p} \xrightarrow{\tau} -\mathbf{p}.$$

Действительно, при квантовании 4-импульс соответствует операторам генераторов сдвига отсчета времени и координат

$$c\hat{p}_0 = i\hbar\partial_t, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$$

и действие оператора инверсии стрелы времени на эти операторы определяется соотношениями

$$\mathbb{T}\partial_t\mathbb{T}^{-1} = -\partial_t, \quad \mathbb{T}\nabla\mathbb{T}^{-1} = \nabla$$

и только при $\mathbb{T}i\mathbb{T}^{-1} = -i$ мы получим

$$\mathbb{T}\hat{p}_0\mathbb{T}^{-1} = \hat{p}_0, \quad \mathbb{T}\hat{\mathbf{p}}\mathbb{T}^{-1} = -\hat{\mathbf{p}}$$

Из антилинейности следует, например, что вектор, отвечающий генератору бустов для скалярных полей (спиновая матрица $s_{\mu\nu}$ - матричный генератор группы поворотов и бустов - тождественно равна нулю для скалярного поля, у которого нет компонент, отвечающих различным поляризациям поля)

$$\tilde{l}_z = i(x_0\nabla + \mathbf{r}\partial_0) = i\left(ct\nabla + \frac{\mathbf{r}}{c}\partial_t\right),$$

вопреки наивным ожиданиям, не меняет знак, а сохраняется:

$$\mathbb{T}\tilde{l}_{\mathbb{E}}\mathbb{T}^{-1} = \vec{l}_{\mathbb{E}}$$

так как

$$\mathbb{T}t\mathbb{T}^{-1} = -t, \quad \mathbb{T}\partial_t\mathbb{T}^{-1} = -\partial_t, \quad \mathbb{T}\mathbb{T}^{-1} = -i$$

Полное отражение пространства-времени $\mathbb{T}$ строится как произведение $\mathbb{P} \cdot \mathbb{T}$. Композиция этой дискретной симметрии с элементами $SO + (3, 1)$ дает элементы собственных антиортохронных преобразований $SO_+^\downarrow(3, 1)$ с $\det \Lambda = 1$, $\Lambda_0^0 \leq -1$. Под действием оператора $\mathbb{PT}$ генераторы преобразований группы Лоренца меняют знак:

$$\mathbb{P}\mathbb{T}l_{\mathbb{E}}(\mathbb{PT})^{-1} = -l_{\mathbb{E}}, \quad \mathbb{P}\mathbb{T}\tilde{l}_{\mathbb{E}}(\mathbb{PT})^{-1} = -\tilde{l}_{\mathbb{E}}$$

В результате действия операции полного отражения мы получаем движение в зеркальном мире с обращенной стрелой времени.

Действие дискретных преобразований на матричные генераторы s и $\tilde{s}$

(???)

Пусть мы установили, как преобразуются дифференциальные генераторы группы Лоренца l и $\tilde{l}$ при действии дискретных симметрий инверсии пространства и стрелы времени в виде линейного и анилинейного операторов $\mathbb{P}$ и $\mathbb{T}$, соответственно.

Как определить действие дискретных преобразований на матричные генераторы s и $\tilde{s}$? Ответ на этот вопрос строго определен тем, какой смысл имеют поля $v(x) \cong x \times v$: так как v - это представление алгебры непрерывных преобразований, определенных в базовом пространстве x , то по определению представления имеет место гомоморфизм генераторов в x на матричные генераторы представления v , и, следовательно, все свойства генераторов в x гомоморфно отображаются в свойства матричных генераторов представления v . Это значит, что в полном соответствии с 17.83 – 17.87)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}s_{\mathbb{E}}\mathbb{P}^{-1} &= s_{\mathbb{E}}, & \mathbb{P}\tilde{s}_{\mathbb{E}}\mathbb{P}^{-1} &= -\tilde{s}_{\mathbb{E}}, \\ \mathbb{T}s_{\mathbb{E}}\mathbb{T}^{-1} &= -s_{\mathbb{E}}, & \mathbb{T}\tilde{s}_{\mathbb{E}}\mathbb{T}^{-1} &= \tilde{s}_{\mathbb{E}}, \\ \mathbb{PT}s_{\mathbb{E}}(\mathbb{PT})^{-1} &= -s_{\mathbb{E}}, & \mathbb{PT}\tilde{s}_{\mathbb{E}}(\mathbb{PT})^{-1} &= -\tilde{s}_{\mathbb{E}} \end{aligned}$$

Введем операцию комплексного сопряжения $\mathbb{K}$, которая, очевидно, не меняет 4-мерные координаты и метрику пространства-времени Минковского, но также формально обращает знаки генераторов:

$$\mathbb{K}l_{\mathbb{E}}\mathbb{K}^{-1} = -l_{\mathbb{E}}, \quad \mathbb{K}\tilde{l}_{\mathbb{E}}\mathbb{K}^{-1} = -\tilde{l}_{\mathbb{E}}.$$

Поэтому действие комбинированного оператора $\mathbb{KPT}$ на генераторы преобразований группы Лоренца сводится к тождественному! А значит, есть основания полагать, что базис полей, построенный из совместных собственных функций генераторов группы Лоренца в точности может совпадать с базисом полей, который будет построен из совместных собственных функций $\mathbb{KPT}$ -сопряженных генераторов группы Лоренца. В такой трактовке необходимо также определить связь не только между исходными генераторами и генераторами после действия каждой из операций $\mathbb{KPT}$, что мы уже проделали, но и найти связь исходного базиса полей с базисом полей под воздействием комбинированной дискретной операции, которая для генераторов и координат сводится к $\mathbb{KPT}$. Мы построим такую связь базисов полей после того, как найдем исходный базис, так что сейчас обсуждение этой связи выглядит преждевременным. Однако отметим, что в релятивистской квантовой механике действию оператора комплексного сопряжения на

генераторах и координатах пространства-времени Минковского соответствует действие оператора зарядового сопряжения $\mathbb{C}$ на полях, так что эквивалентность базисов полей отвечает CPT -теореме. Однако для определения зарядового сопряжения необходимо будет описать само понятие заряда поля, что предполагает введение взаимодействий.

Сейчас же при описании свойств релятивистских преобразований проведенное рассмотрение позволяет констатировать, что полная группа поворотов и бустов пространства-времени Минковского включает в себя и дискретные симметрии, т. е. все компоненты: собственные и несобственные повороты, ортохронные и антиортохронные бусты.

4.2.10 Other Properties of Euclidean Space

Пример вращения со спином не равным 1 и $\frac{1}{2}$ (??)

(пока вопрос остался, распишу когда-то.)

5 Special Relativity

5.1 Basic Physical Ideas of SR

5.1.1 Postulates of SR

Постулаты СТО

(??? потом додумаю это отдельно. что если сдвинуть каждый постулат?)

Существует два постулата СТО, из которых и можно вывести все формулы:

1. Пространство и время однородны.

2. Пространство изотропно.

То есть две системы, имеющие одну и ту же скорость движения относительно третьей абсолютно эквивалентны.

3. Существует максимальная скорость распространения любого взаимодействия, совпадающая со скоростью света.

В любой инерциальной системе отсчета скорость света имеет одно и тоже значение c .

(тут указание на то, что мб можно иначе все строить, просто это обсудим в другом месте.)

Подразумеваются постулаты СТО

Подразумевается, что частный случай - преобразования Галилея

Это тоже всегда мы имеем в виду.

Об ошибках в понимании постулатов СТО

Связь пространства со временем не подразумевается (!?!?!?!?)

Можно считать, что это не так, тогда до СТО не дойти.

(подумаю, вроде как можно и не зная это все вывести, типа без метрики, такой же вывод у Т. Тао был, потом поисследую детально.)

4-векторы в специальной теории относительности

$$\begin{aligned} ds^2 > 0 & \quad a = (+\sqrt{a^2}, 0, 0, 0) && \text{времениподобны,} \\ ds^2 = 0 & \quad a = (1, 0, 0, 1) && \text{изотропный,} \\ ds^2 < 0 & \quad a = (0, 0, 0, \sqrt{-a^2}), && \text{пространственноподобный.} \end{aligned}$$

Здесь a - типичный пример вектора данного типа.

(тут дальше описание их более подробное.)

5.1.2 Speed of Light

(a very important section which discusses what it really is?)

О важности постоянства скорости света (?)

Она убирает константу в электромагнетизме, что важно.

(а как - когда-то потом напишу, не сейчас.)

Обзор современных (2023 год) методов определения скорости света (?)

(детали - скорее всего в отдельной записи, мб про пару экспериментов только напишу. напишу тут нормально, мб ключевые формулы добавлю.)

Лазерная интерферометрия: Этот метод использует лазерные лучи и интерференцию света для измерения расстояний с высокой точностью. Современные лазерные интерферометры могут измерять время, которое свет принимает на прохождение известного расстояния, что позволяет точно определить скорость света.

Методы атомной физики: Используются атомные переходы и резонансные явления для точного измерения времени. Например, атомные часы, такие как цезиевые или стронциевые, могут использоваться для измерения времени с высокой точностью, что затем используется для определения скорости света.

Оптические волоконные измерения: Измерения времени прохождения светового сигнала через оптические волокна также используются для определения скорости света.

Эксперименты в физике частиц: Некоторые эксперименты в области физики частиц, такие как измерения величины магнитного момента электрона, могут быть использованы для определения скорости света.

Допустим, мы оказались в прошлом, когда не было открыто, чему равна скорость света. Как можно ее измерить?

(из gpt ответы, потом подумаю про них, хороший вопрос, но не до него)

Метод вращающегося зеркала (XVII-XVIII века)

: Этот метод был предложен Олафом Рёмером в 1676 году. Идея заключается в том, чтобы отразить луч света от зеркала на далеком объекте и вращать зеркало. При движении Земли вокруг Солнца орбита Земли изменяется, и это должно привести к изменению положения теннисного мяча на далеком объекте. Измеряя это изменение, можно было бы вычислить скорость света.

Метод земных измерений (XVIII-XIX века):

Другой метод, предложенный Леонардом Эйлером в 1728 году, предлагал использовать меры расстояния и времени на Земле для приблизительного определения скорости света. Эйлер предложил использовать время задержки света от Луны во время затмения, чтобы определить, сколько времени свету требуется пройти расстояние между Землей и Луной.

Метод аберрации света (XIX век)

: В 1728 году Джеймс Брэдли предложил метод аберрации света. Этот метод основывается на изменении направления света, вызванного движением Земли вокруг Солнца. Это изменение может быть использовано для расчета скорости света.

Наблюдение за спутником ИО (??)

(?? пока не до этого, известный метод.)

О движении со сверхсветовой скоростью

Подробно обсудим все что известно о движении со сверхсветовой скоростью.
(потом про это тут соберу)

А если скорость света флуктуирует вблизи большого значения?

(??? пока думаю, что идейно мало что должно поменяться, хотя тем не менее, многое может смениться. можно исследовать этот вопрос потом.)

Детали о скорости света

Скорость света одинакова для всех безмассовых полей

(?? кст, а для массивных там просто масса, константа что ли добавляется?? чет не уверен.)

Почему скорость света в среде меньше?

(потому что мб там какие-то рассеяния происходят. Но неужели так и есть, чтобы так вот просто куча рассеяний - и в итоге просто на константу скорость света падает? докажу формулой тут.)

5.1.3 Constancy of the Speed of Light (??)

Подробно обсудим постоянство скорости света.

I want to emphasis that this is not a little comment to the concept of speed of light. There were and there are people (by 2025), which were and are assured that speed of light can be variable. They lived whole life, believing so, they wrote articles and books about it. It is a very important fundamental question: Is speed of light constant or not and if not, what are the consequences?

5.1.4 What is Matter?

(в механику потом перекину скорее всего)

Что такое частица материи?

Квант квантового поля.

(а тут нормально пропишу структуру этого.)

Какие вообще могут быть частицы и откуда их свойства? (????)

(?????? тут вопросы. с одной стороны группа Пуанкаре говорит многое, с другой - у нас есть разные внутренние симметрии, появляются какие-то составные частицы, имеющие конфайнмент, а также какие-то еще гости в КТП, где какие-то невозможные свойства. Так что подробно потом отвечу на вопрос это.)

Невозможность твердых тел по СТО

Частицы могут быть только точечными в рамках СТО.

Невозможность существования твердых тел в СТО на примере диска

В теории относительности под абсолютно твердыми телами следовало бы подразумевать тела, все размеры которых остаются неизменными в той системе отсчета, где они покоятся.

Теория относительности делает вообще невозможным существование абсолютно твердых тел, потому что при преобразованиях Лоренца расстояния между точками обязательно меняются.

(в механике прописываю про такой переход, пока достаточно глубоко в него не въехал)

Рассмотрим, например, круглый диск, вращающийся вокруг своей оси, и предположим, что он абсолютно тверд. Связанная с этим диском система отсчета, конечно, не является инерциальной. Можно, ввести для каждого из небольших элементов диска инерциальную систему отсчета, в которой бы этот элемент в данный момент покоился; для разных элементов диска, обладающих различными скоростями, эти системы будут, конечно, тоже различны. Рассмотрим ряд элементов длины, расположенных вдоль какого-нибудь радиуса диска. Благодаря абсолютной твердости диска длины каждого из этих отрезков в соответствующей инерциальной системе отсчета остаются такими же, какими они являются у неподвижного диска.

Эти же длины получит и измеряющий их неподвижный наблюдатель, мимо которого проходит в данный момент рассматриваемый радиус диска, поскольку каждый из отрезков перпендикулярен к своей скорости, а в таком случае не происходит лоренцева сокращения. Поэтому и весь радиус, измеренный неподвижным наблюдателем как сумма составляющих его отрезков, будет таким же, каким он является у неподвижного диска.

С другой стороны, длина каждого из элементов окружности диска, проходящего в данный момент мимо неподвижного наблюдателя, подвергается лоренцеву сокращению, так что и длина всей окружности (измеренная неподвижным наблюдателем как сумма длин отдельных ее отрезков) окажется меньше, чем длина окружности покоящегося диска.

Мы приходим, таким образом, к результату, что при вращении диска отношение длины его окружности к радиусу (измеряемое неподвижным наблюдателем) должно было бы измениться вместо того, чтобы остаться равным 2π .

Противоречие этого результата со сделанным предположением и показывает, что в действительности диск не может быть абсолютно твердым и при вращении неизбежно подвергается некоторой сложной деформации, зависящей от упругих свойств материала, из которого сделан диск. (? уже задался вопросом, как её конкретно в простейшем случае считать, пока не знаю)

Невозможность существования твердых тел в СТО на примере начала движения тела

(? не оч въехал)

В невозможности существования абсолютно твердых тел можно убедиться и другим путем.

Пусть какое-нибудь твердое тело внешним воздействием в какой-нибудь одной его точке приводится в движение. Если бы тело было абсолютно твердым, то все его точки должны были бы прийти в движение одновременно с той, которая подверглась воздействию; в противном случае тело деформировалось бы. Теория относительности,

делает это невозможным, так как воздействие от данной точки передается к остальным с конечной скоростью, а потому все точки тела не могут одновременно начать двигаться.

(?? там же вообще скорость звука, нет?)

Обход точечности по квантовой механике

Если посмотреть на снимок (??? как он получен???) атома водорода, то электрон совершенно не точечный. Почему? Да потому что волновая функция у него, вот с ней он как будто и имеет объем, хотя по факту и не имеет.

(потом что-то напишу тут, вообще об этом пишу в квантовой механике.)

Массы в рамках СТО и группы Пуанкаре не могут гравитировать (?????)

(??? тут большие вопросы про это, как вообще связать гравитацию с группой Пуанкаре? Так что до конца непонятно, что такое вообще материя? У нее появляются свойства, которые совершенно неожиданные из того, как мы вводим эти объекты.)

Если у двух объектов абсолютно одинаковые свойства при всех вращениях, то это одинаковые объекты

Просто так всегда и делается почему-то, я не хочу об этом думать, пока звучит логично, на этом и останавливаюсь.

$$\begin{aligned}\left[\hat{L}^{\alpha\beta}, x^\gamma\right]_- &= -\left(L^{\alpha\beta}\right)_\delta^\gamma x^\delta, \\ \left[\hat{L}^{\alpha\beta}, \hat{p}^\gamma\right]_- &= -\left(L^{\alpha\beta}\right)_\delta^\gamma \hat{p}^\delta.\end{aligned}$$

Due to the commutation relations (6.100) and (6.101) one denotes the space-time four-vector x^λ and the momentum four-vector operator $\hat{p}^\lambda$ as vector operators. Correspondingly one considers an operator $\hat{O}^{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ as a tensor operator of rank n if it transforms in each index $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ as a vector:

$$\left[\hat{L}^{\mu\nu}, \hat{O}^{\lambda_1 \dots \lambda_n}\right]_- = -\sum_{k=1}^n (L^{\mu\nu})^{\lambda_k}{}_\kappa \hat{O}^{\lambda_1 \dots \lambda_{k-1} \kappa \lambda_{k+1} \dots \lambda_n}$$

Это же в теореме Вигнера-Экарта встречается.

Потом может подумаю лучше про это.

О невозможности в общем случае создания системы отсчета, в которой несколько частиц бы покоились

(явно приведу такой пример, раскрою суть, почему. пок не четко вижу это.)

Другое о материи

Первостепенна ведь энергия, а не материя, тогда где она локализована?

Полем?

Дефект массы как раз об этом и говорит ведь?

5.1.5 Causality

(??? a main discussion about what is meant by it??)

Действие должно быть скаляром

тут пропишу, откуда конкретно это следует.

5.1.6 Why There Is No Aether?

(a discussion of exactly this question)

5.2 Essence of Special Relativity

5.2.1 Lorentz Transformations

Обсудим подробно преобразования Лоренца.

Быстрота

(потом напишу лучше)

Понятие быстроты

Преобразования Лоренца удобно записывать, введя так называемые быстроты ξ как:

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th} \xi, \quad \gamma = \operatorname{ch} \xi, \quad \frac{\gamma_0}{c} = \operatorname{sh} \xi$$

Также обозначают его θ .

Параметр преобразований лоренца v/c был в пределах $-1 \leq v/c \leq 1$, быстрота ξ же принимает значения в области $-\infty < \xi < \infty$.

Заметим также, что скорости можно выразить как $v = c \operatorname{th} \xi$.

Закон сложения скоростей через быстроты имеет вид:

$$v_3 = c \operatorname{th} \xi_3 = \frac{(\operatorname{th} \xi_1 + \operatorname{th} \xi_2)}{1 + \operatorname{th} \xi_1 \cdot \operatorname{th} \xi_2} = c \operatorname{th} (\xi_1 + \xi_2)$$

Таким образом, при параллельных друг другу преобразованиях Лоренца быстроты скальваются.

Преобразования Лоренца имеют вид в терминах быстроты:

$$\begin{aligned} a^0 &= a'^0 \operatorname{ch} \xi + a'^3 \operatorname{sh} \xi \\ a^3 &= a'^0 \operatorname{sh} \xi + a'^3 \operatorname{ch} \xi \end{aligned}$$

таким образом гиперболы при таких преобразованиях не меняются.

Быстроты в продольном случае

При $v_{\perp} = 0$ имеет место закон сложения скоростей

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{vu}{c^2}}$$

так что, если вспомнить обозначения гиперболической тригонометрии:

$$\frac{u}{c} = \operatorname{th} \theta, \quad \frac{v}{c} = \operatorname{th} \theta_1, \quad \frac{v'}{c} = \operatorname{th} \theta_2,$$

то

$$\operatorname{th} \theta_2 = \frac{\operatorname{th} \theta_1 - \operatorname{th} \theta}{1 - \operatorname{th} \theta_1 \operatorname{th} \theta} = \operatorname{th} (\theta_1 - \theta).$$

А значит, в продольном случае имеет место простое сложение гиперуглов $\theta_2 = \theta_1 - \theta$

Поскольку при $z < 1$

$$\operatorname{arctanh} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z},$$

вводят понятие быстроты

$$\theta(v) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{v_{\parallel}}{c}}{1 - \frac{v_{\parallel}}{c}}$$

для которой, как мы показали, при продольных преобразованиях лоренцева буста имеет место закон сложения $\theta(v_1) = \theta(v_2) + \theta(u)$.

Визуализация преобразований Лоренца (!!!!!)

(оставшийся вопрос)

Просто все продольные размеры уменьшаются и всё.

(да?)

Об ошибках в визуализации преобразований Лоренца (!!!!!)**Сложение параллельных бустов (?)**

(? тут додумать всё нужно.)

Если применять последовательно два преобразования Лоренца со скоростями v_1 и v_2 , то в результате также получим преобразование лоренца с параметрами $v_3 = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}$, $\gamma_3 = \gamma_1\gamma_2 \left(1 + \frac{v_1v_2}{c^2}\right)$ также известное как релятивистский закон сложения скоростей, если представить, что v_1 - скорость частицы относительно системы отсчета S_1 , v_2 - скорость системы S_1 относительно другой системы S_2 .

Тогда v_3 будет скоростью частицы относительно S_2 . Действительно:

$$z'' = \gamma_2(z' - v_2t') = \gamma_2 \left(\gamma_1(z + vt) - v_2\gamma_1 \left(t - \frac{v_1z}{c^2} \right) \right) \equiv \gamma_3(z - v_3t)$$

Способ догадаться до СТО, не подозревая о этой теории

(тут обсужу, как это сделать, мб во введение вставлю.)

Вывод преобразований Лоренца из наглядных соображений

Пространство-время принято изучать с помощью систем отсчета, которые можно определить как биекцию между пространством-временем SpT и декартовым произведением вещественных осей

$$S : SpT \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Пусть вторая система отсчета S' движется со скоростью v параллельно оси z относительно S и в момент времени $t' = t = 0$ они совпадают. Для такого случая преобразования

Вывод преобразований Лоренца из очевидных соображений

Выведем преобразования Лоренца из постулатов СТО.

Ниже будет показано, что... (тут напишу суть, потому что на аж страницу вывод растянулся)

Согласно специальной теории относительности скорость света постоянная во всех системах отсчета, и две системы, имеющую одну и ту же скорость относительно какой-то системы отсчета абсолютно эквивалентны.

Подготовимся для применения этих постулатов к формулам, запишем объекты, которые требуются искать.

Рассмотрим простейший случае одномерного координатного пространства.

Работать будем со строками (t, x) .

Система отсчета будет отображением из пространства-времени событий в двумерное пространство

$$S : SpT \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Преобразование Лоренца,

зависящее только от скорости L_v отображает одну систему в другую:

$$L_v = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Таким образом, переход из одной системы в другую можно записать как

$$S_v = L_v \circ S$$

Поскольку при $v = 0$ должно быть тождественное преобразование, то можно разложить в ряд тейлора до первого порядка:

$$L_v = I + L'_0 v + O(v^2)$$

Нам нужно найти L'_0 , запишем ее через неизвестные $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$L_v(t, x) \equiv (t', x') = \left(\left[(1 + \alpha v + O(v^2)) t + (\beta v + O(v^2)) x \right], \left[(\gamma v + O(v^2)) t + (1 + \delta v + O(v^2)) x \right] \right)$$

И теперь применим постулаты СТО.

(????)

1) if $S(E) = (t, x)$, then $\bar{S}(E) = (t, -x)$ $\bar{S}_v = \bar{S}_{-v}$ $\alpha = 0$ and $\delta = 0$ $L_v(t, ct) \in \{(t', ct') : t' \in R\}$ $s = -1/c^2$ 3) $L_v(t, vt) \in \{(t', 0) : t' \in R\}$ for all

Таким образом, преобразования Лоренца до первого порядка имеют вид:

$$L_v(t, x) = \left(t - \frac{vx}{c^2}, x - vt \right) + O(v^2(|t| + |x|))$$

(?)

Преобразования Лоренца до второго порядка находятся:

$$L_v(t, x) = \left(t - \frac{vx}{c^2} + \frac{tv^2}{2c^2}, x - vt + \frac{xv^2}{2c^2} \right) + O(v^3(|t| + |x|))$$

И таким же способом можно прийти к общему виду преобразований Лоренца:

$$L_v(t, x) = \left(\frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

Вывод преобразований Лоренца как преобразований, которые сохраняют уравнения Максвелла

(именно отсюда они появились, проделаю этот вывод когда-то. Ур Максвелла - в 3д! мы еще не знаем про 4д формализм!)

Преобразования Лоренца

Физические явления происходят в пространстве и во времени, поэтому фундаментальные физические теории должны естественным образом включать в себя положения о структуре пространства и времени. В основе современных представлений о пространствах и времени лежит специальная теория относительности.

Согласно специальной теории относительности структур пространства-времени (без учета гравитации) задается следующими фундаментальными постулатами;

1. Пространство и время однородны.

2. Пространство изотропно.

3. Существует максимальная скорость распространения любого взаимодействия, совпадающая со скоростью света. В любой инерциальной системе отсчета скорость света имеет одно и тоже значение c .

Эти постулаты означают, что пространство и время представляют собой четырехмерное пространство Минковского, то есть 4-мерное мно- гообразие, снабженное координатой x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$ и инвариантной квадратичной формой или интервалом

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

где матрица η имеет вид

$$\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Координаты x^μ трактуются как момент времени (x^0) и координаты в трехмерном евклидовом пространстве (x^i , $i = 1, 2, 3$) рассматриваемого события, относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Здесь $x^0 = ct$, где t момент времени, а $x^i = (x, y, z)$ трехмерные координаты, определяющие место события в трехмерном пространстве.

Инвариантность интервала означает следующее. Пусть заданы два бесконечно близких события P и Q и пусть в некоторой инерциальной системе отсчета они имеют координаты x^μ и $x^\mu + dx^\mu$ соответственно, а в любой другой инерциальной системе отсчета они имеют

координаты x'^μ и $x'^\mu + dx'^\mu$ соответственно. Тогда форма интервала (1) не зависит от того, координаты какой из этих двух инерциальных систем были использованы при интервала. То есть

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = (dx'^0)^2 - (dx'^1)^2 - (dx'^2)^2 - (dx'^3)^2 \text{ Или}$$

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Наша дальнейшая цель состоит в нахождении следствий, вытекающих из условия инвариантности формы интервала.

Установим связь между координатами x'^μ и x^μ , согласованную с соотношением (3). Предположим, что в общем случае $x'^\mu = f^\mu(x)$ с произвольной функцией $f^\mu(x)$. Тогда из соотношения (3) получим

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Так как dx^α, dx^β произвольны, то

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

В этом соотношении и правая часть не зависит от координат, поэтому и левая часть не должна зависеть от координат. Это возможно лишь когда

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha} = \Lambda_\alpha^\mu = \text{const}$$

Отсюда

$$f^\mu(x) = \Lambda_\alpha^\mu x^\alpha + a^\mu,$$

где a^μ - произвольный постоянный 4 -вектор. При этом из соотношения (4) получаем

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta}$$

Таким образом, наиболее общее преобразование координат, сохраняющее форму интервала (3) имеет вид

$$x'^\mu = \Lambda_\alpha^\mu x^\alpha + a^\mu$$

где a^μ - константы и матрица Λ_α^μ удовлетворяет соотношению (5). Преобразования (6) называются неоднородными преобразованиями Лоренца. Если $a^\mu = 0$, то соответствующее преобразование координат

$$x'^\mu = \Lambda_\alpha^\mu x^\alpha$$

называются однородными преобразованиями Лоренца или просто преобразованиями Лоренца.

Пусть Λ - матрица с элементами Λ_ν^μ , обозначим транспонированную матрицу $\Lambda^T, (\Lambda^T)_\mu^\nu = \Lambda_\mu^\nu$. Тогда соотношение (5) можно переписать в виде

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta.$$

Будем называть (8) базовым соотношением для матриц Λ , осуществляющих однородное или неоднородное преобразования Лоренца.

Приведем некоторые примеры преобразований Лоренца а. Рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_j^i \end{pmatrix}$$

где $R = R_j^i$ матрица 3×3 . Подставляя (9) в (8) получим условия на матрицу R

$$R^T R = 1,$$

где 1 - 3×3 единичная матрица с элементами δ_j^i . R , удовлетворяющие (10) осуществляют преобразования координат 3-мерного пространства

$$x^i = R_j^i x^j,$$

сохраняющие евклидову длину вектора, то есть

$$\delta_{ij} x^i x^j = \delta_{ij} x'^i x'^j.$$

Такие матрицы называются матрицами вращения трехмерного эвклидова пространства. Можно показать, что данные матрицы образуют группу относительно обычного умножения матриц. Эта группа называется трехмерной группой вращений и обозначаются $O(3)$.

б. Рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix}$$

где v, c вещественные константы, причем $c > 0, |v| < c$. Нетрудно проверить, что матрицы (11) удовлетворяют базовому соотношению (8), поэтому они осуществляют некоторое преобразование Лоренца. Запишем это преобразование в явном виде, имеем

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x'^0 &= \frac{x^0 + \frac{v}{c} x^3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x'^1 &= x^1 \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= \frac{x^3 + \frac{v}{c} x^0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Преобразование (12) называется лоренцевским бустом вдоль оси x^3 . Константа c ассоциируется со скоростью света.

с. Рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \Lambda_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что базовое соотношение (8) выполнено, поэтому матрица Λ_T осуществляет некоторое преобразование Лоренца. Это преобразование имеет вид

$$\begin{aligned}x'^0 &= -x^0 \\ x'^i &= x^i\end{aligned}$$

и называется обращением времени.

d. Рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что базовое соотношение (8) выполнено, поэтому матрица Λ_P осуществляет некоторое преобразование Лоренца. Это преобразование имеет вид

$$\begin{aligned}x'^0 &= x^0 \\ x'^i &= -x^i\end{aligned}$$

и называется пространственным отражением.

e. Рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \Lambda_{PT} = \Lambda_{TP} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что базовое соотношение (8) выполнено, поэтому матрица Λ_P осуществляет некоторое преобразование Лоренца. Это преобразование имеет вид

$$x'^\mu = -x^\mu$$

и называется полным отражением.

Преобразования (13), (15), (17) называются дискретными преобразованиям Лоренца.

Ощущения преобразований лоренца (?????)

Как выглядит то, что в нашей системе происходит то, что неодновременно в другой системе (????)

Как выглядит сжатие пространства (????)

5.2.2 Time Dilation

Обсудим подробно замедление времени.

В чем состоит замедление времени?

Суть явления в том, что если мы видим, что объект движется от нас с определенной скоростью, то его время движется медленнее. То есть, например, за наши 10 секунд его наблюдения в его системе отсчета пройдет 1 секунда. Формульно:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > \Delta t_0$$

где Δt - время, проходящее между двумя событиями движущегося объекта в неподвижной системе отсчёта, Δt_0 - время, проходящее между двумя событиями движущегося объекта с точки зрения наблюдателя, связанного с движущимся объектом, v - относительная скорость движения объекта, c - скорость света в вакууме.

Обоснование замедления времени

Иллюстрация замедления времени

Как замедление времени выглядит?

Детали про замедление времени

Так какое из двух времен замедляется? (!!??)

5.2.3 Length Contraction

Обсудим подробно сокращение длины.

собственное время

(потом пропишу, пока так себе написано)

Собственным временем системы τ называется отсчет часов, покоящихся в этой системе.

Для малых интервалов отсчета собственного времени можно вычислить интервал этих событий для некоторой движущейся системы K' :

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - d\mathbf{r}'^2|_{d\mathbf{r}'=0} = c^2 dt'^2$$

Значит, собственное время в системе K' пропорционально инварианту

$$d\tau = \frac{1}{c} ds = dt'$$

Тот же интервал событий отсчета собственного времени системы K' в покоящейся системе K будет отвечать событиям в разных точках пространства, которые будут происходить в разные времена по часам системы K :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right) = \frac{c^2}{\gamma^2} dt^2$$

(??) ант, получаем связь отсчета собственного времени в системе K' с интервалом времени пространственно разделенных событий этого отсчета в системе K :

$$dt = \gamma d\tau$$

Как видим, имеет место релятивистское растяжение времени.

Подчеркнем, что часы, дающие отсчет собственного времени как в покоящейся системе, так и в движущейся, идут совершенно одинаково, потому что согласно принципу относительности никакими средствами невозможно установить по собственному времени покоятся часы или движутся прямолинейно и поступательно.

Сокращение продольных размеров при переходе из одной системы в другую

Отличается не ход времени в системах, а интервалы времени для событий в одной точке движущейся системы и для этих же событий в разных точках в покоящейся системе отсчета.

Длиной $d\ell$ называется расстояние между одновременными событиями.

Пусть некоторый объект покоится в системе K' , тогда назовем его продольную длину собственной длиной $d\ell_0$ (по направлению движения системы K').

Известно, что расстояние меняется как

$$d\ell = \frac{1}{\gamma} d\ell_0$$

Докажем это.

В покоящейся системе K события на концах объекта будут разделены интервалом времени согласно обратному преобразованию лоренцева буста для времени:

$$cdt = \gamma (cdt' + \beta d\ell_0)$$

Значит, одновременное положение концов объекта $dt = 0$ отвечает неодновременным событиям на концах в системе K' :

$$cdt' = -\beta d\ell_0$$

Эти одновременные события в системе K задают продольную длину объекта в системе K по тому же обратному преобразованию лоренцева буста для продольных координат:

$$d\ell = \gamma (d\ell_0 + \beta cdt') = \gamma d\ell_0 (1 - \beta^2)$$

и, в итоге, находим уравнение лоренцева сокращения продольных размеров движущегося объекта:

$$d\ell = \frac{1}{\gamma} d\ell_0$$

Изменение длины в рамках ОТО

Вообще-то длина изменяется следующим образом:

(??)

действительно....

(вообще, это в ОТО прописано у меня в этой записи, просто тут тоже хочется упомянуть)

Напряжение в деформируемых объектах, за счет перехода в другую СО

оно ведь будет?

как рассчитать?

(элементы теории упругости тут)

Экспериментальные проверки изменения длины

интересно, это проверяли ли?

5.3 Experiments about Special Relativity

(there are a lot of them, I'll look later)

5.3.1 Experiments that are in the Basis of SR

(discuss those, which gave the idea of SR. not the one that test the consequences of this idea)

5.3.2 Kennedy-Thorndike experiment

The Kennedy-Thorndike experiment, first conducted in 1932 by Roy J. Kennedy and Edward M. Thorndike, is a modified form of the Michelson-Morley experimental procedure, testing special relativity.[1] The modification is to make one arm of the classical Michelson-Morley (MM) apparatus shorter than the other one. While the Michelson-Morley experiment showed that the speed of light is independent of the orientation of the apparatus, the Kennedy-Thorndike experiment showed that it is also independent of the velocity of the apparatus in different inertial frames. It also served as a test to indirectly verify time dilation - while the negative result of the Michelson-Morley experiment can be explained by length contraction alone, the negative result of the Kennedy-Thorndike experiment requires time dilation in addition to length contraction to explain why no phase shifts will be detected while the Earth moves around the Sun. The first direct confirmation of time dilation was achieved by the Ives-Stilwell experiment. Combining the results of those three experiments, the complete Lorentz transformation can be derived.[2]

5.3.3 Overview of Tests of SR (???)

Ответим подробно, как проверить, верна вообще СТО или нет?

https://en.wikipedia.org/wiki/Tests_of_special_relativity

5.3.4 Michelson-Morley Experiment

Суть

(тут распишу, что он опровергает эфир, объясню четко, почему)

Описание эксперимента

Применения эксперимента

Обсудим, где можно использовать знания об эксперименте М-М.

(с опытом впишу. мб в тех же гравитационных волнах, пока не знаю.)

Насколько результат точный?

5.3.5 Jupiter's Io Eclipses

Измерение скорости света при затмениях Ио Юпитером.

Суть эксперимента (??)

Первую оценку скорости света произвёл Олаф Рёмер (1676). Он заметил, что, когда Земля на своей орбите находится дальше от Юпитера, затмения Юпитером спутника Юпитера Ио запаздывают по сравнению с расчётами на 22 минуты. Отсюда он получил значение для скорости света около 220 000 км/с — неточное значение, но близкое к истинному. В 1676 году он сделал сообщение в Парижской Академии, но не опубликовал свои результаты в виде формальной научной работы. Поэтому научное сообщество приняло идею о конечной скорости света только полвека спустя[41], когда в 1728 году открытие абберации позволило Дж. Брэдли подтвердить конечность скорости света и уточнить её оценку. Полученное Брэдли значение составило 308 000 км/с

Насколько результат точный?

Об ограничении точности за счет гравитационных волн (???)

(??? получается, точно измерить скорость света невозможно, потому что будет всегда хоть каплю, да флуктуировать метрика?)

5.3.6 Fizeau's Experiment (??)

(тоже такое есть, напишу потом мб.)

Описание опыта (!??)

Впервые измерения скорости света, основанные на определении времени прохождения светом точно измеренного расстояния в земных условиях, выполнил в 1849 году А. И. Л. Физо. В своих экспериментах Физо использовал разработанный им «метод прерываний», при этом расстояние, преодолеваемое светом в опытах Физо, составляло 8,63 км. Полученное в результате выполненных измерений значение оказалось равным 313 300 км/с. В дальнейшем метод прерываний значительно усовершенствовали и его использовали для измерений М. А. Корню (1876 г.), А. Ж. Перротен (1902 г.) и Э. Бергштранд[sv]. Измерения, выполненные Э. Бергштрандом в 1950 году, дали для скорости света значение 299 793,1 км/с, при этом точность измерений была доведена до 0,25 км/с[42].

5.3.7 Other Experiments Measuring the Speed of Light (??)

(??? I don't know any of them yet, but it is interesting to know, which are the modern ones?)

5.3.8 Other Experiments Testing SR and Speed of Light (???)

Эксперимент Хафеле — Китинга (???)

(потом мб разберу, пока не до него)

Обзор

В октябре 1971 года Дж. Хафеле (J. C. Hafele) и Ричард Китинг (Richard E. Keating) дважды облетели вокруг света, сначала на восток, затем на запад, с четырьмя комплектами цезиевых атомных часов, после чего сравнили «путешествовавшие» часы с такими же часами, остававшимися в Военно-морской обсерватории США (ВМО США). Перелёты выполнялись на обычных авиалайнерах регулярными коммерческими авиарейсами.

Перелёт в восточном направлении начался в 19:30 UTC 4 октября 1971 года и закончился в 12:55 UTC 7 октября 1971 года (продолжительность 65,42 часа);

маршрут ВМО США — Вашингтон — Лондон — Франкфурт — Стамбул — Бейрут — Тегеран — Нью-Дели — Бангкок — Гонконг — Токио — Гонолулу — Лос-Анджелес — Даллас — Вашингтон — ВМО США.

Средняя скорость относительно поверхности Земли составляла 243 м/с, средняя высота над уровнем моря 8,90 км, средняя широта по маршруту 34град с. ш.

В западном направлении перелёт был начат в 19:40 UTC 13 октября 1971 года, закончился через 80,33 часа в 04:00 UTC 17 октября 1971 года. Маршрут: ВМО США —

Вашингтон — Лос-Анджелес — Гонолулу — Гуам — Окинава — Тайбэй — Гонконг — Бангкок — Бомбей — Тель-Авив — Афины — Рим — Париж — Шаннон — Бостон — Вашингтон — ВМО США. В этом направлении средняя скорость составляла 218 м/с, средняя высота 9,36 км, средняя широта по маршруту 31° с. ш.

Во время перелётов выполнялся мониторинг условий окружающей среды (температуры, влажности и давления воздуха), а также измерялось магнитное поле. В дальнейшем было продемонстрировано, что изменение этих условий в лаборатории не влияет в пределах ошибок на ход использовавшихся в эксперименте часов. Было проверено также, не влияет ли отключение одной из 4 использовавшихся батарей на ход часов (такая потеря одной из батарей произошла во время западного перелёта). Навигационную информацию о параметрах каждого перелёта предоставляли пилоты.

Для сборки из комплекта часов и батарей были куплены отдельные билеты на два кресла (на имя Mr. Clock)[2]. Общая цена билетов для часов и двух сопровождающих исследователей составила около 7600 долларов, в результате эксперимент Хафеле — Китинга оказался одним из самых недорогих экспериментов, выполненных для проверки теории относительности[3][4].

Результаты

Согласно специальной теории относительности, скорость хода часов наибольшая для того наблюдателя, для которого они находятся в состоянии покоя. В системе отсчёта, в которой часы не покоятся, они идут медленнее, и этот эффект пропорционален квадрату скорости. В системе отсчёта, покоящейся относительно центра Земли, часы на борту самолёта, движущегося на восток (в направлении вращения Земли, скорость самолёта складывается с вращательной скоростью поверхности Земли $v_{\text{часов}} = R \Omega + v_{\text{самолёта}}$), идут медленнее, чем часы, которые остаются на поверхности ($v_{\text{часов}} = R \Omega$), а часы на борту самолёта, движущегося в западном направлении (против вращения Земли, скорость самолёта вычитается из вращательной скорости поверхности Земли $v_{\text{часов}} = R \Omega - v_{\text{самолёта}}$), идут быстрее[5][6].

Согласно общей теории относительности, в игру вступает ещё один эффект: небольшое уменьшение (по абсолютной величине) гравитационного потенциала с ростом высоты опять-таки ускоряет ход часов. Поскольку самолёты летели приблизительно на одной и той же высоте в обоих направлениях, этот эффект мало влияет на разность хода двух «путешествовавших» часов, однако он вызывает их уход от показаний часов на поверхности Земли.

Полученные результаты были опубликованы в журнале Science в 1972 году[5]:

(??)

Эксперимент по измерению вертикальной скорости света (???)

(?? такой был? если нет, то почему бы не сделать его???? ух, что, забыли это люди сделать что ли???)

5.4 Advanced Philosophical Ideas About Space and Time

5.4.1 Critical Review of SR and Its Details (???)

Сравнение релятивистской механики и нерелятивистской механики (???)

очень важно написать.

вроде абсолютно все то же, только переходы в другую СО другой формулой даются, а также закон дисперсии другой.

Предпосылки для создания СТО

Обсудим подробно, что не так пошло с преобразованиями Галилея?

Неинвариантность уравнений максвелла

(?)

явно покажем.

хз, как?

Недостатки СТО

Обсудим, какие вопросы остаются нерешенными в рамках СТО.

(пока мелкий раздел, потом мб расширю его)

Парадокс близнецов как недостаток СТО

(потом явно выделю, что не так)

(больше пока что и не помню)

Каково максимальное ускорение в рамках СТО?

(ответ гуглится, пока не до него, не знаю объяснений. мб с ходу что-то отвечу, если нужно будет.)

Особенности СТО

О том, является ли группа Лоренца в общем случае группой

что-то там Володя говорил, в пример прецессию Томаса приводил, я пока что просто хз.

О системе отсчета, связанной с фотоном

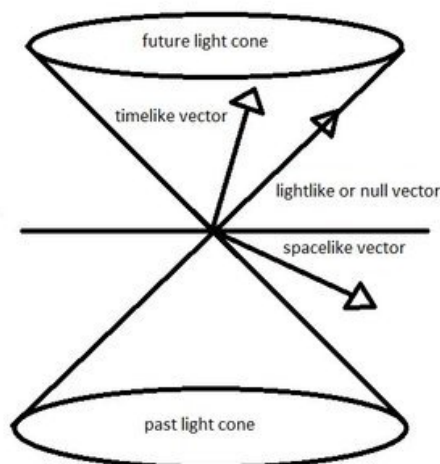
(хз, я задумывался, ничего особо не понял. мб в статье про грав волны увидел упоминания её. хз, потом подумаю.)

Что будет, если будешь двигаться со скоростью близкой к скорости света?

(опишу все эффекты. Лоренцево растяжение, увеличение массы, а что еще?)

Конус Минковского

Конструкция



Как же настоящий момент?

Пока казалось бы, что лучше даже не знать это, потому что больше в настоящем можешь быть.

Критика конуса Минковского (!?!?!?)

(?? что не то с ним?)

Как разогнаться до близкой к скорости света скорости?

(мб какие-то поля, но пока не писал про это уравнения, потом подумаю.)

Бусты не образуют группу в отличие от вращений (??)

(перекину в часть СТО. так сказал Володя и мб однажды я проверю это.)

Нельзя ли мерить все скорости относительно скорости света?

(таким образом абсолютный покой бы существовал? а любая система, которая движется, характеризовалась бы разницей между его скоростью и скоростью света? потом подумаю про это больше.)

Окончательная ли теория СТО, может ли быть она обобщена, и если да, то как? (???)

(напишу потом, тут не только про ОТО будет речь идти. там видео диалекта есть!)

(??? как до обобщений догадаться, кстати?)

(??? кст, там же эффектом Санька можно проверить, инерциальная система или нет, все на том? Диалект что-то это так и непонял, мб хрень говорит.)

(?? я думаю, что у Диалекта проблемы, потому что ты всегда можешь опеделить наличие ускорения по потере массы системы. а не так, что там какая-то вселенная, до которой сигнал еще должен дойти как-то. все очень просто, ты всегда можешь определить,

есть ускорения или нет, потому что или масса будет уменьшаться, или будет какое-то поле, которое будет воздействовать. все, вопрос закрыт. Там дальше многое удалю или перепишу, потому что рассуждения интересные, но абсолютно не содержательные. тут еще про эфир какие-то приколы появляются, я хз.)

1914 году эйнштейн писал про проблему относительности.

Абсолютное ускорение неопределяемое.

(текст из Дialeкта ютуб)

special relativity has undoubtedly been one of the most successful theories to emerge out of recent history not only has the theory correctly predicted new phenomena but also in complementing more sophisticated theories like general relativity or Quantum field Theory it has helped enhance our understanding of both the very large and the very small but despite all this it can be an intuitively jarring Theory and Einstein himself was in fact never fully satisfied with it writing in 1914 that the theory suffered from what he termed an undeniable fundamental defect but what was this defect exactly and how did he propose to overcome it this is dialect and today we're examining why relativity doesn't add up every scientific theory is predicated upon certain unprovable statements known as axioms the axioms of classical mechanics essentially Newton's three laws more or less reflect intuitive beliefs about our everyday reality I.E that motion is related to causality and force to motion and action to reaction Etc but unlike those axioms the central Axiom of special relativity that light travels at the same speed in all inertial frames is something of a head scratcher it tells us that no matter what velocity observers are traveling at with respect to one another they will all measure the same speed for any given beam of light unlike Newton's Laws this Axiom hardly seems to follow as a consequence of any intuitive ideas yet by adopting it Einstein was able to achieve quite a lot unite electricity and magnetism under one framework show mass and energy were of the same form and dispense with the need for an unobservable ether but possibly the greatest Allure this Axiom held for Einstein was that it promised to overturn the absolute space and time of Newtonian physics Einstein was an avid devotee of Ernst mock the philosopher who had stressed that all laws in physics ought to concern the relative motion of bodies and not their motion as referred to some theoretical absolutist construct indeed by asserting the constancy of the speed of light Einstein felt he was achieving Mock's vision of a relative space and time but there was one thing he knew his new

Theory didn't yet relative eyes motion this was because it relied on an implicit definition of observers being inertial meaning unaccelerated in order for them to measure a constant speed of light this quality of being unaccelerated was not relative to individual observers but rather somehow an objective fact already agreed upon between all observers meaning it was absolute but Einstein recognized right away that this absoluteness meant the existence of an internal tension within his theory if motion was defined through space and time and space and time were relative then how could motion be anything but relative indeed Einstein's immediate intuition told him this meant the theory of special relativity was incomplete sure he had framed the laws of physics to be independent of any particular velocity but this had already been a feature of Newtonian mechanics into Conformity with Which special relativity merely brought the laws of electromagnetism to Einstein true relativity meant the relativity of all motion not just the relativity of velocities for that reason in a 1914 paper entitled on the relativity problem he wrote that he felt special relativity suffered from the same undeniable fundamental defect that Newtonian physics did that is that it relied on a notion of absolute acceleration in order to complete its formalism so why do we care whether a formalism invokes absolute acceleration or not well as Einstein pointed out in his paper it's because absolute acceleration is undefinable one would try in vain to explain what it is that one should understand by the pure and simple acceleration of a body one would succeed only in defining the relative acceleration of bodies with respect to each other indeed to make a statement about any sort of motion

meaningful be it velocity acceleration jerk Etc you have to specify what you're moving relative to for instance if you say you're accelerating in a car you're implying that you're accelerating relative to the ground but if that ground were say actually the deck of a boat accelerating equally and oppositely over a body of water then relative to someone on the shore you'd actually be at rest no physicist in their right mind would of course admit that you could have acceleration which is not relative to anything and So formalistically speaking the answer to this problem is to define absolute acceleration as meaning acceleration relative to an inertial frame but of course inertial frames are defined via an absence of acceleration so this definition is horrifically circular indeed most physicists will esue giving that definition altogether in favor of the empirical one where an absolute acceleration is defined as something that can be measured with an accelerometer unfortunately since any measuring instrument first has to be calibrated before it can give meaningful readings this answer is likewise problematic for instance given a spring accelerometer we'd have to make a choice of where and when to calibrate it before we could use it and should we choose to calibrate it on a rocket ship that unbeknownst to us was blasting through outer space then as soon as the rocket engines shut off the spring would stretch leading us to wrongly conclude that we had begun experiencing a force attempts to utilize a better or more sophisticated accelerometer will not bypass this calibration requirement meaning acceleration as measured by an accelerometer is always only acceleration relative to the frame of calibration there is yet still one intuitive definition of absolute motion left to us which you can find given in videos such as this Ted Edwin on the twin paradox this is the idea that absolute acceleration I.E non-inertial motion can be defined as acceleration with respect to the rest of the universe to be in a national Observer one has to maintain a constant speed and direction relative to the rest of the universe

well on the surface this definition is highly appealing It suffers from a crucial defect it's non-local that is if acceleration is supposed to be a real effect then the information that something is accelerating must be transmitted to that something at the moment that the acceleration occurs but if information can only travel at the speed of light then this information can't come from a great distance away in other words you can only be causally affected by things in your immediate vicinity so the state of motion of the rest of the universe relative to you at the moment of your acceleration is both irrelevant and impossible to know whatever you're accelerating relative to it must be located within your immediate vicinity and infinitesimally so should we take this notion of local action to its limit this means that if we want to treat acceleration as absolutely and instantaneously real then we are left with only two options for what you are accelerating relative to 1. an absolute space or two some ether-like substance a special relativity of course rejects both these possibilities telling us that we can have neither absolutes nor ethers but Einstein developed special relativity in 1905 before he ventured into any considerations about how acceleration played into the picture so it's natural to see why he and others might have leapt to the conclusion that absolute space and or an ether could be dismissed altogether however by the time 1914 rolled around Einstein had well past realized that the notion of absolute acceleration didn't mesh with his relativistic Paradigm and so to correct this undeniable fundamental defect he concluded in his 1914 paper that the laws of physics ought to be packaged in a way so as to refer to only the motion between bodies indeed in 1914 Einstein felt extremely confident that his pending theory of general relativity would achieve exactly that this was because Einstein had begun working with tensors a type of mathematical object which seemed to provide a way to relate the laws of physics without reference to any particular coordinate system eager for a way to realize Mock's program of unfettered relativism Einstein mistakenly conflated this coronet-free aspect of tensors with the relativity of all motion and concluded he had finally done away with the Last Vestige of Newtonian absolutism but Einstein received a serious blow in 1917 when the German physicist Eric crutchman pointed out to him that tensors were simply a convenient way of mathematically packaging a formalism

and that pretty much any old Theory could be expressed through them sure enough only a few years later the French mathematician Elie Cartan managed to reformulate classical Newtonian physics in the language of tensor-free tensors developing what became known as Newtonian physics the implication of this was clear if the absolute space time and motion of Newtonian physics could be expressed in the language of tensors then the tensor formalism of general relativity

indicated nothing whatsoever in regards to motion being absolute or relative for the remainder of his life Einstein would struggle to interpret the meaning of Relativity changing his mind frequently about its implications and completely reversing his stances on topics such as the existence of The Ether or Mach's principle but mainstream physics would ignore all this and merely retain the philosophy of Relativity as Einstein had established it in 1905 before he had given full weight to the meaning of acceleration which means Einstein never succeeded in removing his Theory's fundamental defect and that this defect Still Remains with the theory today indeed it's easy to see that this defect comes about because we want to treat acceleration as absolutely real and yet at the same time persist in saying that all the components which go into making up acceleration time space length velocity are all relative foreigner's instinct to solve this problem by relativizing acceleration was certainly correct but as we mentioned before if we want all observers to agree on their states of acceleration whilst also preserving the principle of local action this leaves only two options for what observers can be accelerating relative to an absolute space or an ether since the whole point of Relativity is to avoid problematical absolutes this means we must cross the first option off our list which leaves only the second option The Ether and thus at once we see why relativity is internally inconsistent in order to handle acceleration the formalism requires the existence of an ether but at the same time its philosophy conceived only for constant velocity motion forbids us to speak of any such ether of course it's hardly a coincidence that Einstein would eventually change his mind and declare that The Ether did exist nor is it a coincidence that it would be considerations of gravity and acceleration which would lead him to do so because for all the mystery surrounding what The Ether may or may not be what our current theories most strongly suggest is the idea that we detect its presence every time we accelerate of course you might object that if we can have a measurable acceleration with respect to the ether then we must also have a measurable velocity with respect to the ether which brings us back round to the central mystery of relativity if the ether exists why can't we detect our velocity with respect to it the lorentzian answer to this question was to modify Newtonian physics with an additional Axiom stating that clocks physically slow down and rulers physically shrink when in motion with respect to the ether this Axiom in and of itself feels pretty arbitrary and jarring but at the same time the Axiom Einstein replaced it with that the speed of light is measurably equal in all inertial frames hardly feels any less arbitrary or jarring neither are intuitive and both leave one essentially scratching their head going why that but what if we could find another Axiom a deeper more intuitive principle from which these two seemingly conflicting axioms would actually emerge as being one in the same thing indeed some of you who have been following this channel for a while have been very patient with us as for some time now we've been dotting our eyes and crossing our T's in order to bring you an interpretation of Relativity which we feel will offer a more intuitive and concrete way of understanding

the Theory's formalism our aim is to strip the theory of its mathematical abstraction and demonstrate that to every counter-intuitive and bizarre phenomenon a simple and physically meaningful picture can be coordinated now of course none of this would have been possible without the encouragement insights and guidance from our viewers over the years additionally we want to express our gratitude for our patreon supporters without whose generosity this Channel's continuance would also not be possible and lastly we want to acknowledge Henry Lindner whose paper on the philosophical inadequacy of modern physics served as the inspiration for this video well until soon this has been dialect thanks for watching

5.4.2 Boundaries of Applicability of SR (????)

(I am not sure, which are they exactly???)

5.4.3 Overview of Mathematics Generalizations of Special Relativity?

(write an overview of what Guts wrote. These topics will be discussed below)

5.4.4 The Philosophy Behind Wigner's Scheme

(?!?! это еще отработаю, плохо её вижу.)

Философия, стоящая за схемой Вигнера

(потом напишу)

Как мы видим поля, что сразу думаем об нужных их свойствах?

Как догадаться до схемы Вигнера?

Схема Вигнера в двух словах

(максимально коротко напишу суть всего, что ниже подробно будет обсуждаться.)

Представление строится так: выделяется полный набор взаимно коммутирующих генератора и инвариантов, так что базис векторных пространств неприводимых представлений составляют совместные собственные векторы операторов из полного набора.

Например, в случае группы вращений s_z и s^2 (.. напишу потом.)

Теория

Локальные релятивистские поля - основной объект исследования квантовой теории поля. При этом, считается, что поля за счет воздействия на систему могут быть измерены по отклику системы, в том числе, локально, когда детекторная часть системы занимает сколь угодно малый объем. Это значит, что локальное поле - наблюдаемая физическая величина, заданная в точке пространства-времени Минковского. Все наблюдаемые в квантовой теории описываются операторами, которые действуют в пространстве квантовых состояний. В случае, когда наблюдаемая величина - локальное поле, квантование называют вторичным, а пространство квантовых состояний описывает кванты поля - частицы, так что состояния в пространстве, которое называют пространством Баргмана-Фока, характеризуются числом квантов поля. Поля обладают энергией, импульсом, зарядом, и следовательно, кванты поля - это еще и кванты энергии, импульса, заряда.

Итак, чтобы описать вторичное квантование локальных релятивистских полей, необходимо прежде в полной мере знать свойства релятивистских полей. Эту не квантовую, а классическую задачу начинают изучать с исследования свободных полей, т.е. полей из которых можно построить суперпозицию, и эта суперпозиция также будет удовлетворять уравнениям движения уравнениям Эйлера-Лагранжа. В таком случае можно утверждать, что одно решение никак не зависит от того, как устроено другое решение, т.е. поля свободны от какого-либо влияния друг на друга. Это возможно, только если уравнения Эйлера-Лагранжа линейны по полям. Стало быть, уравнения

движения свободных полей - это линейные однородные уравнения. В этом случае можно поставить вопрос о базисе решений уравнений движения, и тогда базис релятивистских полей при вторичном квантовании позволит описать всевозможные кванты в пространстве Баргмана-Фока.

Для описания базиса решений линейных уравнений для свободных релятивистских полей по идее Вигнера необходимо сначала констатировать, что

эти поля заданы в пространстве-времени Минковского, так что нас интересует вопрос о том, каковы свойства этих полей относительно непрерывных изометрий пространства-времени: поворотов, лоренцевых бустов и трансляций. Для этого сначала выделяют генераторы бесконечно малых изометрий вблизи тождественного преобразования, а именно, генераторы поворотов, лоренцевых бустов и трансляций, среди которых выделяют максимальный набор взаимно коммутирующих генераторов ¹ и инвариантов изометрий ². Для выделения такого набора операторов необходимо вывести все коммутаторы генераторов и определить инварианты. Затем, в полной аналогии с гильбертовым пространством квантовых состояний в квантовой механике этот полный набор операторов позволяет построить совместный базис из собственных функций полного набора, причем говорят, что эти собственные функции образуют пространство представлений алгебры генераторов изометрий пространства-времени Минковского. Эти собственные функции в различных пространствах неприводимых представлений составляют базис свободных релятивистских полей. Уравнения на собственные значения операторов из полного набора линейные, и среди генераторов есть оператор трансляций по времени, а значит, среди уравнений на собственные значения содержится и уравнение движения, т.е. уравнение, которое определяет, как поле зависит от времени.

Для примера, эта же схема была реализована нами для группы поворотов евклидова пространства: мы установили, что генераторы поворотов - это операторы момента количества движения, затем нашли все коммутаторы и установили полный набор, включив в него инвариант - квадрат момента j^2 и проекцию j_z , а затем решили уравнения на собственные значения для операторов из полного набора, которые составили базис $2j + 1$ -мерных неприводимых представлений $|j, m\rangle$ для всех физических систем в терминах частиц с определенным моментом импульса и его проекции на выделенную ось.

С повторения этого примера группы поворотов мы и начнем изложение вопроса описания базиса релятивистских полей, но поскольку наша цель включает в себя не только рассмотрение евклидова пространства, а введение ковариантного описания в пространстве-времени Минковского сделаем пару замечаний.

Координатный подход. В векторном анализе мы используем так называемый координатный подход, что обусловлено постановкой задач в физике. Для примера, если 3-мерному вектору координат частицы $\mathbf{r}$ ставится в соответствие вещественное число $f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}$, то математики говорят, что задана скалярная функция, которую также называют инвариантом. В физике эту функцию называют скалярным полем и ставят вопрос о его измерении. Для этого необходимо, во-первых, задать базис в виде линеек и осей для одного наблюдателя, так что поле становится функцией координат точки в этом базисе $\mathbf{r} = (x, y, z)$, а измерения дают $f(x, y, z) = f(\mathbf{r})$, и, во-вторых, задать другой, штрихованный базис другого наблюдателя, который получает данные измерения в виде $f'(x', y', z')$. Понятие скалярной функции отвечает равенству этих измерений: $f(x, y, z) = f'(x', y', z')$. Эту связь мы будем записывать в координатной форме $f(\mathbf{r}) = f'(\mathbf{r}')$, хотя в бескоординатном подходе следовало бы писать тавтологию: скалярная функция объекта по имени «вектор» не зависит от выбора базиса вектора $f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$, т.е. значение функции не зависит от наблюдателя 1

Координатный подход обладает очевидной наглядностью своих построений, а в

аналитических выкладках позволяет писать одни и те же формулы независимо от активной или пассивной формы преобразований: изменение вектора или же изменение базиса, - обе формы приводят к преобразованию компонент координат, которые универсально входят в исследуемые соотношения.

В бескоординатном подходе тензорные величины и, в частности, векторы инвариантны по отношению к преобразованиям замены базиса, поэтому этот подход называют также инвариантным, а введение базиса в нем считается чисто технической, вычислительной задачей, так что все конструкции определяются инвариантно, вне зависимости от выбора базиса. В координатном подходе тензорные величины отождествляются со своими компонентами в заданном базисе пространства, на котором эти тензоры определены, так что говорят, что тензор преобразуется и при смене базиса, причем закон преобразования компонент тензора строго определен. Этот закон ничем не отличается от соотношений между компонентами тензора при активном преобразовании, когда имеет место изоморфизм векторных пространств, на которых действуют тензоры. Именно этой схемы мы и будем придерживаться в нашем изложении, так как активное преобразование пространственновременных векторов наглядно, а закон преобразования компонент вектора позволяет переходить к аналитическим выражениям, которые верны и при пассивном преобразовании базиса пространства-времени.

Система обозначений 3- и 4-мерных величин. При изложении релятивистской квантовой механики в качестве логически ясного мостика в рассуждениях мы используем как величины 3-мерного евклидова пространства, так и величины 4-мерного пространства-времени Минковского,

¹ Иными словами, физической реальности соответствуют показания приборов. Эти показания определяют и положение детектора (значения по осям координатной сетки), и реакцию детектора на величину поля (например, частоту колебаний стрелки компаса при отклонении от направления магнитного поля). Именно такие показания приборов и задают, например, вектор координат, т.е. определяют понятие точки в пространстве. Одна и та же точка физической системы для другого прибора будет отвечать, вообще говоря, другим показаниям на осях координатной сетки этого прибора, т.е. другим компонентам вектора координат, но показания двух различных приборов связаны законом преобразования компонент вектора при переходе от одного базиса к другому. Похожие рассуждения справедливы и для показаний детекторов, которые измеряют величину поля (функции от точки в пространстве). 28328

причем величины как векторные, так и тензорные. А в соответствии с координатным подходом, который мы описали чуть выше, это предполагает использование ковариантных и контрвариантных компонент тензоров. Эти компоненты связаны друг с другом посредством метрики или обратной метрики: метрика опускает контрвариантный индекс и обращает его в ковариантный, а обратная метрика поднимает ковариантный индекс и обращает его в контрвариантный. Поэтому становится необходимым указывать, в каком векторном пространстве определена тензорная величина, так как для евклидовых величин необходимо использовать евклидову метрику для связи ковариантных и контрвариантных компонент, а для пространственновременных величин - метрику Минковского. Дело в том, что эти метрики имеют разные сигнатуры. Сигнатурой называют значения диагональных элементов метрики в декартовом базисе, т.е. в базисе, где ненулевыми являются только диагональные элементы метрики. Наше изложение строится именно в декартовых координатах, так что сигнатура евклидовой метрики равна $(+1, +1, +1)$

$$g_{\alpha\beta}^{\mathbb{E}} = \mathbb{1}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \{\overline{1,3}\} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{g}^{\mathbb{E}} = \text{diag}(+1, +1, +1),$$

где мы использовали маркер $\mathbb{E}$ для указания на то, что величина относится к тензорам

в евклидовом пространстве, и обозначили 3-компонентные индексы в этом пространстве буквами из начальной части греческого алфавита, а шляпку поставили над символом матрицы.

Сигнатура пространственно-временной метрики Минковского в данной книге принята равной $(+1, -1, -1, -1)$,

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - \delta_{\mu}^1 \delta_{\nu}^1 - \delta_{\mu}^2 \delta_{\nu}^2 - \delta_{\mu}^3 \delta_{\nu}^3 \quad \mu, \nu \in \{\overline{0, 3}\} \Leftrightarrow \\ \hat{g} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1),$$

а 4-компонентные индексы обозначены буквами из второй части греческого алфавита. Ясно, что совместное использование привычных обозначений, например, для векторов-столбцов и ковекторов-строк в рамках формализма с метриками разных сигнатур является противоречивым ¹. Чтобы избежать путаницы в использовании индексов для евклидовых величин и величин в пространстве-времени Минковского, мы будем придерживаться следующих правил в обозначениях:

- 3-мерные векторы евклидова пространства обозначаются жирным прифтом, например, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \dots$, а их скалярное произведение с евклидовой метрикой обозначаться точкой, например, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,

¹ И дело здесь, как могло бы показаться, не в том, что, в принципе, можно было бы изменить сигнатуру метрики Минковского с $(+1, -1, -1, -1)$ на $(-1, +1, +1, +1)$, как это часто делают в англоязычной научной литературе. Тогда использование декартовых компонент (x, y, z) станет, конечно, одинаковым, но противоречие все равно возникнет, если следить за балансом немых индексов в 4-мерном пространстве: придется специально выделять временные компоненты тензорных величин, так как эти компоненты станут менять знак в зависимости от ковариантности или контрвариантности тензора или вектора. 29329

- тензорные величины в 3-мерном евклидовом пространстве маркируются символом $\mathbb{E}$ (исключительно в виде нижнего маркера!) с 3-значными индексами, которые нумеруются греческими буквами из первой части алфавита исключительно в виде верхних индексов; например, полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты $\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma}$ с выбором знака $\epsilon_{\mathbb{E}}^{123} = 1$ на правой тройке декартова базиса,
- для индексов в 3-мерном евклидовом пространстве в декартовом базисе нет отличия между ковариантными и контрвариантными компонентами, так что для евклидовых величин нет никакой надобности следить в формулах за балансом верхних и нижних индексов поскольку в заданном декартовом базисе имеет место эквивалентность, например, таких выражений

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = g_{\alpha\beta}^{\mathbb{E}} a_{\mathbb{E}}^{\alpha} b_{\mathbb{E}}^{\beta} = a_{\mathbb{E}}^{\alpha} b_{\mathbb{E}}^{\alpha},$$

- для величин в пространстве-времени Минковского строго соблюдается баланс ковариантных и контрвариантных индексов, которые мы обозначаем буквами из второй части греческого алфавита, если они 4-компонентные, а также при надобности выделяем временные компоненты с индексом, равным нулю, а пространственные компоненты греческими буквами из начальной части алфавита, как и для евклидовых тензорных величин, которые пробегают значения $\{1, 2, 3\}$, но учитывают правило баланса индексов. К примеру, скалярное произведение 4-векторов

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu = a_0 b^0 + a_\alpha b^\alpha = a_0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_0 b^0 - a_{\mathbb{E}}^\alpha b_{\mathbb{E}}^\alpha,$$

- используется стандартное обозначение для дифференцирования по компонентам координат, справедливое как в 3-мерном евклидовом пространстве, так и в 4-мерном пространстве-времени Минковского,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu, \quad \frac{\partial}{\partial r_{\mathbb{E}}^\alpha} \equiv \partial_\alpha.$$

Подчеркнем, что евклидов вектор с верхним индексом автоматически совпадает с пространственными компонентами 4-вектора в пространстве-времени Минковского. Эти правила обозначений позволят нам, во-первых, ясно показать, какими величинами мы оперируем на произвольно открытой странице книги, даже не вникая в контекст изложения на этой странице. Во-вторых, мы избежим излишнего использования метрического тензора в формулах, где важна алгебраическая структура, а не баланс индексов, как, например, при изучении коммутаторов генераторов изометрий.

¹ Ограничивая рассмотрение декартовым базисом, мы, конечно, не исключаем обратимые преобразования между декартовыми базисами, а значит, изометрии по-прежнему составляют основу наших построений. 30330

Математический формализм группы Пуанкаре

Упрощенная версия

Гладкое расслоение

Локальное поле v_A с точки зрения группы поворотов - это элемент неприводимого представления алгебры группы поворотов, причем пространство представления - это векторное пространство, а элемент представления v_A может зависеть от точки пространства $\mathbf{r}$. Как элемент неприводимого представления поле v_A принадлежит $2s + 1$ -мерному векторному пространству, $A \in \overline{\{1, 2s + 1\}}$, а как функция от координат $\mathbf{r}$ поле $v_A(\mathbf{r})$ - это $2s + 1$ -мерная функция, свойства которой относительно поворотов строго заданы тем, какому представлению принадлежит поле. Такая конструкция в математике называется локально тривиальным прямым произведением v_A над координатной базой $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} \times v_A = v_a(\mathbf{r}),$$

а также гладким или главным расслоением [в англоязычной литературе - fiber bundle].

Например, рассмотренное нами скалярное поле $\Phi(\mathbf{r})$ - это локальное поле спина 0. Из этого примера ясно, что как функции от координат поля преобразуются одинаково: генераторы орбитального момента $\mathbf{l}$ действуют в пространстве функция и преобразуют аргументы этих функции по одной и той же схеме. Значит, локальные поля отличаются только тем, какому представлению они принадлежат, а базис неприводимых представлений алгебры генераторов непрерывных преобразований задает базис всех локальных

Базис полей (?)

Примеры деталей и частные случаи схемы Вигнера

Как это, когда взаимодействуют разные представления? (????)

(первый вопрос, который возникает по этому поводу)

Алгебра, в которой несколько повышающих и понижающих операторов (??)

(?? как действуют несколько повышающих операторов, если они есть? пока хз.)

Если начать нумеровать вектора в пространстве представления не с младшего, а со старшего вектора, то можно ли утверждать, что нам интересны квантовые числа младшего вектора?

(??? что вообще будет, если поменять старший и младший вектора местами???? пока в группах и алгебрах не настолько я разбираюсь.)

Что такое масса в контексте группы Паункаре и вообще?

(??? там мы такие берем и вводим просто как параметр. Но ведь если так делать, то никакого ОТО не получится. так что нужно лучше понять, что понимаем мы под массой. потом подумаю про это.)

5.4.5 On Reference Frames Moving at the Speed of Light (????)

О малой группе Вигнера для безмассовых частиц

5.4.6 Time Travel

(write what science tells about it?)

5.4.7 Time Travel: Facts

(write what is known about it from history, from some experiments)

5.4.8 The Relation of SR with Some Physical Phenomena (????)

Если Вселенная расширяется с ускорением, то где наши вообще инерциальные системы отчета?

Если частицы гравитируют, то вокруг них пространство ведь не плоское, почему мы тогда вообще используем группу Пуанкаре? (!?!?!?)

(не знаю, пока что верю, что просто можно пренебречь этими эффектами, потому что гравитационная постоянная малая, стану умнее - скажу что-то лучше)

5.4.9 Idea of Supersymmetry

(a lot of people were seriously studying it. really a lot! so, it is a very important concept. but what is meant by it???? why it can at all be? this will be answered in this section)

5.5 Lorentz Transformations: Extra Features

5.5.1 Intervals and 4-Vectors

(пока такая структура, может, потом поменяю.)

4-скорость

Из обычного трехмерного вектора скорости можно образовать и четырехмерный вектор. Такой четырехмерной скоростью (4-скоростью) частицы является вектор

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}$$

Для нахождения его компонент замечаем, что согласно (3.1)

$$ds = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

где v - обычная трехмерная скорость частицы. Поэтому

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx}{cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

и т. п. Таким образом:

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Отметим, что 4-скорость есть величина безразмерная. Компоненты 4-скорости не независимы. Замечая, что $dx_i dx^i = ds^2$, имеем:

$$u^i u_i = 1.$$

4-ускорение

Геометрически u^i есть единичный 4-вектор касательной к мировой линии частицы. Аналогично определению 4-скорости вторую производную

$$w^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds}$$

можно назвать 4-ускорением. Дифференцируя соотношение (7.3), найдем:

$$u_i w^i = 0$$

т. е. 4-векторы скорости и ускорения взаимно ортогональны.

4-сила**обзор интервалов**

времениподобные интервалы $ds^2 < 0$

пространственноподобные интервалы $ds^2 > 0$

светоподобные интервалы $ds^2 = 0$

Другое про интервалы

Явный пример, как в пространственно подобных интервалах причина и следствие меняются местами (!?!?!?!?)

(явно пока это показать еще не могу)

5.5.2 Velocity Addition Law

(в 1ю часть добавлю потом тоже)

Суть закона сложения скоростей (???)

Закона сложения скоростей говорит нам о связи скорости в подвижной системе отчета со скоростью в неподвижной.

Если в исходной системе отсчета частица или волна двигалась со скоростью $v = \mathbf{dr}/\mathbf{dt}$, то в штрихованной системе согласно (2.32), записанным в дифференциалах,

$$v' = c \frac{\mathbf{dr}'}{\mathbf{dx}'_0} = v \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \frac{v \cdot \mathbf{u}}{c^2}} + \frac{\mathbf{u}}{\gamma} \frac{1}{1 - \frac{v \cdot \mathbf{u}}{c^2}} \left\{ \frac{v \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}} (\gamma - 1) - \gamma \mathbf{u} \right\}$$

Выделяя для скорости продольные и поперечные компоненты или возвращаясь к дифференциальной форме (2.31), находим

$$\begin{aligned} v'_\perp &= v_\perp \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \frac{v \cdot \mathbf{u}}{c^2}}, & v_\perp &= v'_\perp \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 + \frac{v' \cdot \mathbf{u}}{c^2}} \\ v'_\parallel &= \frac{v_\parallel - \mathbf{u}}{1 - \frac{v \cdot \mathbf{u}}{c^2}}, & v_\parallel &= \frac{v'_\parallel + \mathbf{u}}{1 + \frac{v' \cdot \mathbf{u}}{c^2}} \end{aligned}$$

Заметим, во-первых, что в нерелятивистском пределе $v \ll c, \mathbf{u} \ll c$ и, следовательно, $\gamma \rightarrow 1$ преобразования скорости сводятся к преобразованиям Галилея, что и задает область применимости нерелятивистской механики. В этом же пределе преобразования лоренцева буста (2.31) становятся преобразованиями Галилея.

Обзор сложения скоростей

5.5.3 Relativistic Kinematics

Очевидные свойства релятивистских систем отсчета

Если вы не занимаетесь переходом в другие системы отсчета, то можно почти забыть про преобразования Лоренца (???)

Многие задачи просто на обычную механику и для них даже не нужно знать переходы в другие системы отсчета. И не нужно тратить время и вспоминать разные преобразования, которые могут только запутать и заставить усомниться в очевидных механических законах. С каким бы скоростями объекты бы ни двигались, их траектории и законы движения ровно такие же, какие и в ньютоновской механике. Ровно такие же законы! Все ровно такое же, пока речь не зашла про переходы в другие системы отсчета.

Однако переходы в другие системы отсчета некоторые задачи сильно упрощают, а также иногда позволяют выводить некоторые законы физики. Например, закон дисперсии $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$, а также все свойства полей, выводятся именно из-за релятивистских законов. Поэтому знать их стоит.

Если точка удаляется со скоростью V от системы отсчета K , то в СО точки система K удаляется от нее со скоростью $-V$

Пока обосновываю это только здравым смыслом.

(???) Может, это вообще предполагается подразумеваемой аксиомой?

Так всегда в нерелятивистской механике, так всегда и в релятивистской. Это же отражено в том, что если перейти из движущейся СО в неподвижную, то нужно использовать преобразования Лоренца с $\beta = -V/c$, тогда как переход из неподвижной в движущуюся был с $\beta = V/c$.

Также этот факт лежит в основе доказательства преобразований Лоренца. (?? а в выводе через метрику он где присутствует?)

Или доказательство этого формулами: пусть координаты начала координат неподвижной системы $(ct, 0)$, и в подвижной системе (ct', x') , которая движется со скоростью V , они должны быть равны

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ 0 \end{pmatrix}$$

отсюда

$$x' = -v\gamma t = -vt'.$$

(мб доработаю потом это замечание, чтобы еще четче понимал формулами, пока все-таки на здравом смысле держится это понимание.)

Результат столкновений двух частиц определяются лишь их относительной скоростью

То есть он не зависит от равномерного движения этих частиц как целого.

Тоже обосновываю здравым смыслом.

k^μ это 4-вектор

Покажем, что $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ есть 4-вектор.

В самом деле, вектор набла преобразуется как ковектор, а значит, величина $\nabla_\mu f$ преобразуется как произведение ковектора на тензорную величину f .

Вычислим

$$\nabla_\mu e^{-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -\left(i\frac{\omega}{c}, -i\mathbf{k}\right) e^{-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -ik_\mu e^{-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

т.е.

$$\nabla_\mu f = -ik_\mu f$$

где слева стоит произведение ковектора на тензорную величину f , а справа - произведение $-if$ с теми же тензорными свойствами, что и f , на 4-компонентную величину $k_\mu = (\omega/c, -\mathbf{k})$, которая, следовательно, должна быть ковектором.

Опускание и поднимание индексов тензорных величин метрикой Минковского меняет знак пространственной компоненты: $k^\mu = g^{\mu\nu} k_\nu = (\omega/c, \mathbf{k})$.

Значит, фаза электромагнитной волны

$$k_\mu x^\mu = k_0 x_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$

есть скаляр, т.е. релятивистский инвариант.

Скорость света в СТО действительно инвариантна при переходе в другие СО

(в часть про СТО перекину)

Если в исходной системе отсчета частица или сигнал двигались со скоростью света $v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 = c^2$, то прямое вычисление $(v'_{\perp})^2 + (v'_{\parallel})^2$ также дает c^2 :

$$\begin{aligned}(v'_{\perp})^2 + (v'_{\parallel})^2 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{v_{\parallel} u}{c^2}\right)^2} \left\{ v_{\perp}^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + v_{\parallel}^2 + u^2 - 2v_{\parallel} u \right\} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{v_{\parallel} u}{c^2}\right)^2} \left\{ (c^2 - v_{\parallel}^2) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + v_{\parallel}^2 + u^2 - 2v_{\parallel} u \right\} = c^2\end{aligned}$$

Значит, движение со световой скоростью действительно инвариантно относительно перехода от одной инерциальной системы к другой. Кроме того, сверхсветовое движение одной инерциальной системы относительно другой запрещено, ведь фактор гамма должен быть вещественным.

Невозможность опередить скорость света, если постоянно ускоряться

Рассмотрим СО - CO_2 , которая движется с близкой к скорости света скоростью относительно первой СО - CO_1 . В ней ведь физика в точности такая же, как если бы она покоилась. Рассмотрим ускоряющееся тело в этой системе отсчета. Докажем, что в CO_1 частица не наберет скорость большую, чем скорость света.

(потом поупражняюсь, пока не доказывал.)

Запрещенность движения со сверхсветовой скоростью в рамках СТО

Покаем, что сверхсветовое движение одной инерциальной системы относительно другой запрещено (фактор гамма должен быть вещественным).

(тут заготовку сделаю, в точности то место, где проблема)

Бусты не образуют группу

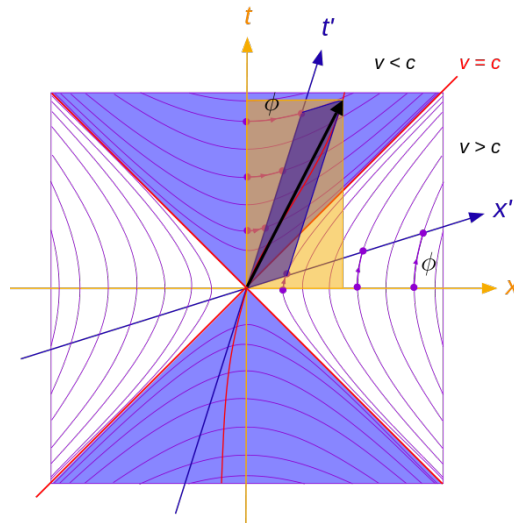
Композиция двух бустов вдоль разных осей не сводится к бусту вдоль результирующей оси, а выражается в виде композиции суммарного буста и вращения, следует из некоммутативности генераторов группы Лоренца.

О связи с прецессией Томаса (???)

(?? она есть?)

Иллюстрация преобразований Лоренца (!?)

(потом разберусь, что это за линии такие тут идут.)



Примеры преобразований Лоренца

(интересные и неочевидные приведу тут, очевидные очень легко придумать.)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v}{c} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix}$$

Также имеются дискретные симметрии.

5.5.4 Other Properties of Lorentz Transformations

(все второстепенное в этом разделе будет)

Некоторые особые применения преобразований Лоренца

Соберем типичные примеры получения каких-либо результатов с помощью преобразований Лоренца.

(с опытом буду дописывать, пока как-то очень мало видел их)

Проверка уравнений Максвелла на релятивистскую инвариантность

Приведем в качестве примера преобразований Лоренца проверку уравнений Максвелла на релятивистскую инвариантность.

(тут отработаю эту проверку, пока осознанно еще не проделывал)

Шаблон для проверки лоренц-инвариантности (!???)

(?! пора бы уже написать его! но еще нужны тренировки.)

Преобразования Лоренца в искривленных координатах (!!!!!?)

(хз, не знаю пока)

Некоторые 3-векторы в форме 4-векторов (??)

О векторе нормали (??)

(вот для одной задачи это понадобилось.)

5.5.5 Geometry of SR

Обсудим подробно геометрию СТО

(мб расширю до подраздела)

Метод диаграмм пространства-времени

Обсудим подробно метод диаграмм пространства-времени.

Углы на диаграмме пространства-времени через γ, β

Для исследования хода времени во время разворота с точки зрения каждого близнеца рассмотрим сначала обратное преобразование Лоренца $K' \leftrightarrow K$

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta ct') \\ ct = \gamma(ct' + \beta x') \end{cases},$$

которое позволяет найти координатные оси K' на плоскости $\{t, x\}$. Действительно, для единичного вектора вдоль оси времени t'

$$\{x', ct'\} = \{0, 1\}, \Rightarrow \{x, ct\} = \{\gamma\beta, \gamma\}$$

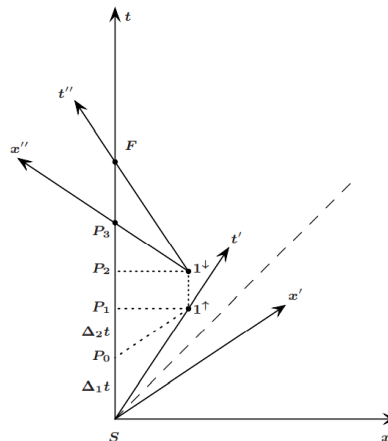
Но за время $ct = \gamma$ система отсчета K' проходит расстояния $x = \gamma\beta$, так что полученный вектор по направлению просто совпадает с вектором скорости. Для единичного вектора вдоль x'

$$\{x', ct'\} = \{1, 0\}, \Rightarrow \{x, ct\} = \{\gamma, \gamma\beta\}$$

что дает вектор, зеркально симметричный относительно светового конуса единичному вектору t' . Одновременные события в системе K' задаются условием

$$t' = \text{const.} \Leftrightarrow ct - \beta x = \text{const.}$$

т.е., линией, параллельной оси x' . Например, события, в системе K' одновременные с точкой начала разворота корабля путешественника $1^\uparrow$, лежат на линии $P_0 1^\uparrow$.



Плавный переход из 3D диаграммы в 3+1D диаграмму)

(напишу потом, что так вот вжух и при добавлении скорости света поворачивается вверх горизонтальная ось и появляется запрещенная область для векторов. Ничего сложного. как это помогает обобщить квантмех до КТП (????))

Как применять геометрию СТО для задач? (!?!?!?)

(важный вопрос, потому что часто какие-то такие соображения и используются, нужно знать их!!! потом доработаю.)

Геометрия Лобачевского

(?? кст, как с Минковским связана она?)

Конструкция геометрии Лобачевского

(тут коротко напишу её, подробнее в диффгеме)

Другое про геометрию Лобачевского

Минимальная длина в геометрии Лобачевского между двумя событиями (!?!?!?)

(хз, надоело про это думать, прямая может быть???)

Это по вертикальной прямой. По ней длина больше всегда, чем по не прямой траектории.

(тут картинка, что соединяем вертикальную линию с искривленной с теми же концами.)

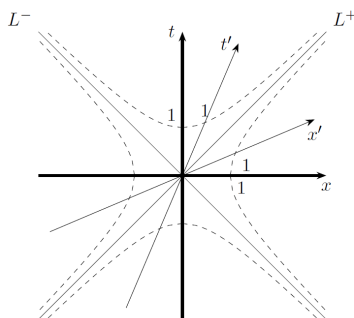
Интуитивное представление геометрии Лобачевского

(давно этот вопрос ест, не знаю всё еще, как интуитивно представлять его)

Геометрическая иллюстрация преобразований Лоренца в пространстве-времени

(то, что Суслов спросил, потом пропишу)

У нас оси поворачиваются внутрь.



(?? почему???)

Нерелятивистский случай геометрии Лобачевского

(у нас просто по идее прямая, соответствующая движению со скоростью света становится вертикальной прямой и работаем мы только в нижней плоскости с времени подобным интервалом. Интервал скорости света станет просто горизонтальной осью, что соответствует тому, что с этой скоростью куда угодно можно мгновенно улететь.)

5.5.6 Accelerating Reference Frames and Rindler Coordinates (!!!!???)

Обсудим подробно равномерно ускоряющуюся систему отсчета.

Описание ускорения в СТО по Тонгу (???)

Типичное описание

Определим $A \equiv \frac{dU}{d\tau}$. Чаще всего под постоянным ускорением понимается постоянное ускорение именно в системе, локально инерциальной и совпадающей с системой путешественника. Обсудим именно такой случай. В принципе можно было бы рассмотреть и ускорение относительно покоящейся системы, но такое рассмотрение нефизично (?? или физично?? в грав поле если постоянное ускорение, то мб оно именно таким и является??)

Если взять производную от $U \cdot U = c^2$, то получим, что всегда 4-вектора ускорения и скорости ортогональны

$$A \cdot U = 0.$$

Пусть система S движется вдоль направления X со скоростью v . In this frame, the Newtonian notion of 3-acceleration is $a = \frac{dv}{dt}$. Since $dt/d\tau = \gamma$, we see that

$$A = \gamma \begin{pmatrix} \dot{\gamma}c \\ \dot{\gamma}u + \gamma a \end{pmatrix}$$

with $\dot{\gamma} \equiv d\gamma/dt$

Let's now suppose that we sit in an inertial frame S' in which, at a fixed moment of time t , the particle is instantaneously at rest. Obviously, if the particle is accelerating, this will not coincide with the particle's rest frame an instant later, but momentarily this will do fine. Since $\mathbf{u}' = 0$ in this frame, the 4-acceleration is

$$A' = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}' \end{pmatrix}$$

with $\mathbf{a}' = d\mathbf{u}'/dt'$. (Note that you need to do a small calculation here to check that $\dot{\gamma}(u=0) = 0$). But, since we have constructed our acceleration as a 4-vector, A and A' must be related by a Lorentz transformation. To make matters easy for ourselves, let's take both $\mathbf{u}$ and $\mathbf{a}$ to lie in the x -direction so that we can consistently ignore the y and z -directions. Then the Lorentz transformation tells us

$$A = \gamma \begin{pmatrix} \dot{\gamma}c \\ \dot{\gamma}u + \gamma a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & u\gamma/c \\ u\gamma/c & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\gamma a'/c \\ \gamma a' \end{pmatrix}$$

From the top component, we can determine the relationship between the accelerations a and a' seen in the two frames,

$$a \equiv \dot{u} = (1 - u^2/c^2)^{3/2} a'$$

Suppose now that the particle undergoes constant acceleration. As with everything in special relativity, we need to be more careful about what we mean by this. The natural interpretation is that the acceleration in the frame of the particle is constant. Mathematically, this means that a' is constant. In contrast, viewed from frame S , the acceleration is not constant. Indeed, for constant a' , we can integrate our equation above to get u , the velocity seen in frame S as a function of time. If we assume that $u = 0$ when $t = 0$, we have

$$u = \frac{a'ct}{\sqrt{c^2 + a'^2t^2}} \Rightarrow \gamma(t) = \sqrt{1 + \frac{a'^2t^2}{c^2}}$$

Since $u = \dot{x}$, integrating the first of these equations once more gives us the position in the frame S as a function of time,

$$x = \frac{c}{a'} \left(\sqrt{c^2 + a'^2t^2} - c \right)$$

where we've picked an integration constant so that $x = 0$ at time $t = 0$. We see that the particle moves on the hyperbola shown in the figure. Viewed from S , the particle approaches, but never reaches, the speed of light.

Время разгона в системе путешественника

Время путешественника τ связано с временем неподвижного наблюдателя T как $\tau = \int_0^T \frac{dt}{\gamma}$. Подставим $dt = \gamma^3 dv / a'$, получим

$$\tau = \frac{1}{a'} \int_0^T \gamma^2 dv = \frac{1}{a'} \int_0^T \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c}{2|v|} \ln \left| \frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right|,$$

или через время неподвижного наблюдателя

$$\tau = \int_0^T \frac{cdt}{\sqrt{c^2 + a'^2t^2}} = \frac{c}{a'} \text{ArcSh} \left(\frac{a'T}{c} \right)$$

Пройденное расстояние в СО путешественника при ускорении (???)

Finally, we can look at how far the accelerated observer thinks he has travelled. Of course, this observer is not in an inertial frame, but at any time t we can consider the inertial frame that is momentarily at rest with respect to the accelerated particle. This allows us to simply use the Lorentz contraction formula. Using our results (7.32) and (7.33), we have

$$x' = \frac{x}{\gamma} = \frac{c^2}{a'} \left(1 - \frac{c}{\sqrt{c^2 + a'^2t^2}} \right)$$

(??? чего там не интеграл?? проверю, мб все норм и интеграл тоже даст нужный результат.)

Детали об ускорении

Очевидность пространственно-подобности 4-ускорения

Возьмите нерелятивистскую скорость $u = (1, \vec{v})$, после дифференцирования видим, что нулевая компонента равна нулю, так что вот 4-ускорение и пространственно подобно.

(?? проверю потом, верно ли думал?)

(укажу тут вычисления в строчку, в чем их суть, а реализация - в задаче.)

Как так, что мы ускоряемся, но конечное расстояние пройдем? (!?!?!?!?!?)

(бред какой-то получили, я хз, спрошу у кого-то потом умного.)

Координаты Риндлера (????)

(пока это сложная для меня тема, которую не понимаю, ну и других доработок тоже много.)

Теория

(wiki)

The worldline of a body in hyperbolic motion having constant proper acceleration α in the X -direction as a function of proper time τ and rapidity $\alpha\tau$ can be given by ^[16]

$$T = x \operatorname{sh}(\alpha\tau), \quad X = x \operatorname{ch}(\alpha\tau)$$

where $x = 1/\alpha$ is constant and $\alpha\tau$ is variable, with the worldline resembling the hyperbola $X^2 - T^2 = x^2$. Sommerfeld ^{[H]3}[[17] showed that the equations can be reinterpreted by defining x as variable and $\alpha\tau$ as constant, so that it represents the simultaneous "rest shape" of a body in hyperbolic motion measured by a comoving observer. By using the proper time of the observer as the time of the entire hyperbolically accelerated frame by setting $\tau = t$, the transformation formulas between the inertial coordinates and the hyperbolic coordinates are consequently: ⁶⁶[9]

$$T = x \operatorname{sh}(\alpha t), \quad X = x \operatorname{ch}(\alpha t), \quad Y = y, \quad Z = z$$

with the inverse

$$t = \frac{1}{\alpha} \operatorname{artanh}\left(\frac{T}{X}\right), \quad x = \sqrt{X^2 - T^2}, \quad y = Y, \quad z = Z$$

Differentiated and inserted into the Minkowski metric $ds^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2$, the metric in the hyperbolically accelerated frame follows

$$ds^2 = -(\alpha x)^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

These transformations define the Rindler observer as an observer that is "at rest" in Rindler coordinates, i.e., maintaining constant x, y, z and only varying t as time passes. The coordinates are valid in the region $0 < X < \infty, -X < T < X$, which is often called the Rindler wedge, if α represents the proper acceleration (along the hyperbola $x = 1/\alpha$) of the Rindler observer whose proper time is defined to be equal to Rindler coordinate time. To maintain this world line, the observer must accelerate with a constant proper acceleration, with

Rindler observers closer to $x = 0$ (the Rindler horizon) having greater proper acceleration. All the Rindler observers are instantaneously at rest at time $T = 0$ in the inertial frame, and at this time a Rindler observer with proper acceleration α_i will be at position $X = 1/\alpha_i$ (really $X = c^2/\alpha_i$, but we assume units where $c = 1$), which is also that observer's constant distance from the Rindler horizon in Rindler coordinates. If all Rindler observers set their clocks to zero at $T = 0$, then when defining a Rindler coordinate system we have a choice of which Rindler observer's proper time will be equal to the coordinate time t in Rindler coordinates, and this observer's proper acceleration defines the value of α above (for other Rindler observers at different distances from the Rindler horizon, the coordinate time will equal some constant multiple of their own proper time). ^[18] It is a common convention to define the Rindler coordinate system so that the Rindler observer whose proper time matches

coordinate time is the one who has proper acceleration $\alpha = 1$, so that α can be eliminated from the equations. The above equation has been simplified for $c = 1$. The unsimplified equation is more convenient for finding the Rindler Horizon distance, given an acceleration α .

$$t = \frac{c}{\alpha} \operatorname{artanh} \left(\frac{cT}{X} \right) \approx_x \frac{c^2 T}{\alpha X}$$

$$X \approx \frac{c^2 T}{\alpha t} \quad T \approx t \quad \frac{c^2}{\alpha}$$

The remainder of the article will follow the convention of setting both $\alpha = 1$ and $c = 1$, so units for X and x will be 1 unit = $c^2/\alpha = 1$. Be mindful that setting $\alpha = 1$ light-second/second² is very different from setting $\alpha = 1$ light-year/year². Even if we pick units where $c = 1$, the magnitude of the proper acceleration α will depend on our choice of units: for example, if we use units of light-years for distance, (X or x) and years for time, (T or t), this would mean $\alpha = 1$ light year/year², equal to about 9.5 meters/second², while if we use units of light-seconds for distance, (X or x), and seconds for time, (T or t), this would mean $\alpha = 1$ light-second/second², or 299792458 meters/second².

Variants of transformation formulas

(там их еще много)

Иллюстрация

Какое может быть максимальное ускорение? (?????)

(вопрос хороший, но не актуально пока что.)

(мб многое отсюда удалю, коротко тут это напишу, а подробнее в отдельной записи.)

Возможный ответ из интернета (????)

<https://physics.stackexchange.com/questions/3334/is-there-a-maximum-possible-acceleration>

But according to quantum mechanics, you can't imagine that objects are moving along smooth, doubly differentiable trajectories - which you need to define acceleration. Instead, they're moving along all possible trajectories - I am using Feynman's path integral approach to quantum mechanics - and most of them are not differentiable even once. So the typical acceleration at a typical place of a trajectory in quantum mechanics is infinite. You could only study a "finite bound" on acceleration in classical physics and in classical (non-quantum) physics, there's no upper bound. However, you may talk about the upper bounds on some "correctly looking" formulae for acceleration. For example, you may be able to "derive" that the maximum gravitational acceleration in quantum gravity is approximately equal to the Planck acceleration,

$$a_{\text{Planck}} = L_{\text{Planck}} / T_{\text{Planck}}^2 = \frac{\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}}{\frac{\hbar G}{c^5}} = \sqrt{\frac{c^7}{\hbar G}} = 5.6 \times 10^{51} \text{ m/s}^2$$

where the numerator and denominator depend on the Planck length and Planck time, respectively. Yes, it's huge. This upper bound holds because it's the acceleration on the surface (event horizon) of the smallest and most concentrated object. The most concentrated objects

are black holes and the smallest black hole worth the name has a radius comparable to the Planck length.

However, this bound only applies outside the black holes. Near the singularities inside the black hole, the accelerations may be formally larger. No one knows whether it makes sense to talk about the trans-Planckian accelerations. However, accelerations are not among the "most fundamental quantities" we use to describe physics according to its state-of-the-art theories, anyway.

Суть из Theories with maximal acceleration by Ricardo Gallego Torromea, Piero Nicolini

<https://arxiv.org/pdf/1805.07126.pdf>

The idea of maximal acceleration and the associated modification of the spacetime geometry has been around for long time. Being a modification of the fundamental ideas of the theory of relativity, the theoretical consequences of maximal acceleration are sound. However, the current state of the art shows important deficiencies, probably the reason of why maximal acceleration has been not yet attracted enough attention. The theories of maximal acceleration are such that either they lack of a general covariant formulation or if such formulation exists [7], then it has the limitation to be perturbative and with limited domain of validity, far from the region of maximal acceleration. Also, other formulations [5, 9, 29, 30] are rooted on a pre-existent Lorentzian metric back-ground, with the conceptual consequences that this entails. These problems, however, are likely to be technical problems. There is also some relation between the idea of maximal acceleration in physics and the conjecture of maximal tension or force [45]. This conjecture asserts that in general relativity, there is a limit to the tension or force that a physical system can feel, a limit given by the expression

$$F \leq F_{\max} = \frac{c^4}{4G}$$

where G is Newton's gravitational constant. The factor $1/4$ in this expression can vary, in the sense that it could depend on the details of the dynamical system. For instance, in presence of a cosmological term in some models of black-holes, this factor is instead given by $1/9$ [46].

A general argument supporting this conjecture is based upon considerations on black hole merging in general relativity and a form of cosmic censorship [45, 46]. It is in any case, a classical argument.

The reader should note that the notions of maximal universal force and of maximal acceleration are not equivalent in general relativity. In fact, the mathematical structure of general relativity does not contain a notion of universal maximal acceleration, since in such a framework, there is no a minimal universal length scale. Thus if the mathematical framework is kept Lorentzian or pseudo-Riemannian, the interplay between maximal acceleration and maximal force implies the introduction of new principles, like the aforementioned existence of a minimal length in quantum gravity [45]. Maximal acceleration is, however, compatible also with classical models in the case of generalized geometric frameworks, like maximal acceleration geometry [7].

In a theory where the maximal acceleration could depend upon the system itself, like in Born-Infeld dynamics, it is not necessary to introduce quantum mechanics to make compatible maximal acceleration with maximal universal force. To the maximal force $c^4/4G$ corresponds the maximal acceleration $c^4/4Gm$.

Similar related conjectures, like maximal power and maximal angular momentum [46, 47] could be related with maximal acceleration in analogous ways. All these conjectures are likely to be seen also in a kinematical version, where maximal acceleration is involved.

From the phenomenological point of view, it has been investigated possible phenomenological signatures for maximal acceleration [23-25]. However, these different results only provide lower bounds for the maximal acceleration. Another possibility has been discussed in [8], linked with a new theory of classical electrodynamics. It was predicted the strict decrease of the maximal acceleration with the size (charge and mass) of the charge particle.

Interestingly the existence of a maximal acceleration could have repercussions also on the physics of evaporating black holes [48] and the related Unruh effect that has been at the center of a recent debate in the literature [49].

Суть из Caianiello's Maximal Acceleration. Recent Developments by G. Papini

<https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0407115.pdf>

(статья также хороша тем, что многие приложения раскрывает, так что заодно можно потренировать и КТП и теорию гравитации!!! потом мб потренирую, пока не тот уровень еще.)

A limit on the proper acceleration of particles can be obtained from the uncertainty relations in the following way. Ehrenfest theorem (I.8) is first applied to a particle's acceleration $\vec{a}$ in the particle's instantaneous rest frame. The latter is then transformed to a Lorentz frame of instantaneous velocity $\vec{v}$. In any other Lorentz frame the resulting acceleration is $a' \leq a_p$. The absolute value of the proper acceleration satisfies (I.16). No counterexamples are known to the validity of (I.16). For this reason (I.16) has at times been elevated to the status of a principle. It would be only befitting to call it the Caianiello principle.

In most instances the value of MA is so high that it defies direct observation. Nonetheless the role of MA as a universal regulator must not be discounted. It is an intrinsic, first quantization limit that preserves the continuity of space-time and does not require the introduction of a fundamental length, or of arbitrary cutoffs. The challenge is to find situations where MA affects the physics of a system in ways that can be observed.

Though the existence of a MA is intimately linked to the validity of Ehrenfest theorem, it is not entirely subordinate to it and the limit itself may depend on the dynamical characteristics of the particular system considered. This is the case with superconductors of the first kind which are macroscopic, non-relativistic quantum systems with velocities that satisfy the inequality $\Delta E \Delta v \ll mc^3$. Superfluid particles in static conditions are known to resist acceleration. The MA constraints (II.23) and (II.24) lead to a limit on the value of the electric field at the surface of the superconductor that agrees with the value (II.31) obtained from London's equations and with known experimental results. The MA limit in this case is only ~ 10 times larger than (II.32). If the pairing condition is satisfied, then superfluids in static conditions obey a dynamics for which a MA exists and differs from $\mathcal{A}_m$, as anticipated.

In Section (III) two high-energy particles, typically leptons, produce a third particle at rest. The MA limit applied to the process leads to the constraint (III.34) on the width of the particle produced. The limit is perfectly consistent with available experimental results. When the end product is Z^0 , the acceleration is $a_r = \frac{2mc}{\hbar m_D} \Gamma(AB) \sim 2.8 \times 10^{26} \text{cmss}^{-2}$. Even at these energies the value of the acceleration is only a factor $\sim 6 \times 10^{-6}$ that of the MA for m_r . Equation (III.33) and current estimates of $\Gamma(ZZ \rightarrow H^0)$ can also be used to derive upper and lower limits (III.40) on the mass of the Higgs boson.

The last physical situation considered regards matter in the interior of white dwarfs and neutron stars. For canonical white dwarfs, the possibility that states exist with MA electrons can be ruled out in the NR case, but not so for ER stars. On the other hand, the mere presence of a few MA electrons alters the stability conditions of the white dwarf drastically. Equations (IV.56) and (IV.58) represent, in fact, new stability conditions. The same conclusions also apply to NR neutron stars, with limitations, however, on the choice of the equation of state.

In the collapse of stars with masses larger than the Chandrasekhar and Oppenheimer-Volkoff limits from white dwarfs to neutron stars, to more compact objects, conditions favorable to the formation of states with MA fermions may occur before competing processes take place.

Ускорение ведь сообщается или магнитным полем или реактивным движением, из этого ведь должен быть предел на него?

(мб этих соображений и хватит, пока не проверял.)

О другом

Вот http://kirkmcd.princeton.edu/examples/rel_accel.pdf - хорошая статья с детальным рассмотрением вопроса, ее должно хватить.

Другие вопросы про ускорение в СТО

О случае ускорения в произвольном направлении (?)

(пока не интересовался таким, не нужно это было.)

Suppose that the velocity of a particle in frame S is $\mathbf{u}$. Then, in this frame, the Newtonian notion of 3-acceleration is $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$. Recalling our expression relating time and proper time, $dt/d\tau = \gamma$, we see that the four acceleration actually depends on both $\mathbf{u}$ and $\mathbf{a}$; it is

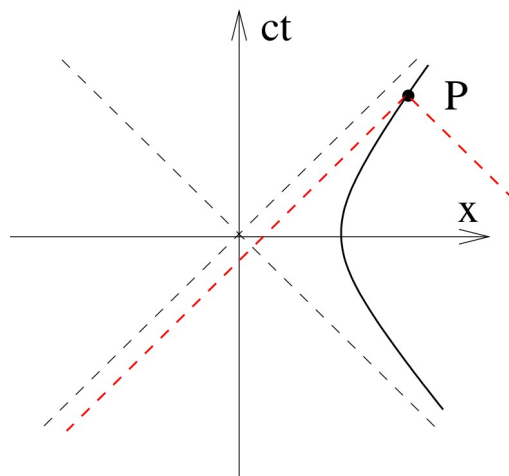
$$A = \gamma \begin{pmatrix} \dot{\gamma}c \\ \dot{\gamma}\mathbf{u} + \gamma\mathbf{a} \end{pmatrix}$$

with $\dot{\gamma} \equiv d\gamma/dt$

О горизонтах при ускорении (?????)

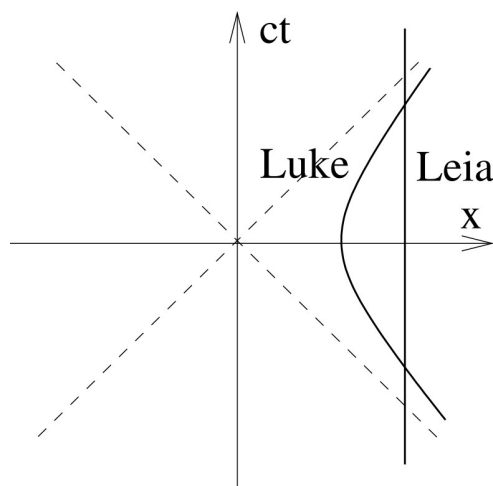
(ничего пока не усвоил про это, в космологии проработаю потом мб.)

Notice that a particle at point P in the diagram can only receive information from within its own past lightcone, denoted by the red dotted lines in the figure. However, if it continues along its accelerated trajectory, it can never receive any information from the whole part of spacetime to the left of the null line $x = ct$. This part of the Universe will forever remain a mystery to an accelerated observer. The null cone, defined by, $x = ct$, which forms the boundary of the mysterious region is called the Rindler event horizon. It has many things Figure 56: in common with the event horizon of a black hole and, indeed, the Rindler horizon is often used as a toy model to understand some of the stranger aspects of black hole physics. Of course, if an accelerated observer really wants to see what's behind the horizon, it's easy: he just stops accelerating. If an observer in the background of a black hole wants to see what's behind the horizon, he must be somewhat braver.



О применении ускорения в парадоксе близнецов (???)

This analysis gives us a more quantitative way to view the twin paradox. Suppose that Luke undertakes his trip to Tatooine on a trajectory of constant acceleration. He leaves Leia at the time $t < 0$ where their worldlines intersect, arrives at Tatooine at $t = 0$ and $x = c^2/a'$, and returns back to Leia as shown. Leia experiences time t ; Luke time $\tau < t$.



5.5.7 Special relativity in terms of differential forms (????)

(такое тоже раз видел, мб когда-то освою, опять же, диффгем сперва сделать нужно.)

5.5.8 Some Extra Topics of Relativistic Mechanics

(мб удалю потом это, если это уже было выше, пока тут каша, не до текста)

частица в гравитационном поле в нерелятивистской механике

(мб в другое место откину)

Основные формулы

(потом соберу, еще в первую часть мб их вставлю)

Действие частицы в СТО

Движение частицы в гравитационном поле должно определяться принципом наименьшего действия в той же форме, что и в СТО, то есть $\delta S = -mc \delta \int ds = 0$, так как гравитационное поле есть только изменение метрики пространства-времени, то есть только изменение выражения ds на dx^i .

(?)

Движение свободной материальной частицы в специальной теории относительности определяется принципом наименьшего действия:

согласно которому частица движется так, что ее мировая линия является экстремальной между двумя заданными мировыми точками, т.е. в данном случае прямой (в обычном трехмерном пространстве этому соответствует прямолинейное равномерное движение).

В гравитационном поле частица движется так, что ее мировая точка перемещается по экстремальной, или, как говорят, по геодезической линии в 4-пространстве x^0, x^1, x^2, x^3 ; поскольку, однако, при наличии гравитационного поля пространство-время негалилеево, то эта линия не «прямая», а реальное пространственное движение частицы - не равномерно и не прямолинейно.

Вывод через обобщение уравнений движения в СТО

(?? а почему не из ПНД, пока не очевидно, потом посмотрю, ниже этот вывод написан)

Вместо того чтобы снова исходить непосредственно из принципа наименьшего действия (см. задачу к этому параграфу), проще найти уравнения движения частицы в гравитационном поле путем соответствующего обобщения дифференциальных уравнений свободного движения частицы в специальной теории относительности, т.е. в галилеевой 4-системе координат.

Эти уравнения гласят $du^i/ds = 0$, или иначе $du^i = 0$, где $u^i = dx^i/ds$ есть 4-скорость.

Очевидно, что в криволинейных координатах это уравнение обобщается в

$$Du^i = 0$$

Из выражения для ковариантного дифференциала вектора имеем:

$$du^i + \Gamma_{kl}^i u^k dx^l = 0$$

Разделив это уравнение на ds , находим:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0$$

Разделив это уравнение на ds , находим:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0$$

Это и есть искомые уравнения движения.

Мы видим, что движение частицы в гравитационном поле определяется величинами Γ_{kl}^i .

Производная $d^2 x^i/ds^2$ есть 4-ускорение частицы.

Поэтому мы можем назвать величину $-m\Gamma_{kl}^i u^k u^l$ «4-силой», действующей на частицу в гравитационном поле.

Тензор g_{ik} играет при этом роль «потенциала» гравитационного поля - его производные определяют «напряженность» Поля Γ_{kl}^i (1). В § 85 было показано, что соответствующим выбором системы координат всегда можно обратить все Γ_{kl}^i в нуль в любой заданной точке пространства-времени.

Мы видим теперь, что выбор такой локальноинерциальной системы отсчета означает исключение гравитационного поля в данном бесконечно малом элементе пространства-времени,

а возможность такого выбора есть выражение принципа эквивалентности в релятивистской теории тяготения.

4-импульс частицы

В гравитационном поле определяется по-прежнему как

$$p^i = m c u^i$$

а его квадрат равен

$$p_i p^i = m^2 c^2$$

Подставив сюда $-\partial S / \partial x^i$ вместо p_i , найдем уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в гравитационном поле:

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0$$

Для распространения светового сигнала уравнение геодезической линии в форме (87.3) неприменимо, так как вдоль мировой линии распространения светового луча интервал $ds = 0$ и все члены в уравнении (87.3) обращаются в бесконечность.

Для придания уравнениям движения в этом случае нужного вида воспользуемся тем, что направление распространения луча света в геометрической оптике определяется волновым вектором, касательным к лучу.

Мы можем поэтому написать четырехмерный волновой вектор в виде $k^i = dx^i / d\lambda$, где λ есть некоторый параметр, меняющийся вдоль луча.

В специальной теории относительности при распространении света в пустоте волновой вектор не меняется вдоль луча, т.

е.

$$dk^i = 0 \quad (\text{см.}$$

§53).

В гравитационном поле это уравнение переходит в $Dk^i = 0$, или

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma_{kl}^i k^k k^l = 0$$

(из этих же уравнений определится и параметр λ).

Квадрат волнового 4-вектора равен нулю

$$k_i k^i = 0$$

Подставляя сюда $\partial \psi / \partial x^i$ вместо k_i (ψ - эйконал), находим уравнение эйконала в гравитационном поле:

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0$$

В предельном случае малых скоростей релятивистские уравнения движения частицы в гравитационном поле должны перейти в соответствующие нерелятивистские уравнения.

При этом надо иметь в виду, что из предположения о малости скоростей вытекает также условие, что само гравитационное поле должно быть слабым; в противном случае находящаяся в нем частица приобрела бы большую скорость.

Выясним, как связан в этом предельном случае метрический тензор g_{ik} с нерелятивистским потенциалом φ гравитационного поля.

Функция Лагранжа и действие

Напишем функцию Лагранжа частицы в нерелятивистской механике в виде:

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi,$$

то есть прибавив постоянную $-mc^2$.

Это надо сделать для того, чтобы нерелятивистская функция Лагранжа в отсутствие поля $L = -mc^2 + mv^2/2$ была в точности той, в которую переходит соответствующая релятивистская функция $L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$ в пределе при $v/c \rightarrow 0$.

Нерелятивистское действие S для частицы в гравитационном поле, следовательно, имеет вид

$$S = \int L dt = -mc \int \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c} \right) dt$$

Сравнивая это с выражением $S = -mc \int ds$, мы видим, что в рассматриваемом предельном случае

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c} \right) dt$$

Возводя в квадрат и опуская члены, обращающиеся при $c \rightarrow \infty$ в нуль, находим:

$$ds^2 = (c^2 + 2\varphi) dt^2 - d\mathbf{r}^2$$

где мы учли, что $\mathbf{v} dt = d\mathbf{r}$.

Таким образом, компонента g_{00} метрического тензора в предельном случае равна

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

Что касается остальных компонент, то из (87.11) следовало бы, что $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $g_{0\alpha} = 0$.

В действительности, однако, поправки к ним, вообще говоря, того же порядка величины, что и поправка в g_{00} .

Невозможность определения этих поправок приведенным выше способом связана с тем, что поправка в $g_{\alpha\beta}$, имеющая тот же порядок величины, что и поправка в g_{00} ,

привела бы в функции Лагранжа к членам более высокого порядка малости (вследствие того, что в выражении для ds^2 компоненты $g_{\alpha\beta}$ не умножаются на c^2 , как это имеет место для g_{00}).

Вывести уравнение движения из принципа наименьшего действия

(?? потом потренрую, пока лень)

вариация действия:

$$\delta ds^2 = 2ds\delta ds = \delta (g_{ik} dx^i dx^k) = dx^i dx^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l + 2g_{ik} dx^i d\delta x^k$$

Поэтому (??)

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l + g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{d\delta x^k}{ds} \right\} ds = \\ &= -mc \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l - \frac{d}{ds} \left(g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \right) \delta x^k \right\} ds \end{aligned}$$

(при интегрировании по частям учтено, что на пределах $\delta x^k = 0$).

Во втором члене под интегралом заменим индекс k индексом l .

Тогда находим, приравнявая нулю коэффициент при произвольной вариации δx^l :

$$\frac{1}{2}u^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{d}{ds} (g_{il} u^i) = \frac{1}{2}u^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{il} \frac{du^i}{ds} - u^i u^k \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = 0$$

Замечая, что третий член можно написать в виде

$$-\frac{1}{2}u^i u^k \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right)$$

и вводя символы Кристоффеля $\Gamma_{l,ik}$ согласно (86.2), получаем:

$$g_{il} \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{l,ik} u^i u^k = 0$$

Уравнение (87.3) получается отсюда поднятием индекса l .

(так с ходу не зашло, потом посмотрю)

Теория поля в некоторой степени связана с релятивистской механикой, так что её часто обсуждают в курсе теории поля.

(тут выжимка из записи по механике)

Типичные формулы

Функция Лагранжа задает импульс

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = mv\gamma$$

и энергию

$$E = p \cdot v - L = mv^2\gamma + mc^2/\gamma = mc^2\gamma$$

Эти величины можно связать с компонентами 4-скорости - производной координат по инвариантному собственному времени частицы $\mathbf{d}\tau = \mathbf{d}t/\gamma$:

$$u^\mu = \frac{\mathbf{d}x^\mu}{\mathbf{d}\tau} = \gamma \frac{\mathbf{d}x^\mu}{\mathbf{d}t} = \gamma(c, v), \quad u^\mu u_\mu = \gamma^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = c^2$$

Тогда

$$mu^\mu = \left(\frac{E}{c}, p \right)$$

т.е. энергия, деленная на скорость света, является временной компонентой вектора 4-импульса, а импульс пространственной компонентой этого контрвектора:

$$p^\mu = mu^\mu$$

К этому же выводу можно прийти в стандартном формализме, если перейти от времени в интеграле действия к интегралу по собственному времени. Тогда, расписывая $ds = \sqrt{\mathbf{d}x_\mu \mathbf{d}x^\mu}$,

$$S = -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{\mathbf{d}x^\mu}{\mathbf{d}\tau} \frac{\mathbf{d}x^\nu}{\mathbf{d}\tau}} \mathbf{d}\tau = -mc \int \sqrt{u^\mu u_\mu} \mathbf{d}\tau = \int \tilde{L}(u^2) \mathbf{d}\tau$$

откуда переход от 4-скорости к 4-импульсу в механике дается

$$p_\mu = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\mu} = mc \frac{2u_\mu}{2\sqrt{u^2}} = mu_\mu$$

где мы воспользовались выведенным выше тождеством $u^2 = c^2$ для 4-вектора скорости. Значит, квадрат 4-импульса равен квадрату массы частицы, умноженному на квадрат скорости:

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

Эту связь энергии с импульсом называют релятивистским законом дисперсии или уравнением массовой поверхности. При этом

$$p = v \frac{E}{c^2} = \beta E/c = \beta p_0$$

и в ультрарелятивистском случае ($\beta \rightarrow 1$): $p = |p| \approx E/c = p_0$.

Уравнения движения (1.1) дают закон сохранения 4-импульса:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\mu} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\mu} \Rightarrow \frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$$

Гамильтониан для параметра эволюции в виде собственного времени является скаляром

$$\tilde{H} = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\mu} u^\mu + \tilde{L} = \frac{p^2}{m} - c\sqrt{p^2}$$

и он, конечно, задает установленную выше связь 4-скорости с 4-импульсом $u^\mu = \partial \tilde{H} / \partial p_\mu = p^\mu / m$ и то же уравнение движения $dp_\mu / d\tau = \partial \tilde{H} / \partial x^\mu = 0$.

Столкновения и распады

часто об этом заходит речь, когда теорию поля изучаем.
(??? да?? если нет, то в механику откину потом)
(соберу нормально потом теорию)

Теория распадов

Релятивистские частицы могут вступать во взаимодействия и испытывать взаимные превращения. До взаимодействия и после него действие частиц представляет собой сумму действий свободных частиц $S = \sum S_k$, так что из однородности пространства и времени согласно теореме Нётер (1.11) в случае трансляций физической системы целиком, $x_a^\mu = x^\mu - a^\mu$ с параметром a^μ , следует, что сохраняется следующий интеграл движения

$$\frac{d}{dt} \sum \left\{ L \frac{\partial t_a}{\partial a^\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} \left(\frac{\partial r_a^\alpha}{\partial a^\mu} - \dot{r}^\alpha \frac{\partial t_a}{\partial a^\mu} \right) \right\} = \frac{d}{dt} \sum \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} \frac{\partial r_a^\alpha}{\partial a^\mu} - H \frac{\partial t_a}{\partial a^\mu} \right\} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum p_\mu = 0$$

поскольку

$$\frac{\partial r_a^\alpha}{\partial a^\mu} = -\delta_\mu^\alpha, \quad \frac{\partial t_a}{\partial a^\mu} = -\frac{1}{c} \delta_\mu^0,$$

а значит, суммарный импульс частиц сохраняется. Если в начальном состоянии две частицы, то говорят о реакции столкновений: $1 + 2 \rightarrow \sum k$, где массы начальных частиц $m_{1,2}$, а конечных $-M_k$. Релятивистский 4-импульс сохраняется

$$p_1 + p_2 = \sum_k P_k$$

а следовательно, сохраняется и инвариант квадрата суммарного 4-импульса

$$s = (p_1 + p_2)^2 = \left(\sum_k P_k \right)^2$$

Ясно, что наименьшая энергия в конечном состоянии достигается, когда все частицы в конечном состоянии покоятся $\mathbf{P}_k = 0$, а значит, инвариант s имеет значение

$$s_{\min} = \left(\sum_k E_k/c, \sum_k \mathbf{P}_k \right)^2 = \left(\sum_k M_k c, \mathbf{0} \right)^2 = \left(\sum_k M_k c \right)^2$$

Это значение определяет порог реакции. Пороговая энергия начальных частиц зависит от заданной условием системы отсчета в начальном состоянии. Например, в лабораторной системе $\mathbf{p}_2 = 0$, так что $s = p_1^2 + 2p_1 \cdot p_2 + p_2^2 = m_1^2 c^2 + 2(E_1 E_2/c^2 - p_1 \cdot p_2) + m_2^2 c^2$ и

$$s_{\min} = (m_1^2 + m_2^2) c^2 + 2E_{\min} m_2$$

а пороговая энергия

$$E_{\min} = \frac{c^2}{2m_2} \left\{ \left(\sum_k M_k \right)^2 - m_1^2 - m_2^2 \right\}$$

В системе центра масс $p_1 = -p_2 = p$, откуда, например, в ультрарелятивистском пределе $\beta_{1,2} \rightarrow 1$

$$s \approx (m_1^2 + m_2^2) c^2 + 4p^2$$

И

$$p_{\min} \approx p_{0\min} \approx \frac{c}{2} \sqrt{\left(\sum_k M_k \right)^2 - m_1^2 - m_2^2}.$$

Если в начальном состоянии одна частица, то говорят о распаде. В этом случае $s = m^2 c^2 \geq s_{\min}$, так что сумма масс частиц в конечном состоянии должна удовлетворять условию

$$\sum M_k \leq m$$

5.6 Main Effects of SR

В СТО есть некоторые типичные явления, многие из которых интересны просто сами по себе, другие же находят применения в некоторых физических явлениях. Обсудим эти явления.

5.6.1 Main Laws of Relativistic Mechanics

Обсудим коротко основные законы релятивистской механики.

(она нормально в механике прописана, тут не место ей, просто укажу формулы и какие-то важные понятия.)

By Tong

(тут оставляю суть и связи с теорией поля, подробно это объяснено в механике)

Our goal in this section is to describe various relativistic phenomena that arise in particle physics. All these processes occur in the absence of external forces, so $F = 0$ and we will rely only on conservation of 4-momentum, meaning

$$\frac{dP}{d\tau} = 0$$

Of course, conservation of 4-momentum includes both conservation of 3-momentum and conservation of energy.

The calculations that follow are similar in spirit to the collision calculations of Section 5.2. Before we proceed, there are a couple of hints that may help when solving these problems. Firstly, we need to choose a frame of reference in which to calculate: the smart frame to choose is nearly always the centre of mass of the system. (Which should more correctly be called the centre of momentum frame, for it is the one with vanishing spatial 3-momentum). Secondly, you will often be presented with a situation where there is one particle with momentum P about which you know nothing. A good way to eliminate this is often to rearrange your equation so it takes the form $P = \dots$ and then square it to get the right-hand side to be $P \cdot P = m^2 c^2$. Let's now see how this works in a few examples.

Particle Decay

Consider a single particle with rest mass m_1 which decays into two particles with rest masses m_2 and m_3 . Conservation of 4-momentum tells us

$$P_1 = P_2 + P_3$$

or, equivalently,

$$E_1 = E_2 + E_3 \quad \text{and} \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$$

In the rest frame of the decaying particle, we can write (using (7.30)),

$$E_1 = m_1 c^2 = \sqrt{p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4} + \sqrt{p_3^2 c^2 + m_3^2 c^4} \geq m_2 c^2 + m_3 c^2$$

which tells us the unsurprising result that a particle can only decay if its mass is greater than that of its decay products. In the problem sheet, you will be asked to compute the velocities v_2 and v_3 of the decay products in the centre of mass frame and show that they are given by

$$\gamma_2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2}{2m_1 m_2} \quad \text{and} \quad \gamma_3 = \frac{m_1^2 + m_3^2 - m_2^2}{2m_1 m_3}$$

Here we will instead look at some slightly different problems. An Example: Higgs Decay The LHC has taught us that the Higgs boson has mass $m_h c^2 \approx 125 \text{ GeV}$. It mostly decays into two photons. In particle physics, photons are always denoted by γ . Do not confuse them with the Lorentz contraction factor! The "equations" in which the photon γ 's appear are more like chemical reactions than true equations. The decay of the Higgs into two photons is written as

$$h \rightarrow \gamma\gamma$$

Similar decays occur for other particles, most notably the neutral pion, a meson (meaning that it is made of a quark and anti-quark) with mass $m_\pi c^2 \approx 140 \text{ MeV}$. This too decays as $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

О поле Хиггса как примере релятивистского распада

To be concrete (and more relevant!) we'll focus on the Higgs. Conservation of 4-momentum tells us (in, hopefully, obvious notation) that

$$P_h = P_\gamma + P'_\gamma$$

If we sit in the rest frame of the Higgs, so $P_h^\mu = (m_h c, 0)$, the photons must have equal and opposite 3-momentum, and therefore equal energy $E_\gamma = \frac{1}{2} m_h c^2$. The photons must be emitted back-to-back but, because the problem is rotationally symmetric, can be emitted at any angle.

What if we're not sitting in the rest frame of the Higgs?. Suppose that the Higgs has energy E_h and the energy of one of the photons is measured to be E_γ . What is the angle θ that this photon makes with the path of the Higgs?

We'll use the strategy that we described above. We have no information about the second photon, with 4-momentum P'_γ . So we rearrange the conservation of momentum to read $P'_\gamma = P_h - P_\gamma$. Upon squaring this, we have $P'_\gamma \cdot P'_\gamma = 0$, so

$$\begin{aligned} 0 &= (P_h - P_\gamma) \cdot (P_h - P_\gamma) = P_h \cdot P_h + P_\gamma \cdot P_\gamma - 2P_h \cdot P_\gamma \\ &= m_h^2 c^2 - \frac{2E_h E_\gamma}{c^2} + 2\mathbf{p}_h \cdot \mathbf{p}_\gamma \\ &= m_h^2 c^2 - \frac{2E_h E_\gamma}{c^2} + \frac{2E_\gamma}{c} \cos \theta \sqrt{E_h^2/c^2 - m_h^2 c^2} \end{aligned}$$

where, in the last equation, we have used $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ (which is just $E = pc$ for the photon). This can now be rearranged to give the answer for θ . **7.5.2 Particle Collisions** Let's now look at the physics of relativistic collisions. We'll collide two particles together, both of mass m . They will interact in some manner, preserving both energy and 3-momentum, and scatter at an angle θ .

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4$$

As we mentioned previously, it's easiest to see what happens in the centre of mass frame. Without loss of generality, we'll take the initial momenta to be in the x -direction. After the collision, the particles must have equal and opposite momenta, which means they must also have equal energy. This, in turn, ensures that in the centre of mass frame, the speed v after the collision is the same as before. We can choose our axes so that the initial and final momenta are given by

$$\begin{aligned} P_1^\mu &= (mc\gamma_v, mv\gamma_v, 0, 0) \quad , \quad P_2^\mu = (mc\gamma_v, -mv\gamma_v, 0, 0) \\ P_3^\mu &= (mc\gamma_v, mv\gamma_v \cos \theta, mv\gamma_v \sin \theta, 0) \quad , \quad P_4^\mu = (mc\gamma_v, -mv\gamma_v \cos \theta, -mv\gamma_v \sin \theta, 0) \end{aligned}$$

where we've put the subscript on γ_v to denote its argument. We can also look at the same collision in the lab frame. This refers to the situation where one of the particles is initially at rest. (Presumably in your lab). By the velocity addition formula, the other particle must start with speed

$$u = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}$$

You can also derive this result by writing down the momenta P'_1 and P'_2 in the lab frame and equating $(P_1 + P_2)^2 = (P'_1 + P'_2)^2$

In the lab frame, the angles ϕ and α at which the particles scatter are not equal. They can be easily determined using the addition of 4-velocities that we saw in Section 7.4.2. Set $u = -v$ in equation (7.23) and use the identity $\tan(x/2) = \sin x/(1 + \cos x)$ to get

$$\tan \phi = \frac{1}{\gamma_v} \tan \theta/2 \quad \text{and} \quad \tan \alpha = \frac{1}{\gamma_v} \tan(\theta/2 + \pi/2)$$

One of the more interesting examples of collisions is Compton Scattering, in which the colour of light changes after scattering off an electron (because it changes its energy and therefore its frequency). You will derive this result in the examples sheet. **Particle Creation** Just as mass can be converted into kinetic energy, so kinetic energy can be converted into mass through the creation of new particles. Roughly speaking, this is the way we discover new particles of Nature.

Suppose we collide two particles, each of mass m . After the collision, we hope to be left with these two particles, together with a third of mass M . How fast must the original two particles collide? Conservation of momentum gives us

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4 + P_5$$

where $P_1^2 = P_2^2 = P_3^2 = P_4^2 = m^2 c^2$, while $P_5^2 = M^2 c^2$. Let's work in the centre of mass frame of the colliding particles, each of which has speed v . In this case, we have

$$(P_1 + P_2)^2 = 4m^2 \gamma_v^2 c^2 = (P_3 + P_4 + P_5)^2$$

Since we're in the centre of mass frame, the final momenta must take the form $P_3 + P_4 + P_5 = ((E_1 + E_2 + E_3)/c, 0)$ so that

$$(P_3 + P_4 + P_5)^2 = \frac{1}{c^2} (E_1 + E_2 + E_3)^2 \geq \frac{1}{c^2} (2mc^2 + Mc^2)^2$$

where, for each particle, we've used the fact that $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \geq mc^2$. Substituting this into (7.34) gives

$$4m^2 \gamma_v^2 c^2 \geq 4m^2 c^2 + M^2 c^2 + 4Mmc^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma_v \geq 1 + \frac{M}{2m}$$

This makes sense. The amount of minimum amount of kinetic energy per particle is $T = \gamma_v mc^2 - mc^2 = \frac{1}{2} Mc^2$. With this minimum amount, the two colliding particles can combine their kinetic energies to form the new particle. After the collision, all three particles are then at rest.

It's worth mentioning another way to do the above computation. Suppose that you hadn't noticed that the three-momentum of $P_3 + P_4 + P_5$ vanished and instead expanded out the right-hand side of (7.34) to end up with nine terms. Things are a bit harder this way, but all is not lost. We can apply a Cauchy-Schwarz-like inequality to each of these terms. For any massive particles with 4-momenta P and Q , such that $P^2 = m_1^2 c^2$ and $Q^2 = m_2^2 c^2$, we necessarily have $P \cdot Q \geq m_1 m_2 c^2$. It is simplest to prove this by working in a frame in which one particle is stationary. Then we have

$$P \cdot Q = \begin{pmatrix} m_1 c \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_2/c \\ p_2 \end{pmatrix} = m_1 E_2 = m_1 \sqrt{m_2^2 c^4 + p_2^2 c^2} \geq m_1 m_2 c^2$$

Applied to (7.34) this once again gives (7.35). What if we re-do this experiment in the lab frame, in which of the original particles is at rest and the other has speed u ? Now we have $P_1 = (m\gamma_u c, m\gamma_u u)$ and $P_2 = (mc, 0)$, so

$$(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 = 2m^2 c^2 + 2m^2 \gamma_u c^2$$

But we don't have to compute $(P_3 + P_4 + P_5)^2$ again since the beauty of taking the square of the 4-momenta is that the result is frame independent. We have

$$2m^2 c^2 + 2m^2 \gamma_u c^2 \geq 4m^2 c^2 + M^2 c^2 + 4Mmc^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma_u \geq 1 + \frac{2M}{m} + \frac{M^2}{2m^2}$$

Now we see it's not so easy to create a particle. It's certainly not enough to give the incoming particle kinetic energy $T = \frac{1}{2} Mc^2$ as one might intuitively expect. Instead, if you want to create very heavy particles, $M \gg m$, you need to give your initial particle a kinetic energy of order $T \approx M^2 c^2 / 2m$. This scales quadratically with M , rather than the linear scaling that we saw in the centre of mass frame. The reason for this simple: there's no way that the end products

can be at rest. The need to conserve momentum means that much of the kinetic energy of the incoming particle goes into producing kinetic energy of the outgoing particles. This is the reason that most particle accelerators have two colliding beams rather than a single beam and a stationary target. The LHC primarily collides protons in its search to discover new elementary particles. However, for one month a year, it switches to collisions of lead nuclei in an attempt to understand a new form of matter known as the quark-gluon plasma. Each lead nuclei contains around 200 protons and neutrons. The collision results in a dramatic demonstration of particle creation, with the production of many thousands of particles - protons, neutrons, mesons and baryons. Here's a very pretty picture. It's one of the first collisions of lead nuclei at LHC in 2010, shown here in all its glory by the ALICE detector.

5.6.2 Aberration of Light

Обсудим аберрацию света.

Суть аберрации света

Аберрация света состоит в том, что
(???)

угол движения света по отношению к скорости движения инерциальной системы изменяется, поскольку $v_{\parallel} = c \cos \theta$, $v'_{\parallel} = c \cos \theta'$ и по закону сложения скоростей

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'},$$

что называют законом аберрации света.

Качественно это работает следующим образом...
(???)

О применениях аберрации света

(потом подумаю, где он нужен, пока нигде. разве что картину мира формирует нормально.)

5.6.3 Doppler Effect

Обсудим подробно эффект Доплера.

Суть эффекта Доплера

Эффект Доплера состоит в том, что частота света меняется при переходе в подвижную систему отсчета. Поэтому если источник света приближается к нам, то мы детектируем частоту его меньше, чем та, с которой он был излучен: $\omega' = \omega \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$, а если источник удаляется от нас, то частота будет больше: $\omega' = \omega \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$.

В частности, выделяют

- нерелятивистский эффект ($\beta \ll 1$, поправка первого порядка малости)

$$\omega' \approx \omega(1 - \beta \cos \theta),$$

который носит чисто кинематический характер: наблюдатель отстаёт или догоняет волну: перемещается относительно узлов и пучностей.

Длина волны меняется при сближении как $\lambda = \lambda_0 (1 - \frac{v}{c})$, а при отдалении как $\lambda = \lambda_0 (1 + \frac{v}{c})$.

- продольный эффект Доплера ($\cos \theta' = \pm 1$)

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}}$$

- поперечный эффект Доплера ($k'_{\parallel} = 0, \cos \theta' = 0$)

$$\omega' = \omega \frac{1}{\gamma},$$

который обусловлен релятивистским эффектом растяжения времени.

Вывод эффекта Доплера через переход в другую систему по Т. Тао (?)

Radiation moving to the right in an inertial reference frame F can be modeled by the function

$$A \cos(k(x - ct) + \theta)$$

for some amplitude A and phase shift θ . If we move to the coordinates $(t', x') = L_v(t, x)$ provided by an inertial reference frame F' , a computation then shows that the function becomes

$$A \cos(k_+(x' - ct') + \theta)$$

where $k_+ = (1 - v/c + v^2/2c^2 + O(v^3))k$. (actually, if the radiation is tensor-valued, the amplitude A might also transform in some manner, but this transformation will not be of relevance to us).

Similarly, radiation moving at speed c to the left will transform from

$$A \cos(k(x + ct) + \theta)$$

to

$$A \cos(k_-(x' + ct') + \theta)$$

where $k_- = (1 + v/c + v^2/2c^2 + O(v^3))k$. This describes how the wave number k transforms under changes of reference frame by small velocities v . The temporal frequency ν is linearly related to the wave number k by the formula

$$\nu = \frac{c}{2\pi}k,$$

and so this frequency transforms by the (red-shift) formula

$$\nu_+ = (1 - v/c + v^2/2c^2 + O(v^3))\nu$$

for right-ward moving radiation and by the (blue-shift) formula

$$\nu_- = (1 + v/c + v^2/2c^2 + O(v^3))\nu$$

for left-ward moving radiation. (As before, one can give an exact formula here, but the above asymptotic will suffice for us.)

Вывод эффекта Доплера через преобразование 4-векторов по В.В. Киселеву (?)

Решения линейных по полю уравнений Максвелла в виде плоских монохроматических колебаний свободных магнитного и электрического полей зависят от волнового вектора $\mathbf{k}$

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{B}(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \text{с.с.}$$

где с.с. означает комплексно сопряженные вклады, а частота связана с волновым вектором уравнением

$$\omega(\mathbf{k}) = c\sqrt{\mathbf{k}^2} = ck.$$

Покажем, что $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ есть 4-вектор. В самом деле, вектор набла преобразуется как ковектор, а значит, величина $\nabla_\mu f$ преобразуется как произведение ковектора на тензорную величину f . Вычислим

$$\nabla_\mu e^{-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -\left(i\frac{\omega}{c}, -i\mathbf{k}\right) e^{-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -ik_\mu e^{-i\omega(\mathbf{k})t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}},$$

т.е.

$$\nabla_\mu f = -ik_\mu f,$$

где слева стоит произведение ковектора на тензорную величину f , а справа - произведение f с теми же тензорными свойствами, что и f , на 4-компонентную величину $k_\mu = (\omega/c, -\mathbf{k})$, которая, следовательно, должна быть ковектором. Опускание и поднимание индексов тензорных величин метрикой Минковского меняет знак пространственной компоненты: $k^\mu = g^{\mu\nu} k_\nu = (\omega/c, k)$. Значит, фаза электромагнитной волны

$$k_\mu x^\mu = k_0 x_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$

есть скаляр, т.е. релятивистский инвариант.

(???? про это были вопрос, потом еще раз подумаю. напишу мб в формализме СТО это.)

Все 4-векторы преобразуются той же матрицей, что и столбец координат x^μ . Отсюда сразу находим частоту, видимую наблюдателем, который движется относительно источника света со скоростью $\mathbf{u}$, так как частота является временной компонентой волнового 4-вектора, и преобразование лоренцева буста дает

$$\omega' = \gamma (\omega - uk_{\parallel}).$$

Подставляя $ck_{\parallel} = \omega \cos \theta$ с учетом абберации света $\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'}$, находим формулу эффекта Доплера в общем виде

$$\omega' = \omega \gamma \left(1 - \beta \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'} \right) = \frac{\omega}{\gamma} \frac{1}{1 + \beta \cos \theta'}$$

В частности, выделяют

- продольный эффект Доплера ($\cos \theta' = \pm 1$)

$$\omega' = \omega \gamma (1 \mp \beta) = \omega \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}},$$

- поперечный эффект Доплера ($k'_{\parallel} = 0, \cos \theta' = 0$)

$$\omega' = \omega \frac{1}{\gamma},$$

- нерелятивистский эффект ($\beta \ll 1$, поправка первого порядка малости)

$$\omega' \approx \omega(1 - \beta \cos \theta).$$

Поперечный эффект Доплера обусловлен релятивистским эффектом растяжения времени (см. ниже). Нерелятивистский эффект носит чисто кинематический характер: наблюдатель отстаёт или догоняет волну: перемещается относительно узлов и пучностей.

Качественное описание эффекта доплера

Обсудим эффект Доплера качественно.

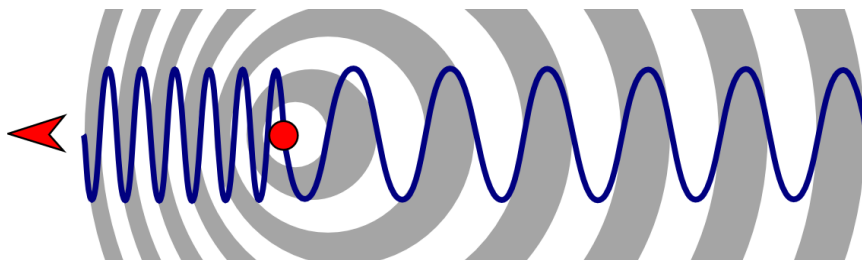


Figure 1: Иллюстрация эффекта Доплера.

Обзор эффекта Доплера

О важности аберрации для эффекта Доплера

Нужно ли знать аберрацию для вывода эффекта Доплера?

(пока ответ такой, что по Киселеву если выводить - да, если по Т.Тао, то нет, потом лучше подумаю про это)

Об экспериментальной проверке эффекта Доплера (????)

(потом разберу)

В 1845 году голландский метеоролог из Утрехта, Христофор Хенрик Дидерик Бёйс-Баллот, подтвердил эффект Доплера для звука на железной дороге между Утрехтом и Амстердамом. Локомотив, достигший невероятной на то время скорости 40 миль/ч (64 км/ч), тянул открытый вагон с группой трубачей. Баллот слушал изменения тона во время движения вагона при приближении и удалении. В тот же год Доплер провел эксперимент, используя две группы трубачей, одна из которых двигалась от станции, а вторая оставалась неподвижной. Он подтвердил, что, когда оркестры играют одну ноту, они находятся в диссонансе. В 1846 году он опубликовал пересмотренную версию своей теории, в которой он рассматривал как движение источника, так и движение наблюдателя. Позднее в 1848 году французский физик Арман Физо обобщил работы Доплера, распространив его теорию и на свет (рассчитал смещение линий в спектрах небесных светил)[7]. В 1860 году Эрнст Мах предсказал, что линии поглощения в спектрах звёзд, связанные с самой звездой, должны обнаруживать эффект Доплера, также в этих спектрах существуют линии поглощения земного происхождения, не обнаруживающие эффект Доплера. Первое соответствующее наблюдение удалось провести в 1868 году Уильяму Хаггинсу[8].

Прямое подтверждение формул Доплера для световых волн было получено Г. Фогелем в 1871 году путём сравнения положений линий Фраунгофера в спектрах, полученных от противоположных краёв солнечного экватора. Относительная скорость краёв, рассчитанная по значениям измеренных Г. Фогелем спектральных интервалов, оказалась близка к скорости, рассчитанной по смещению солнечных пятен[9].

О применениях эффекта Доплера

Обсудим применения эффекта Доплера.

(тут их может быть много, но писать буду то, во что вникал)

Об эффекте Доплера в космологии

(в космологии про него много говорят. в радарах мб.)

О схожих эффектах (??)

(потом мб посмотрю их)

Об инверсном эффекте Доплера (????)

(пока по Википедии)

В 1967 г. Виктор Веселаго теоретически предсказал возможность обратного эффекта Доплера в среде с отрицательным коэффициентом преломления.

В таких средах возникает доплеровский сдвиг, который имеет знак, противоположный обычному доплеровскому смещению частоты. Первый эксперимент, который позволил обнаружить этот эффект, был проведен Найджелом Седдоном и Тревором Беарпарком в Бристоле (Великобритания), в 2003 году, на основе нелинейной линии передачи[16]. Позднее обратный эффект Доплера наблюдался в более широком классе метаматериалов.

О заблуждениях про эффект Доплера (?!?)

5.6.4 Thomas Precession

Обсудим подробно прецессию Томаса.

Суть прецессии Томаса

Суть прецессии Томаса в следующем. Пусть имеются что у частицы, которая покоится в системе K'' , совершает движение по траектории с ускорением $\dot{\mathbf{v}}$, то за время dt в системе K система K'' совершит относительно K вращение на угол $d\phi_{\perp} = dt\omega_{\text{Th}}$, где частота Томасовской прецессии при $d\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}}dt$

$$\omega_{\text{Th}} = -(\gamma - 1)\frac{\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}}{v^2}$$

В нерелятивистском пределе нужно аккуратно поставить $\gamma \rightarrow 1$, и частота равна $\omega_{\text{Th}} \approx -\frac{1}{2}\frac{\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}}{c^2}$.

Вывод прецессии Томаса

Пусть есть 2 системы, которые движутся относительно системы K , одна - K' со скоростью $\mathbf{v}$, а вторая - K'' с бесконечно малой скоростью $d\mathbf{v}' \rightarrow 0$ относительно системы K' .

Найдем, на какой угол будет повернута система K'' относительно K .

(???? почему-то для этого решим обратную задачу, почему? окей, пока так, потом попробую мб решить прямым способом, это решение ведь понятно.)

Согласно закону сложения скоростей, скорость движения K'' относительно K равна $\mathbf{v}_\perp = \frac{1}{\gamma} \frac{\mathbf{v}'_\perp}{1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{u}}{c^2}}$, $\mathbf{v}_\parallel = \frac{\mathbf{v}'_\parallel + \mathbf{u}}{1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{u}}{c^2}}$ скорость движения системы K'' относительно K , обозначаемая $d\mathbf{v}$, равна

$$d\mathbf{v}_\perp = \frac{1}{\gamma} \frac{d\mathbf{v}'_\perp}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}'}{c^2}} \quad d\mathbf{v}_\parallel = \frac{\mathbf{v} + d\mathbf{v}'_\parallel}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}'}{c^2}}.$$

Найдем теперь траекторию движения центра системы K относительно K'' . Для этого запишем преобразования двух лоренцевых бустов, подставив в них координаты центра системы K , $r = 0$: первый буст -

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}}{v} \left\{ (\gamma - 1) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{v} - \gamma v t \right\} \Big|_{r=0} = -\gamma \mathbf{v} t \\ t' &= \gamma \left\{ t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right\} \Big|_{r=0} = \gamma t \end{aligned}$$

Второй буст -

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'' &= \mathbf{r}' + \frac{dv'}{dv'} \left\{ (\gamma' - 1) \frac{\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{v}'}{dv'} - \gamma' d\mathbf{v}' t' \right\} \Big|_{\{r=0, \gamma' \rightarrow 1\}} = -\gamma t \{ \mathbf{v} + d\mathbf{v}' \} \\ t'' &= \gamma' \left\{ t' - \frac{\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{v}'}{c^2} \right\} \Big|_{\{r=0, \gamma' \rightarrow 0\}} = \gamma t \left\{ 1 + \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}'}{c^2} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, траектория центра системы K для наблюдателя из системы K'' задается выражением

$$\mathbf{r}''(t'') = -t'' \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}'}{c^2}} \{ \mathbf{v} + d\mathbf{v}' \} = -t'' \{ dv_\parallel + \gamma d\mathbf{v}_\perp \}$$

где выше мы раскрыли $d\mathbf{v}'$ и подставили значения скоростей относительно K из формулы выше.

Значит, скорость движения центра K относительно K'' , т.е. $\tilde{\mathbf{v}}$, равна

$$-\tilde{\mathbf{v}} = d\mathbf{v} + (\gamma - 1)d\mathbf{v}_\perp,$$

и она отличается от скорости движения центра системы K'' относительно K : $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, не только за счет смены направления на противоположное, но и на величину, ортогональную этой скорости, так что это отличие можно представить в виде

$$-d\phi_\perp \times \mathbf{v} = (\gamma - 1)d\mathbf{v}_\perp,$$

где угол малого поворота $d\phi_\perp$ системы K'' относительно системы K можно найти, взяв векторное произведение этого отличия скорости на саму скорость:

$$-\mathbf{v} \times (d\phi_\perp \times \mathbf{v}) = (\gamma - 1)\mathbf{v} \times d\mathbf{v}_\perp$$

С учетом ортогональности угла поворота скорости движения, найдем

$$-d\phi_\perp v^2 = (\gamma - 1)\mathbf{v} \times d\mathbf{v},$$

где мы опустили метку ортогональности у изменения скорости в правой части выражения, поскольку продольная компонента все равно не дает вклада в векторное произведение.

Если частица, которая покоится в системе K'' , совершает движение по траектории с ускорением $\dot{\mathbf{v}}$, то за время dt в системе K система K'' совернит относительно K поворот на угол $d\phi_\perp = dt\omega_{\text{Th}}$, где частота Томасовской прецессии при $dv = \dot{\mathbf{v}} dt$

$$\omega_{\text{Th}} = -(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}}{v^2}$$

Эту формулу можно представить в виде

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{Th}} = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}}{c^2}$$

если учесть тождество $\gamma - 1 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma + 1} = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{v^2}{c^2}$. В нерелятивистском пределе $\gamma \rightarrow 1$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{Th}} \approx -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}}{c^2}$$

О другом теоретическом про прецессию Томаса (!?!?!?!)

(нужно задачи нарисовать про нее еще!!!)

О связи прецессии Томаса и некоммутативности генераторов группы Лоренца (?)

(допишу для полноты позже, итак понятно)

Об истории открытия прецессии Томаса

(потом подумаю, тут очень вмеру коротко все будет. пока вики.)

Эффект Томаса был известен французскому математику Э. Борелю в 1913 году. Борель отметил некоммутативность неколлинеарных преобразований Лоренца и оценил в низшем порядке по $1/c^2$ угол поворота координатных осей движущейся с ускорением системы отсчёта. В том же году два математика из Гёттингена, Фоппл и Даниэл, получили точное релятивистское выражение для угла поворота при движении тела по окружности. Примерно в то же время прецессия координатных осей обсуждалась Зильберштейном.

В 1922 году Э. Ферми рассмотрел параллельный транспорт систем отсчета в общей теории относительности. В пространстве Минковского перенос Ферми приводит к прецессии Томаса. (???? что????)

Наконец, в 1926 году в журнале Nature была опубликована заметка Томаса[8], которая объяснила отклонение на фактор $\frac{1}{2}$ данных измерений от предсказаний теории тонкой структуры атома водорода, связывавшей спин-орбитальное расщепление с прецессией Лармора. Томас ограничился вычислением в низшем порядке по $1/c^2$. Работа привлекла большое внимание и эффект прецессии координатных осей при ускоренном движении стал называться «прецессией Томаса».

Единственным источником, который был известен Томасу, являлась работа Де Ситтера о прецессии Луны, опубликованная в сборнике Артура Эддингтона.

Как догадаться до прецессии Томаса? (??????)

(не знаю, хороший вопрос, потом подумаю.)

О методе определения угловой скорости при повороте (!?!?)

(тут он самый важный, отдельно про него тут напишу и где-то в механике. понимаю его, не сложный, но на готове должен быть!)

А если попробовать доказывать иначе, переходить из K в K'' ? (????)

(не знаю, не до того, итак работатет доказательство ведь. мб когда-то подумаю, видимо, есть причины, почему так не делают. напишу потом их сюда, если подумаю.)

О следствиях, экспериментах и применениях прецессии Томаса (???)

(тут много всего, потом дочитаю, если будет нужно.)

О прецессии Томаса электрона в атоме водорода (????)

(позже допишу.)

Потенциал взаимодействия магнитного диполя электрона $\boldsymbol{\mu}$ с внешним полем $U_{\text{mag}} = -(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mathcal{H}})$ приводит к прецессии Лармора для магнитного момента $\boldsymbol{\mu}$ с частотой

$$\omega_L = -\frac{ge}{2mc}\mathcal{H}$$

и U_{mag} после подстановки магнитного поля (21.20) принимает вид

$$U_{\text{mag}} = \frac{\Phi'(r)}{mcr} \frac{ge\hbar}{2mc} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}) = \frac{ge\hbar}{2m^2c^2} \frac{\Phi'(r)}{r} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}),$$

что, однако, вдвое больше результата, выведенного из уравнения Дирака в нерелятивистском пределе, так как $g = 2$. Причина расхождения - не инерциальное, а вращательное движение электрона в статическом потенциале, вследствие чего спин испытывает прецессию Томаса. В нерелятивистском пределе частота прецессии Томаса равна $\boldsymbol{\omega}_{\text{TH}} = \frac{1}{2c^2}(\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v})$. Ускорение можно выразить из второго закона Ньютона

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\mathcal{E} = -\frac{e}{m} \frac{\Phi'(r)}{r} \mathbf{r}$$

5.7 Other Effects and Paradoxes of SR

Обсудим менее популярные явления, которые тем не менее важны для детального понимания физики.

5.7.1 Twin Paradox: Basic Theory 1

Обсудим вмеру подробно парадокс близнецов.

(в целом тут многое я разобрал, потом чуть что вернусь к этому вопросу, пока уже не актуально, ничего в нем уже я не забыл. другие темы есть гораздо важнее, тренироваться нужно, потом мб конкретные модели порешаю про него. готовым быть к такой теме нужно, знать фундаментальную физику.)

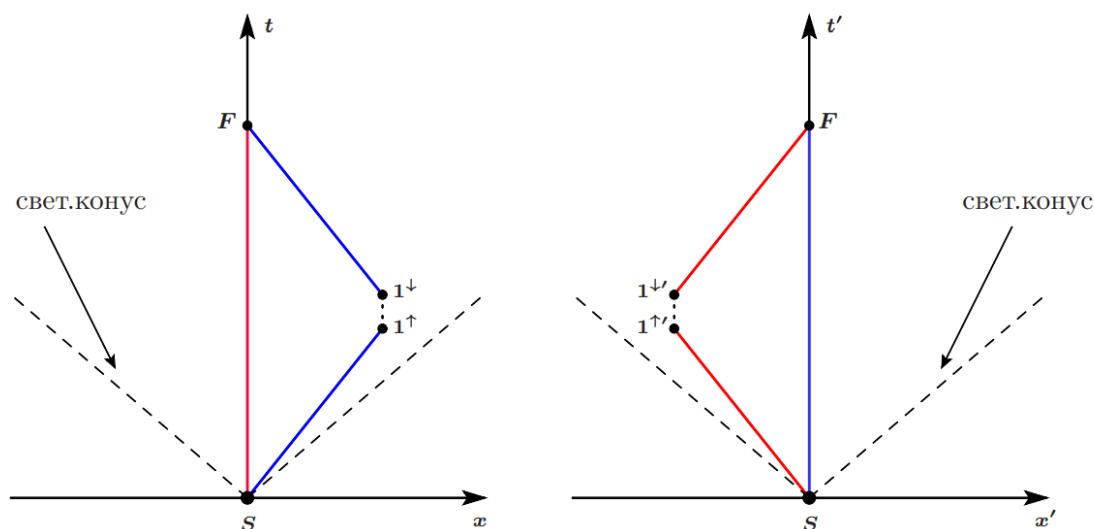
(укажу потом вдали, что парадокс близнецов - как предложение к умной беседе, с которой непонимающие физику сольются, а понимающие скажут много интересного, умного, но так и не ответят на этот вопрос. так я этот парадокс и вижу)

Суть парадокса близнецов**Формулировка**

Представим два близнеца в пустом плоском пространстве в одинаковых космических кораблях. Пусть близнец-путешественник начинает мгновенно двигаться с постоянной

скоростью, по величине сравнимой со скоростью света. Пролетев большое расстояние путешественник поворачивает назад и возвращается к наблюдателю, они сравнивают показания часов. Какие часы будут показывать большее время? Наблюдатель, зная свойства пространства-времени, заключит, что время у путешественника во время разлета и возвращения идет медленнее, то есть $t'_{\text{пут.}} < \Delta t_{\text{набл.}}$ ведь $\Delta t_{\text{набл.}} = \gamma \Delta t'_{\text{пут.}}$, $\gamma = \gamma(|v|) > 1$. Но ровно такое же отдаление и сближение будет наблюдать путешественник, поэтому ровно этот же аргумент может сказать и он. В итоге оба близнеца уверены, что другие часы будут отставать. Кто из них прав? Другими словами, чему равна разница времен близнецов $\Delta\tau = 2(\Delta t - \Delta t')$ после всего путешествия?

Удобно проиллюстрировать это явление на диаграмме пространства-времени:



Тут один близнец имеет мировую линию, обозначаемую синей линией, а другой - красной. Можно сказать, что левая траектория диаграмма, где наблюдатель - красная линия, а путешественник - синяя линия. Тогда с точки зрения путешественника мы видим диаграмму справа. Будем для так и считать. Понятно, что ровно такие же рассуждения верны, если бы мы сказали, что на той же левой диаграмме красная линия - путешественник, и мы смотрим на синюю линию - наблюдателя.

Типичные уточнения и особенности формулировки

Я фиксирую понятия “наблюдатель” и “путешественник”, потому что так проще всего быстро понять, о ком идет речь. Некоторая проблема состоит в том, что с точки зрения путешественника именно наблюдатель путешествует, поэтому в целом мы именно своими знаниями о системе, которые мы подразумевали в условии задачи, определяем, кто наблюдатель, а кто путешественник. Так или иначе, такой формулировки достаточно для рассмотрения задачи.

Заметим, что в данной формулировке задача не соответствует происходящему в реальности. В реальности близнецы всегда будут находиться в том или ином гравитационном поле, то есть их пространство будет заведомо не плоским. Соответственно, чтобы лучше понять, что происходит в реальности, следует рассмотреть другую задачу, где пространство кривое.

Также между близнецами вообще есть сила гравитационного притяжения. Она мала, однако допустим путешественник просто начал двигать с постоянной скоростью от наблюдателя в абсолютной пустоте, может быть рано или поздно (то есть очень поздно) оба они притянутся к некоторой точке, и как наблюдатель сдвинется, так и путешественник вернется? Я посчитал, у меня получилось, что нет, потому что грубо говоря, $mv^2/2 = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} Gm^2 dr/r^2$, отсюда $R_{\max} = \left(\frac{1}{R_{\min}} - \frac{v^2}{2Gm} \right)^{-1}$, для оценки $R_{\min} = 1\text{м}$, $v = 0.5c$, $m = 100\text{кг}$. получаем, что нет такого $R_{\max} > 0$. Однако если $R_{\min}$ взять мелким, то такое расстояние может найтись, так как $\frac{1}{R_{\min}}$ будет достаточно большим. Что и логично, ведь за малый промежуток времени тело во много раз больше улетит, чем гравитации сила сможет его притянуть. Но гравитация может начать влиять, если взять невероятно большие массы близнецов. (???????? я не знаю, я забил про это думать, дам кому-то эту задачу потом.) Остановился на том, что можно забить на притяжение между близнецами.

Уточнения про процесс ускорения

Ускорение ведь может быть только реактивным образом в рамках нашей задачи или каким-то полем. Больше просто нет вариантов.

По умолчанию мы считаем, что ускорение происходит от реактивного тормоза. (???? тут добавлю расчет массы для него???? насколько тогда можно считать, что гравитационным притяжением можно пренебречь?)

Важно, что ускорение только у одного наблюдателя. Путешественник всегда будет знать, что он нажмет на тормоза. Наблюдатель увидит, что двигатели путешественника загорелись.

Итоговый ответ (???)

Правильный ответ, что тот близнец, длина пути которого больше на диаграмме пространства-времени, тот и старше. Учтено в этом утверждении, что большая длина соответствует меньшей длине линии, потому что у нас метрика Минковского, которая имеет знак (-).

(???????????????????? так у нас ведь две диаграммы для двух наблюдателей!! напишу это лучше!)

Общеизвестный ответ в том, что наблюдатель постарел больше, чем путешественник. Мнемонически это можно запомнить так: если стоишь на месте, то получаешь больше опыта, чем если бегаешь по миру.

(??? формулы)

Идея ответа в рамках СТО:

Идея ответа в рамках ОТО:

Почему общеизвестный итоговый ответ может быть неверным или сомнительный (???)

У нас есть ускорение и оба близнеца знают, у кого ускорение настоящее. Если же наблюдатель не будет это знать, то он будет считать неверно время. Получаем, что есть такая вещь, как абсолютное ускорение - выделенное свойство систем отсчета.

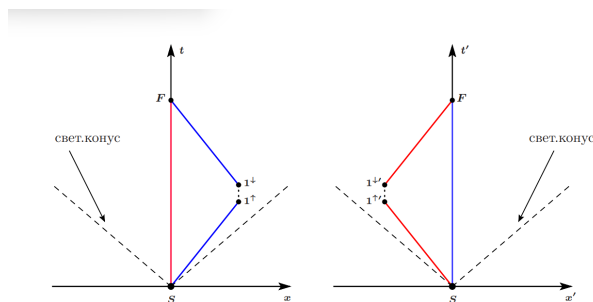
Конкретный пример: улет путешественника с $v = 0.5c$

Объяснение

Полубредовое решение по Киселеву: переход в систему путешественника и вычисление времени наблюдателя

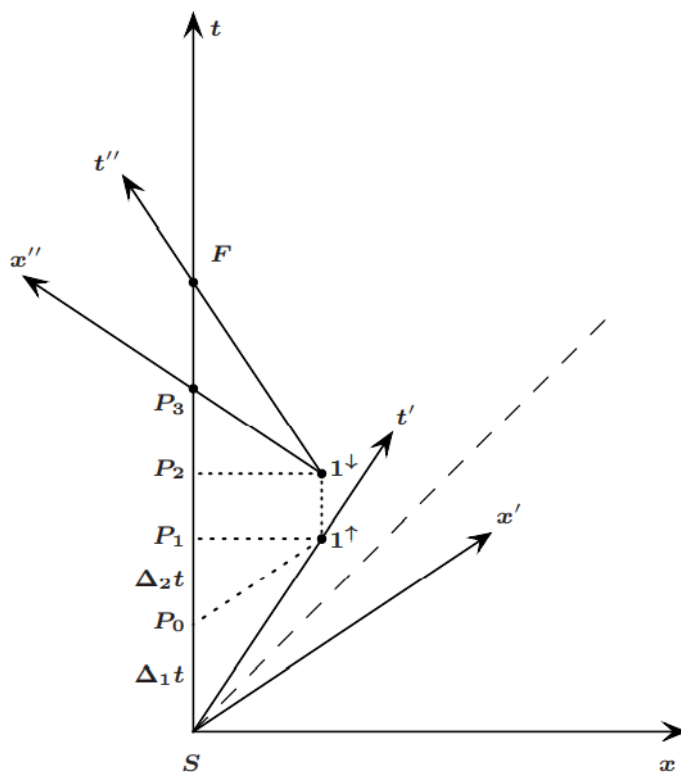
(???? честно, херня тут какая-то, пообщаюсь потом с тем, кто имеет много опыта работы в СТО.)

Так как у нас есть точка разворота, то у путешественник за время движения находится в двух системах отсчета. Значит, левый и правый графики траекторий



не эквивалентны, потому что левый относится к инерциальной системе отсчета K , а правый является результатом комбинации (объединения) двух различных инерциальных систем K' и K'' , “спитых” при сближении точек разворота $1^{\uparrow}$ и $1^{\downarrow}$.

Изобразим подробную диаграмму пространства-времени:



Тут пунктирные точечные линии - линии одновременных событий в системах путешественника и наблюдателя.

От старта до начала разворота по часам путешественника прошло время

$$\Delta t' = t'(1^\uparrow) - t'(S)$$

В этот момент времени в системе K' путешественник видит наблюдателя в точке P_0 (а не в P_1 , так как понятия одновременности в двух системах не совпадают).

Рассмотрим пока что только точку зрения путешественника. Разность хода часов близнецов во время разлета и возвращения равна, поэтому рассмотрим только половину диаграммы. (????? потом просто обычную диаграмму мы рисуем, где уже будто и не точка зрения путешественника. какие еще следствия, кроме одной формулы ниже, что это именно его точка зрения???) Наблюдатель от него отдаляется, поэтому для его собственного времени $\Delta_1 t$ имеется формула $\Delta t' = \gamma \Delta_1 t$, откуда

$$\Delta_1 t = \frac{1}{\gamma} \Delta t'.$$

Еще раз подчеркну, что у нас тут именно $\Delta_1 t$, а не Δt , и $\Delta_1 t < \Delta t'$, что и видно на диаграмме: вертикальная линия меньше, чем наклонная $\Delta t'$ (????? не должно ли быть тогда время больше??? снова запутался.).

Сразу после разворота путешественник снова попадает в инерциальную систему отсчета K'' , так что приведенная схема. рассуждений остается справедливой, и в момент времени $1^\downarrow$ он видит наблюдателя в точке P_3 . (а не P_2). Таким образом, во время быстрого разворота корабля (перемещение из $1^\uparrow$ в $1^\downarrow$), время путешественника возрастает на малый промежуток времени, которым мы пренебрегаем, а время наблюдателя возрастают на большой интервал времени от P_0 до P_3 .

Для определения разницы в показаниях часов рассмотрим интервал времени $\Delta_2 t := t(P_1) - t(P_0)$. Вычислим его геометрически. Длина отрезка $P_1 1^\uparrow = \Delta x$ - расстояние, пройденное путешественником в системе K . Через t' запишем его, вспомнив, что для единичного вектора $\{x', ct'\} = \{0, 1\}$, имеем $\{x, ct\} = \{\gamma\beta, \gamma\}$, поэтому

$$\Delta x = \gamma\beta c \Delta_1 t'$$

По построению (????? я объясняю это так: мы можем рассмотреть угол между Δx и линией, параллельной x' , он равен углу между x и x' . Котангенс угла это β , в итоге должно быть $\frac{\Delta x}{c \Delta_2 t}$, не понял, почему у Киселева иначе????? можно ли сделать это не геометрическим способом???)

$$\frac{c \Delta_2 t}{\Delta x} = \beta,$$

в итоге

$$\Delta_2 t = \beta^2 \gamma \Delta_1 t'$$

(у меня получилось $\Delta_2 t = \gamma \Delta_1 t'$) Видим, что время по часам наблюдателя $\Delta_2 t$, которое путешественник бы не учел, если бы считал время наблюдателя, пренебрегая своим ускорением, определяется временем движения путешественника $\Delta_1 t'$. (????? это удивительно, но в то же время мы это и видим на диаграмме. Казалось бы, можно затормозить в любое время после начал движения и разность времен была бы одна и та же. Нет, это не так. подумаю про это позже еще.)

В итоге время наблюдателя:

$$\Delta t = \Delta_1 t + \Delta_2 t = \frac{1}{\gamma} (1 + \beta^2 \gamma^2) \Delta_1 t' = \frac{1}{\gamma} \left(1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \right) \Delta_1 t' = \gamma \Delta_1 t',$$

то есть время наблюдателя в γ раз больше времени, прошедшего по часам путешественника.

Изменения времени при постоянном относительно ИСО ускорении

(мб в раздел про ускорение вставляю это, совсем тут это в сторону! мб напомним чуть это и все.)

Рассмотрим траекторию с постоянным ускорением a как замену переменных:

$$x = \bar{x} + a \frac{t^2}{2}$$

Дифференциалы:

$$dx = d\bar{x} + atdt$$

Интервал:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 \left(1 - \frac{a^2 t^2}{c^2} \right) dt^2 - d\bar{x}^2 - 2atd\bar{x}dt$$

Для частицы с $d\bar{x} = 0$ собственное время

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} ds^2 = \left(1 - \frac{a^2 t^2}{c^2} \right) dt^2 < dt^2.$$

т.е., ход времени ускоренного путешественника медленнее, чем у покоящегося наблюдателя в инерциальной системе отсчета. Фактор замедления можно представить в виде

$$1 - \frac{a^2 t^2}{c^2} = 1 - 2 \frac{ax(t)}{c^2}$$

где $x(t) = at^2/2$ - расстояние, пройденное путешественником. Путешественник воспринимает при ускоренном движении силы инерции как силы “искусственной гравитации” с ускорением свободного падения a . (??????? На этом ли) На этом месте Эйнштейн постулировал принцип эквивалентности сил инерции и сил гравитации: именно тут и вводится гравитационный потенциал. В этом случае потенциал искусственного гравитационного поля равен

$$\phi(x) = -ax$$

так что фактор замедления можно записать в виде

$$1 - \frac{a^2 t^2}{c^2} = 1 + 2 \frac{\phi(x)}{c^2}$$

Тогда из вида $d\tau^2$ следует вывод о том, что ход времени замедляется с падением гравитационного потенциала.

Парадокс близнецов для малых скоростей в рамках ОТО (??????)

(??? зачем нам это, ведь скорости и ускорения всегда нужны больше?? вставляю вдале потом это когда-то.)

При малых скоростях и ускорениях (? почему малых? мы же нигде малость не использовали???) имеется соотношение для времен путешественника и наблюдателя: $d\tau^2 = \left(1 + 2 \frac{\phi(x)}{c^2} \right) dt^2$. В рамках ОТО путешественник может считать, что ускорение обусловлено гравитацией. При этом потенциал силы тяжести в точке, где находится путешественник, отличается от потенциала в точке, где находится близнец-наблюдатель.

Допустим, что силы инерции-гравитации при торможении действуют малый промежуток времени $\Delta_2 t'$, так что скорость наблюдателя меняется за это время от $-v$ до 0, и ускорение, следовательно, равно величине

$$a = \frac{v}{\Delta_2 t'}$$

Оно направлено против оси x' , поэтому потенциал равен

$$\phi(x') = -ax'$$

В точке путешественника $x' = 0$, и

$$dt'^2 = d\tau^2$$

В точке наблюдателя, оставшегося сзади,

$$x' = -v\Delta_1 t'$$

так как наблюдатель удалялся от путешественника со скоростью $(-v)$ в течение времени $\Delta_1 t'$, которое прошло от начала старта до начала торможения. Из $d\tau^2 \approx \left(1 + 2\frac{\phi(x')}{c^2}\right) dt'^2$ для наблюдателя при малых потенциалах

$$dt \approx \sqrt{1 + 2\frac{\phi(x')}{c^2}} dt' \approx \left(1 + \frac{\phi(x')}{c^2}\right) dt'$$

так что

$$\Delta_2 t \approx \left(1 + \frac{av}{c^2} \Delta_1 t\right) \Delta_2 t' = \Delta_2 t' + \beta^2 \Delta_1 t'$$

где $\Delta_2 t'$ - время за которое путешественник затормозит до нуля и мы подставили $a = \frac{v}{\Delta_2 t'}$. Как я писал вначале, на первом этапе равномерного движения время наблюдателя в системе путешественника шло медленнее ($\Delta_1 t < \Delta_1 t'$):

$$\Delta_1 t = \frac{1}{\gamma} \Delta_1 t' = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta_1 t' \approx \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) \Delta_1 t' = \Delta_1 t' - \frac{\beta^2}{2} \Delta_1 t'$$

(еще раз, тут речь о собственном времени наблюдателя, который отдаляется от путешественника)

От начала разлета до конца торможения с точки зрения путешественника у наблюдателя прошло

$$\Delta_1 t + \Delta_2 t = \Delta_1 t' + \Delta_2 t' + \frac{\beta^2}{2} \Delta_1 t'$$

Для разности в приближении малых скоростей, в итоге, имеем

$$\Delta t - \Delta t' = \frac{\beta^2}{2} \Delta_1 t'$$

А в системе близнеца-наблюдателя с той же точностью имеем:

$$\Delta t = \gamma \Delta t', \quad \Rightarrow \quad \Delta t - \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Delta_1 t' - \Delta_1 t' \approx \frac{\beta^2}{2} \Delta_1 t'$$

Времена оказались равными.

Solution Эйнштейна 1918 парадокса близнецов (??????)

Эйнштейн считал, что есть только одно решение, которое даст ответ на парадокс близнецов - загадку, которая очаровывала столь многих любителей относительности. Разберемся, что из себя конкретно представляет это решение и насколько на самом деле оно содержательное. И на самом деле ли она требует от нас выйти из рамок специальной теории относительности для того, чтобы решить этот парадокс, который в рамках нее сформулирован?

В 1905 году Эйнштейн предложил СТО в статье "об электродинамике движущихся тел". There he noted "a peculiar trait of his theory": if a clock travel with a constant velocity, it will show less time than one that remains stationary. But the Twin Paradox was not addressed by Einstein until 1911, when he was giving a lecture at Zurich. When posed a question about a clock example by student, he was inspired to assert that although a traveling clock runs slower if it is in uniform motion if it undergoes a change of direction as the result of a jolt then the theory of relativity does not tell us what happens.

by change in direction or jolt einstein means acceleration.

essentially he is saying that special relativity cannot handle acceleration, so contradictions like the twin paradox are outside its scope.

This wasn't a spur of the moment defense, rather it was a claim Einstein truly believed and which he repeated multiple times over the years. What's strange is that this claim is most definitely wrong. Special relativity has no issue handling accelerated frames of reference

Its postulates merely have to be covariantly extended in more complex forms. It's not likely this distinction eluded someone as intelligent as einstein.

More probably something else about accelerated frames and special relativity bothered him.

but what was it exactly? His take on the twin paradox during his later career gives us some insight.

In a 1918 lecture Einstein gave an explanation to the twin paradox that in a private letter to his friend Friedrich Adler he indicated he found preferable to all other explanations.

this solution however appeared to require moving treatment of the problem from special relativity to general relativity and likely because of that fact it never gained wider acceptance as an explanation.

many physicists aren't aware of it and most textbooks don't even address it. but without it einstein implied our picture of reality is incomplete.

So what is the explanation? According to einstein, there are two equally valid but distinct perspectives to the paradox.

the first perspective is that of the earthbound twin who sees her counterpart leave earth at constant velocity, travel to the turnaround point, briefly experience a force and then return to earth again at constant velocity.

because the space twin is in motion his clocks run slow and when he rejoins his twin on earth he has aged less than her.

This is the same as how the earth twins perspective is usually described in the paradox.

But now let's consider the space twins perspective. According to einstein the space twin can claim that he is actually at rest during his entire journey. Indeed from his point of view it is the earth and the rest of the universe that are traveling away at constant velocity turning around and traveling back again and whose clocks are therefore running slow. He can even say that it is his twin along with the rest of the universe that is accelerating at the turnaround point. Not him.

This is keenly distinct from the viewpoint of the solution in special relativity where the acceleration of the space twin is treated as absolute and moreover where it is considered to be the reason why the twins's situation cannot be regarded as symmetric.

but in einstein's view we can still preserve the cemetery we can say that both twins have equal right to claim that they are at rest the entire journey.

but how does this work? how can two completely different accounts of motion remain consistent? according to einstein the answer is through gravity.

let's take a closer look during the constant velocity portions of the trip the space twin will see his earthbound twins clocks running slow just as in the usual formulation of the paradox. however something unique occurs to his perspective at the turnaround point. rather than observe himself accelerate the space twin will instead claim to see a uniform gravitational field arise throughout all space, one that accelerates the earth his twin and the rest of the fixed stars towards him.

at the same time he feels a force from his rockets which keeps him from moving along with the rest of the universe.

now, because clocks run faster farther out in gravitational fields distant objects will appear to age very rapidly from his perspective, and thus by the time he finishes turning around he will see that his earth twin has aged through more elapsed time than himself.

this rapid aging will be more than enough to compensate for the dilated passage of time he observed for his earthbound counterpart during the constant velocity portion of her trip. This is why when the twins are reunited they both will agree that the earth twin is older.

Alright so that's the explanation. It definitely seems a little out there.

So the question we want to ask is what's really being said here now?

Some of readers see something absurd in the idea of suddenly observing a gravitational field filling the entirety of the universe. Some readers can point out the fact that since there exists no source to produce such a gravitational field, it has to be regarded as fictitious. Meaning the space twin cannot truly claim that he is at rest.

Einstein actually had an answer for this latter objection he claimed that the source of the gravitational field could be attributed to the motion of the fixed stars that is he wrote "just as an accelerated charge induces a changing electric field so should an accelerated mass induce a changing gravitational field".

In this way an observer's worldview will remain consistent with being at rest even if they are accelerating.

We can begin to understand now why einstein believed special relativity couldn't handle acceleration. he thought that only by incorporating gravity into the picture could the relativity of all motion be accounted for and the twin paradox fully explained.

otherwise, if you wish to resolve the paradox in special relativity you'd have to begin by asserting that acceleration is somehow a privileged absolute form of motion.

absolute motion was an idea that einstein strongly disliked and which he claimed "kinematically made no sense anyway".

einstein's answer seems to wrap everything up in a nice bow, so is there any reason to remain skeptical of his solution. Well, it turns out yes. Einstein makes two crucial flaws in his reasoning in his 1918 lecture.

the first is with his electric charge analogy. While it's true an accelerated charge will induce a changing electric field there's a distinct causal order to this process that plays an important role. we can break down this order as follows: 1) A force is applied to the charge 2) As a consequence of one the charge accelerates 3) as a consequence of two a changing electric field is induced.

Attempting to construct an analogous order for the gravitational field, however, leads to a contradiction, since from the space twins perspective we only have the following two occurrences.

1) a uniform gravitational field arises, 2) earth and the fixed stars accelerate.

einstein muddles the cause-and-effect relationship of these two occurrences.

in the first half of his lecture he asserts that as seen from the space twins perspective 2) is

a consequence of 1) that is that the gravitational field is responsible for accelerating the earth and the rest of the stars.

but then in the second half of his lecture he claims that the acceleration of the stars is what actually induces the gravitational field to appear in the first place. Meaning that 1) would therefore have to be a 2) of two.

this circular relationship is obviously somewhat problematic.

the arising of the gravitational field is even more problematic, however, because from the space twins perspective it appears in a non-local instantaneous fashion throughout all of space. this strongly suggests that the space twin can't assert the reality of the gravitational field.

in fact the whole formulation seems pretty ad-hoc (конкретное, не общее решение), since obviously any intelligent human observer would be able to correlate the firing of his rockets to the acceleration of everything around him and thereby deduce that the force fields he sees are fictitious. Like the ones observed from inside the frame of an accelerating car.

this leads to an important point about gravity in general relativity. if an observer sees a gravitational field that can be transformed away by a change of coordinates, then the curvature of that corresponding space-time region is flat and there exists no real gravity. if the observer is unable to find a transformation such that the gravitational field can be made to vanish, just as we observers on earth are unable to do with our own gravitational field (???? не можем, да????), then this indicates the presence of curved space-time or real gravity.

this means that the gravitational field formulation of the twin paradox never actually leaves the domain of special relativity because the twins's space-time always remains flat.

(!!!!)

it's clear einstein conflates some of these issues in his 1918 lecture in hopes of preserving the symmetry of the twins motion but this brings us to the second flaw in his reasoning. the fact that he muddles what it actually means to assert the relativity of all motion certainly an observer inside an accelerating vehicle could choose to assert that he is at rest, but then the laws of physics he would have to develop to describe the behavior of his system would be different than the laws of physics an inertial observer would use. This is exactly because of the force fields he would have to invent in order to explain the motion of everything around him. This ability that is to extend the laws of physics to non-uniform frames of motion by modifying their form is called the principle of general covariance.

(!!!)

Einstein believed in what's called the general principle of relativity or the idea that the laws of physics should take the same form regardless of one's frame of reference for a while he mistakenly thought he had achieved this principle through the theory of general relativity.

But it was eventually pointed out to him by a physicist named Eric Kretschman that general relativity only upholds the principle of general covariance not the general principle of relativity.

in fact one can construct a generally covariant coordinateless framework for newtonian mechanics. a fact which surprisingly indicates that we're no closer to truly relativizing motion than we were three centuries ago.

this means that explanations which imply that general relativity upholds the quality of all frames in motion are in fact strongly misleading.

acceleration in general relativity is still an absolute phenomenon and can according to the theory be objectively agreed upon by all observers.

ultimately this means that the twins do not have equal right to claim that they are at rest the entire journey.

so where does that leave einstein's twin paradox
explanation then

well, essentially his explanation is just an application of the equivalence principle.

which asserts the equivalence of accelerated frames of reference and homogeneous gravitational fields

the key word here is accelerated the

equivalence principle can't even be applied in the first place unless we can objectively agree that a given frame is accelerating.

alternatively you can say that being in the presence of a gravitational field indicates that your frame is accelerating but either way what you mean by acceleration in these cases is something that will be objectively agreed upon by all inertial observers.

now if you ask what in einstein's explanation is responsible for causing the difference in the twins experiences you'll find that the answer is still the force the space twin feels when he fires his rockets. which is the same answer you'd get from the special relativity solution.

in fact if you stack the two explanations side by side the primary difference between them is that in einstein's explanation the rapid aging of the earth's twin is attributed to the gravitational field whereas in special relativity that aging is attributed to the rotation of the space twins planes of simultaneity.

(тут картинка сравнения)

This brings us finally to what is actually being said by this explanation, which is that the equivalence principle essentially implies the equality of these two phenomena.

so, ironically, it's not gravity that tells us something about the twin paradox, but rather the twin paradox that tells us something about gravity.

(!!?!?!?! really??? I'll think about it more.)

so our final verdict gravity does not resolve the paradox incorporating it into the picture gives us some insight into the equivalence principle and points us in the direction of general relativity.

but the paradox itself never leaves the framework of special relativity.

and so those questions that continue to plague us, namely, what it actually means to say that force is the agent of asymmetry? And whether that's ultimately even correct?

Вопросы о деталях о парадоксе близнецов

**Пока близнецы только разлетаются, чье время все-таки идет медленнее?
(?????)**

Думаю пока, что ответ в том, что оба заключат, что время второго течет медленнее и будут правы.

(???? а потом как так получается все-таки, что суммарно за разлет + остановку время на гамма фактор будет отличаться?????? непонятно, откуда такой переход произошел?? хотя Киселев это и написал, но у него муть написана.)

Обзор парадокса близнецов

Философские выводы о физике из парадокса близнецов

У нас есть абсолютное ускорение, или с нашей физикой что-то не то.

Философские выводы о не физике из парадокса близнецов

Важно иметь критическое мышление.

Важно интересоваться фундаментальной физикой.

Применения парадокса близнецов

Тут укажу все известные мне места, где нужен парадокс близнецов.

детальное рассмотрение парадокса близнецов показывает не только физическое содержание и границы применимости специальной теории относительности, но и выявляет ее связь с общей теорией относительности как теории гравитационного поля.

Он учит нас о гравитации (?????)

(пропишу потом.)

Что нужно знать, чтобы парадокс очевидно не возник (!??!)

(потом в теории это же и пропишу)

Парадокс близнецов как иллюстрация принципа эквивалентности в ОТО

Об идее перекинуть парадокс близнецов на ОТО

(?? что если просто сказать, типа это дело ОТО, а не СТО???)

5.7.2 Twin Paradox: Basic Theory 2

О парадоксе близнецов в искривленном пространстве-времени (????!!!)

Основные выводы (??)

Тут ускоряющийся наблюдатель окажется старше.

Ускоряющийся - тот, который стоит на Земле. (!?!?!?)

О парадоксе близнецов в метрике Шварцшильда (!?!??)

(укажу тут суть, а подробно в отдельной статье это решаться будет.)

О заблуждениях про парадокс близнецов (!!!!)

О заблуждении, что парадокс близнецов решается диаграммой пространства- времени, и указанием на ней временных упущений

(короче, я остановился на том, что мы всегда можем определить, чье ускорение настоящее. (??? разве что земной близнец может не знать это, потому что допустим нельзя будет увидеть горящие двигатели ракеты и изменение ее массы, так что у него по идее будет два расчета, для случая, когда его ускорение или ускорение другого реальное. потом при встрече становится понятно, что именно у путешественника было реальное ускорение. окей, задача решается некоторым знанием о системе, без которого нельзя выбрать правильный ответ))

Просто вот линия такая берет, меняется на под обратным углом, путешественник летит назад, там линии одинакового времени рисуем, и там она, разница во времени.

Потому что ровно такую же диаграмму можно нарисовать и для другого наблюдателя.

space-time diagrams can be a great tool for understanding how space and time transform in relativity but because of their apparent sophistication (кажущаяся утонченность) they're also an easy way to disguise the real issue at the heart of the paradox. So, there is time missing from the space traveling twins measurements as depicted by the gray gap in diagram.

(мб тут вставляю картинку)

But the hitch is this this. time is only missing if both twins agree that it is the space twin who turns around or accelerates. acceleration is the necessary condition in order for the space twins notion of time to rotate. This means that if the space twin asserts that the earth twin turns around it'll be the earth twin whose notion of time rotates and who thus experiences the missing time. this is seen most easily by drawing a second space-time diagram which is a mirror of the first and which describes the world paths of the twins if the earth twin instead of the space twin is decided to be the accelerating one. in this diagram the earth twin departs at a certain velocity reaches the turnaround point then begins accelerating back towards the space twin. the acceleration is represented by the sharp turning point in the earth twins world path. now in this space-time diagram the grey missing time zone no longer belongs to the space twin but instead to the earth twin. thus since the earth twin now fails to account for a stretch of passing time they will discover that it is this space twin who is going to be the older one when the pair is rejoined thus if you want to use the space-time diagram for describing the twin paradox you have to draw two space-time diagrams one for each twins perspective and as soon as you realize that both twins have the right to draw different space-time diagrams you arrive right back at the paradox to be able to draw one and only one diagram requires both twins agreeing on who the accelerating twin is minutephysics states this at several points which is why his space-time diagram solution is in reality just your basic acceleration solution at this point you might think well hey isn't it obvious who accelerated if the space twin has to fire his rockets or turn his ship around then obviously both twins will agree he's the accelerating one right but you have to remember that firing rockets or turning ships around does not constitute

acceleration acceleration is purely coordinative it's a description of motion given relative to an observer ki Ward being relative the tendency for people to confuse acceleration with other phenomena is explained in greater length in a prior video of ours can you feel force which you can find a link to in the description below all right now back to the videos now we wanted to put silence asylums video in the second tier of twin paradox explanations because at least in the first half of the video it actually does a pretty good job of touching on the deeper confusions of the paradox having one of the observers accelerate just adds another measurement to the list of things they disagree on forces are now on the list it's not that

significant of a change it certainly doesn't make one person right in another person wrong it just makes them more relative but then he takes ten steps backwards by emphasizing that it's the mathematics which somehow solve the issue it's rule number three we forgot rule number three we have to use the correct coordinate transformation like minutephysics he also goes on to insist on the importance of drawing a spacetime diagram but his video only grows more and more confusing at one point he asserts that you don't need to have the twins accelerate to illustrate the paradox this paradox does not require accelerations it persists even if rocket clone go to the same velocity the whole time then almost immediately afterwards he contradicts himself by saying you do need to have the twins accelerate without the acceleration we only get one shared event the acceleration gives us a second shared event it's hard to say exactly what is supposed to be the takeaway from this video but certainly it adds to the impression many viewers

mistakenly have that the paradox is somehow the result of doing the math wrong now in physics math is simply a model that follows our assumptions certainly doing the math wrong is going to confuse you but as long as your axioms are consistent the math won't create paradoxes so this should be the first clue that you shouldn't need math to understand what breaks the symmetry of the twin paradox the second clue is that we already did the math back when we dealt with the space-time diagrams space-time diagrams are just graphical representations of the Lorentz transformations which are the mathematical tools for handling special relativity and since we already know space-time diagrams don't resolve the paradox then we should realize that neither will the Lorentz transformations however for those of our more skeptical viewers

were going to briefly show where the math breaks down all right here we go so Albert blasts off at half the speed of light away from Emmy after two years on her clock she sees him turn around and can calculate via the Lorentz transformations what his coordinates

should read after doing the calculations she'll get that his clock coordinate at a Turner reads the square root of three years and that his space coordinate reads zero now Albert can use the backwards transformations to see what her cornets for this measurement read and he'll confirmed they'll read two years and one light year distance away however what if he wants to calculate what her corn is to read in his frame well for him she's the one in motion so he can use the exact same forward transformation that she used but just with slightly different initial conditions namely that her velocity is negative $1/2$ the speed of light thus using the forward transformations he'll see her blast away at half the speed of light and after the square root of three years he sees that she turns around after doing the Lorentz calculations he'll get that her space cornet corresponding to the turnaround point reads zero and that her time coordinate reads one and a half years thus to summarize when Albert reaches the turnaround point Emmy will calculate that only about one point seven three years has elapsed for him and two years for her but in Albert's frame when Emmy reaches the turnaround point he will calculate that while one point seven three years has indeed elapsed for him only one point five years has elapsed for her thus both twins at this point can claim the other is younger now on the return journey both twins can essentially repeat these calculations and get the same durations of elapsed time as they calculated for the outward journey thus Emmy now claims four years have passed for her and about three point four for Albert while Albert

claims three point four years have passed for him but only three years for her but there's one part of the calculation still missing being that the Lorentz transformations are actually differential equations they'll be affected by changes in velocity so both Emmy and Albert now have to calculate how much time went missing from each other's perspectives at the turnaround point there's two different ways to approach these calculations you can model a gradual T acceleration acceleration equation of motion and integrate the Lorentz equations or you can jump discontinuously into a frame with opposite velocity and calculate the synchronisation gap either way you'll give the same answer since Emma believes Albert turned around she calculates that he will calculate her aging through the missing year during his turn around and that when he arrives back his calculations will put her at four years of age consistent with her actual age but since Albert believes Emmie turned around he calculates that she will calculate him aging through the extra point for six years so that when she returns their measurements will be consistent thus even after accounting for acceleration

the paradox still remains the twins are telling two entirely different stories so what resolves it well if both twins agree that only Albert actually accelerated then Albert won't have to calculate Emme calculating him aging more rapidly at the turnaround and both twins will agree on the amount of the elapsed time for all clocks involved so wait you might be asking are you now saying after all this spiel that acceleration does resolve the paradox no both twins agreeing on whose acceleration is more real resolves the paradox but nothing in the math tells us why the twins are allowed to pick and choose one acceleration over the other therefore something else must be responsible for breaking the symmetry of

the twin paradox all right so we've run out of time to discuss second tier explanations to the twin paradox so we'll be covering those as well as exploring the twin paradox in greater depth in a follow-up video we understand that this video is pretty technical and not going to clear up everyone's confusion so feel free to leave any questions you might have in the comments below but for now we just want to leave you with three main takeaways about the twin paradox one all motion including acceleration is by definition coordinative and therefore relative to something else must determine what privileges one twins time-dilation over the others and finally three the twin paradox isn't easy to understand it's difficult and it takes work and anyone who tells you

otherwise probably doesn't understand it themselves this has been dialect thanks for watching

О заблуждении, что парадокс близнецов решается наличием у путешественника ускорения

(???? вроде тут все нормально, это нормальное решение, я на этом остановился.)

Ускорение это ответ, разве что два момента: 1) оба наблюдателя будут видеть другого, который ускоряется навстречу, 2) идея абсолютного ускорения сомнительна с точки зрения физики.

Мы говорим, что есть четкая асимметрия, что именно один близнец ускоряется.

Однако эта идея сильно противоречит идее относительности о том, что оба взгляда одинаково верны.

что именно он ускоряется, легко понять, потому что в его системе отчета все тела перестанут двигаться прямолинейно или покоятся, хотя никакого воздействия на них он не будет наблюдать.

В СТО ускорение придется принять как особенная черта движения, которое отличает это движение от других.

Основной вопрос в том, чье ускорение во время разворота на самом деле настоящее? Здравый смысл подсказывает, что того, кто включил двигатели ракет. И в самом деле, невозможно иначе повернуть назад.

Но если бы была пустота вокруг, и путешественник включил двигатели, то кто бы ускорялся, он или частицы, вылетающие из сопел ракет? Наверное, оба, потому что у нас есть закон сохранения импульса. (??? вспомню там потом формулы реактивного движения по механике, их добавлю) Ну и все, вопросов тут нет.

Да, можно подумать, что будет, если они будут сближаться и без способа определить, у кого ускорение настоящее, однако такое нефизично: ускорение может быть или от чего-то вовне, или от потери массы системы. Если во вне, то вот и то, что разрушает симметрию задачи, если потеря массы, то тоже за счет этого мы сразу скажем, какой близнец ускоряется. Таким образом, у нас никогда не будет вопроса про это.

Если рассмотреть элементарные частицы, которые не могут определять, есть сила или нет, как они поймут, у кого ускорение? Ответ, что ускорение может быть только от внешних полей, иначе никогда они не развернутся. Где есть поле, там и есть воздействие на время.

О заблуждении, что парадокс близнецов решается переходом в ОТО, т.е. тем, что путешественник будет при ускорении чувствовать некоторое гравитационное поле

Без формул объяснение следующее:

Типа относительно путешественника наблюдатель и остальная вселенная начинает ускоряться ему на встречу.

А мы находимся в ИСО, как и были, но теперь у нас появилась гравитация, которая и сдвигает все объекты силой. И эта гравитация будет действовать вообще на все звезды во Вселенной, на все объекты, в том числе, на близнеца-наблюдателя. Это как раз то явление, которое другой бы назвал нахождением в НСО.

и во время этого поворота часы начнут идти быстрее за счет влияния гравитации.

И близнец-путешественник просто включает двигатели, чтобы препятствовать этому гравитационному полю. (?? и какой тут покой???)

И оба близнеца могут справедливо утверждать, что они всегда находились в покое во время их путешествий.

А теперь с формулами: (????)

Есть некоторые возражения по поводу объяснений. Например, что путешественник не может на самом деле утверждать, что он в покое.

Эйнштейн сказал, что источник гравитационного поля может быть связан с движением всех звезд.

Как и ускоряющейся заряд производит изменение в напряженности электрического поля. Так и ускоряющиеся массы - вся вселенная, она создает гравитационное поле.

Поэтому путешественник и включает двигатели, чтобы продолжить оставаться в покое.

И поэтому ОТО и объясняет парадокс, потому что только оно может объяснить ускорение.

Почему это решение неверное?

Потому что в случае движения заряда и поля у нас были причины - поле, следствие - ускорение заряда, а потом действие на поле.

А тут нет такого, не может причина быть и следствием.

(мб лучше напишу потом это)

А также мы всегда можем посмотреть на ракеты и заключить, что скорее это мы ускоряемся, а не появляется поле.

И тут кст видим, что если переходом в другую СО пространство становится плоским, то значит нет другого грав поля.

Физика Ньютона Картана

Вообще, многие не такие развитые физики шаблонно говорят, что парадокс близнецов решается принципом эквивалентности и ничего за этими словами не понимают. Обходи таких стороной.

О заблуждении, что парадокс близнецов решается

О заблуждении, что парадокс близнецов решается

О других модификациях парадокса близнецов

О парадоксе близнецов, в случае, если оба близнеца разлетаются, а потом встречаются (??)

Поставим следующую задачу: (??? напишу потом четко ее) (разлетаются, одновременно поворачивают назад, скорости одинаковые.)

В данном случае все симметрично, поэтому здравый смысл подсказывает, что времена должны быть одинаковые. Однако, если мы нарисуем диаграмму пространства-времени, то они будут выглядеть ровно так же, как и в случае, что один из близнецов покоился бы.

(???? тогда вопрос, почему для такого случая ускорение уже не решение????)

(напишу потом формулы.)

5.7.3 Twin Paradox: Advanced Ideas

Some potential solutions

Reminder: the problem is that one can't say, which frame of twins is inertial and which is not by default, this is our input, but how can our input be influencing physics?

(I'll formulate it better later)

Maybe inertial/non-inertial frame is fixed by averaging all microscopic interactions and then the limit of them is taken to zero (this is why we don't see them)

So the solution is the same as for big body paradox in mechanics. There if one takes into account finite mass of a big body, the calculations of energy in a moving frame will be right, and if no - wrong. The limit is taken at the last stage.

Maybe the case is here? One needs just to take properly the limit, thus to reproduce results of inertial or non-inertial frame. Maybe...

(????)

5.7.4 The Sagnac Effect: Correct Explanations by G.B. Malykin

Different explanations of the Sagnac effect are discussed. It is shown that this effect is a consequence of the composition of velocities law of relativity theory and that it can also be explained adequately within the framework of general relativity. When certain rotation velocity restrictions are imposed, the Sagnac effect can be attributed to the difference in the time retardation (phase shift) of material particle wave functions in the scalar (vector) gravity potential of the inertial forces in a rotating reference frame for counter-propagating waves. It is also shown that all the non-relativistic interpretations of the Sagnac effect, which unfortunately are sometimes found in scientific papers, monographs and textbooks, are wrong in principle, even though the results they yield are accurate up to relativistic corrections in some special cases.

1. Введение

Эффект Саньяка [1-3] (см. также обзоры [4-8] и обзорную часть работы [9]) заключается в том, что во вращающемся кольцевом интерферометре одна встречная волна приобретает фазовый сдвиг относительно другой встречной волны, который прямо пропорционален угловой скорости вращения, площади, охватываемой интерферометром, и частоте волны. Это кинематический эффект специальной теории относительности (СТО) [10], и, как показано в [11], он является следствием релятивистского закона сложения скоростей. Эффект Саньяка наряду с экспериментами Майкельсона-Морли [12, 13] является одним из основополагающих опытов теории относительности. В настоящее время эффект Саньяка зарегистрирован (помимо оптического диапазона) для радиоволн [14], рентгеновских лучей [15], а также для волн не электромагнитной природы - волн де Бройля материальных частиц (электронов [9, 16], нейтронов [17, 18], атомов кальция [19], натрия [20] и цезия [21]).

Теоретически показано, что данный эффект существует для γ -лучей [22] акустических, а также для поверхностных акустических и поверхностных магнитостатических волн (так называемых "медленных" волн) [11, 23] и для волн де Бройля π -мезонов [24].

Эффект Саньяка может быть также в принципе зарегистрирован в виде различия времен, затрачиваемых макроскопическим материальным телом, имеющим одинаковые скорости относительно вращающегося диска, на прохождение замкнутого пути по кольцевой траектории на диске, для случаев, когда направление движения тела совпадает с направлением вращения диска и когда оно противоположно направлению вращения.

Известно [4-9], что как для оптических волн, так и для волн не электромагнитной природы эффект Саньяка объясняется несколькими совершенно различными способами, в том числе и отрицающими теорию относительности. Тем не менее большинство из этих способов, несмотря на их явную некорректность, приводят в некоторых частных

случаях к правильным результатам. Это, в известной мере, обусловило отсутствие полной ясности в данном вопросе и даже позволило некоторым авторам считать эффект Саньяка "загадочным" [25].

Цель настоящей работы - дать совершенно строгий вывод выражения для величины эффекта Саньяка в рамках СТО в самом общем случае: для волн произвольной природы, в том числе и для световых волн, для случая, когда кольцевой интерферометр заполнен оптической средой с коэффициентом преломления n и произвольной дисперсией. Будет показано, что не только в нерелятивистском пределе, но и при произвольной скорости вращения величина эффекта Саньяка не зависит от указанных параметров оптической среды.

Насколько известно автору, строгое и всестороннее рассмотрение данного вопроса в рамках СТО в самом общем случае ранее не проводилось. Так, в работе [10] приводится строгий вывод выражения для эффекта Саньяка в оптике в рамках СТО, однако для случая, когда в кольцевом интерферометре отсутствует оптическая среда. В нашей работе [11] приводится вывод выражения для величины эффекта Саньяка для волн произвольного типа в рамках СТО, однако в пренебрежении малыми релятивистскими поправками. Имеется ряд работ, в которых проводится рассмотрение эффекта Саньяка в рамках СТО, но только для световых волн [5, 26-33] и с рядом приближений.

Известно, что эффект Саньяка также находит адекватное объяснение в рамках общей теории относительности (ОТО) (см., например, [34, 35]). В этом случае для расчетов используется метрический тензор в сопровождающей вращение интерферометра системе отсчета.

Эффект Саньяка можно также рассматривать как следствие различного замедления времени во вращающихся системах отсчета, сопровождающих движение фазовых фронтов встречных волн, что обусловлено различием фазовых скоростей встречных волн относительно инерциальной системы отсчета при вращении кольцевого интерферометра. Этот же результат может быть получен исходя из различия ньютоновского (нерелятивистского) скалярного гравитационного потенциала центробежных сил для встречных волн в рассмотренных выше системах отсчета, что является следствием принципа эквивалентности.

Будет показано, что эффект Саньяка при некоторых ограничениях на скорость вращения кольцевого интерферометра можно рассматривать также как следствие различного замедления времени для встречных волн в системе отсчета, сопровождающей вращение кольцевого интерферометра, которое обусловлено различием знаков ньютоновского скалярного гравитационного потенциала сил Кориолиса [35], что также является следствием принципа эквивалентности. Такое рассмотрение проводится впервые. Для квантовомеханических объектов - материальных частиц - эффект Саньяка может найти объяснение как следствие воздействия векторного гравитационного потенциала сил Кориолиса на изменение фазы волновой функции [9].

Следует отметить, что ни центробежные силы, ни силы Кориолиса непосредственно не являются причиной появления эффекта Саньяка, поскольку это кинематический эффект и он не связан с какими-либо силами.

Другая цель данной работы - рассмотреть различные нерелятивистские способы объяснения эффекта Саньяка и наглядно продемонстрировать ошибочность подобных объяснений этого эффекта.

2. Корректные объяснения эффекта Саньяка

Корректными будем считать такие объяснения эффекта Саньяка, которые позволяют получить точное выражение для разности фаз встречных волн во вращающемся кольцевом интерферометре без каких-либо ограничений на параметры системы -

линейной скорости вращения кольца (платформы, на которой расположен интерферометр), скорости волн, в том числе и волн де Бройля или материального тела относительно сопровождающей вращения системы отсчета (разумеется, эти скорости не должны превышать скорость света), массы материальной частицы и др. Все корректные объяснения эффекта Саньяка базируются на применении теории относительности.

2.1. Эффект Саньяка

в специальной теории относительности

Пусть свет или некоторая волна произвольной природы движется по окружности (рис. 1), что имеет место, например, в волоконном кольцевом интерферометре (ВКИ) [36], а также в обычном кольцевом интерферометре в случае, когда число расположенных по окружности зеркал или призм полного внутреннего отражения стремится к бесконечности. Здесь и далее при расчетах мы не будем учитывать изменение геометрических размеров интерферометра под влиянием центробежных сил, а также поперечный сдвиг встречных волн под действием центробежных сил, связанных с кривизной их траектории в интерферометре, который приводит к незначительному увеличению площади кольца, причем это увеличение одинаково для обеих встречных волн [37, 38] и, следовательно, не приводит к появлению разности фаз между ними.

Вывод выражения для эффекта Саньяка в рамках СТО в большинстве случаев (см., например, [10]) проводится исходя из инвариантности интервала $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ (где x, y, z - координаты волнового фронта волны, t - время). Здесь мы, следуя нашей работе [11], приведем более простое и физически более наглядное рассмотрение данного вопроса на основе релятивист-

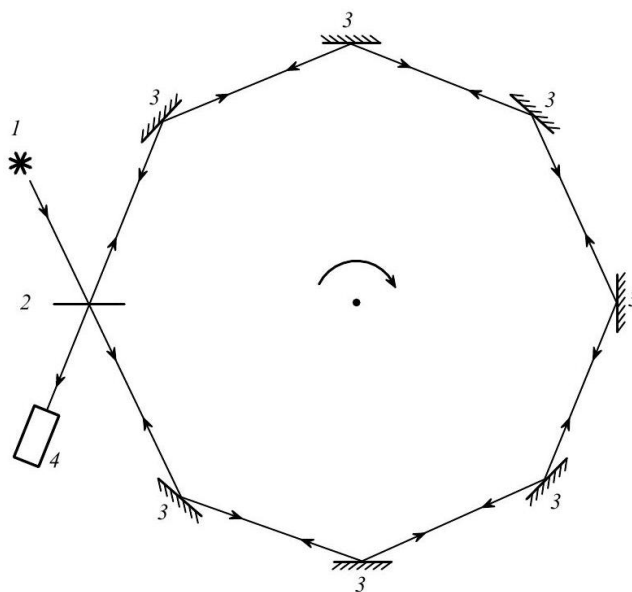


Рис. 1. Кольцевой интерферометр: 1 - источник излучения; 2 - светоделительная пластинка (полупрозрачное зеркало); 3 - зеркала; 4 - фотоприемник. Стрелка указывает направление вращения интерферометра.

ского закона сложения скоростей, которое позволяет без всякой потери общности получить выражение для эффекта Саньяка в случае волн произвольной природы и, в частности, для электромагнитных волн в случае, когда кольцевой интерферометр заполнен оптической средой с произвольным коэффициентом преломления и дисперсией.

Рассмотрим эффект Саньяка в самом общем виде для произвольного типа волн, распространяющихся в произвольной среде с фазовой скоростью $v_\phi^\pm$. Запишем выражения для длины пути $l^\pm$ в лабораторной (неподвижной) системе отсчета K , где специальная теория относительности заведомо справедлива (знак плюс соответствует

волне, направление которой совпадает с направлением вращения, знак минус - волне, распространяющейся в противоположном направлении):

$$l^{\pm} = 2\pi R \pm R\Omega t^{\pm}, \quad (1)$$

$$v_{\Phi}^{\pm} = \frac{v_{\phi} \pm R\Omega}{1 \pm v_{\phi} R\Omega/c^2}. \quad (2)$$

Здесь R - радиус кольца, Ω - угловая скорость вращения, c - скорость света в вакууме, $t^{\pm} = l^{\pm}/v_{\phi}^{\pm}$ - времена, затрачиваемые встречными волнами на обход кольца.

Рассмотрим физический смысл фазовых скоростей встречных волн $v_{\phi}^{\pm}$ во вращающемся кольцевом интерферометре. Вопрос этот не так прост, как может показаться на первый взгляд. Дело в том, что при постоянной угловой скорости Ω и рассматриваемом здесь монохроматическом гармоническом колебании на приемном устройстве (для световых волн - на фотоприемнике или фотопластинке), на котором регистрируется результат интерференции встречных волн (см. рис. 1), ничего не меняется; там регистрируется постоянная разность фаз между встречными волнами, и не вполне понятно, о каких скоростях их распространения идет речь.

Гораздо проще проводить рассмотрение эффекта Саньяка для случая, когда в кольцевом интерферометре распространяются два встречных импульса той или иной

природы; при этом скоростями встречных импульсов являются их групповые скорости, которые также могут быть получены путем релятивистского сложения (с соответствующим знаком) их групповой скорости с линейной скоростью $R\Omega$. Такие импульсы, если они достаточно короткие, придут за различные времена на делительное устройство интерферометра (которое переместится на некоторое расстояние за время обхода импульсами кольца) и, таким образом, не создадут интерференционной картины. Измеренная тем или иным способом разность времен прохождения импульсов будет характеризовать величину эффекта Саньяка. Использование интерференции встречных волн позволяет на много порядков по сравнению с измерением разности времен прохождения импульсов повысить чувствительность измерения угловой скорости вращения. Для электромагнитных волн при отсутствии оптической среды фазовая и групповая скорости света совпадают и можно (см., например, [10]) производить вычисления разности времен прохождения встречных волн для групповых скоростей, а результаты расчета использовать для вычисления результата интерференции встречных волн. Однако в самом общем случае (а тем более для волн произвольной природы) для вычисления результатов интерференции встречных волн следует производить все промежуточные вычисления для фазовых скоростей, для чего требуется дать их четкое определение.

Покажем, почему мы можем использовать в расчетах величину фазовой скорости несмотря на то, что ей не соответствует никакое реальное перемещение физического объекта в пространстве или перенос энергии. Как известно (см., например, [34]), параметры ict , $\mathbf{r}$ образуют 4-вектор в четырехмерном пространстве-времени Минковского. Выражение для фазы волны имеет вид

$$\mathbf{kr} \pm \omega t = \phi = inv$$

(где $\mathbf{k} = \mathbf{x}^0 k_x + \mathbf{y}^0 k_y + \mathbf{z}^0 k_z$ - вектор, образованный волновыми числами k_x, k_y, k_z ; $\mathbf{r} = \mathbf{x}^0 x + \mathbf{y}^0 y + \mathbf{z}^0 z$; $k_i = 2\pi n_i/\lambda$; ω - круговая частота волны; n_i - коэффициент преломления вдоль i -го направления, $i = x, y, z$; $\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0$ - ортогональные единичные векторы; λ - длина волны), поскольку фаза как скалярная величина инвариантна относительно преобразований Лоренца. Таким образом, величины $\omega, \mathbf{k}$

также образуют 4 -вектор в обобщенном четырехмерном пространстве волновых чисел, для всех компонент которого одинаковы трансляционные свойства при переходе от системы отсчета K к системе отсчета K' . Тогда $\Delta \mathbf{r}/\Delta t = v_{\text{гр}}$ - групповая скорость волны, $\omega/k = v_{\phi}$ - фазовая скорость волны, где $k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$; таким образом, как $v_{\text{гр}}$, так и v_{ϕ} имеют одинаковые трансляционные свойства при переходе от системы отсчета K к системе отсчета K' .

Определим величину фазовой скорости каждой из встречных волн как линейную скорость перемещения точки фиксированной фазы данной волны вдоль кольца.

Согласно (1), (2) времена $t^{\pm}$ есть

$$t^{\pm} = \frac{2\pi R (1 \pm v_{\phi} R \Omega / c^2)}{v_{\phi} (1 - R^2 \Omega^2 / c^2)}. \quad (3)$$

Разность времен распространения встречных волн составит

$$\Delta t = t^{+} - t^{-} = \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2 (1 - R^2 \Omega^2 / c^2)}. \quad (4)$$

Таким образом, разность времен, затрачиваемых встречными волнами на прохождение кольца, не зависит от фазовой скорости волн. Следовательно, разность времен, обусловленная эффектом Саньяка, не зависит от того, заполнен кольцевой интерферометр оптической средой или нет. Кроме того, отсюда следует, что для волн произвольного типа (например, акустических волн, скорость которых существенно меньше скорости света) при условии, что частота волны, размеры кольца и угловая скорость вращения одинаковы, рассматриваемая разность времен будет такой же, как и для электромагнитных волн.

Из выражения (4) следует также, что волны, создающие интерференционную картину на делительном зеркале, т.е. пришедшие на него после обхода кольца одновременно, на входе кольца выходят из делительного зеркала в различные времена с разницей Δt . Поскольку здесь мы рассматриваем монохроматические гармонические колебания, то это никоим образом не влияет на видность интерференционной картины. Однако если в кольцевом интерферометре используются колебания со спектром конечной ширины, то при превышении величиной Δt времени корреляции этих колебаний видность может существенно уменьшиться.

Авторы большинства работ при расчетах величины эффекта Саньяка ограничиваются вычислением величины Δt . Однако, как было отмечено выше, поскольку на эксперименте измеряется не время прохождения кольца встречными волнами, а разность их фаз, то нам необходимо получить соответствующее выражение.

Для вычисления разности фаз встречных волн на выходе кольца, обусловленной эффектом Саньяка, целесообразно перейти в сопровождающую вращение кольцевого интерферометра систему отсчета K' . Такая целесообразность вытекает из ряда причин. Во-первых, интерференционная картина регистрируется на фотоприемнике или фотопластинке (фактически интерференционная картина существует уже на делительном зеркале кольцевого интерферометра), которая неподвижна в сопровождающей вращение системе отсчета. Во-вторых, в лабораторной (неподвижной) системе отсчета K делительное зеркало, которое является и источником, и фактически приемником излучения, совершает движение, из чего может быть сделан совершенно неадекватный вывод о том, что в данном случае имеет место классический эффект Доплера [39] (ошибочность подобного рассмотрения будет подробно рассмотрена ниже, в разделе 5.3). Переходя в сопровождающую вращение систему отсчета K' , где делительное зеркало кольцевого интерферометра неподвижно, мы избавляемся от необходимости рассматривать здесь данный вопрос.

В соответствии с преобразованиями Лоренца [40] разность времен распространения встречных волн в системе отсчета K' составит

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{\left(1 - \frac{R^2 \Omega^2}{c^2}\right)} = \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2 (1 - R^2 \Omega^2 / c^2)^{1/2}}. \quad (5)$$

Разность фаз встречных волн на выходе кольца, обусловленная эффектом Саньяка, составляет

$$\Phi_S = \omega \Delta t' = \frac{4S\Omega\omega}{c^2 (1 - R^2 \Omega^2 / c^2)^{1/2}} = \frac{8\pi S\Omega\nu}{c^2 (1 - R^2 \Omega^2 / c^2)^{1/2}}, \quad (6)$$

где ν - частота источника излучения в системе отсчета K' в случае, если источник излучения расположен на расстоянии R от центра вращения, т.е. непосредственно на кольце; $\omega = 2\pi\nu$ - круговая частота источника излучения; $S = \pi R^2$ - площадь кольца.

Если источник излучения расположен в центре вращения, то частота его излучения будет сдвинута в область более высоких частот на величину $R^2 \Omega^2 / (2c^2)$ по сравнению с частотой при его расположении на расстоянии R от центра вращения [41]. Этот эффект наблюдался экспериментально в работе [42].

Если источник излучения расположен в неподвижной системе отсчета K , то сдвиг частоты при переходе в сопровождающую вращение кольца систему отсчета K' будет зависеть от того, каким образом излучение передается в кольцевой интерферометр. Если излучение от неподвижного источника непосредственно падает на движущееся делительное зеркало кольцевого интерферометра, то вследствие классического эффекта Доплера его частота меняется на величину $R\Omega/c$, причем знак этого изменения зависит от того, набегают делительное зеркало на источник или убегает от него. Этот способ передачи излучения в кольцевой интерферометр весьма неудобен: он обеспечивает передачу излучения на небольшой части оборота кольца. Для ВКИ, который может быть связан с неподвижным источником излучения посредством достаточно длинного отрезка одномодового волоконного световода (ОВС), такой способ обеспечивает передачу излучения на много оборотов кольца [43]. Однако при этом следует иметь в виду, что вследствие линейных и торсионных деформаций связывающего отрезка ОВС меняется его оптическая длина, а вследствие его движения имеет место эффект увлечения Френеля-Физо [39, 44], что учесть при обработке экспериментальных результатов довольно сложно [45]. Гораздо удобнее передавать излучение в кольцевой интерферометр с помощью системы зеркал сверху, в центр вращения кольца; при этом оно не испытывает частотного сдвига, и при вращении кольца не происходит никакой разъюстировки. Затем излучение из центра вращения по радиусу поступает в кольцевой интерферометр и при этом, как было отмечено выше, испытывает изменение (повышение) частоты только во втором порядке по $R\Omega/c$. Такой способ передачи излучения в кольцевой интерферометр впервые использовал Ф. Гарресс [46] (описание экспериментов [46] приводится в [4-6, 8, 26, 47-49]), а затем Б. Погани [50-52] и А. Дюфо и Ф. Прюнье [53]. А. Эйнштейн [54], рассматривая эксперименты Ф. Гарресса [46], показал, что при таком способе передачи излучения в кольцевой интерферометр частота излучения не меняется в первом порядке по $R\Omega/c$.

Из выражения (6) следуют два важных вывода.

I. Величина разности фаз встречных волн, обусловленная эффектом Саньяка, не зависит от фазовой скорости волны, а зависит от частоты волны ν . В частности, отсюда следует, что величина разности фаз встречных волн, обусловленная эффектом Саньяка в оптическом диапазоне, где $v_\phi = c/n$, не зависит ни от коэффициента преломления n оптической среды, заполняющей интерферометр, ни от дисперсии коэффициента

преломления $dn/d\lambda$, причем вне зависимости от соотношения $R\Omega/c$. Авторы работы [10] полагали, что это имеет место исключительно в нерелятивистском пределе. В работе [55] обсуждался вопрос о зависимости величины разности

фаз встречных волн от коэффициента преломления n одномодового волоконного световода, из которого изготовлен ВКИ. Позднее путем довольно сложных вычислений, в которых использовалось выражение для вида коэффициента увлечения Френеля-Физо в оптической среде, было показано [33, 56], что величина разности фаз встречных волн, обусловленная эффектом Саньяка, не зависит от коэффициента преломления n ; но вопрос о влиянии дисперсии коэффициента преломления $dn/d\lambda$ и после этого продолжал обсуждаться [57]. (По этому поводу см. также работы Эйнштейна [54], Поста [5] и наши работы [8,11].) Поскольку фазовая скорость волны произвольного типа не зависит от дисперсии среды, то дисперсия никоим образом не может влиять на величину эффекта Саньяка.

II. В выражении (2) мы использовали релятивистский закон сложения фазовой скорости v_ϕ и скорости вращения кольца $R\Omega$. Это соответствует тому, что эффект Саньяка является эффектом СТО [10,11]. В разделе 5.2 будет показано, что использование галилеевского закона сложения скоростей при рассмотрении эффекта Саньяка для волн, распространяющихся в материальных средах, приводит к ошибочному результату, заключающемуся в отрицании существования данного эффекта.

В качестве примера применения выражения (6) рассмотрим эффект Саньяка на электромагнитных волнах при наличии в интерферометре оптической среды. Длина волны света составляет $\lambda = c/v$. В этом случае выражение (6) примет вид

$$\Phi_S = \frac{8\pi S\Omega}{\lambda c (1 - R^2\Omega^2/c^2)^{1/2}}. \quad (7)$$

Как было отмечено выше, вопрос о влиянии величины коэффициента преломления среды и его дисперсии на величину эффекта Саньяка до сих пор обсуждается. Приведем выражения для сдвига интерференционных полос встречных волн в кольцевом интерферометре Δz ($\Phi_S = 2\pi\Delta z$) и для разности частот встречных волн в кольцевом лазере Δv (разность частот встречных волн кольцевого лазера, обусловленная эффектом Саньяка, обратно пропорциональна величине коэффициента преломления [5]), когда интерферометр или резонатор лазера периметра L заполнен оптической средой с показателем преломления n и дисперсией $dn/d\lambda$, для различных случаев вращения среды и резонатора при условии $\Omega = \text{const}$ [5, 8].

1. Интерферометр и среда вращаются как единое целое:

$$\Delta z = \frac{4S\Omega n^2(1 - \alpha)}{\lambda c} = \frac{4S\Omega}{\lambda c}, \quad \Delta v = \frac{4S\Omega}{\lambda L n}, \quad (8)$$

где $\alpha = 1 - 1/n^2$ - коэффициент увлечения Френеля [44], S - площадь кольцевого интерферометра или резонатора кольцевого лазера, λ - длина волны света в вакууме.

2. Интерферометр вращается, среда неподвижна:

$$\Delta z = \frac{4S\Omega n^2}{\lambda c}, \quad \Delta v = \frac{4S\Omega n}{\lambda L} \quad (9)$$

3. Интерферометр неподвижен, среда вращается таким образом, что границы ее остаются неподвижными
(этому может соответствовать вращение стеклянного цилиндра или прокачивание жидкости в кювете внутри неподвижного кольцевого интерферометра):

$$\begin{aligned}\Delta z &= \frac{4S\Omega n^2 \alpha}{\lambda c} = \frac{4S\Omega n^2}{\lambda c} \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right), \\ \Delta v &= \frac{4S\Omega n}{\lambda L} \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right),\end{aligned}\quad (10)$$

где $\alpha = 1 - 1/n^2 - (\lambda/n)(dn/d\lambda)$ - коэффициент увлечения Френеля с поправкой Лоренца [54].

4. Интерферометр неподвижен, среда совершает поступательное движение, при этом ее границы перемещаются:

$$\begin{aligned}\Delta z &= \frac{4S\Omega n^2 \alpha}{\lambda c} = \frac{4S\Omega n^2}{\lambda c} \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n^2} \frac{dn}{d\lambda}\right), \\ \Delta v &= \frac{4S\Omega n}{\lambda L} \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n^2} \frac{dn}{d\lambda}\right),\end{aligned}\quad (11)$$

где $\alpha = 1 - 1/n^2 - (\lambda/n^2)(dn/d\lambda)$ - коэффициент увлечения Лауба [54, 58].

Эффект Саньяка в чистом виде реализуется исключительно в ситуации 1, когда все части интерферометра вращаются как единое целое и по сдвигу интерференционных полос можно судить о наличии вращения относительно инерциальной системы отсчета. Во всех остальных ситуациях всегда имеется известная неподвижная часть интерферометра, относительно которой можно измерять вращение механическим или каким-либо иным способом. Ситуация 3 полностью соответствует экспериментам И. Физо [59, 60], в которых в неподвижном кольцевом интерферометре прокачивалась вода в кювете. Ситуация 4 полностью соответствует экспериментам П. Зеемана [61, 62] (см. также обзоры [6, 49]), в ходе которых, в частности, в неподвижном кольцевом интерферометре по направлению луча поступательно перемещался брусок кварца или флинта, оптические поверхности которого были перпендикулярны лучу. Эти эксперименты проводились с целью проверки вида коэффициента увлечения Лауба и могут рассматриваться как демонстрация модификации эффекта увлечения Френеля-Физо. Сложнее определить физический смысл появления разности фаз во встречных волнах в ситуации 2, которая соответствует экспериментам Дюфо и Прюнье [53]. Если рассматривать происходящее в сопровождающей вращение интерферометра системе отсчета, по отношению к которой среда совершает вращение, то можно утверждать, что в данном случае имеет место эффект увлечения Френеля-Физо. В то же время в данном случае имеет место и эффект Саньяка. Таким образом, ситуация 2 соответствует одновременному наличию эффекта Саньяка и эффекта увлечения Френеля-Физо в сопровождающей вращение интерферометра системе отсчета.

Выражения для вида коэффициента увлечения для ситуаций 1, 3 и 4 были получены еще А. Эйнштейном [54] в рамках СТО.

Эксперименты, проводившиеся с кольцевыми интерферометрами, которые соответствуют ситуациям 1, 2 и 3, подробно описаны в нашем обзоре [8] (см. также [5, 43, 49]). Ситуация 4, помимо упоминавшихся экспериментов П. Зеемана [61, 62], имела место в скандально известных в свое время экспериментах У. Кантора [63], в ходе ко-

торых две тонкие оптические пластинки, находящиеся в противоположных плечах неподвижного кольцевого интерферометра, совершали движение в противоположных направлениях, причем в момент измерения движение было близким к поступательному. Отметим, что ошибки, допущенные в ходе экспериментов [63], привели к неправильному выводу о якобы обнаруженных сверхсветовых скоростях, которые возникают, по мнению

автора [63], при испускании света движущимися пластинками, рассматривавшимися им как источник излучения. В дальнейшем эти эксперименты были повторены с более высокой точностью различными авторами [64] и сделанные в [63] выводы не нашли подтверждения. Адекватное выражение для сдвига интерференционных полос в ситуации 4 приводится впервые.

Экспериментальная проверка вида коэффициента увлечения проводилась в 70 -е годы [65, 66].

Для регистрации эффекта Саньяка вовсе не обязательно использовать интерференцию встречных волн той или иной природы. Если макроскопическое материальное тело движется по кругу со скоростью v относительно вращающейся системы отсчета, то разность времен, затрачиваемых телом на прохождение кольца во встречных направлениях, также будет определяться выражением (4).

Если материальное тело является материальной частицей и ему соответствует волна де Бройля, то, как было отмечено выше, появляется возможность использовать интерференцию встречных волн для регистрации эффекта Саньяка.

Первым, кто рассмотрел распространение волн во вращающемся кольцевом интерферометре с помощью СТО, был А. Эйнштейн. В его работе [54], написанной в 1914 г., рассматривались эксперименты Ф. Гарресса [46]. В [54] А. Эйнштейн не ставил перед собой задачу получить выражение для разности фаз встречных волн, которая обусловлена эффектом Саньяка; он решал более узкую задачу - получить выражение для вида коэффициента увлечения для случая, когда кольцевой интерферометр и оптическая среда вращаются как единое целое, и показать, что это выражение не зависит от дисперсии оптической среды. В том же 1914 г. рассмотрение эффекта Саньяка в рамках СТО было проведено Г. Витте [67, 68].

В 1920 г. теоретическое рассмотрение экспериментов [46] было проведено М. Лауэ [26] с использованием релятивистского закона сложения скоростей. С дидактической точки зрения эту работу нельзя признать удачной: пренебрегая в выражении для времен распространения встречных волн членами второго и более высокого порядков по v/c , М. Лауэ в дальнейшем фактически переходит к классическому кинематическому рассмотрению эффекта Саньяка (см. раздел 5.2) с помощью галилеевского закона сложения скоростей встречных волн со скоростью вращения платформы, как это он делал в своей более ранней работе [69]. Кроме того, в [69] проводится фактическая попытка свести эффект Саньяка к эффекту увлечения Физо [59, 60] (см. раздел 5.4).

В работе [27] Л. Зильберштейн получил выражение для разности фаз встречных волн, обусловленных эффектом Саньяка, используя свойство инвариантности интервала

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2$$

(где t - время, r , φ и z - цилиндрические координаты). Однако автор [27] считает такое объяснение не вполне удовлетворительным и далее переходит к рассмотрению эффекта Саньяка с точки зрения ОТО, теории эфира (см. раздел 5.1) и действия сил Кориолиса на траектории встречных лучей (см. раздел 5.5).

В работах А. Ланна [70], К. Рунге [71], Корпа [28], П. Ланжевена [72], А. Метца [29-32], К. Мёллера [73], Е. Поста [5], С. Изикиеля [33], Э. Ардитти и Э. Лефевра [37, 38, 74, 75], Д. Уилкинсона [76], Д. Аллана, М. Вейсса и Н. Ашби [77], А.А. Логунова и Ю.В. Чугреева [10, 78], Д. Дикса и Д. Нинхуса [79], Д. Дикса [80], Ф. Хехля и В. Ни [81], Г.А. Вугальтера и Г.Б. Малыкина [11] эффект Саньяка также рассматривается с точки зрения СТО.

Рассмотрение эффекта Саньяка в лабораторной (инерциальной) системе отсчета в СТО основано на том, что в рамках этой теории можно рассматривать релятивистские кинематические преобразования не только для равномерно движущейся точки, но и для ускоренно движущейся точки [82].

Долгое время после создания СТО [40] существовало мнение, что рассмотрение явлений в неинерциальных и, в частности, во вращающихся системах отсчета следует проводить исключительно с помощью ОТО (см., например, [82-84]). Однако когда рассматриваются чисто кинематические эффекты, применение ОТО вовсе не обязательно. Вот, что пишет по этому поводу А. Эйнштейн [85]: "Кинематическая эквивалентность двух систем координат в действительности не ограничивается случаем, когда системы K и K' движутся равномерно и прямолинейно. Эта эквивалентность с кинематической точки зрения также хорошо, например, выполняется, если одна система равномерно вращается относительно другой". Возможность использования СТО для описания явлений, протекающих в неинерциальных системах, по-видимому, впервые была отмечена В. Вином [86] после его ознакомления с результатами работы Г. Минковского [87]. При отсутствии гравитационных полей, когда кривизна пространства не имеет места, неинерциальные системы отсчета могут быть описаны с помощью СТО, причем в самом общем случае, при произвольных ускорениях, и не только для кинематических явлений [88, 89]. В работе [10] такой подход нашел применение для вычисления эффекта Саньяка в сопровождающей вращение кольцевого интерферометра системе отсчета. В этом случае для расчетов использовался метрический тензор в четырехмерном пространстве-времени Минковского [87], для которого тензор кривизны равен нулю.

Существует еще и третий способ вычисления величины эффекта Саньяка в рамках СТО - это расчет обусловленного различием лоренцевского замедления времени в движущихся системах отсчета K^+ и K^- , которые сопровождают точки фиксированной фазы встречных волн. Это различие можно наглядно представить в виде разности показаний двух часов, которые обносятся с одинаковыми по величине и противоположными по знаку линейными скоростями v по кольцевой траектории с радиусом R относительно центра вращающегося с угловой скоростью Ω диска, причем центр кольца и центр вращения, как и ранее, совпадают (системы отсчета K^+ и K^- можно заменить набором мгновенно сопровождающих инерциальных систем отсчета). В момент времени, когда положения часов в

пространстве совпадают, они синхронизируются. После того как часы, двигающиеся в направлении вращения диска (для обозначений соответствующих им параметров будет использоваться индекс $+$) и в противоположном направлении (индекс $-$), совершат приблизительно по одному обороту и их положения вновь совпадут, происходит измерение различия их показаний. Без всякой потери общности мы можем положить $v = v_\phi$, т.е. что скорость часов относительно диска совпадает с фазовой скоростью встречных волн. Разумеется, это можно сделать при условии $v_\phi \leq c$.

Если синхронизация часов произошла в той точке кольца, где находится делительное зеркало, то, как было отмечено выше, часы так же, как и световые импульсы, после одного оборота вновь сойдутся уже в другой точке кольца; эта точка, как показывают несложные расчеты, отстает относительно нового углового положения зеркала (точки, где синхронизировались часы), которое оно займет в момент, когда часы вновь совместятся в пространстве, на $R\Omega v_\phi / c^2$ рад. Следовательно, разность времен распространения встречных волн, обусловленная эффектом Саньяка и вычисленная в соответствии с выражениями (1)-(6), т.е. по временам их распространения по вращающемуся кольцу от делительного зеркала до делительного зеркала, и разность времен движения часов (точек фиксированной фазы волнового фронта) в собственных системах отсчета, от делительного зеркала до точки их встречи, будут различаться незначительно; относительные отличия составят $R\Omega v_\phi / c^2$. Таким образом, точное сравнение результатов расчетов разности времен распространения встречных волн, проведенных этими способами, затруднительно, и далее все вычисления будут

проводиться в пренебрежении малыми релятивистскими поправками, что в данном случае не имеет значения - точные выражения для величины эффекта Саньяка нами уже получены (см. выражения (4)-(7)), здесь же нам важно показать физический смысл данного эффекта в системах отсчета K^+ и K^- , сопровождающих точки фиксированной фазы волновых фронтов встречных волн.

Времена, затрачиваемые часами на обход кольца в сопровождающих часы вращающихся системах отсчета K^+ и K^- , в соответствии с преобразованиями Лоренца составят

$$t^{K^\pm} = t \sqrt{1 - \frac{(v_\phi^\pm)^2}{c^2}}, \quad (12)$$

где $t = 4\pi R / (v_\phi^+ + v_\phi^-)$ - время прохождения кольца встречными волнами от делительного зеркала до точки их встречи в лабораторной (неподвижной) системе отсчета, $v_\phi^\pm$ - фазовые скорости встречных волн в лабораторной системе отсчета (см. выражение (2)).

Разность времен t^{K^+} и t^{K^-} после сверки часов составит

$$\begin{aligned} \Delta t^{K^+, K^-} &= t^{K^-} - t^{K^+} \simeq \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2 \sqrt{1 - v_\phi^2/c^2}} = \\ &= \frac{4S\Omega}{c^2 \sqrt{1 - v_\phi^2/c^2}} \end{aligned} \quad (13)$$

где S - площадь кольца.

Выражение (13) определяет разность показаний часов, движущихся в различных системах отсчета, K^+ и K^- , скорости которых по отношению к неподвижной системе отсчета K , хотя и близки между собой по абсолютной величине, но все же различаются (см. выражение (2)) и имеют противоположные знаки. Вычислим разность времен Δt в неподвижной системе отсчета K :

$$\Delta t \sim \frac{\Delta t^{K^+, K^-}}{\sqrt{1 - v_\phi^2/c^2}} \sim \frac{4S\Omega}{c^2} \quad (14)$$

Выражение (14) с точностью до малых релятивистских поправок совпадает с выражением (4), т.е. и вычисленная последним способом разность времен распространения встречных волн не зависит от их фазовой скорости. Отметим также, что если в выражении (4) $t^+ > t^-$, то в выражении (13) $t^{K^+} < t^{K^-}$, что связано с отличием разности времен распространения встречных волн при их движении по вращающемуся кольцу от делительного зеркала до делительного зеркала в лабораторной системе отсчета K от разности времен в собственных системах отсчета K^+ и K^- при их движении от делительного зеркала до точки их встречи.

2.2. Эффект Саньяка в общей теории относительности

Как было показано выше, эффект Саньяка является следствием релятивистского закона сложения скоростей, т.е. является кинематическим эффектом СТО. Тем не менее в большом количестве работ эффект Саньяка рассматривается с позиций ОТО.

Рассмотрим причины, побуждавшие ряд авторов прибегать к использованию ОТО при рассмотрении данного вопроса. Вот, что пишет М.А. Тоннела в своей монографии

[35] после описания результатов опыта Саньяка: "Таким образом, из этих опытов, относящихся к системам с ускорением, вытекает следующее. При наличии движений с ускорением, по-видимому, оказывается возможным определить абсолютное движение. При отсутствии систем отсчета, образованных другими твердыми телами, необходимо допустить, что такие абсолютные движения (например, вращение Земли в опыте с маятником Фуко) происходят по отношению к пустоте, т.е. к абсолютному пространству. В соответствии с критическими замечаниями, высказанными в связи со специальной теорией относительности, этот вывод нужно считать малоудовлетворительным, и может возникнуть вопрос: не связано ли такое абсолютное движение необходимым образом с наличием других масс, т.е. с существованием удаленных звезд? Такой точки зрения придерживался Мах". Из цитированного отрывка можно сделать два предположения.

1. Предполагается, что эффект Саньяка является следствием сил инерции, которые появляются во вращающейся системе отсчета.
2. Рассматривается вопрос о том, не являются ли сами силы инерции следствием воздействия больших удаленных масс, т.е. рассматривается справедливость принципа Маха [90].

Первое предположение является в определенном смысле верным, поскольку, как будет показано ниже (разделы 3.1 и 3.2), несмотря на то, что эффект Саньяка не является следствием непосредственного воздействия

сил инерции на макроскопическое тело, материальную частицу или волну во вращающейся системе отсчета, он с некоторыми ограничениями и допущениями может быть интерпретирован как следствие различных замедлений времен во вращающихся системах отсчета, сопровождающих движение фазовых фронтов встречных волн в потенциале эквивалентного гравитационного поля центробежных ускорений (что обусловлено различием скоростей встречных волн и, следовательно, различием центробежных ускорений), относительно инерциальной системы отсчета при вращении кольцевого интерферометра или как следствие различия знаков потенциала эквивалентных гравитационных полей кориолисовых ускорений для встречных волн, т.е. обусловлен силами инерции. Отметим, что в литературе часто указывают на аналогию эффекта Саньяка и маятника Фуко (см., например, [91]). Однако следует иметь в виду, что ни центробежная сила, ни сила Кориолиса не является непосредственной причиной возникновения эффекта Саньяка, поскольку и та, и другая направлена перпендикулярно движению волнового фронта (макроскопического тела или материальной частицы) при его движении по окружности и не производит работы. Эффект Саньяка является кинематическим эффектом, он не связан с какими-либо силами.

Что касается второго предположения, то тут пока нет полной ясности. В классической механике природа сил инерции не рассматривается [82,92-94], однако долгое время ведется дискуссия о том, являются они реальными или фиктивными [95]. В начальный период создания ОТО А. Эйнштейн был уверен в справедливости принципа Маха [85, 96, 97]. Однако после опубликования работы В. де Ситтера [98] к попыткам объяснения природы сил инерции с помощью принципа Маха [99] он больше никогда не возвращался. (В работе [99] прослеживается эволюция взглядов А. Эйнштейна по данному вопросу.) После опубликования работ И. Лензе и Г. Тирринга [100-103] сложилось мнение, что наличие центробежных и кориолисовых сил во вращающейся системе отсчета является следствием эффекта Лензе-Тирринга, вызванного вращением всех масс во Вселенной относительно наблюдателя, находящегося во вращающейся системе отсчета. Такой точки зрения придерживался Г. Вейль [104]. Однако к началу 60-х годов стало очевидно, что и в этой форме принцип Маха в ОТО

не может быть доказан строго [99, 105, 106]. Основная трудность здесь заключается в том, что при рассмотрении относительного движения удаленных масс по отношению к вращающейся системе отсчета приходится сталкиваться со сверхсветовыми относительными скоростями, что делает вычисление эффекта Лензе - Тирринга невозможным. Действительно, если находящийся на Земле наблюдатель вращается с угловой скоростью всего 1 об. с^{-1} , то по отношению к нему Луна (не говоря уже об остальных массах во Вселенной) будет двигаться со сверхсветовой скоростью. Проблемы с применением принципа Маха в ОТО инициировали разработку альтернативных теорий гравитации, в частности теории Бранса - Дикке [107, 108] и релятивистской теории гравитации А.А. Логунова [109]. В настоящее время существует большое число отличных от ОТО теорий гравитации, описание которых приводится в [110]. Характерной особенностью большинства из таких теорий является то, что при слабых гравитационных полях (что имеет место, например, в

пределах Солнечной системы) они дают практически одинаковые предсказания с ОТО.

Классическое рассмотрение эффекта Саньяка с помощью ОТО проведено в курсе теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [34], где для вычисления разности времен распространения встречных волн в сопровождающей вращение системе отсчета используется метрический тензор. Элементы метрического тензора во вращающейся системе отсчета в отсутствие гравитационных полей, т.е. в отсутствие кривизны пространства, вычисляются в [34] так же, как и в [10], - с помощью свойства инвариантности интервала. Следовательно, дискуссия о том, следует ли рассматривать чисто кинематические задачи во вращающихся системах отсчета при отсутствии гравитирующих масс с точки зрения ОТО или СТО, носит чисто схоластический характер - это вопрос определения (все расчеты как в ОТО [34], так и в СТО [10] с точки зрения математики совершенно одинаковы).

В случае наличия реальных гравитационных полей в выражение для гравитационного потенциала U войдут добавочные члены, соответствующие этим полям, и вычисления величины эффекта Саньяка можно проводить только с помощью ОТО [111-116]. Если кольцевой интерферометр вращается со значительным угловым ускорением, причем за время обхода встречными волнами кольца угловая скорость существенно меняется, то более рациональным будет использование ОТО [57, 117].

Эффект Саньяка с помощью ОТО впервые рассматривался в 1921 г. П. Ланжевром [118] и Л. Зильберштейном [27]. Впоследствии этот подход применялся в работах Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [34], М.А. Тоннела [35], Д. Хира [119], Е. Поста [120, 121], А.М. Хромых [122], Э.М. Беленова и Е.П. Маркина [117], А.И. Бакаляра и Д.П. Лукьянова [123], А.М. Волкова, А.А. Измestьева, В.А. Киселева, Г.В. Скроцкого [111, 124, 125], Б.Ф. Федорова, А.Г. Шереметьева, В.Н. Умникова [126], А. Аштекара и А. Магنون [127], С.И. Бычкова, Д.П. Лукьянова и А.И. Бакаляра [128], Л. Стодольского [129], И.В. Шпака и А.В. Соломина [116], Е. Анандана [130, 131], В.Ф. Фатеева [57, 115], В. Чоу, Д. ГеаБанаклоче, Л. Педротти, В. Сандерса, В. Шлейха и М. Скалли [132], А.Г. Шереметьева [36]. А. Зоммерфельд также полагал [91], что строгое рассмотрение эффекта Саньяка возможно только в рамках ОТО.

В случае когда в кольцевом интерферометре или в резонаторе кольцевого лазера отсутствует оптическая среда, вычисление эффекта Саньяка с помощью ОТО не представляет каких-либо сложностей. При наличии оптической среды вычисления эффекта Саньяка с помощью ОТО существенно сложнее, чем с помощью СТО, что часто приводит к возникновению ошибок.

Можно привести конкретные примеры таких ошибок. Так, из результатов работ [124, 125] следует, что при вращении кольцевого лазера плоскости поляризации встречных волн будут развернуты между собой на угол, численно равный разности фаз встречных

волн, обусловленной эффектом Саньяка. Как будет показано ниже (см. раздел 5.6), этот результат является ошибочным и был получен ранее в работе [133] другим способом, который является некорректным, - с помощью учета орбитальных моментов фотонов во вращающейся системе отсчета.

Трудности в вычислении эффекта Саньяка с помощью ОТО возникают и при рассмотрении влияния коэффициента преломления среды, заполняющей кольцевой интерферометр или резонатор кольцевого лазера, а также дисперсии коэффициента преломления на величину эффекта Саньяка. Выше было показано, что разность фаз встречных волн кольцевого интерферометра, обусловленная эффектом Саньяка, в случае, если интерферометр (или резонатор) и среда вращаются как единое целое и вращение равномерное, не зависит ни от величины коэффициента преломления, ни от его дисперсии. Из результатов же работ [116,134] следует, что в этом случае в выражение для разности фаз встречных волн входит величина дисперсии коэффициента преломления ОВС, причем коэффициент увлечения представлен в форме Лауба [54, 58]. Все это создает неясность при рассмотрении данного вопроса.

Не следует, однако, полагать, что использование ОТО при вычислении величины эффекта Саньяка при наличии оптической среды в интерферометре обязательно приводит к появлению ошибок. В качестве примера можно привести работы [35, 57, 115], в которых показано, что при одновременном вращении интерферометра и среды величина сдвига полос не зависит от показателя преломления и дисперсии. Однако использование СТО позволяет решить рассматриваемые задачи существенно проще.

Основной вывод данного раздела: применение ОТО для вычисления эффекта Саньяка является вполне правомерным, но не рациональным; это существенно усложняет вычисления и в ряде случаев приводит к чисто расчетным ошибкам. В случае если кольцевой интерферометр вращается со значительным угловым ускорением, более рациональным является применение ОТО. Если требуется учесть влияние гравитационного поля, то необходимо использование ОТО.

2.3. Методы вычисления эффекта Саньяка для электромагнитных волн в анизотропных средах

Для вычисления величины эффекта Саньяка для электромагнитных волн часто используются уравнения Максвелла. В ряде работ (см. [5, 38, 111-116, 119, 122, 124, 125, 132, 135-147]) вычисление величины эффекта Саньяка проводится с помощью решения уравнений Максвелла во вращающейся системе отсчета. Это не является оригинальным подходом рассмотрения эффекта Саньяка, а есть лишь метод расчета: в каждом конкретном случае расчет основывается на одном из рассмотренных выше подходов - спецрелятивистском [5, 137, 142, 145, 146] или общерелятивистском [111-116, 119, 122, 124, 125, 132, 135, 138-141, 144, 147]. К данному методу прибегают в том случае, если требуется рассчитать эффект Саньяка при наличии оптической среды и, в частности, при наличии анизотропии этой среды. В работе [136] использование уравнений Максвелла сочетается с некорректным подходом к вычислению эффекта Саньяка (этот вопрос будет рассмотрен в разделе 5.7). Отметим, что уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца и, таким образом, соответствуют СТО.

Хорошо известно, что учет анизотропии среды в кольцевом интерферометре можно осуществить гораздо проще методом матриц Джонса [148], поскольку они выводятся из уравнений Максвелла.

Расчетный метод матриц Джонса был использован в работах [149-163] для вычисления не связанного с вращением сдвига фазы интерференционного сигнала на выходе ВКИ, который связан с поляризационной невязимостью контура ВКИ [149-153,

164-166], изготовленного на основе анизотропного ОВС. Этот сдвиг фазы проявляется в виде аддитивной добавки к сдвигу фазы, связанному с эффектом Саньяка, и приводит к ошибке в измерении угловой скорости вращения. В случае если ОВС, из которого изготовлен контур ВКИ, имеет случайные неоднородности двулучепреломления, имеет место дрейф нуля ВКИ, который характеризуется средним значением и дисперсией [151 - 163].

В 1921 г. Л. Зильберштейн [27], обсуждая предстоящие эксперименты А. Майкельсона и Х. Гэля [167, 168], которые он инициировал и частично спонсировал, указал на возможность регистрации эффекта ЛензеТирринга [100 – 103] от вращения Земли с помощью оптического кольцевого интерферометра большой площади. В 1981 г. М.О. Скалли и соавторы [169] вернулись к рассмотрению данного вопроса: обсуждалась возможность использования ВКИ для измерения ряда эффектов ОТО, в том числе и эффекта Лензе-Тирринга. Проведенные нами оценки показали, что из-за наличия связи мод на неоднородностях ОВС, приводящей к появлению дрейфа нуля интерференционной картины на выходе ВКИ, для реализации данных экспериментов потребуется создание ВКИ, состоящего из одного витка ОВС диаметром примерно 7 км [161, 163]. Сложность рассматриваемых экспериментов заключается еще и в том, что из-за вращения Земли в ВКИ таких размеров будет иметь место весьма значительный сдвиг нуля интерференционной картины, обусловленный эффектом Саньяка. Применение источника немонахроматического излучения позволяет существенно снизить дрейф нуля ВКИ [152-155], при этом видность интерференционной картины падает по мере роста величины Φ_S , поскольку, как следует из выражения (6), величина Φ_S прямо пропорциональна оптической частоте света. Экспериментальное подтверждение этого эффекта было получено в работе [170]. В нашей работе [171] методом матриц Джонса было показано, что наличие случайных неоднородностей в ОВС приводит к заметному увеличению видности интерференционной картины при весьма больших значениях Φ_S . Таким образом, применение расчетного метода матриц Джонса позволяет решать довольно сложные задачи для вычисления поляризационной невязимости и видности интерференционной картины в ВКИ со случайно-анизотропной средой.

В работе [172] рассмотрена анизотропия среды, которая связана с вращением среды. Этот результат получен с помощью уравнений Максвелла. Следует, однако, отметить, что при реальных угловых скоростях вращения рассматриваемый эффект очень незначителен (наведенное вращением циркулярное двулучепреломление, по оценкам [172], составляет $\Delta n_c \sim 10^{-18}$) и едва ли может быть обнаружен на эксперименте.

Если анизотропная оптическая среда движется относительно интерферометра (в качестве примера можно привести эксперименты [43, 45, 53]), то для учета искривления траектории луча, связанной с эффектом увлечения Физо, следует решать уравнения Максвелла [173].

2.4. Основные результаты анализа эффекта Саньяка в рамках теории относительности

Итак, эффект Саньяка в теории относительности может быть рассмотрен следующими способами.

В рамках СТО:

- в лабораторной (неподвижной) системе координат с помощью закона релятивистского сложения скоростей,
- в сопровождающей вращение кольцевого интерферометра системе координат с помощью метрического тензора в плоском четырехмерном пространстве-времени Минковского,

- в сопровождающих волновые фронты (точки фиксированной фазы) встречных волн системах координат с помощью закона релятивистского сложения скоростей и преобразований Лоренца;

в рамках ОТО:

- в сопровождающей вращение кольцевого интерферометра системе координат с помощью метрического тензора при отсутствии кривизны пространства, т.е. при отсутствии гравитационных полей.

Вычисления величины эффекта Саньяка для электромагнитных волн и, в частности, для света в анизотропных средах могут быть выполнены с помощью решения соответствующих уравнений Максвелла или методом матриц Джонса.

Обзор применений эффекта Саньяка

(I'll write it later!!!!)

Определение, вращаемся мы на самом деле или нет, используя эффект Саньяка (!?!?!?!?!?!?!?)

(подумаю про это еще.)

О применении эффекта Саньяка в лазерах (!?!??)

5.7.5 The Sagnac Effect: Approximately Correct Explanations by G.B. Malykin

3. Условно корректные объяснения эффекта Саньяка

Условно корректными будем считать такие объяснения эффекта Саньяка, которые позволяют получить приближенные выражения для разности фаз встречных волн во вращающемся кольцевом интерферометре при наличии ряда ограничений на параметры системы: линейной скорости вращения кольца, скорости волны (материальной частицы или материального тела) относительно сопровождающей вращение системы отсчета, массы материальной частицы и др. Кроме того, эти объяснения требуют некоторых априорных предположений, которые, вообще говоря, ниоткуда не следуют, и ряда допущений. Тем не менее условно корректные объяснения позволяют наглядно продемонстрировать физический смысл эффекта Саньяка. Все условно корректные объяснения эффекта Саньяка базируются на рассмотрении влияния ньютоновского нерелятивистского скалярного потенциала или векторного потенциала эквивалентного гравитационного поля сил инерции (центробежных или кориолисовых сил) на замедление времени во вращающейся системе отсчета или на изменение фазы волновой функции материальной частицы. Иными словами, в основе данного подхода к рассмотрению эффекта Саньяка лежит принцип эквивалентности.

Не следует, однако, считать, что в данном случае рассмотрение проводится в рамках ОТО. Использование потенциала эквивалентного гравитационного поля сил инерции для вычисления замедления времени в ускоренных системах отсчета впервые применялось в работах А. Эйнштейна [174, 175], которые были написаны до создания ОТО и далеко не во всех случаях приводили к правильному результату. Так, например, отклонение светового луча в гравитационном поле Солнца было в [175] ошибочно занижено в два раза по сравнению с реальной величиной. Правильное решение

было получено А. Эйнштейном в рамках ОТО [96] с учетом искривления пространства массой Солнца.

3.1. Эффект Саньяка как следствие различия нерелятивистских гравитационных скалярных потенциалов центробежных сил в системах отсчета, сопровождающих встречные волны

Здесь мы приведем простой и физически наглядный вывод выражения для величины эффекта Саньяка, основанный на релятивистском законе сложения скоростей, принципе эквивалентности и эффекте замедления времени в гравитационном поле.

Рассмотрение будем проводить для двух вращающихся систем отсчета, K^+ и K^- , сопровождающих движение точек фиксированной фазы (фазовых фронтов) встречных волн, или некоторых часов, скорость которых совпадает со скоростью фазовых фронтов (как и прежде, знак плюс соответствует волне, направление которой совпадает с направлением вращения кольцевого интерферометра, знак минус - волне, распространяющейся в противоположном направлении). В этих вращающихся системах отсчета существуют центробежные ускорения

$$a_c^\pm = (\Omega^\pm)^2 R,$$

где $\Omega^\pm = v_\phi^\pm / R$ - угловые скорости движения точек фиксированной фазы встречных волн, измеренные в системе отсчета K . Абсолютные величины ускорений $a_c^\pm$ различны вследствие различия величин $(v_\phi^\pm)^2$ (см. выражение (2)). В соответствии с принципом эквивалентности [34, 35] вращающиеся системы отсчета K^+ и K^- можно заменить инерциальными системами K_{in}^+ и K_{in}^- , в которых действуют гравитационные поля, создающие гравитационные силы, совпадающие по величине и направлению с центробежными силами в неинерциальных системах отсчета K^+ и K^- . Наличие гравитационного поля приводит к соответствующему замедлению времени [35, 41, 83]. Замедление времени в системах отсчета K_{in}^+ и K_{in}^- по отношению к времени t в лабораторной (неподвижной) системе отсчета K составит [34, 35]

$$t_{in}^{K^\pm} = t \sqrt{1 + \frac{2U_{in}^\pm}{c^2}}, \quad (15)$$

где $t = 4\pi R / (v_\phi^+ + v_\phi^-)$ - время прохождения кольца встречными волнами от делительного зеркала до точки их встречи в лабораторной (неподвижной) системе отсчета (см. раздел 2.1); $U_{in}^\pm$ - нерелятивистские гравитационные потенциалы эквивалентных полей центробежных сил в системах отсчета K_{in}^+ и K_{in}^- . Отметим, что рассматриваемый метод расчета справедлив при условии $U/c^2 \ll 1$ [34].

Величина нерелятивистского гравитационного потенциала связана с ускорением следующим образом [34]:

$$a = -\text{grad } U.$$

Отсюда следует

$$U = - \int a \, dl$$

где dl - элемент длины вдоль некоторого направления. При этом потенциал U определен с точностью до

постоянной величины, поскольку нижний предел интегрирования может быть выбран произвольно. Для гравитационных полей, соответствующих реальным массам, предел

интегрирования обычно выбирается таким образом, чтобы на бесконечности выполнялось условие $U = 0$ [34, 41]. Здесь же мы выберем его так, чтобы условие $U = 0$ выполнялось в центре вращения ($R = 0$), где центробежное ускорение отсутствует. Тогда [34]

$$U_{\text{in}}^{\pm} = - \int_0^R (\Omega^{\pm})^2 R \, dR = - \frac{(\Omega^{\pm})^2 R^2}{2} = - \frac{(v_{\phi}^{\pm})^2}{2}$$

Время распространения фазовых фронтов встречных волн (движения часов по окружности) в системе K в случае вращения диска составляет $t \sim 2\pi R/v_{\phi}$, откуда

$$t^{K_{\text{in}}^{\pm}} = t \sqrt{1 - \frac{(v_{\phi}^{\pm})^2}{c^2}}, \quad (16)$$

где $t \sim 2\pi R/v_{\phi}$. Выражение (16) полностью совпадает с выражением (12), полученным в рамках СТО. Таким образом, если в СТО эффект Саньяка является следствием различных замедлений хода часов, движущихся во встречных направлениях на вращающемся диске, что вызвано различием лоренцевского сокращения времени в сопровождающих системах отсчета K^+ и K^- , то здесь этот эффект является следствием различных замедлений хода часов, обусловленных различием гравитационных потенциалов, эквивалентных центробежным ускорениям в сопровождающих системах отсчета K_{in}^+ и K_{in}^- . Таким образом, в случае отсутствия реальных гравитационных полей, соответствующих гравитирующим массам, объяснение эффекта Саньяка в рамках СТО, основанное на различии лоренцевских сокращений времени (см. выражения (12)-(14)), и приведенное выше (см. (16)) совершенно равнозначны, что является следствием принципа эквивалентности.

3.2. Эффект Саньяка как следствие различия знаков нерелятивистских гравитационных скалярных потенциалов сил Кориолиса для встречных волн в сопровождающей вращение системе отсчета

Используя нерелятивистский гравитационный потенциал, мы можем вычислить величину эффекта Саньяка и в инерциальной системе отсчета K'_{in} , эквивалентной сопровождающей вращение кольцевого интерферометра системе отсчета K' . В этой системе отсчета фазовые скорости встречных волн равны по абсолютной величине и составляют v_{ϕ} . Помимо центробежного ускорения для движущихся тел (и, в частности, для часов), сопровождающих точки фиксированной фазы встречных волн, имеет место ускорение Кориолиса. Его абсолютная величина составляет $2\Omega v_{\phi}$, а направление зависит от того, происходит движение в направлении вращения (в этом случае его направление совпадает с направлением центробежного ускорения) или в направлении, противоположном вращению (в этом случае его направление противоположно направлению центробежного ускорения).

Здесь, однако, имеется одна особенность в определении гравитационного потенциала силы Кориолиса. Дело в том, что сила Кориолиса так же, как сила Лоренца (об аналогии между этими силами см. работы [176-178]), не

является потенциальной силой. Они называются гироскопическими силами [179] (в учебном курсе [180] И.Е.Тамм именует силу Лоренца "соленоидальной силой"). Характерной особенностью этих сил является то, что они не производят работу, поскольку всегда направлены перпендикулярно скорости тела. Тем не менее с определенными ограничениями и оговорками можно ввести понятие скалярного потенциала для таких сил. Так, для магнитного поля роль потенциальной функции играет функция, убыль которой равна работе пондеромоторных сил магнитного поля, но которую нельзя отождествлять с потенциальной энергией магнитного поля [180].

Адекватное описание потенциальной функции магнитного поля можно получить при условии, что траектория, по которой происходит интегрирование, не охватывает источник магнитного поля проводник с током. Так, например, потенциальную функцию можно задать внутри длинного соленоида с током. Поскольку сила Кориолиса формально, с точки зрения математического описания, аналогична силе Лоренца [176-178] внутри соленоида (в соответствующих выражениях удвоенная угловая скорость вращения 2Ω заменяется на величину магнитной индукции B), то, следовательно, можно задать и скалярный гравитационный потенциал сил Кориолиса.

Так же, как и ранее, в выражении для гравитационного потенциала выберем пределы интегрирования таким образом, чтобы в центре вращения, где центробежное ускорение отсутствует, выполнялось условие $U = 0$. Это, в частности, обеспечит равенство потенциалов для встречных волн в точке, соответствующей центру вращения. Величины потенциалов для встречных волн в системе K'_{in} (которая является инерциальной и эквивалентной сопровождающей вращение неинерциальной системе K') составят

$$U'_{\text{in}}{}^{\pm} = - \int_0^R [\Omega^2 R \mp 2\Omega v_{\phi}] dR = -\frac{\Omega^2 R^2}{2} \mp 2\Omega v_{\phi} R$$

Время распространения точек фиксированной фазы встречных волн (движения часов по окружности) в системе K'_{in} в случае вращения диска составит

$$(t^{\pm})^{K'_{\text{in}}} = t \sqrt{1 + \frac{(U'_{\text{in}})^{\pm}}{c^2}} = t \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 R^2}{2c^2} \mp \frac{2\Omega v_{\phi} R}{c^2}} \quad (17)$$

где $t = 4\pi R / (v_{\phi}^{+} + v_{\phi}^{-})$ - время прохождения кольца встречными волнами от делительного зеркала до точки их встречи в лабораторной (неподвижной) системе отсчета (см. раздел 2.1).

Разлагая $(t^{\pm})^{K'_{\text{in}}}$ по малому параметру

$$\frac{2\Omega v_{\phi} R}{2c^2} \ll 1,$$

и пренебрегая влиянием гравитационного потенциала, соответствующего центробежному ускорению

$$\frac{\Omega^2 R^2}{2c^2} \ll \frac{2\Omega v_{\phi} R}{c^2},$$

получим приближенное выражение для разности времен прохождения точками фиксированной фазы встречных волн, или часов, скорость которых совпадает со скоростью этих точек:

$$\Delta t^{K'_{\text{in}}} \simeq \frac{t 2v_{\phi} \Omega R}{c^2} = \frac{4S\Omega}{c^2}. \quad (18)$$

Выражение (18) с точностью до малых релятивистских поправок совпадает с выражением (5) для разности времен распространения встречных волн в сопровождающей вращение кольцевого интерферометра системе отсчета K' . Таким образом, можно сделать вывод, что эффект Саньяка в сопровождающей вращение системе отсчета можно рассматривать как следствие различия замедления времени для встречных волн из-за воздействия на них нерелятивистского гравитационного потенциала, соответствующего силам Кориолиса, который имеет различные знаки для двух встречных волн.

3.3. Эффект Саньяка в квантовой механике как следствие воздействия векторного потенциала силы Кориолиса на фазы волновых функций встречных волн в сопровождающей вращение системе отсчета

Если скалярный потенциал силы Кориолиса вводится с большими допущениями и оговорками, то векторный потенциал этой силы может быть введен вполне корректно. В соответствии с законами квантовой механики векторный потенциал воздействует на фазу волновой функции. Как и в случае со скалярным потенциалом силы Кориолиса, векторный потенциал силы Кориолиса не оказывает влияния на координату и скорость частицы. Вычисление разности фаз для встречных волн де Бройля во вращающемся кольцевом интерферометре проводилось в работах [9, 17, 130, 131, 181-183]. Для этих вычислений применялись решения соответствующих уравнений Шрёдингера, Дирака или Клейна-Гордона [182]. Обычно вычисления проводятся в приближении Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна (ВКБ) [9, 17, 181]. Разность фаз встречных волн определяется следующим выражением [9]:

$$\Phi_S = \frac{8\pi ES\Omega}{hc^2} \quad (19)$$

где E - полная энергия материальной частицы, h постоянная Планка.

Подставляя в (19) $E = h\nu$, где ν - частота волны де Бройля материальной частицы или частота светового кванта, получим выражение (6) с точностью до малых релятивистских поправок. Соответственно подставляя в (6) $\nu = E/h$, получим выражение (19). Таким образом, для вычисления фазового сдвига встречных волн де Бройля во вращающемся кольцевом интерферометре, который обусловлен эффектом Саньяка, вовсе не обязательно прибегать к квантовомеханическим расчетам мнимой части волновой функции: результат может быть получен с помощью простых кинематических расчетов в рамках СТО, поскольку, как было отмечено выше, они справедливы для волн произвольной природы. Подставляя в (19) выражение для полной энергии материальной частицы с ненулевой массой покоя $E = mc^2$, где

$$m = m_0 \sqrt{1 - \frac{v_m^2}{c^2}}$$

- релятивистская масса частицы, m_0 - масса покоя частицы, v_m - скорость материальной частицы, получим хорошо известное выражение для эффекта Саньяка

на волнах де Бройля [24]

$$\Phi_S = \frac{8\pi S\Omega m}{h} \quad (20)$$

Из выражения (20), в частности, следует [24], что разность фаз, обусловленная эффектом Саньяка на волнах де Бройля, не зависит в нерелятивистском пределе от скорости частиц v_m , т.е. от длины волны де Бройля $\lambda_m = h/(mv_m)$. Таким образом, здесь (в отличие от электромагнитных волн) использование монохроматического пучка материальных частиц не приведет к ухудшению видности интерференционной картины.

Отметим, что в силу ряда причин кольцевые интерферометры на волнах де Бройля не изготавливаются, они выполняются в виде равноплечных интерферометров Маха-Цандера, в которых частицы встречаются, когда каждая из них прошла половину от полного замкнутого пути. Вследствие этого эффективная площадь интерферометра Маха-Цандера становится в два раза меньше по сравнению с кольцевым интерферометром той же конфигурации (и соответственно в выражениях (19), (20) вместо цифры 8 будет стоять цифра 4).

5.7.6 The Sagnac effect: Attempts of Explanations and Incorrect Explanations

4. Попытки объяснения эффекта Саньяка посредством проведения аналогии с другими эффектами

Проведение аналогии между различными эффектами отнюдь не является попыткой сведения одного эффекта к другому, оно преследует цель более наглядно объяснить физический смысл одного из эффектов посредством сопоставления с другим, более простым или более известным и понятным. Вследствие этого такое рассмотрение нельзя считать некорректным. В некоторых случаях, когда рассматриваемые эффекты имеют близкий физический смысл, проведение аналогии действительно способствует лучшему пониманию. В случаях же, когда сходство двух эффектов носит формальный характер, проведение аналогии приносит мало пользы для физического понимания, однако может облегчить применение математического аппарата, хорошо разработанного для одного из эффектов, к другому эффекту.

4.1. Аналогия между эффектом Саньяка и эффектом Ааронова - Бома

В ряде работ [79, 127, 130, 181 - 186] проводится аналогия между эффектом Саньяка и эффектом Ааронова-Бома [187-189]. Последний заключается в воздействии векторпотенциала магнитного поля (силы Лоренца) на волновую функцию элементарной частицы, имеющей заряд, и приводит к сдвигу интерференционных полос от суперпозиции волн де Бройля двух пучков частиц, причем даже в том случае, когда в области движения частиц магнитное поле отсутствует и, следовательно, ни траектории, ни скорости частиц не меняются. В упрощенном виде рассуждения авторов [79, 127, 130, 181-186] можно сформулировать следующим образом: вектор-потенциал гравитационного поля, эквивалентного силам Кориолиса во вращающейся системе отсчета, который приводит к сдвигу интерференции встречных волн как для не имеющих заряда квантовых частиц (фотонов, нейтронов, нейтральных атомов), так и для заряженных (электронов, мезонов и др.), аналогичен вектор-потенциалу сил Лоренца. Однако такая аналогия носит

формальный, поверхностный характер: все сходство этих двух эффектов заключается в том, что в обоих случаях вектор-потенциал непотенциальных, гироскопических сил воздействует на фазу волновой функции. Однако между рассматриваемыми эффектами существует большое различие: эффект Ааронова-Бома [187-189] существует только для квантовых объектов, для макроскопических тел он обращается в нуль, в то время как эффект Саньяка существует как для квантовых, так и для макроскопических объектов.

Следует отметить одну важную особенность эффектов, связанных с вращением. Вращение, в отличие от поступательного движения, является абсолютным, а не относительным явлением. Вращение реального тела, являющегося источником поля (электрического, магнитного или гравитационного), около неподвижного датчика поля и вращение датчика вокруг данного тела приводят к различным показаниям датчика. Можно привести следующие примеры [5].

1. Вращение стержня из ферромагнитного материала вызывает появление магнитного поля, т.е. в неподвижной системе отсчета датчик регистрирует наличие магнитного поля, но вращение системы отсчета (датчика) вокруг стержня не приводит к регистрации наличия магнитного поля (эксперименты Барнетта [190,191]).
2. Как было показано Л. Шиффом [192], вращение заряженного сферического конденсатора вызывает появление внешнего магнитного поля, но вращение

системы отсчета (датчика) вокруг неподвижного заряженного сферического конденсатора не вызывает регистрацию датчиком магнитного поля.

3. Эксперименты, проведенные А. Дюфо и Ф. Прюнье [53] с кольцевым интерферометром, заполненным оптической средой, показали, что в случае, когда вращается среда, а интерферометр остается неподвижным, и в случае, когда среда неподвижна, а вращается интерферометр, величины разностей фаз для встречных волн будут различными при одинаковых угловых скоростях вращения (см. выражения (9) и (10)).

При вращении массивного тела появляется векторпотенциал гравимагнитного поля (аналогично тому, как вращение заряда приводит к появлению магнитного поля). В этом случае должен иметь место гравитационный эффект Ааронова-Бома, который вызывает для реальных вращающихся тел весьма незначительный сдвиг фазы встречных волн в оптическом кольцевом интерферометре или разность частот встречных волн в кольцевом лазере [193] (см. также [194-197]). Отметим, что данный эффект до сих пор не зарегистрирован. По мнению автора [193], гравитационный эффект Ааронова-Бома тесно связан с эффектом Саньяка, однако это не так. Во-первых, эффект Саньяка связан с вращением системы отсчета, а гравитационный эффект Ааронова-Бома связан с вращением реального массивного тела. Во-вторых, эффект Саньяка приводит к изменению скорости встречных волн, и может иметь место не только для квантовомеханических частиц (фотонов, электронов и др.), но и для обычных акустических и магнитных волн, а эффект Ааронова-Бома и, в частности, гравитационный эффект Ааронова - Бома не приводит к изменению скорости частиц во встречных пучках, меняется только фаза их волновой функции.

Отметим здесь, что вращение массивного тела также приводит к эффекту Лензе-Тирринга [100-103], кото-

рый является аналогом электромагнитной индукции и приводит, в частности, к изменению скорости материальных тел, в том числе и фотонов, т.е. приводит к изменению модуля их волновой функции. Это эффект общей теории относительности (ОТО), он до сих пор не зарегистрирован. Первые эксперименты по обнаружению увлечения света вращающимся телом с помощью кольцевого интерферометра проводил в конце прошлого века О. Лодж [198], который полагал, что свет вместе со светоносным эфиром должен увлекаться вращающейся массой. Отметим также, что вращение массивного тела должно приводить к расщеплению спектральных частот электромагнитных колебаний излучающего атома [199], изменению разности частот встречных волн кольцевого лазера [111] и повороту плоскости поляризации света [200-202]. Все эти эффекты также до сих пор не зарегистрированы.

Гравитационный эффект Ааронова-Бома и эффект Лензе-Тирринга существуют независимо от эффекта Саньяка и связаны, в отличие от последнего, с наличием вращающихся масс, а не с вращением системы отсчета. При измерениях разностей фаз встречных волн на выходе кольцевого интерферометра эти эффекты могут проявиться в виде аддитивных добавок к эффекту Саньяка. Таким образом, определенная аналогия между эффектом Саньяка и эффектом Ааронова-Бома действительно существует, но она носит формальный характер и не отражает физического смысла этих эффектов.

4.2. Эффект Саньяка как проявление фазы Берри

В работах [7,9,80,203] эффект Саньяка рассматривается как проявление фазы Берри [204] (см. также обзоры [203, 205-209]).

Фаза Берри (геометрическая, топологическая фаза) проявляется как изменение одного из параметров системы в процессе ее пространственной эволюции. Это может

быть изменение квантовомеханического состояния потока частиц в процессе их пространственной эволюции [204] (фаза Берри) либо изменение состояния поляризации излучения при его распространении по криволинейной траектории [209-212] (эффект Рытова), которое приводит к дополнительному набегу фазы излучения [203, 205-207, 209, 213], либо накопление дополнительного набегу фазы излучения в случае, когда при его распространении происходит изменение состояния поляризации [205-207, 209, 214, 215] (фаза Панчаратнама), либо изменение квантовомеханического состояния спина нейтрона в процессе его пространственной эволюции [208], либо изменение углового положения твердого тела, если в процессе его движения связанная с ним ось описывает телесный угол [94, 216, 217] (эффект Ишлинского). Отметим, что, как показано в наших работах [218, 219], эффект Ишлинского имеет релятивистский аналог, которым является томасовская прецессия [220].

Классическим примером проявления фазы Берри в квантовой механике является дополнительный набег фазы электронов, вызываемый эффектом Ааронова-Бома [187-189].

В волоконных кольцевых интерферометрах фаза Берри проявляется аддитивно по отношению к эффекту Саньяка и приводит к сдвигу фазы интерференционной картины на выходе ВКИ, не связанному с вращением, и, таким образом, приводит к ошибке в измерении угловой

скорости вращения. Так, в работе [221] было экспериментально обнаружено проявление эффекта Рытова в ВКИ, вызванного неплоскими изгибами слабоанизотропного ОВС, из которого был изготовлен контур ВКИ. Сдвиг фазы интерференционной картины на выходе ВКИ, обусловленный поляризационной невязимностью его контура [166], можно интерпретировать как невязимную геометрическую фазу встречных волн [164, 165], которая является проявлением фазы Берри.

В кольцевых интерферометрах на волнах де Бройля материальных частиц, имеющих заряд (например, электронов), фаза Берри, обусловленная эффектом Ааронова - Бома, вызывает не связанный с вращением сдвиг нуля интерференционной картины. Если материальные частицы не имеют заряда, но имеют отличное от нуля значение спина и магнитного момента (например, нейтроны), фаза Берри, вызванная эффектом Ааронова-Кашера [222] (см. [181]), который является следствием эволюции квантовомеханического состояния спина, также приводит к несвязанному с вращением сдвигу фазы интерференционной картины. Даже в том случае, когда в районе траекторий материальных частиц векторпотенциал магнитного поля равен нулю и, следовательно, эффекты Ааронова - Бома и Ааронова - Кашера не имеют места, вследствие томасовской прецессии (эффекта специальной теории относительности) [218, 220] спины частиц, распространяющихся в противоположных направлениях, поворачиваются в противоположные стороны, что вызывает сдвиг нуля интерференционной картины [131, 223], который не связан с вращением.

Отметим здесь, что фаза Берри приводит к ошибкам в показаниях не только ВКИ, но и в гироскопических устройствах иного типа. Так, эффект Ишлинского [94, 216, 217] вызывает ошибку в показаниях спаренных механических гироскопов и гироскопов с сильной коррекцией, которые являются пространственными гироскопами - датчиками направления. В гироскопах на ядерном магнитном резонансе [133] фаза Ааронова-Кашера [222], которая в данном случае связана с эволюцией квантовомеханического состояния спина ядра, приводит к ошибкам в измерениях угловой скорости [224, 225].

Фаза Берри является проявлением неголономности (неинтегрируемости), поскольку не может быть вычислена исходя из начального и конечного состояний системы [205-207]. В работах [226, 227] эффект Саньяка рассматривается как проявление неголономности во

вращающейся системе отсчета. Работы [226,227] были опубликованы ранее работы [204], т.е. до введения понятия фазы Берри.

Основной вывод данного раздела: проведение аналогии между эффектом Саньяка и эффектом Ааронова-Бома и рассмотрение эффекта Саньяка как проявления фазы Берри носит формальный характер и не отражает физического смысла данного эффекта.

5. Некорректные объяснения эффекта Саньяка

Подавляющее большинство некорректных объяснений эффекта Саньяка основаны или на прямом отрицании теории относительности или на ее игнорировании и попытке свести этот кинематический эффект СТО к

какому-либо другому хорошо известному в классической физике эффекту. Некоторые из некорректных объяснений основаны на неправильном понимании теории относительности или на расчетных ошибках.

5.1. Эффект Саньяка в теории неподвижного (неувлекаемого) светоносного эфира

Это объяснение эффекта Саньяка базируется на представлении о неувлекаемом вращением интерферометра "светоносном эфире", исторически было первым [8] и, как ни странно, применяется иногда и в настоящее время.

Пусть свет движется по окружности (см. рис. 1). В случае когда интерферометр не заполнен оптической средой, выражение для фазовой скорости света $v_{\phi}^{\pm}$ в системе координат K' , связанной с вращающимся интерферометром, имеет вид

$$(v_{\phi}')^{\pm} = c \mp R\Omega. \quad (21)$$

Времена, затрачиваемые встречными волнами на обход кольца, составят соответственно

$$(t')^{\pm} = \frac{2\pi R}{(v_{\phi}')^{\pm}} = \frac{2\pi R}{c \mp R\Omega}. \quad (22)$$

Разность времен распространения составит

$$\Delta t' = (t')^{+} - (t')^{-} = \frac{4\pi R^2\Omega}{c^2(1 - R^2\Omega^2/c^2)} \quad (23)$$

Полученный результат является верным с точностью до малых релятивистских поправок. Отличие выражения (23) от соответствующего выражения (5), полученного в рамках СТО, определяется коэффициентом $(1 - R^2\Omega^2/c^2)^{1/2}$. Объяснение этого различия может быть получено только в рамках СТО: во вращающейся системе координат K' число π в $(1 - R^2\Omega^2/c^2)^{1/2}$ раз больше, чем в инерциальной [34, 35], что не было учтено в выражениях (22), (23). Домножив величину $\Delta t'$, полученную в выражении (23), на $(1 - R^2\Omega^2/c^2)^{1/2}$, получим величину $\Delta t'$ из выражения (5).

Данный подход при расчете эффекта Саньяка использовался О. Лоджем [198, 228], А. Майкельсоном [167, 168, 229], Ж.Саньяком [1-3], которые были убежденными сторонниками теории "светоносного эфира". Концепция "светоносного эфира" в качестве одной из возможностей объяснения данного эффекта рассматривалась и Л.Зильберштейном [27]. Следует отметить, что вклад Л.Зильберштейна в рассмотрение эффекта Саньяка неоднозначен. С одной стороны, он одним из первых рассмотрел эффект Саньяка с точки зрения СТО и ОТО [27], с другой стороны, в этой же работе проводилось рассмотрение этого эффекта и с точки зрения "светоносного эфира", и с

точки зрения непосредственного воздействия сил Кориолиса на траектории встречных волн в кольцевом интерферометре (см. раздел 5.5), что в значительной мере запутало рассмотрение данного вопроса. Л. Зильберштейн был автором одной из лучших монографий по СТО, вышедших в начале XX века [230]. В то же время после опубликования результатов экспериментов Д.К. Миллера [231, 232] (повторявших эксперименты Майкельсона-Морли [12, 13]), в которых, по мнению их автора, было обнаружено существование "светоносного эфира", Л. Зильберштейн опубликовал по этому поводу восторженный отзыв [233], который по смыслу был созвучен заметке А. Тимирязева [234], ярого противника теории относительности. Эксперименты Д.К. Миллера поколебали уверенность некоторых исследователей в справедливости СТО, и С.И. Вавилов ответил на это своей знаменитой работой [4], в которой он показал несостоятельность теории "светоносного эфира". В вышедшей позднее работе [235] было показано, что в экспериментах Д.К. Миллера имела место систематическая ошибка, связанная с температурным дрейфом длин плеч интерферометра Майкельсона.

Рассмотрение эффекта Саньяка с точки зрения "светоносного эфира" не стало только достоянием истории физики, подобные работы выходят и в настоящее время. В качестве примера можно указать работу [236], в которой как эффект Саньяка, так и эффект Ааронова - Бома, рассматриваются с точки зрения концепции эфира. В работе [237] предлагается с помощью кольцевого интерферометра проводить измерение поступательной скорости движения Земли относительно некоторого абсолютного пространства, в котором эфир покоится, что явно противоречит теории относительности.

Подобного рода подходы, основанные на игнорировании СТО (при этом авторы обычно ссылаются на то обстоятельство, что эффект Саньяка является эффектом первого порядка по $R\Omega/c$, откуда делается совершенно ошибочный вывод, что в этом случае можно обойтись без СТО), существуют и по сей день. Характерным моментом неявного применения концепции эфира является использование при расчетах сверхсветовой скорости распространения одной из встречных волн, что явно противоречит СТО. Этот метод расчета эффекта Саньяка используется в известной экспериментальной работе И.Л. Берштейна [14], в обзорных работах [238, 239] и в некоторых учебниках, предназначенных для физических факультетов вузов. В качестве примера можно указать курс электродинамики [240] и курс оптики [241].

Этот же метод вычисления эффекта Саньяка используется у С.И. Вавилова [4], в лекциях по теории относительности Л.И. Мандельштама [84], в курсе теоретической физики Г. Иоса [242], в курсе физической оптики Р. Дитчберна [243] и в приложении к курсу СТО В.А. Угарова [244], однако эти авторы используют его в качестве дидактического приема - для доказательства невозможности существования "светоносного эфира", который, как следует из рассматриваемых опытов, не должен увлекаться вращением, что противоречит результатам экспериментов Майкельсона-Морли [12, 13].

В случае когда интерферометр заполнен оптической средой с коэффициентом преломления n , в рамках теории "светоносного эфира" для расчета эффекта Саньяка используется гипотеза Френеля о частичном увлечении эфира движущейся оптической средой [44]. Запишем, следуя работе И.Л. Берштейна [14], выражение для фазовых скоростей встречных волн в лабораторной (невращающейся) системе координат K :

$$v_{\phi}^{\pm} = \frac{c}{n} \pm (1 - \alpha)R\Omega, \quad (24)$$

где $\alpha = 1 - 1/n^2$ - коэффициент увлечения Френеля [6, 14, 44]. В сопровождающей вращение системе координат K' выражение для $(v'_{\phi})^{\pm}$ будет иметь вид

$$(v'_\phi)^\pm = \frac{c}{n} \mp \frac{R\Omega}{n^2} \quad (25)$$

Времена, затрачиваемые встречными волнами на обход кольца, составят

$$(t')^\pm = \frac{2\pi R}{c/n \mp R\Omega/n^2} \quad (26)$$

Разность времен распространения составит

$$\Delta t' = (t')^+ - (t')^- = \frac{4\pi R^2\Omega}{c^2(1 - R^2\Omega^2/(c^2n^2))} \quad (27)$$

Таким образом, мы снова с точностью до малых релятивистских поправок получили верный результат: как было показано выше, в случае, когда кольцевой интерферометр и заполняющая его оптическая среда вращаются как единое целое, величина эффекта Саньяка не зависит от коэффициента преломления среды.

Возникает вопрос: почему из заведомо неверной предпосылки о существовании "светоносного эфира" может быть получен верный с точностью до малых релятивистских поправок результат? Ответить на него можно следующим образом.

1. Из предположения о неувлекаемом вращением интерферометра эфире делается вывод, что в невращающейся (лабораторной) системе координат эфир неподвижен, откуда следует, что в этой системе скорость света неизменна во всех направлениях, что не противоречит специальной теории относительности: невращающаяся система координат является инерциальной.
2. В случае наличия в интерферометре оптической среды в соответствии с подходом [14] используется коэффициент увлечения Френеля, который может быть получен из релятивистского закона сложения скоростей в качестве первого приближения [40,54].

Казалось бы, из вышеизложенного можно сделать вывод о том, что теория "светоносного эфира" приводит практически к правильным результатам и ее использование в данном случае вполне допустимо. Однако это не так - данное объяснение содержит внутреннее противоречие. Для объяснения эффекта Саньяка нам потребовалось предположить, что эфир не увлекается не только вращением интерферометра, но даже вращением Земли [167, 168]. В то же время отрицательные результаты экспериментов Майкельсона-Морли [12,13] и их дальнейших повторений (см. обзоры [4, 6]) могут быть объяснены в рамках концепции "светоносного эфира" только в случае, если эфир полностью увлекается поступательным движением Земли.

Таким образом, как это было отмечено выше, концепция светоносного эфира приводит к противоречивым требованиям: эфир должен полностью увлекаться поступательным движением Земли и совершенно не увлекаться ее вращением [4, 84, 242, 243]. Однако и это противоречие не смущает сторонников существования эфира. Как писал С.И. Вавилов [4]: "Одновременная неподвижность и движение эфира механически, однако, мыслимы... Идею эфира, увлекаемого движущимся телом и одновременно "ирротационного" или безвихревого, развивал в прошлом веке Стокс... Опровергнуть окончательно представление об эфирной оболочке, окружающей Землю... трудно, однако и для детальной разработки этой идеи нет никакой точки опоры". Следует отметить, что упомянутая здесь модель эфира, предложенная Д. Стоксом, содержит неустранимые внутренние противоречия (этот вопрос подробно рассмотрен в [6]).

Отметим здесь, что объяснение эффекта Саньяка с точки зрения концепции неувлекаемого вращением "светоносного эфира" содержит еще одно существенное противоречие, которое, насколько нам известно, ранее не рассматривалось. В рамках данной теории для получения правильного результата всякий раз приходится предполагать, что эфир покоится относительно инерциальной лабораторной системы отсчета, связанной с центром вращения кольцевого интерферометра.

Если эфир совершает равномерное поступательное движение относительно центра вращения интерферометра, то выражение для сдвига фаз встречных волн, обусловленного эффектом Саньяка, будет иметь иной вид, чем (23). Именно на этом и основана идея работы [237] об определении поступательной скорости Земли относительно эфира. По мнению автора [237], два идентичных кольцевых интерферометра, центры которых связаны с двумя различными инерциальными системами отсчета, регистрировали бы различные сдвиги фаз встречных волн, что противоречит одному из основных постулатов СТО о равноправии всех инерциальных систем отсчета.

5.2. Эффект Саньяка с точки зрения классической кинематики

Концепция неувлекаемого "светоносного эфира" может быть применена только для вычисления величины эффекта Саньяка на электромагнитных волнах. Для того чтобы рассчитать величину эффекта Саньяка в самом общем случае для волн произвольной природы [7 – 9, 11], можно попытаться применить классические кинематические вычисления, которые основаны на вычислении расстояния, на которое вследствие вращения сместится делительное зеркало на входе кольцевого интерферометра (см. рис. 1) за время обхода кольца встречными волнами, и на использовании галилеевского закона сложения скоростей каждой из встречных волн v_ϕ с линейной скоростью вращения $R\Omega$. На первый взгляд, такой подход дает возможность рассчитать эффект Саньяка не только для электромагнитных волн, но и для волн, распространяющихся в материальной среде, коэффициент увлечения в которой равен 1 (например, для акустических, а также поверхностных акустических и поверхностных магнитостатических волн - так называемых "медленных" волн [11, 23], и, кроме того, для волн де Бройля материальных частиц - электронов [9, 16], нейтронов [17, 18], мезонов [24], атомов кальция [19], натрия [20] и цезия [21]).

Рассмотрим вначале применение классического кинематического метода для вычисления эффекта Саньяка в оптическом диапазоне в самом общем случае, когда интерферометр заполнен оптической средой с коэффициентом преломления n , которая вращается вместе с интерферометром. При отсутствии вращения интерферометра время обхода кольца для каждой из встречных волн составит $t = 2\pi Rn/c$. При наличии вращения за время t делительное зеркало сместится на расстояние

$$\Delta l = \frac{2\pi R^2 \Omega n}{c},$$

и длина оптического пути для встречных волн составит

$$l^\pm = 2\pi R \pm \frac{2\pi R^2 \Omega n}{c},$$

а скорости встречных волн в лабораторной системе отсчета определяются выражением (24). Разность времен распространения встречных волн в лабораторной системе координат K в этом случае составит

$$\begin{aligned}
\Delta t &= t^+ - t^- = \frac{l^+}{v_\phi^+} - \frac{l^-}{v_\phi^-} = \\
&= \frac{2\pi R + 2\pi R^2 \Omega n/c}{c/n + \alpha R \Omega} - \frac{2\pi R - 2\pi R^2 \Omega n/c}{c/n - \alpha R \Omega} = \\
&= 4\pi R^2 \frac{\Omega}{c^2} \left[1 - n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) R^2 \frac{\Omega^2}{c^2} \right]^{-1} \approx \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2}
\end{aligned} \tag{28}$$

где $\alpha = 1 - 1/n^2$. Полученное выражение с точностью до релятивистских поправок совпадает с выражением (4), и, таким образом, классический кинематический подход дает для эффекта Саньяка в оптическом диапазоне практически правильный результат.

Первым классический кинематический способ вычисления величины эффекта Саньяка в оптическом диапазоне применил М. Лауэ в 1911 г. [69]. В этой работе рассматривался четырехзеркальный интерферометр и для вычисления разности длин оптических путей встречных волн учитывались повороты каждого из зеркал за то время, пока его достигала каждая из встречных волн. Приведенный выше расчет для встречных волн, распространяющихся по кольцу, существенно проще и приводит к тому же результату, что и в [69]. Рассматриваемый способ вычисления величины эффекта Саньяка используется также в ряде других работ [5, 6, 36, 38, 74, 75, 91, 126, 128, 245-247]. Такое же объяснение причины возникновения эффекта Саньяка приводится и в двух последних изданиях физической энциклопедии [248, 249]. Вычисления величины эффекта Саньяка, проведенные в работах [238-242], также могут рассматриваться как классические кинематические.

В случае если рассмотрение эффекта Саньяка проводится не для электромагнитных волн, а для волн, распространяющихся в материальной среде, коэффициент увлечения в которой равен 1 (например, для поверхностных акустических и магнитостатических волн - так называемых "медленных" волн [11, 23]), классический кинематический способ расчета приводит к серьезным ошибкам. Рассмотрим, следуя [23], кольцевой интерферометр на "медленных" волнах с помощью кинематического подхода. Пусть фазовая скорость распространения "медленной" волны составляет v_ϕ ; тогда скорости встречных волн в лабораторной системе отсчета составят соответственно

$$v_{M_\phi}^\pm = v_{M_\phi} \pm R\Omega.$$

При отсутствии вращения интерферометра время обхода кольца для каждой из встречных волн составит

$$t = \frac{2\pi R}{v_{m_\phi}}.$$

Если интерферометр вращается с угловой скоростью Ω , то за время t устройство, возбуждающее в кольце встречные волны, которое также используется для обратного преобразования "медленных" волн в электрический сигнал (и играет ту же роль, что и делительное зеркало в оптическом кольцевом интерферометре), сместится на расстояние

$$\Delta l = R\Omega t = \frac{2\pi R^2 \Omega}{v_{M_\phi}}.$$

Длина оптического пути для встречных волн составит

$$l^{\pm} = 2\pi R \pm \frac{2\pi R^2 \Omega}{v_{M\phi}},$$

а разность времен распространения встречных волн составит

$$\begin{aligned} \Delta t = t^+ - t^- &= \frac{l^+}{v_{M\phi}^+} - \frac{l^-}{v_{M\phi}^-} = \\ &= \frac{2\pi R + 2\pi R^2 \Omega / v_{M\phi}}{v_{M\phi} + R\Omega} - \frac{2\pi R - 2\pi R^2 \Omega / v_{M\phi}}{v_{M\phi} - R\Omega} = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, используя кинематический метод расчета, мы, равно как и авторы [23], пришли к выводу о том, что эффект Саньяка для "медленных" волн не существует. Аналогичный результат может быть получен и для других типов волн (например, для обычных акустических волн). Это абсолютно ошибочный результат: вычисления, проведенные с использованием СТО [11], показывают, что эффект Саньяка на медленных волнах существует, разность времен распространения встречных волн в этом случае составляет $\simeq 4\pi R^2 \Omega \omega / c^2$.

Причина ошибок, к которым приводит классический кинематический метод расчета эффекта Саньяка, заключается в том, что для вычисления скоростей встречных волн используется галилеевский, а не релятивистский закон сложения скоростей - скорости распространения волны в среде и скорости вращения. В случае когда рассматривается эффект Саньяка в оптическом диапазоне, использование коэффициента увлечения Френеля, как было отмечено выше, соответствует в первом приближении релятивистскому закону сложения скоростей, и в этом случае результат расчета является верным с точностью до малых релятивистских поправок. В остальных же случаях результаты расчета с помощью классического кинематического метода являются ошибочными.

Вычисление эффекта Саньяка для волн де Бройля материальных частиц с помощью классического кинематического метода также приводит к нулевому результату [79]. Автор работ [130, 131] приходит к выводу, что эффект Саньяка в оптическом диапазоне может быть и релятивистским, и классическим, а эффект Саньяка в квантовой механике (т.е. на волнах де Бройля) исключительно релятивистским. К такому же выводу приходят авторы работ [79, 80]. Автор работы [80] пишет, что "нерелятивистский квантовый эффект Саньяка представляется парадоксальным". Однако дело здесь, разумеется, не в особой специфике эффекта Саньяка в квантовой механике (эффект Саньяка всегда является релятивистским [10, 11]), а в том, что для волн де Бройля материальных частиц так же, как и для акустических волн, невозможно ввести некоторый коэффициент, аналогичный коэффициенту увлечения Френеля в оптике, который, с одной стороны, является первым приближением релятивистского закона сложения скоростей, а с другой - дает иллюзию того, что мы пользуемся галилеевским законом сложения скоростей с некоторым поправочным коэффициентом, т.е. иллюзию того, что мы остаемся в рамках классической теории.

5.3. Эффект Саньяка как проявление классического эффекта Доплера от движущегося делительного зеркала

Это объяснение эффекта Саньяка основано на рассмотрении вращающегося делительного зеркала (в общем случае делительного устройства) кольцевого интерферометра в неподвижной системе отсчета как движущегося источника излучения, который излучает в направлении вращения более короткую длину волны, а в

противоположном направлении - большую длину волны, чем это было бы в отсутствие вращения. При этом, по мнению сторонников данного подхода, на одинаковой длине кольца для противоположных направлений распространения укладывается различное количество длин волн, что и приводит к сдвигу фазы интерференционной картины на выходе интерферометра. Рассматриваемый подход является принципиально ошибочным: для появления эффекта Доплера необходимо наличие относительного движения источника и приемника излучения. В данном случае и источником, и приемником излучения является делительное зеркало кольцевого интерферометра, которое не может двигаться само относительно себя. Отметим здесь, что как показано в работе А. Эйнштейна [54], частота и, следовательно, длина волны света во вращающейся системе отсчета в случае, когда кольцевой интерферометр и среда вращаются как единое целое, в первом приближении по $R\Omega/c$ остаются неизменными.

Вообще говоря, проведение вычислений, связанных с интерференцией лучей в неинерциальной системе отсчета, которая имеет некоторое ускорение вдоль прямой линии, с помощью классического эффекта Доплера вполне допустимо [250]. Оно основано на том факте, что источник излучения в момент испускания имел иную скорость, чем приемник в момент поглощения. Это можно пояснить также исходя из принципа эквивалентности: в момент излучения и в момент приема имеют место различные величины нерелятивистского гравитационного потенциала [250,251], и частоты испущенного и принятого сигнала будут различаться. Однако во вращающейся системе отсчета при отсутствии угловых ускорений источник (он же приемник излучения делительное зеркало) всегда имеет одну и ту же абсолютную величину линейной скорости.

Для того чтобы наглядно продемонстрировать ошибочность данного метода вычисления эффекта Саньяка, рассмотрим его применение в оптике, где величина эффекта Доплера не зависит от того, движется среда, заполняющая пространство между источником и приемником излучения, или нет [6, 39]. Длина волны света для встречных волн в кольцевом интерферометре, обусловленная эффектом Доплера, в лабораторной системе отсчета K , где делительное зеркало движется с линейной скоростью $R\Omega$, должна составить

$$\lambda^{\pm} = \lambda \left(1 \pm \frac{R\Omega n}{c} \right)$$

где λ - длина волны света при отсутствии вращения [39]. Волновые числа и длины оптических путей для встречных волн составят соответственно

$$k^{\pm} = \frac{2\pi n}{\lambda^{\pm}}, \quad l^{\pm} = (2\pi R \pm R\Omega t)n$$

(где $t = 2\pi Rn/c$ - время прохождения волной кольца, n - коэффициент преломления), а разность фаз встречных волн, обусловленная эффектом Саньяка, составит

$$\begin{aligned} \Phi_S &= k^+ l^+ - k^- l^- = \frac{4\pi^2 Rn}{\lambda} \left(\frac{1 + R\Omega n/c}{1 - R\Omega n/c} - \frac{1 - R\Omega n/c}{1 + R\Omega n/c} \right) = \\ &= \frac{16\pi S\Omega n^2}{\lambda c (1 - R^2\Omega^2/(c^2 n^2))} \approx 16 \frac{\pi\Omega S n^2}{\lambda c} = 16 \frac{\pi\Omega S n^2 v}{c^2} \end{aligned} \quad (30)$$

где $v = c/\lambda$ - частота света.

Даже в случае отсутствия оптической среды в интерферометре мы получили завышенный в два раза по сравнению с выражением (7) результат, кроме того, величина Φ_S в выражении (30) пропорциональна n^2 . Для получения "правильного" выражения

авторы, использующие данный метод вычисления величины эффекта Саньяка, принимают длины оптических путей для встречных волн равными:

$$l^+ = l^- = 2\pi R,$$

т.е. скорости встречных волн рассматриваются в системе отсчета K , а длины оптических путей - в системе отсчета K' , и, кроме того, рассматривают случай $n = 1$.

Таким образом, в случае наличия в интерферометре оптической среды ошибка будет определяться коэффициентом $2n^2$.

Однако в действительности величина эффекта Саньяка не зависит от коэффициента преломления среды, заполняющей интерферометр. Это следует как из строгих расчетов с использованием специальной теории относительности [5, 11, 54], так и из экспериментальных работ Б. Погани [50-52] и И.Л. Берштейна [14] (см. также обзоры [4, 8]); тем не менее еще во времена создания первых ВКИ вопрос о влиянии показателя преломления на чувствительность ВКИ активно обсуждался [43, 5557, 134]. Экспериментальные измерения эффекта Саньяка в ВКИ [43, 56] также показали, что сдвиг фазы встречных волн, обусловленный эффектом Саньяка, не зависит от коэффициента преломления ОВС.

Представляет интерес выяснить, каким образом укоренилось мнение, что эффект Саньяка можно рассматривать как следствие эффекта Доплера во вращающемся интерферометре. В работе А. Дюфо и Ф. Прюнье [252] эффект Саньяка рассматривался как проявление эффекта Доплера от вращающегося делительного зеркала. Вот, что написано по поводу эффекта Саньяка в "Оптике" А. Зоммерфельда [91], после проведения расчета классическим кинематическим способом: "Мы могли бы сократить приведенный выше расчет, если бы исходили из эффекта Доплера, который имеет здесь место вследствие того, что полупрозрачная пластинка H действует как движущийся источник, излучающий вперед и назад различные длины волн". Авторитет А. Зоммерфельда сыграл в данном случае отрицательную роль: после выхода в свет работы [91] утверждение, что причиной появления эффекта Саньяка является эффект Доплера от движущегося делительного зеркала, стало употребляться довольно часто (см., например, [36, 126]). Данное утверждение как одна из возможностей объяснения эффекта Саньяка приводится в работах [18, 80], в обзорах [36, 74, 126, 239, 253], в обзорной части работы [9], в монографии по волоконной гироскопии [75], в курсе волновой оптики [254], в двух последних изданиях

физической энциклопедии [248, 249] и в ряде других работ (см., например, [117, 126]). В энциклопедии "Квантовая электроника" [255] и в курсе квантовой электроники [256] эффект Доплера приводится как единственно возможная причина расщепления частот встречных волн во вращающемся кольцевом лазере, т.е. эффект Саньяка полностью игнорируется. В работе [135] высказывается утверждение, что эффект Саньяка представляет собой вариант эффекта Доплера - изменение частот встречных волн во вращающейся системе отсчета. Вот, что пишет известный специалист по волоконной гироскопии Э. Лефевр после объяснения причин возникновения эффекта Саньяка в рамках СТО и с помощью эффекта Доплера [74, 75]: "Эти два объяснения эквивалентны, но позаботьтесь не использовать их одновременно!"

Применяя рассматриваемый метод, вычислим величину эффекта Саньяка для волн, распространяющихся в материальной среде, например, для обычных акустических или "медленных" волн. Длина акустической волны для встречных направлений распространения в кольцевом интерферометре, обусловленная эффектом Доплера, должна составить в системе отсчета K [39]

$$\lambda_{3\text{ В}}^{\pm} = \lambda_{3\text{ В}} \left(1 \mp \frac{R\Omega}{v_{3\text{ В}}} \right),$$

где $\lambda_{3\text{ В}}$ - длина волны при отсутствии вращения, v_3 скорость звука в среде. Волновые числа и длины путей для встречных волн составят соответственно

$$k_{3\text{ В}}^{\pm} = \frac{2\pi}{\lambda_{3\text{ В}}^{\pm}}, \quad l^{\pm} = 2\pi R \pm R\Omega t$$

(где $t = 2\pi R/v_{3\text{ В}}$ - время прохождения волной кольца), а разность фаз встречных волн, обусловленная эффектом Саньяка, составит

$$\begin{aligned} \Phi_S &= k_{3\text{ В}}^{+} l^{+} - k_{3\text{ В}}^{-} l^{-} = \frac{4\pi^2 R}{\lambda_{3\text{ В}}} \left(\frac{1 + R\Omega/v_{3\text{ В}}}{1 - R\Omega/v_{3\text{ В}}} - \frac{1 - R\Omega/v_{3\text{ В}}}{1 + R\Omega/v_{3\text{ В}}} \right) = \\ &= \frac{16\pi^2 R^2 \Omega}{\lambda_{3\text{ В}} v_{3\text{ В}} (1 - R^2 \Omega^2 / v_{3\text{ В}}^2)} \approx \frac{16\pi S \Omega}{\lambda_{3\text{ В}} v_{3\text{ В}}} = \frac{16\pi S \Omega v_{3\text{ В}}}{v_{3\text{ В}}^2} \end{aligned} \quad (31)$$

где $v_{3\text{ В}} = v_{3\text{ В}} / \lambda_{3\text{ В}}$ - частота звука.

Полученное выражение является неверным, в частности, в него вместо скорости света входит скорость материальной волны, что многократно, в $2(c/v_{3\text{ В}})^2$, завышает величину эффекта Саньяка по сравнению с реальной [11]. Здесь следует также отметить, что условием появления эффекта Доплера в акустике является движение источника или приемника относительно среды, причем их скорости должны быть различными [39]. Однако в кольцевом интерферометре источник (он же приемник - делительное устройство) неподвижен относительно среды.

Авторы [18, 80] пытаются объяснить с помощью эффекта Доплера сдвиг фазы для встречных волн де Бройля материальных частиц. Длина волн де Бройля встречных волн должна составить в системе отсчета K

$$\lambda_m^{\pm} = \frac{h}{mv_m^{\pm}} = \frac{h}{m(v_m \pm R\Omega)}$$

где h - постоянная Планка, m - масса частицы, v_m скорость материальной частицы (групповая скорость

распространения волнового пакета). Волновые числа и длины путей для встречных волн в системе отсчета K составят соответственно

$$k_m^{\pm} = \frac{2\pi}{\lambda_m^{\pm}}, \quad l^{\pm} = 2\pi R \pm R\Omega t$$

(где $t = 2\pi R/v_m$ - время прохождения волной кольца), а разность фаз встречных волн, обусловленная эффектом Саньяка, составит

$$\Phi_S = k_m^{+} l^{+} - k_m^{-} l^{-} = \frac{16\pi^2 R^2 \Omega m}{h(1 - R^2 \Omega^2 / v_m^2)} \approx \frac{16\pi S \Omega m}{h}. \quad (32)$$

Таким образом, мы снова получили неверный результат, который в два раза больше, чем в выражении (20). Для того чтобы получить правильное выражение, авторы [18, 80] принимают $l^{+} = l^{-}$.

Основной вывод данного раздела: эффект Саньяка никоим образом не связан с эффектом Доплера, ошибочный вывод об этом связан с тем, что оба этих эффекта являются эффектами первого порядка по v/c .

5.4. Эффект Саньяка как проявление эффекта увлечения Френеля - Физо

Первым, кто предположил, что причиной возникновения разности фаз встречных волн во вращающемся кольцевом интерферометре является эффект увлечения Френеля - Физо [44, 59, 60], был Ф. Гарресс [46], который первым проводил экспериментальные исследования рассматриваемого эффекта (см. обзоры [4-9, 49]). Он полагал, что в отсутствие среды в кольцевом интерферометре его вращение не вызовет разности фаз встречных волн. В этом случае выражение для скорости встречных волн во вращающейся системе отсчета будет иметь вид

$$v_{\phi}^{\pm} = \frac{c}{n} \pm \alpha R \Omega,$$

где $\alpha = 1 - 1/n^2$ - коэффициент увлечения Френеля. Соответственно при обработке результатов экспериментов он допустил ошибки, которые впоследствии были исправлены П. Гарцдером [47] и А. Эйнштейном [54].

В работе [26] М. Лауэ наряду с объяснением эффекта Саньяка в рамках СТО предпринял попытку свести его к эффекту увлечения Френеля-Физо, причем эксперименты Ф. Гарресса [46] представлялись как некоторый аналог экспериментов П. Зеемана [61, 62]. В работе [257] был предложен эксперимент, который, по замыслу автора, должен был доказать справедливость этого предположения. Одно из плеч кольцевого лазера, представлявшее собой брусок стекла, должно было совершать возвратно-поступательное движение, другие два плеча должны были при этом вращаться вокруг одного из своих концов, обеспечивая непрерывность оптических путей для встречных волн, а плечо, в котором установлена газоразрядная трубка, при этом оставалось неподвижным. В действительности предложенные в [257] эксперименты представляют лазерный вариант экспериментов У. Кантора [63].

Однако, как было показано еще в работе А. Эйнштейна [54], эффект Саньяка никоим образом не является следствием эффекта увлечения Френеля - Физо - он

существует даже при отсутствии оптической среды в кольцевом интерферометре. Более того, наличие среды никак не влияет на величину эффекта Саньяка. При этом увеличение длины оптического пути для лучей в кольцевом интерферометре, возникающее из-за наличия в нем оптической среды с коэффициентом преломления n , полностью компенсируется уменьшением коэффициента увлечения Френеля $\alpha = 1 - 1/n^2$.

В период создания первых ВКИ данный вопрос вновь обсуждался [55-57]. В некоторых вышедших в последнее время работах эффект Саньяка при наличии оптической среды в кольцевом интерферометре [258] или кольцевом лазере [135] вновь связывается с эффектом увлечения Френеля - Физо.

5.5. Эффект Саньяка и силы Кориолиса

Как было показано в разделах 3.2, 3.3, эффект Саньяка может рассматриваться как следствие различных замедлений времен или изменения фазы волны де Бройля материальной частицы для встречных волн под влиянием нерелятивистского гравитационного скалярного или соответственно векторного потенциала сил Кориолиса во вращающейся системе отсчета. В работе [27] (см. также [259]) Л. Зильберштейн среди прочих объяснений эффекта Саньяка (СТО, ОТО, "светоносный эфир") предложил объяснить существование данного эффекта с помощью рассмотрения непосредственного воздействия сил Кориолиса на встречные волны. Автор [27] полагал, что вследствие действия сил Кориолиса на встречные волны в трехзеркальном кольцевом интерферометре оптический путь волны, направление которой совпадает с направлением вращения, представляет собой треугольник с несколько выпуклыми сторонами, а путь противоположной волны - треугольник с несколько вогнутыми сторонами. В этом

случае площади треугольников различаются, и поскольку добавочное время распространения каждой из встречных волн, которое обусловлено эффектом Саньяка, пропорционально площади замкнутого контура [35], для встречных волн возникает разность времен распространения.

Однако вскоре в работе А. Ланна [70] было показано, что хотя при вращении контуры треугольников для встречных волн несколько не совпадают, их площади равны: вклад в изменение площади контура вследствие отклонения каждого из встречных лучей из-за действия сил Кориолиса полностью компенсируется соответствующим вкладом от изменения угла падения на следующее зеркало. Проще всего равенство площадей контуров для встречных волн показать в неподвижной системе отсчета, где силы Кориолиса отсутствуют. В этом случае требуется учесть только повороты отражающих зеркал в соответствующие моменты времени, как это сделал М. Лауэ [69].

5.6. Эффект Саньяка как следствие разности орбитальных моментов фотонов во встречных волнах

В работе [133] (см. также [260]) используется метод расчета эффекта Саньяка, основанный на учете изменения орбитальных моментов макроскопических фотонных орбит и энергии генерируемых фотонов во вращающемся кольцевом лазере. Рассматриваемый подход предполагает, что при вращении орбитальные моменты макроскопических фотонных орбит для встречных волн становятся различными и соответственно становятся различными энергии фотонов и частоты встречных волн. В действительности различие частот встречных волн имеет место во вращающемся кольцевом лазере вследствие того, что из-за эффекта Саньяка оптические пути для встречных волн становятся различными.

Объяснение эффекта Саньяка в работе [133] близко к рассмотренному выше объяснению эффекта Саньяка как следствия эффекта Доплера - в обоих случаях используется предположение о различии частот встречных волн. Здесь следует отметить, что сам результат расчета эффекта Саньяка в кольцевом резонаторе, основанный на учете изменения орбитальных моментов макроскопических фотонных орбит во вращающейся системе отсчета, является ошибочным. Как показано в работе А. Эйнштейна [54], во вращающейся системе отсчета частота света в порядке величины v/c остается неизменной. В волоконном кольцевом резонаторе для изменения частоты фотона требуется, чтобы резонатор совершал ускоренное движение в направлении, перпендикулярном стенке световода [261].

Тем не менее в работе [133] в рамках учета изменения орбитальных моментов макроскопических фотонных орбит во вращающейся системе отсчета было получено адекватное выражение для разности частот встречных волн во вращающемся кольцевом лазере, что является (как и в рассмотренном выше случае с рассмотрением эффекта Саньяка как следствия эффекта Доплера) простым совпадением, поскольку все три этих эффекта являются эффектами первого порядка по v/c .

Однако для случая, когда встречные волны находятся в режиме захвата, из результатов [133] следует, что их плоскости поляризации будут развернуты между собой на угол, численно равный разности фаз встречных волн, обусловленной эффектом Саньяка. Иными словами, это означает, что во вращающейся системе отсчета скорости распространения для волн с правой и левой круговыми поляризациями различны, причем знак этого различия зависит от того, совпадает направление распространения волны с направлением вращения или противоположно ему. Последний эффект (несмотря на то, что он является эффектом первого порядка по v/c и, следовательно, достаточно велик), насколько нам известно, никогда экспериментально не наблюдался. Напомним, что такой же ошибочный результат был получен в работах [111, 112, 114, 124,

125, 140] в рамках ОТО (см. раздел 2.2).

Ошибка, допущенная авторами [133], близка к рассмотренной выше ошибке, допущенной в работах [127, 130, 181-186], полностью отождествляющих эффект Саньяка с эффектом Ааронова-Бома. При вращении массивного тела действительно происходит вращение плоскости поляризации распространяющегося вблизи него пучка света [111, 199-202, 262], траектория которого в этом случае имеет неплоскую кривизну. В этом случае вращение плоскости поляризации является проявлением эффекта Рытова [210-212] для оптически неоднородных сред, причем в данном случае неоднородность является следствием искривления пространства вращающейся массой, т.е. следствием влияния эффекта Лензе - Тирринга [100-103], что влияет на скорость распространения право- и левополяризованных фотонов. Таким образом, вблизи вращающейся массы даже вакуум приобретает круговое двулучепреломление. Однако, как было отмечено выше, вращение реального

тела и вращение системы отсчета приводят к различным физическим явлениям. Авторы [111, 112, 114, 124, 125, 133, 140, 260] пришли к ошибочному выводу, что во вращающейся системе отсчета также будет иметь место оптическая неоднородность, которая приводит к различию скоростей распространения право- и левополяризованных фотонов.

Отметим здесь, что для пучка света, распространяющегося в направлении вращения, действительно имеет место поворот плоскости поляризации - эффект увлечения поляризации Ферми [263,264], который очень мал [265] и до сих пор не нашел практического применения для измерения угловой скорости вращения. Напомним, что при совпадении оси вращения с направлением распространения оптических волн, когда реализуется поляризационный эффект Ферми, эффект Саньяка не имеет места. Последнее обстоятельство позволяет рассмотреть возможность измерения поляризационного эффекта Ферми с помощью кольцевого лазера, вращающегося вокруг одного из своих плеч, которое заполнено оптической средой [266].

5.7. Эффект Саньяка как проявление инерциальных свойств электромагнитного поля

В работе [136] приводится вывод выражения для обусловленной эффектом Саньяка разности частот встречных волн в кольцевом лазере, основанный на инерциальных свойствах электромагнитного поля в кольцевом резонаторе. В этой работе рассматривается вызванная вращением деформация структуры стоячих волн в кольцевом резонаторе, который представляет собой идеальный металлический цилиндр с коэффициентом отражения, равным 1. Сам автор работы [136] характеризует свой подход как "разновидность эфирной теории с приспособлением последней к специальной теории относительности при малых линейных скоростях вращения". С нашей точки зрения, такой подход до некоторой степени аналогичен рассмотренному выше представлению эффекта Доплера как причины возникновения эффекта Саньяка, а правильное с точностью до релятивистских поправок выражение для разности частот встречных волн в кольцевом лазере получено в этой работе в силу того, что разность частот встречных волн пропорциональна отношению v/c , где $v = R\Omega$, а также потому, что в [136] рассматривается кольцевой резонатор, не заполненный оптической средой.

Здесь следует отметить, что инерциальные свойства волн (а точнее говоря, волновых пакетов) используются в таких гироскопических приборах, как волновые твердотельные гироскопы [267], а также гироскопы, принцип действия которых основан на макроскопических квантовых свойствах сверхтекучего гелия [268-270]. Эти устройства наряду с маятником Фуко и механическими гироскопами [216, 217, 271] являются датчиками углового положения в пространстве, в то время как устройства, принцип

действия которых основан на эффекте Саньяка (оптические кольцевые интерферометры, кольцевые лазеры, кольцевые интерферометры на волнах де Бройля, акустических и "медленных" волнах), являются датчиками угловой скорости. В этом заключается принципиальное различие устройств, использующих свойство физических тел или волновых пакетов сохранять свою ориентацию в пространстве, и устройств, использующих эффект Саньяка.

5.8. Эффект Саньяка в некорректных теориях гравитации

В настоящее время среди многочисленных теорий гравитации существуют и так называемые некорректные теории гравитации, следствия которых приходят в противоречие с результатами классических экспериментов по проверке ОТО, проведенных в пределах Солнечной системы. В [110, 272, 273] приводится многоэтапная процедура, выполнив которую, можно по величине постньютоновских параметров в рассматриваемой теории гравитации определить, является ли эта теория корректной.

К некорректным теориям гравитации, согласно [110, 272, 273], относится скалярная теория Х. Йилмаза [25, 274-276], которая возникла так же, как и ряд других упомянутых выше корректных теорий гравитации [107110, 272, 273], вследствие наличия проблем с применением принципа Маха в ОТО. Как показано в [110, 272, 273], из теории Х. Йилмаза следует, в частности, что угловая скорость вращения планет и прецессии их перигелия зависят от скорости между системой отсчета, связанной с центральным телом, вокруг которого обращается планета, и привилегированной системой отсчета, которая покоится относительно центра масс Вселенной. Отметим, что после обнаружения анизотропии реликтового излучения [277] в литературе обсуждается возможное влияние скорости системы отсчета относительно привилегированной системы отсчета на некоторые физические законы, в частности на изотропию скорости света [169, 278, 279]. Однако эксперименты, проведенные с лазером с поглощающей ячейкой [280], показали, что с точностью до 2×10^{-13} анизотропия скорости света не наблюдается. Точность измерения анизотропии скорости света можно повысить примерно на три порядка, используя оптоволоконный интерферометр Майкельсона с длиной плеч 1 – 10 км [281].

В работе Х. Йилмаза [25] приводится подробное рассмотрение эффекта Саньяка, который именуется "таинственным", в рамках теории гравитации [25, 274-276]. Из результатов [25], в частности, следует, что в сопровождающей вращение системе отсчета коэффициенты преломления вакуума для встречных волн различны:

$$\frac{1}{n^{\pm}} = 1 \pm \frac{\Omega R}{c}.$$

Это, по мнению автора [25], и является причиной возникновения эффекта Саньяка. Напомним, что, как было отмечено выше, величина эффекта Саньяка вообще не зависит от коэффициента преломления среды.

5.9. Другие некорректные объяснения эффекта Саньяка

Существует еще ряд некорректных объяснений эффекта Саньяка, которые, однако, встречаются существенно реже, чем рассмотренные выше. Здесь мы перечислим их почти без комментариев.

В работах [282-284] (см. также [9]) эффект Саньяка рассматривается как следствие нарушения обращения времени для встречных волн в кольцевом интерферометре (резонаторе) во вращающейся системе отсчета. Известно, что в постоянном гравитационном поле, которое создается вращающимся телом, время необратимо [34]. Однако, как было показано выше, вращение массивного тела не эквивалентно вращению

системы отсчета вокруг неподвижного массивного тела. Таким образом, во вращающейся системе отсчета время обратимо. Более того, эффект Саньяка существует вне зависимости от наличия внутри кольцевого интерферометра массивного тела.

В работе [223] эффект Саньяка рассматривается с точки зрения расширенного понимания гипотезы о локальности. Для вычисления величины эффекта Саньяка в [223] используется следующее соотношение между энергией фотона E в неподвижной системе отсчета и энергией фотона E' в сопровождающей вращение системе отсчета:

$$E' = \gamma(E - \Omega L)$$

где $\gamma = (1 - R^2\Omega^2/c^2)^{-1/2}$, L - орбитальный момент фотона, Ω - угловая скорость вращения, R - радиус вращения. Очевидно, что метод расчета, используемый в [223], аналогичен рассмотренному выше методу [133], основанному на учете изменения орбитальных моментов макроскопических фотонных орбит и энергии генерируемых фотонов во вращающемся кольцевом лазере. Как было показано выше, он является некорректным и приводит к некоторым ошибкам.

В работе [285] эффект Саньяка рассматривается как следствие справедливости принципа Ферма во вращающейся системе отсчета. Движение свободной материальной частицы в гравитационном поле определяется принципом Ферма (наименьшего действия), согласно которому частица движется так, что ее мировая точка перемещается по геодезической в четырехмерном прост-ранстве-времени [34]. Однако фотон в кольцевом интерферометре не является свободной частицей [261], он многократно отражается от зеркал или следует по светонесущей жиле ОВС в ВКИ.

В работе [286] эффект Саньяка рассматривается как проявление адиабатического инварианта во вращающейся системе отсчета.

В работе [287] полагается, что эффект Саньяка связан с решением Шварцшильда [288] во вращающейся системе отсчета. В соответствии с предположением [287] в силу принципа эквивалентности во вращающейся системе отсчета к фотонам приложены гравитационные поля, причем для одной встречной волны в кольцевом интерферометре скорость возрастает, для другой убывает. Следует отметить, что последнее имеет место исключительно при наличии углового ускорения [117], и, следовательно, эффект Саньяка в [287] получает некорректное объяснение. Кроме того, эффект Саньяка в [287] рассматривается как аналог отклонения светового луча в гравитационном поле, причем рассмотрение проводится исходя из ранней ошибочной работы А. Эйнштейна [175]. В работе [289] высказывается точка зрения на эффект Саньяка, близкая к [287]. Однако автор [289] более осторожен, он отмечает, что не претендует на то, что стандартное вычисление эффекта Саньяка некорректно. Более того, он указывает, что этот результат может быть получен совершенно корректно в неподвижной системе отсчета в пространстве Минковского, т.е. в рамках СТО.

Автор работы [227] исходит из явно ошибочного предположения о том, что ускоренное движение (в том числе и вращение) является не абсолютным, а относительным, следствием чего, по его мнению, и является эффект Саньяка.

В работе [80] эффект Саньяка рассматривается как следствие парадокса близнецов во вращающейся системе отсчета.

6. Заключение

Мы ознакомились с некоторыми, наиболее интересными, с точки зрения автора, работами, посвященными эффекту Саньяка. Проведенный обзор показывает, что в настоящее время имеется большое число совершенно различных объяснений физических

причин возникновения данного эффекта. По-видимому, никакой другой эффект не находил столь различных и иногда взаимно исключających интерпретаций.

Интерес к эффекту Саньяка в различное время проявляли О. Лодж, А. Майкельсон, М. Лауэ, Ж. Саньяк, А. Эйнштейн, П. Ланжевен, Л. Зильберштейн, К. Рунге, Б. Погани, А. Зоммерфельд, Ф. Цернике, К. Мёллер, М.А. Тоннела, Ж. Сакураи, Я. Ааронов, а в нашей стране С.И. Вавилов, Л.И. Мандельштам, Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, И.Л. Берштейн, Г.В. Скроцкий, В.А. Угаров, А.А. Логунов.

Как было показано выше, эффект Саньяка является следствием релятивистского закона сложения скоростей - скорости распространения волны произвольной природы и скорости вращения интерферометра - и, следовательно, является кинематическим эффектом СТО [10,11]. Было также показано, что при отсутствии гравитирующих масс, т.е. при отсутствии кривизны пространства, вычисление эффекта Саньяка с точки зрения СТО и ОТО совершенно эквивалентно. Тем не менее в настоящее время некоторые исследователи задаются вопросом, можно ли проводить расчеты в ускоренных системах отсчета (в частности, во вращающихся системах отсчета) с помощью СТО. 2 февраля 1952 г. Р. Шенкланд обратился с этим вопросом к А. Эйнштейну (в связи с обсуждением влияния вращения Земли на результаты экспериментов Майкельсона-Морли [12, 13] и Д.К. Миллера [231, 232]) и получил следующий ответ [290]: "О да, это верно, пока нет тяготения; во всех остальных случаях специальная теория относительности применима. Хотя, возможно, подход общей теории относительности лучше, но он не необходим".

Подводя итоги данной работы, можно сделать вывод, что все объяснения физической природы эффекта Саньяка, кроме релятивистского, являются неверными, хотя в ряде частных случаев и приводят к правильному с точностью до релятивистских поправок результату. Последнее связано с тем обстоятельством, что эффект Саньяка наряду с рядом других эффектов, которыми его пытаются подменить, является эффектом первого порядка по v/c . Это и привело к большому числу различных некорректных объяснений рассматриваемого эффекта: от сведения его к следствию галилеевского закона сложения скоростей или к какому-либо другому известному эффекту первого порядка (эффекту Доплера, Френеля-Физо, Ааронова-Бома, Лензе-Тирринга и ряду других) до туманных и запутанных построений в рамках некорректной теории гравитации [25] или реанимации теории светового эфира [136, 236, 237]. Как было показано выше, часто помимо эффекта Саньяка имеют место и другие рассмотренные выше эффекты, что также затрудняет рассмотрение и в

ряде случаев приводит исследователей к неадекватным выводам.

Численное совпадение результата, полученного некорректным способом, с результатом корректных расчетов вовсе не свидетельствует о возможности объяснения одного и того же явления двумя или более различными способами. В качестве примера можно привести выражение для скорости света в движущейся среде, полученное в 1818 г. О. Френелем на основании теории частичного увлечения светового эфира [44]. Это выражение используется в оптике и по сей день, оно дает правильный результат с высокой точностью, в нем не учитывается лишь очень малая поправка, связанная с дисперсией среды, которая может быть получена только с помощью СТО [54]. Но при этом не следует забывать о том, что работа О. Френеля [44] сыграла в развитии физики не только положительную, но и отрицательную роль: благодаря ей около 90 лет, вплоть до создания СТО, просуществовала теория светового эфира. Не выскажи в свое время О. Френель предположение о частичном увлечении светового эфира движущейся средой, противоречие между результатами экспериментов Майкельсона-Морли [12,13] и теорией светового эфира заставило бы исследователей задуматься и это, возможно, привело бы к открытию закона релятивистского сложения

скоростей (и, быть может, даже к созданию СТО) раньше, чем это произошло в действительности. Можно привести и другой пример - полностью игнорирующее выводы ОТО объяснение гравитационного красного смещения как следствия изменения его потенциальной энергии при движении в гравитационном поле, дающее тем не менее правильный по абсолютной величине результат. Некорректность этой точки зрения показана в работе [41].

Таким образом, получение правильного результата "неправильным" способом может затруднить физическое понимание рассматриваемого эффекта и отсрочить построение адекватной теории.

Я благодарен памяти моего отца Б.Ф. Малыкина (04.05.1912-26.06.1999), побудившего меня заняться этой интереснейшей физической проблемой.

В заключение автор выражает благодарность Вл.В. Кочаровскому за ряд полезных замечаний к разделу 2.1 и В.И. Поздняковой за помощь в работе.

Работа частично поддержана грантами РФФИ (№ 00-15-96732 и № 00-02-17344).

5.7.7 Barn and Pole Paradox

Обсудим подробно парадокс шеста и сарая.

Суть парадокса шеста и сарая

Рассмотрим шест, летящий параллельно земле и потому подверженный лоренцевому сокращению длины.

В результате системе отсчёта сарая шест уместится в него, хотя в обычных условиях он не поместился бы.

С другой стороны, с точки зрения шеста движется сарай, а шест покоится, поэтому сократится длина именно сарая, и шест, и без того длиннее сарая, не войдёт в него.

Кажущийся парадокс возникает по причине предположения об абсолютной одновременности. Так, шест помещается в сарай, если оба конца шеста одновременно находятся внутри сарая. В релятивистике одновременность относительна, поэтому вопрос о том, находится ли шест в сарае, необходимо рассматривать относительно каждого наблюдателя — как шеста, так и сарая. Таким образом, парадокс разрешим.

(?? напишу выше точнее, пока мутновато написано.)

Когда мы говорим, что шест «помещается» в сарай, на самом деле мы имеем в виду, что и передний, и задний края шеста находились внутри сарая одновременно. Поскольку одновременность относительна, в двух разных системах отсчёта шест мог как поместиться, так и не поместиться, причём наблюдатели в обеих системах будут правы.

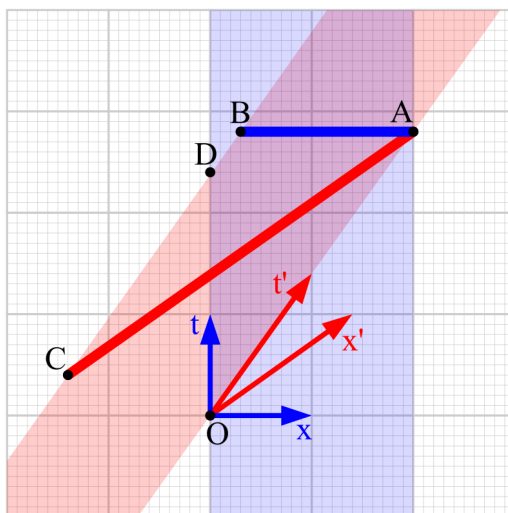
С точки зрения сарая передняя и задняя часть шеста в какой-то момент одновременно находились внутри сарая, поэтому шест поместился. Однако с точки зрения шеста эти события произошли не одновременно, и шест не поместился в сарай.

Это легко увидеть, если в системе отсчёта сарая, как только шест полностью войдёт в сарай, двери одновременно на короткое время закрываются. В системе же отсчёта шеста происходит следующее. При открытых дверях передняя часть шеста достигает задней двери сарая. Эта дверь закрывается, а затем открывается, дав шесту возможность пролететь насквозь. Через некоторое время до входной двери сарая долетает задний конец шеста, и, в свою очередь, закрывается и открывается передняя дверь. Отсюда видно, что поскольку одновременность относительна, обе двери необязательно окажутся закрытыми в одно время, и шесту не нужно полностью помещаться в сарай.

Хорошей иллюстрацией к происходящему является приведённая ниже диаграмма Минковского. Она построена в системе отсчёта сарая. Вертикальный голубой диапазон

показывает пространство-время сарая, красный диапазон — пространство-время шеста. За пространство и время отвечают оси x и t у сарая и x' и t' у шеста.

В системе отсчёта сарая в каждый момент времени шест отображается на диаграмме горизонтальной линией, параллельной оси x , внутри красного диапазона. Жирная синяя линия, лежащая в синем сегменте сарая, отображает шест в момент, когда он полностью находится в сарае. Однако в системе отсчёта шеста одновременные события располагаются по линиям, параллельным оси x' . Таким образом, положение шеста в любой момент времени выражено пересечением этих линий с красным сегментом. Как видно на схеме, жирная красная линия никогда полностью не лежит в синем диапазоне, а значит, шест никогда полностью не находится в сарае.



Парадокс кольца и стержня

Рисунок слева показывает стержень и кольцо в СО земли в момент соприкосновения их центров. Стержень движется вправо вверх, будучи под действием лоренцева сокращения длины. В это время кольцо стоит на месте и не укорачивается. На рисунке справа та же ситуация изображена в системе отсчёта стержня. Теперь укорачивается кольцо, вращаясь относительно стержня. Стержень же не меняется. В таком случае стержень пройдёт сквозь кольцо, не касаясь его. Рассмотрим более сложный парадокс, в котором действие происходит в неинерциальных системах отсчёта. Сначала человек движется по горизонтали, а затем падает вниз. Человек (сегментированная жердь) физически деформируется, поскольку жердь изгибается в одной СО и остаётся прямой в другой. Эти аспекты привносят в парадокс новые проблемы, связанные с жёсткостью жерди, размывая основную суть кажущегося противоречия. Похожая, но более простая проблема, в которой встречаются только инерциальные системы отсчёта, получила название парадокса кольца и стержня (Ferraro 2007). Стержень, который несколько длиннее диаметра кольца, движется вправо вверх. Длинная ось стержня расположена в горизонтальной плоскости, параллельно плоскости кольца. Кольцо в этот момент покоится. Если в ходе движения стержня его центр в какой-то момент совпадёт с центром кольца, стержень укоротится под действием лоренцева сокращения длины и пройдёт сквозь кольцо. Парадокс появляется при рассмотрении той же ситуации в СО стержня. Теперь кольцо движется влево вниз, сокращаясь вдоль своей длины по горизонтали. Длина стержня же останется прежней. Каким образом тогда стержень пройдёт сквозь кольцо?

Разрешение парадокса лежит в относительности одновременности (Ferraro 2007). Длина физического объекта определяется как расстояние между двумя одновременными

событиями, происходящими на обоих концах тела. Значит, из относительности одновременности следует относительность продольной длины объекта по оси движения, определяемая лоренцевым сокращением длины. Аналогично с помощью трёх одновременных событий определяется физический угол, который также будет относителен. В описанном выше парадоксе несмотря на то, что плоскости кольца и жердь параллельны друг другу в СО кольца, параллельность не сохраняется в СО стержня. Не подверженный укорочению стержень проходит сквозь укороченное кольцо лишь потому, что плоскость кольца вращается относительно жерди.

Говоря математическим языком, преобразования Лоренца можно разложить на произведение пространственного вращения и «правильного» преобразования Лоренца, в котором пространственного вращения нет. Математически парадокс кольца и стержня разрешим, если учесть, что произведение двух правильных преобразований Лоренца может дать преобразование, которое окажется неправильным. В таком преобразовании будет содержаться компонента, отвечающая за пространственный поворот.

Что нужно знать, чтобы парадокс очевидно не возник (!??!)

(потом в теории это же и пропишу)

5.7.8 Submarine Paradox

Суть

Согласно специальной теории относительности Эйнштейна с точки зрения неподвижного наблюдателя размеры объекта, движущегося со скоростью, близкой к скорости света, уменьшаются в направлении движения. Однако с точки зрения объекта, напротив, именно неподвижные наблюдатели кажутся короче.

Если предположить, что некая подлодка движется под водой с околосветовой скоростью, неподвижным наблюдателям она покажется сжавшейся. Плотность её, соответственно, должна увеличиться, что непременно потянет её на дно. Но со стороны объекта — находящегося на борту подлодки экипажа — всё воспринималось бы с точностью до наоборот: «бегущая» вода вокруг них сжимается, а значит становится более плотной и выталкивает лодку на поверхность.

В 1989 году Джеймс Сапли разрешил парадокс с использованием специальной теории относительности. В честь него эту задачу называют также «Парадокс Сапли».

В 2003 году бразилец Джордж Матсас из Сан-Паулу рассмотрел этот парадокс, используя общую теорию относительности. У обоих учёных вывод был одинаков: подлодка будет погружаться.

Учёные объясняют парадокс по-разному. На слои и на лодку действует масса факторов, требующих обязательного учёта для успешного решения этого парадокса. Здесь и увеличение воздействия гравитации на лодку, которая потянет её вниз, и искажение формы слоёв воды вверх (они «задираются» с точки зрения подлодки из-за нарушения одновременности начала ускорения).

Всё рассмотрение можно вести в рамках специальной теории относительности, переходя в движущуюся с ускорением систему отсчёта (в которой удобно ввести координаты Риндлера). Проще, однако, рассмотреть всё из инерциальной системы отсчёта, где ускорение жидкости вызывается какой-либо причиной, например, жидкость электрически заряжена и находится в электрическом поле, либо её подпирает ускоренно движущаяся стенка. Важно, что эта причина не ускоряет подлодку — например, подводная лодка нейтральна, либо не контактирует со стенкой. Ограничимся начальным

моментом времени, когда жидкость покоится, а скорость подлодки равна 0 для «неподвижного» случая, и v (с соответствующим $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$) для «движущегося».

С точки зрения инерциальных наблюдателей ускорение подводной лодки (не важно, в покое или в движении) вызывается передачей импульса от молекул жидкости к молекулам подводной лодки - это микроскопическое определение давления. Эта передача пропорциональна площади поверхности жидкости, контактирующей с подлодкой, и, соответственно, уменьшается в γ раз при сокращении подводной лодки из-за её движения. Поэтому передача импульса равна $\frac{dp_0}{dt}$ для «неподвижной» подлодки, и $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp_0}{dt}$ для «движущейся». Теперь несложно вычислить ускорения, получаемые подлодками в начальный момент: для «неподвижной» подлодки это будет величина, по условию совпадающая с ускорением жидкости

$$a_0 = \frac{1}{m} \frac{dp_0}{dt},$$

где m - масса подлодки, а для «движущейся»

$$a = \frac{1}{\gamma m} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\gamma^2 m} \frac{dp_0}{dt} = \frac{a_0}{\gamma^2}$$

где учтено, что подводная лодка ускоряется перпендикулярно направлению своего движения. Как видно, ускорение «движущейся» подлодки меньше, чем покоящейся — она затонет.

Теперь рассмотрим ситуацию в системе отсчёта, где подлодка «неподвижна», но двигается жидкость. Плотность жидкости из-за её релятивистского сокращения возрастёт, что увеличит силу Архимеда в γ раз, то есть передача импульса станет равна $\frac{dp'}{dt'} = \gamma \frac{dp_0}{dt}$, что вызовет ускорение подлодки

$$a'_s = \frac{1}{m} \frac{dp'}{dt'} = \gamma a_0.$$

Однако при переходе в эту инерциальную систему отсчёта ускорение жидкости также изменится. Выделив в жидкости некоторый уровень, имеем в исходной системе его уравнение движения $z = a_0 t^2/2$, а в новой, согласно преобразованиям Лоренца для месторасположения подводной лодки $x = vt \Rightarrow t = \gamma t'$, получаем $z' = z = a_0 t^2/2 = a_0 \gamma^2 t'^2/2 = a' t'^2/2$, то есть ускорение уровня жидкости, измеряемое с подлодки, равно $a'_l = \gamma^2 a_0$. Оно больше ускорения подлодки - она затонет.

Точно такой же результат получается, если взять правильное уравнение гиперболического движения $z = \frac{c^2}{a\sqrt{c^2+a^2t^2}} - \frac{c^2}{a} + z_0$ вместо приближённого, верного лишь вблизи $t = 0$, $z = \frac{a_0 t^2}{2}$.

Есть ещё некоторый эффект, связанный с нарушением одновременности ускорения различных частей жидкости относительно системы отсчёта подлодки, но он может быть сведён к пренебрежимо малой величине выбором малого ускорения и/или размера подлодки в направлении движения (смотри работу Матсаса для подробного разбора).

Что нужно знать, чтобы парадокс очевидно не возник (!??!)

(потом в теории это же и пропишу)

5.7.9 Ehrenfest Paradox on the Rotating Disk

Парадокс Эренфеста — мысленный эксперимент, рассматривающий диск, вращающийся с околосветовой скоростью.

В современном понимании показывает несовместимость некоторых понятий классической механики со специальной теорией относительности, а также возможность различного определения понятий времени и расстояния во вращающихся системах отсчёта.

Данный парадокс был выдвинут Эренфестом в 1909 году после разработки Эйнштейном специальной теории относительности.

Суть парадокса

Рассмотрим окружность (или полый цилиндр), вращающуюся вокруг своей оси. Так как скорость каждого элемента окружности направлена по касательной, то она (окружность) должна испытывать лоренцево сокращение, то есть её размер для внешнего наблюдателя должен казаться меньше, чем её собственная длина. Если окружность имеет радиус R , то для внешнего наблюдателя её длина равна $2\pi R$. Однако, учитывая лоренцево сокращение, собственная длина окружности окажется больше:

$$l = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - (\frac{\omega R}{c})^2}},$$

где ω — круговая частота, c — скорость света. Таким образом, изначально неподвижная жёсткая окружность после её раскручивания должна парадоксальным образом уменьшать свой радиус, чтобы сохранить длину. По рассуждениям Эренфеста абсолютно твёрдое тело невозможно привести во вращательное движение, поскольку в радиальном направлении лоренцева сжатия быть не должно. Следовательно, диск, бывший в покое состоянии плоским, при раскручивании должен как-то изменить свою форму.

Что нужно знать, чтобы парадокс очевидно не возник (!??!)

(потом в теории это же и пропишу)

5.7.10 Bell's Spaceship Paradox

Формулировка

В наиболее известном варианте самого Джона Стюарта Белла парадокс возникает при рассмотрении мысленного эксперимента, включающего в себя два ускоряющихся в одном и том же направлении космических корабля и соединяющую их натянутую до предела струну (один корабль летит строго впереди другого, то есть ускорение направлено вдоль струны).

Если корабли начнут синхронно ускоряться, то в сопутствующей кораблям системе отсчёта расстояние между ними начнёт увеличиваться и струна разорвётся.

С другой стороны, в системе отсчёта, в которой корабли сначала покоились, расстояние между ними не увеличивается, и поэтому струна разорваться не должна.

Какая точка зрения правильная? Согласно теории относительности, первая — разрыв струны.

Хронологически первое упоминание парадокса содержится в работе Э. Девана и М. Берана 1959 года[2], которые рассматривали результат подобного мысленного эксперимента как подтверждение реальности релятивистского сокращения тел.

Достаточно подробное объяснение эффекта разрыва троса, соединяющего синхронно ускоряющиеся ракеты было дано советским физиком Д. В. Скобельцыным в его книге «Парадокс близнецов в теории относительности».

Решение (??)

В версии Белла два космических корабля, вначале покоящиеся относительно некоторой инерциальной системы отсчёта (ИСО), соединяются натянутой до предела струной. В нулевой момент времени по часам соответствующей ИСО оба корабля начинают ускоряться с постоянным собственным ускорением g , измеряемым размещёнными на борту каждого корабля акселерометрами. Вопрос состоит в том, разорвётся ли струна?

В соответствии со мнением Девана и Берана, а также Белла, в системе отсчёта, в которой изначально корабли покоились, расстояние между ними будет оставаться неизменным, но длина струны будет испытывать релятивистское сокращение, так что в некоторый момент времени струна разорвётся. В формулировке Белла это представлено следующим образом[4]:

Три маленьких космических ракеты, А, В, и С, дрейфуют свободно в области пространства, удаленной от остального вещества, без вращения и без относительного движения, причем В и С равноудалены от А (рис. 1).

По получении сигнала от А двигатели В и С запускаются, и ракеты начинают плавно ускоряться (рис. 2). Пусть ракеты В и С идентичны и имеют идентичные программы ускорения. Тогда (как считает наблюдатель на А) они будут в каждый момент времени иметь одинаковую скорость и, таким образом, оставаться смещенными друг относительно друга на одинаковое расстояние.

Предположим, что с самого начала В и С связаны тонкой нитью (рис. 3). И если вначале нить достаточно длинна, чтобы ее хватило на требуемое расстояние, то по мере того как ракеты ускорятся, она станет короче, поскольку подвергается Фицджеральдовому сокращению, и в конце концов порвется. Она должна порваться, когда при достаточно большой скорости искусственное предотвращение естественного сжатия приведет к недопустимому натяжению.

Действительно ли это так? Эта старая задача оказалась однажды предметом обсуждения в столовой ЦЕРН'а. Один уважаемый физик-экспериментатор отказался согласиться с тем, что нить порвется, и счел мою уверенность в обратном моим собственным непониманием специальной теории относительности. Мы решили обратиться в Теоретический отдел ЦЕРН'а за арбитражем, и произвели (не очень систематический) опрос общественного мнения на этот счет. Образовался отчетливый консенсус в пользу того, что нить не порвется! Конечно, многие, кто поначалу дает этот неправильный ответ, приходят после некоторого размышления к правильному. Обычно они чувствуют необходимость посмотреть, как все это представляется наблюдателю В или С. Они обнаруживают, что В, например, видит С все дальше и дальше позади, так что данный кусок нити не может больше покрыть расстояние между ними. Только проделав это, и возможно с остаточным ощущением какой-то неловкости, эти люди в конце концов приходят к заключению, которое совершенно тривиально с точки зрения А, учитывая Фицджеральдово сокращение. Мое впечатление, что те, у кого более классическое образование, кто знает кое-что из рассуждений Лармора, Лоренца и Пуанкаре, а также Эйнштейна, обладают более сильной и надежной интуицией.

Против такого решения проблемы были выдвинуты возражения, которые затем, в свою очередь, были подвергнуты критике. Например, Пол Нороки (англ. Paul Nawrocki) предполагал, что струна не должна разорваться[5], в то время как Эдмонд Деван (англ. Edmond Dewan) защищал свою исходную точку зрения в ответной работе[6]. Белл писал, что он встретил сдержанный скептицизм «одного известного экспериментатора» в ответ на своё изложение парадокса. Для того, чтобы разрешить спор, было проведено неформальное совещание теоретического отдела ЦЕРНа. Белл утверждает, что «ясным общим мнением» отдела стало признание того, что струна не должна разорваться. Далее

Белл добавляет: «Конечно, многие люди, получившие сначала неправильный ответ, дошли до верного путём дальнейших рассуждений».

Об ускоренных системах отсчёта для парадокса Белла (??)

Релятивистская задача о движении тел с одинаковыми ускорениями привлекала внимание исследователей задолго до появления парадокса Белла. В 1907 году Эйнштейн[8], приступая к релятивистской теории гравитации, показал, что время в ускоренных системах течёт по-разному. Таким образом, Эйнштейн посредством принципа эквивалентности предсказал гравитационное красное смещение. В частности, в «равномерно ускоренной системе» или, что то же самое, в однородно ускоренной системе отсчёта темп времени зависит от расстояния $\delta = x_B - x_A$:

$$\tau = e^{\frac{g\delta}{c^2}},$$

где g - ускорение точек. Релятивистское уравнение движения тела [9] массы m под воздействием силы F_x

$$mc^2 \frac{d^2x}{ds^2} = F_x,$$

причем интервал $s = c\tau$ пропорционален собственному времени. Собственное время (показания бортовых стандартных часов ракеты) определяется движением ракеты и его невозможно как-то изменить. Например синхронизировать с «неподвижными» часами. В криволинейных координатах используются методы общей теории относительности. Для описания собственной неинерциальной системы отсчёта необходимо применять ковариантное дифференцирование

$$mc^2 \frac{Du^x}{ds} = F^x,$$

Причем движение в гравитационном поле описывается уравнением $Du^x = 0$ (уравнение геодезических) [9]. Если нам необходимо знать ускорение точки в трёхмерном пространстве, то соответствующее выражение в общем виде выглядит довольно сложно [10]. Однако в собственной системе отсчёта (скорость точек равна нулю) ускорение выражается просто:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = c^2 \Gamma_{00}^i.$$

Таким образом вычисления Белла и аналогичные вычисления не относятся к релятивистской физике ускоренных систем.

Точный ответ можно получить с помощью методов общей теории относительности. Однако задача Белла может быть решена и непосредственно из принципов теории относительности. Строго, исходя из постоянства скорости света задачу релятивистского движения тел с одинаковым ускорением решил Гарри Ласс в 1963 году [11]. Ласс решил одномерную задачу однородно ускоренной системы, используя принцип постоянства скорости света. Ласс рассмотрел систему отсчёта $O'XYZ$, ускоряющуюся вдоль оси x относительно инерциальной системы координат $Oxyz$. Далее, постулировав, что $dX/dT = \pm c$, и $dx/dt = \pm c$ (координатная скорость света инвариант), получил преобразование

$$x = \frac{c^2}{g} \left[e^{gX/c^2} \operatorname{ch} \frac{gT}{c} - 1 \right]$$

и

$$t = \frac{c}{g} e^{gX/c^2} \operatorname{sh} \frac{gT}{c}.$$

Решение Ласса соответствует решению Эйнштейна для хода часов в однородной ускоренной системе и его ускорение действительно постоянно $\Gamma_{00}^i = g/c^2$. Если в задаче Белла ракеты остановить, то есть принять $T = 0$, то расстояние между ними всегда будет фиксировано:

$$L|_{T=0} = \frac{c^2}{g} \left(e^{gX_B/c^2} - e^{gX_A/c^2} \right).$$

Из этого уравнения получается, что расстояние между ракетами в инерциальной системе сокращается в соответствии с законом Лоренца:

$$x_B - x_A = \sqrt{1 - v^2/c^2} L.$$

Парадокс решён. Одинаково ускоряющиеся ракеты сохраняют расстояние в собственной системе отсчёта. Причем «неподвижный» наблюдатель видит обычное сокращение Лоренца.

Что нужно знать, чтобы парадокс очевидно не возник (!???)

(потом в теории это же и пропишу)

6 Mathematical and Theoretical Special Relativity: Basics

6.1 Lorentz Group

6.1.1 Basics of Lorentz Group

Обзор группы Лоренца

(основные свойства, в 1ю часть тоже добавлю!!!)

We can define the following three-vectors from the independent components of $J^{\mu\nu}$ and $S^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &\equiv (J_x, J_y, J_z) \equiv (J^{yz}, J^{zx}, J^{xy}), \\ \mathbf{K} &\equiv (K_x, K_y, K_z) \equiv (J^{tx}, J^{ty}, J^{tz}), \\ \mathbf{S} &\equiv (S_x, S_y, S_z) \equiv (S^{yz}, S^{zx}, S^{xy}), \\ \tilde{\mathbf{S}} &\equiv (\tilde{S}_x, \tilde{S}_y, \tilde{S}_z) \equiv (S^{tx}, S^{ty}, S^{tz}). \end{aligned}$$

Теория

Рассмотрим множество всех преобразований Лоренца (7) вида

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

где матрицы Λ удовлетворяют базовому соотношению (8). Очевидно, что каждое преобразование Лоренца однозначно задается матрицей Λ и наоборот. Поэтому можно сказать, что множество всех преобразований Лоренца это множество всех матриц Λ , удовлетворяющих соотношению (8)

Совершим два последовательных преобразования Лоренца

$$x'^{\alpha} = \Lambda_{1\nu} x^{\nu}, \quad x'^{\nu} = \Lambda_{2\alpha} x^{\alpha}$$

Отсюда

$$x''^\mu = \Lambda_{2\alpha\alpha} \Lambda_1^\alpha{}_\nu x^\nu = (\Lambda_2 \Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu,$$

где $\Lambda_2 \Lambda_1$ есть произведение матриц Λ_2 и Λ_1 . Покажем, что если Λ_1 и Λ_2 удовлетворяют базовому соотношению (8), то и их произведение удовлетворяет базовому соотношению (8). Имеем

$$(\Lambda_2 \Lambda_1)^T \eta (\Lambda_2 \Lambda_1) = \Lambda_1^T (\Lambda_2^T \eta \Lambda_2) \Lambda_1 = \Lambda_1^T \eta \Lambda_1 = \eta$$

Следовательно матрица $(\Lambda_2 \Lambda_1)$ осуществляет некоторое преобразование Лоренца. Пусть матрица Λ удовлетворяет базовому соотношению (8), покажем, что соответствующая обратная матрица Λ^{-1} всегда существует. Из базового соотношения (8) следует

$$\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det \eta$$

Или

$$\det \Lambda^T \det \eta \det \Lambda = \det \eta$$

Очевидно, что $\det \eta = -1 \neq 0$. Поэтому

$$(\det \Lambda)^2 = 1$$

и значит $\det \Lambda \neq 0$. Поэтому для любой матрицы, осуществляющей преобразование Лоренца, обратная матрица всегда существует. Покажем, что матрица Λ^{-1} отвечает некоторому преобразованию Лоренца. Имеем

$$(\Lambda^T \eta \Lambda) = \eta$$

Поэтому

$$(\Lambda^T)^{-1} \Lambda^T \eta \Lambda \Lambda^{-1} = (\Lambda^T)^{-1} \eta \Lambda^{-1}$$

Или

$$(\Lambda^{-1})^T \eta \Lambda^{-1} = \eta$$

То есть, если матрица Λ удовлетворяет (8), то матрица Λ^{-1} также удовлетворяет (8). Очевидно, что единичная 4×4 матрица I

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет соотношению (8). То есть матрица I описывает некоторое преобразование Лоренца. Это преобразование имеет вид

$$x'^\mu = x^\mu$$

и называется единичным или тождественным преобразованием.

Таким образом, множество всех преобразований Лоренца, образует группу, если групповое умножение определено как последовательное выполнение двух преобразований. Поскольку каждое преобразование Лоренца однозначно задается матрице Λ , удовлетворяющей (8) и наоборот, то можно сказать что группа Лоренца это

группа матриц Λ , удовлетворяющих (8), где операция группового умножения определена как умножение матриц. Обратный элемент, отвечающий матрице Λ это матрица Λ^{-1} , единичный элемент группы это единичная матрица I . Определенная таким образом группа называется группой Лоренца и обозначается $O(3, 1)$ или L .

Рассмотрим более подробно структуру группы Лоренца. Из соотношения (20) следует, что

$$\det \Lambda = 1 \quad \text{либо} \quad \det \Lambda = -1.$$

Введем непрерывную кривую на группе L как множество матриц $\Lambda(\tau)$, удовлетворяющих (8) и непрерывно зависящих вещественного параметра τ . Допустим, что существуют такие τ_1 и τ_2 , что $\det \Lambda(\tau_1) = 1$ и $\det \Lambda(\tau_2) = -1$. Так как $\det \Lambda(\tau)$ есть непрерывная функция Λ и, значит, непрерывная функция τ , то существует такое значение τ_0 , лежащее между τ_2 и τ_1 , что $\det \Lambda(\tau_0) = 0$. Но по условию, для любой матрицы $\Lambda(\tau)$ выполнено соотношение (20). Возникает противоречие, показывающее что непрерывная кривая $\Lambda(\tau)$ с указанными свойствами не существует. Следовательно группа Лоренца разбивается на два подмножества L_+, L_- , называемые компонентами связности. Если $\Lambda \in L_+$, то $\det \Lambda > 0$, если $\Lambda \in L_-$, то $\det \Lambda < 0$. При этом не существует непрерывной кривой, соединяющей матрицы из разных компонент связности. Заметим, что единичный элемент группы Лоренца матрица $I \in L_+$. Ясно, что если $\Lambda_2, \Lambda_1 \in L_+$, то $\Lambda_2 \Lambda_1 \in L_+$ и если $\Lambda \in L_+$ то и $\Lambda^{-1} \in L_+$; $1 \in L_+$. Это значит, что подмножество L_+ образует группу, являющуюся подгруппой группы Лоренца. Множество L_- не образует подгруппу, так как оно не содержит единичного элемента.

Рассмотрим соотношение (5)

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta}$$

Положим здесь $\alpha = \beta = 0$, $\eta_{00} = 1$, получим

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 = 1$$

Или

$$\eta_{00} \Lambda^0_0 \Lambda^0_0 + \eta_{ij} \Lambda^i_0 \Lambda^j_0 = 1$$

Или

$$\Lambda^0_0 \Lambda^0_0 - \delta_{ij} \Lambda^i_0 \Lambda^j_0 = 1$$

Или

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2$$

Отсюда следует, что $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \Rightarrow \Lambda^0_0 > 0$, либо $\Lambda^0_0 < 0$. Таким образом возможны два случая

$$\text{sign } \Lambda^0_0 = 1, \quad \text{либо} \quad \text{sign } \Lambda^0_0 = -1$$

Поскольку функция $\text{sign } \Lambda^0_0$ меняется скачком, то не существует непрерывной функции Λ^0_0 , связывающей множество матриц Λ , где $\Lambda^0_0 > 0$, и множество матриц Λ , где $\Lambda^0_0 < 0$. Следовательно, каждое из множеств $L_\pm$ разбивается на два подмножества или две компоненты связности, обозначаемые $L_+^\uparrow, L_+^\downarrow, L_-^\uparrow, L_-^\downarrow$. Таким образом группа Лоренца характеризуется четырьмя компонентами связности

$$\begin{aligned}
\Lambda &\in L_+^\uparrow, & \det \Lambda &= 1, & \text{sign } \Lambda_0^0 &= 1 \\
\Lambda &\in L_+^\downarrow, & \det \Lambda &= 1, & \text{sign } \Lambda_0^0 &= -1 \\
\Lambda &\in L_-^\uparrow, & \det \Lambda &= -1, & \text{sign } \Lambda_0^0 &= 1 \\
\Lambda &\in L_-^\downarrow, & \det \Lambda &= -1, & \text{sign } \Lambda_0^0 &= -1
\end{aligned}$$

Напомним некоторые понятия. Вектор A^μ называется времениподобным, если $A^\mu A_\mu > 0$, пространственноподобным, если $A^\mu A_\mu < 0$ и светоподобным или изотропным, если $A^\mu A_\mu = 0$. Поскольку при преобразованиях Лоренца $A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$, где A'^μ получается из A^μ с помощью преобразований Лоренца, то свойство инвариантно вектора быть времениподобным, пространственноподобным или изотропным является инвариантным. Пусть A^μ времениподобный вектор и пусть $A^0 > 0$. В этом случае говорят, что данный вектор направлен в будущее. Если $A^0 < 0$, то говорят что данный вектор направлен в прошлое. Можно показать следующее, если $A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$ и A^μ - времениподобный вектор, то

$$\begin{aligned}
A^0 > 0, \quad \Lambda_0^0 > 0 &\Rightarrow A'^0 > 0 \\
A^0 < 0, \quad \Lambda_0^0 > 0 &\Rightarrow A'^0 < 0
\end{aligned}$$

Это означает, что условие $\Lambda_0^0 > 0$ имеет инвариантный смысл, соответствующее преобразование Лоренца сохраняет направленность времениподобных векторов в будущее или прошлое. По этой причине преобразования Лоренца, для которых $\Lambda_0^0 > 0$ называются ортохронными.

Продолжим обсуждение группы Лоренца L . Мы установили, что она содержит четыре компоненты связности.

$$L = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow \cup L_-^\uparrow \cup L_-^\downarrow$$

Покажем, что множество $L_+^\uparrow$ образует группу. Очевидно единичная матрица $I \in L_+^\uparrow$. Можно показать, что если $\Lambda_{10}^{00} > 0, \Lambda_{20}^{00} > 0$, то $(\Lambda_1 \Lambda_2)^0_0 > 0$ и если $\Lambda_0^0 > 0$, то $(\Lambda^{-1})^0_0 > 0$. Докажем только второе утверждение, первое доказывается аналогичным образом. Из соотношения (5) получим

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta}$$

Или

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu (\Lambda^{-1})^\beta_\gamma = \eta_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\beta_\gamma$$

Или

$$\eta_{\mu\gamma} \Lambda_\alpha^\mu = \eta_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\beta_\gamma$$

Или

$$\eta_{\mu\gamma} \Lambda^\mu_\alpha \eta^{\alpha\sigma} = (\Lambda^{-1})^\sigma_\gamma$$

Поэтому

$$(\Lambda^{-1})^0_0 = \eta_{\mu 0} \Lambda^\mu_\alpha \eta^{\alpha 0} = \Lambda_0^0 > 0$$

Таким образом множество матриц $L_+^\uparrow$ является группой, которая называется собственной группой Лоренца и обозначается $SO(3, 1)^\uparrow$. Обозначение отражает тот факт, что рассматривается группа матриц Λ с определителем равным единице, сохраняющих

квадратичную форму (1) с тремя отрицательными собственными значениями и одним положительным собственным значением и обладающих свойством $\Lambda_0^0 > 0$. Иногда группу L называют расширенной группой Лоренца, а $L_+^\uparrow$ просто группой Лоренца.

Отметим основные свойства для остальных компонент связности расширенной группы Лоренца. Рассмотрим соотношение (24). Можно показать

1. Если $\tilde{\Lambda} \in L_-^\uparrow$, то $\tilde{\Lambda} = \Lambda_P \Lambda$, где $\Lambda \in L_+^\uparrow$ и Λ_P есть пространственное отражение.
2. Если $\tilde{\Lambda} \in L_-^\downarrow$, то $\tilde{\Lambda} = \Lambda_T \Lambda$, где $\Lambda \in L_+^\uparrow$ и Λ_T есть обращение времени.
3. Если $\tilde{\Lambda} \in L_+^\downarrow$, то $\tilde{\Lambda} = \Lambda_{PT} \Lambda$, где $\Lambda \in L_+^\uparrow$ и Λ_{PT} есть полное отражение.

Таким образом, произвольное преобразование Лоренца - это либо собственное преобразование Лоренца либо собственное преобразование Лоренца, дополненное дискретными преобразованиями $\Lambda_P, \Lambda_T, \Lambda_{PT}$. Найдем бесконечно малую форму преобразования Лоренца. Запишем матрицу Λ в виде

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu,$$

где ω_ν^μ матрица с бесконечно малыми элементами. Матрице (25) отвечает следующее преобразование Лоренца

$$x'^\mu = x^\mu + \omega_\nu^\mu x^\nu$$

Выясним какие условия на ω_ν^μ , накладывает базовое соотношение (8). Имеем

$$(1 + \omega)^T \eta (1 + \omega) = \eta$$

В первом порядке по ω получим

$$\eta + \omega^T \eta + \eta \omega = \eta$$

Или

$$\eta \omega = -\omega^T \eta$$

Отсюда

$$\eta_{\mu\alpha} \omega^\alpha_\nu = -(\omega^T)_\mu^\alpha \eta_{\alpha\nu}$$

То есть

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega^\alpha_\mu \eta_{\alpha\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

Матрица ω_ν^μ в соотношении (25) является антисимметричной. Преобразование (26) принадлежит группе $L_+^\uparrow$, действительно

$$\begin{aligned} \Lambda_0^0 &= \delta_0^0 + \omega_0^0 = 1 + \omega_0^0 > 0 \\ \det(1 + \omega) &= 1 + \text{tr} \omega = 1 + \eta^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} = 1 \end{aligned}$$

Учтено что ω_0^0 - бесконечно малый параметр. Очевидно, что вещественная антисимметричная 4×4 матрица имеет в окрестности единичного элемента шесть независимых вещественных элементов. Поэтому группа Лоренца является шести параметрической группой Ли.

Собственная ортохронная группа Лоренца

Бесконечно малое шестипараметрическое преобразование координат при поворотах и лоренцевых бустах -

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu\nu} x_{\nu}, \quad \omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu},$$

в первом порядке малости по $\omega^{\nu\mu}$ сохраняет интервал $x_{\mu}x^{\mu}$ в силу антисимметрии тензора $\omega^{\nu\mu}$ относительно перестановки индексов.

Конечные элементы группы преобразований также сохраняют интервал, так что при

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

¹ Если направление поворота фиксировано, то углы поворотов складываются, а значит, группа поворотов вокруг одной оси абелева. То же можно утверждать и о бустах. Потому и выбор параметров групповых преобразований так, чтобы направления поворота и буста были фиксированы, а менялась бы только величина преобразования u означает, что по параметру u имеет место абелева группа. 41341

находим, что инвариантность интервала и условие изометрии преобразования $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ означают справедливость следующих равенств:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu}_{\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} = g_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}.$$

В этом выражении тензор смешанного типа Λ^{μ}_{ν} имеет один контрвариантный индекс μ , который в матричной записи мы трактуем как столбцовый, и один ковариантный индекс ν который мы трактуем как строчный, так что Λ^{μ}_{ν} - это матрица 4×4 , для которой можно пользоваться обычной операцией матричного умножения, и, при этом, расположение индексов у Λ^{μ}_{ν} однозначно задает законы преобразования тензора по каждому из индексов. Тензор метрики $g_{\mu\nu}$ имеет 2 ковариантных индекса, так что первый индекс трактуется как номер в столбце, а второй как номер в строке, если использовать правила матричного умножения. Для того, чтобы использовать матричное умножение и для векторов, и для ковекторов, у которых только один индекс, а не два, как у матрицы, и при этом однозначно определять закон преобразования при смене базиса в векторном пространстве, введем операцию транспонирования. Транспонирование определяется инвариантно в любом базисе как координат, так и представлений группы преобразований и в случае 4-вектора с контрвариантным индексом, который в матричных обозначениях нумерует позицию в столбце, переводит его в транспонированный вектор с контрвариантным индексом, который нумерует позицию в строке, что мы указываем порядком следования индексов для использования матричного умножения,

$$dx^{\mu} \equiv dx^{\mu\bullet} \mapsto (dx^T)^{\bullet} \stackrel{\text{def}}{=} dx^{\mu\bullet}.$$

В этой записи матричный столбец рассматривается как часть матрицы, у которой нет номера в строке, в строка матрицы как часть матрицы, у которой нет номера в столбце. По построению, транспонированный вектор $(dx^T)^{\bullet\mu}$ преобразуется транспонированной матрицей Λ^T , если использовать матричные обозначения:

$$dx'^T = dx^T \circ \Lambda^T,$$

или в индексах

$$\left(dx'^T\right)^{\bullet} = (dx')^{\mu\bullet} = \Lambda^{\mu}_{\nu} dx^{\nu\bullet} = (dx^T)^{\bullet\nu} (\Lambda^T)^{\bullet}_{\nu} = (dx^T \circ \Lambda^T)^{\bullet},$$

где мы воспользовались определением операции транспонирования матрицы, т.е. операции перестановки порядка следования индексов,

$$(\mathcal{R}^T)_{\nu}^{\bullet} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_{\bullet\nu}^{\mu}, \quad \text{или} \quad (A^T)_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} A_{\nu\mu}, \quad (M^T)^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} M^{\nu\mu}.$$

Из этих выкладок также ясно видно, что переход к матричному умножению с транспонированием абсолютно сочетается с ковариантными свойствами тензорных величин с соблюдением всех свойств преобразования по ковариантным и контрвариантным индексам: например, контрвектор преобразуется по закону преобразования контрвекторов. Вместе с тем, говорят, что транспонированные тензорные величины (17.51) преобразуются по транспонированному представлению, поскольку в записи с матричным умножением последовательная композиция двух обратимых преобразований сводится к левому умножению матриц в контрвариантном пространстве и к правому умножению транспонированных матриц в транспонированном контрвариантном пространстве.

После перехода к записи с привычным матричным умножением квадрат интервала можно записать в терминах транспонированного контрвектора и матрицы метрики,

$$ds^2 = dx^T \circ \hat{g} \circ dx, \quad \hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu},$$

а преобразование тензора метрики можно переписать в виде умножения матриц,

$$\hat{g} = \Lambda^T \circ \hat{g}' \circ \Lambda,$$

Тогда и закон изометрии, когда $\hat{g}' = \hat{g}$,

$$g_{\mu'\nu'} = g_{\mu\nu} \Lambda_{\mu'}^{\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu} = (\Lambda^T)_{\mu'}^{\bullet} g_{\mu\nu} \Lambda_{\nu'}^{\nu}$$

согласно 17.55) можно записать с матричным умножением как ортогональные преобразования 4-х координат пространства-времени ²

$$\hat{g} = \Lambda^T \circ \hat{g} \circ \Lambda,$$

откуда сразу следует специальное условие на детерминант матрицы преобразований³

$$(\det \Lambda)^2 = 1,$$

а также

$$g_{00} = 1 = g_{\mu\nu} \Lambda_{\bullet 0}^{\mu} \Lambda_{\bullet 0}^{\nu} = (\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_{\bullet 0}^{\alpha})^2,$$

откуда

$$|\Lambda_0^0| \geq 1.$$

Преобразования, включающие в себя исследованные нами бесконечно малые повороты и бусты вблизи тождественного преобразования, очевидно, имеют положительные значения детерминанта и временного элемента матрицы преобразований 4-координат Λ ,

$$\det \Lambda = 1, \quad \Lambda_0^0 \geq 1.$$

Такие преобразования не содержат зеркальные инверсии (вернее, нечетное число таких инверсий) пространства и не меняют направление стрелы времени, и поэтому они образуют собственную ортохронную группу Лоренца $SO_+^{\uparrow}(3, 1)$

¹ Более детальное рассмотрение транспонированного и комплексно сопряженного представлений алгебр Ли см. на стр. 358 в разделе, где будет описано спинорное представление алгебры Ли группы Лоренца. Там мы покажем, что транспонированное представление всегда эквивалентно исходному представлению группы Ли, в которой непрерывные групповые координаты $\mathbf{u}$ преобразованы операцией зеркальной инверсией $\mathbf{u} \mapsto -\mathbf{u}$.

² Это условие символично обозначают как $O(3, 1)$.

³ В обозначениях для матриц символом S указывают на то, что матрица преобразований удовлетворяет специальному условию на значения детерминанта $|\det \Lambda| = 1$.

Групповой элемент через генераторы

(!! именно про групповой элемент тут говорим)

Considering the Lorentz group in the vicinity of the unity element (6.32), we recognize from (6.39) and (6.43) that there the basis elements $L^{\alpha\beta}$ appear:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu - \frac{i}{2} (L^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \omega_{\alpha\beta}.$$

Conversely, the Lie theorem states that the knowledge of the basis elements $L^{\alpha\beta}$ of the Lorentz algebra allows to determine each element of the Lorentz group by evaluating a matrix exponential function:

$$\Lambda = \exp \left\{ -\frac{i}{2} L^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} \right\}.$$

The statement of the Lie theorem suggests that the (basis) elements of the Lorentz algebra are called to be the (basis) generators of the Lorentz group. Corresponding to the decomposition of the basis generators $L^{\alpha\beta}$ into the two classes (6.50) and (6.51) also the expansion coefficients $\omega_{\alpha\beta}$ are decomposed into

$$\begin{aligned} \varphi^k &= \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \omega_{lm}, \\ \xi^k &= \omega_{0k}. \end{aligned}$$

By taking into account the anti-symmetric properties (6.41) and (6.45) as well as the definitions (6.51) and (6.55) the Lie theorem (6.61) reads

$$\Lambda = \exp \left\{ -\frac{i}{2} L^{kl} \omega_{kl} - \frac{i}{2} L^{0k} \omega_{0k} \right\} = \exp \{ -i\boldsymbol{\varphi} \mathbf{L} - i\xi \mathbf{M} \}.$$

In the following we investigate further the Lie theorem (6.64) and show that $\xi = \mathbf{0}$ corresponds to rotations and $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ to boosts, respectively. Thus, $\boldsymbol{\varphi}(\xi)$ denote the vector of rotation angles (rapidities) and $\mathbf{L}(\mathbf{M})$ represent the generators for the rotations (boosts).

Повороты

6.6 Rotations According to the Lie theorem (6.64) a general rotation with the vector of rotation angles $\boldsymbol{\varphi}$ is defined by the matrix exponential function

$$R(\boldsymbol{\varphi}) = \exp \{ -i\boldsymbol{\varphi} \mathbf{L} \},$$

where the explicit representation matrices for the basis generators of rotations $\mathbf{L}$ are defined in (6.53). In the exercises (6.65) is evaluated, yielding the representation matrix of a rotation in the form

$$R_{00} = 1, R_{0j} = R_{j0} = 0, R_{jk}(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{\varphi_i}{|\boldsymbol{\varphi}|} \epsilon_{ikj} \sin |\boldsymbol{\varphi}| + \frac{\varphi_j \varphi_k}{|\boldsymbol{\varphi}|^2} (1 - \cos |\boldsymbol{\varphi}|) + \delta_{jk} \cos |\boldsymbol{\varphi}|. \quad (6.66)$$

Note that the 4×4 matrix defined by (6.66) fulfills two properties, which are characteristic for describing a rotation along the axis φ with the angle $|\varphi|$. On the one hand the rotation axis φ is an eigenvalue of the rotation matrix $R(\varphi)$ with eigenvalue 1:

$$R(\varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

On other hand the trace of the rotation matrix $R(\varphi)$ is related to the rotation angle $|\varphi|$ via

$$\text{tr} R(\varphi) = 2 + 2 \cos |\varphi|.$$

Furthermore, we note that the spatial components of a representation matrix of a rotation obey the orthonormality relation

$$R_{kl}(\varphi) R_{km}(\varphi) = \delta_{lm},$$

which follows from (6.28) and (6.29) but can also be proven by using the explicit expression (6.66).

Now we apply the rotation matrix (6.66) to a vector $\mathbf{x}$, which has a component parallel to the rotation axis

$$\mathbf{x}_{\parallel} = \frac{\varphi \cdot \mathbf{x}}{|\varphi|} \frac{\varphi}{|\varphi|}$$

and another one perpendicular to the rotation axis: $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}$. For the rotated vector

$$x'_j = R_{jk} x_k$$

we then obtain the decomposition

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp} \cos |\varphi| + \frac{\varphi}{|\varphi|} \times \mathbf{x}_{\perp} \sin |\varphi|.$$

Бусты

According to the Lie theorem (6.64) a general boost with the vector of rapidities $\boldsymbol{\xi}$ is defined by the matrix exponential function

$$B(\boldsymbol{\xi}) = \exp\{-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{M},$$

6.7. BOOSTS 75 where the explicit representation matrices for the basis generators of boosts $\mathbf{M}$ are defined in (6.54). In the exercises (6.75) is evaluated, yielding the representation matrix of a boost in the form

$$B(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \text{ch } |\boldsymbol{\xi}| & \frac{\xi_j}{|\boldsymbol{\xi}|} \text{sh } |\boldsymbol{\xi}| \\ \frac{\xi_i}{|\boldsymbol{\xi}|} \text{sh } |\boldsymbol{\xi}| & \delta_{ij} + \frac{\xi_i \xi_j}{|\boldsymbol{\xi}|^2} (\text{ch } |\boldsymbol{\xi}| - 1) \end{pmatrix}$$

We interpret the boost (6.76) passively in order to determine a relation between the rapidity $\boldsymbol{\xi}$ and the velocity $\mathbf{v}$, with which the inertial system S' is moving with respect to the inertial system S , see Fig. 6.2. To this end we observe that the coordinate origin of S' is described in both inertial systems S and S' with the following space-time four-vectors:

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{v}t \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad (x'^\mu) = \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix}$$

Thus, mapping the four-vector (x^μ) to (x'^μ) via the boost (6.77) according to

$$x'^\mu = B^\mu_\nu(\boldsymbol{\xi}) x^\nu$$

we obtain from taking to account (6.76):

$$\begin{aligned} t' &= t \operatorname{ch} |\boldsymbol{\xi}| + \frac{\boldsymbol{\xi} \mathbf{v} t}{|\boldsymbol{\xi}| c} \operatorname{sh} |\boldsymbol{\xi}| \\ \mathbf{0} &= \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} \operatorname{sh} |\boldsymbol{\xi}| + \frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{\boldsymbol{\xi} \mathbf{v}}{|\boldsymbol{\xi}| c} \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} (\operatorname{ch} |\boldsymbol{\xi}| - 1). \end{aligned}$$

At first, we conclude from (6.80) that rapidity $\boldsymbol{\xi}$ and velocity $\mathbf{v}$ are anti-parallel with respect to each other:

$$\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} = -\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Inserting (6.81) into (6.80) we conclude how the amounts of both the rapidity vector and the velocity vector are related:

$$\frac{|\mathbf{v}|}{c} = \operatorname{sh} |\boldsymbol{\xi}| - \frac{|\mathbf{v}|}{c} (\operatorname{ch} |\boldsymbol{\xi}| - 1) \implies \frac{|\mathbf{v}|}{c} = \operatorname{th} |\boldsymbol{\xi}|.$$

Thus, due to hyperbolic relations we obtain

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} |\boldsymbol{\xi}| &= \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 |\boldsymbol{\xi}|}} = \gamma, \\ \operatorname{sh} |\boldsymbol{\xi}| &= \frac{\operatorname{th} |\boldsymbol{\xi}|}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 |\boldsymbol{\xi}|}} = \frac{|\mathbf{v}|}{c} \gamma, \end{aligned}$$

where we have introduced the Lorentz factor of special relativity as an abbreviation:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2}}$$

With (6.76) and (6.81)-(6.85) the representation matrix of a boost turns out to be

$$B(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v_j}{c} \gamma \\ -\frac{v_i}{c} \gamma & \delta_{ij} + \frac{v_i v_j}{|\mathbf{v}|^2} (\gamma - 1) \end{pmatrix}.$$

Note that the components of a representation matrix of a boost obey the relation

$$B^\mu{}_\nu(\mathbf{v}) B_\mu{}^\kappa(\mathbf{v}) = \delta_\nu{}^\kappa,$$

which follows from (6.28) and (6.29) but can also be proven by using the explicit expression (6.76). And finally, as a concrete example, we read off from (6.79) and (6.81)-(6.85) the time dilatation

$$t' = t \gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right) = t \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}},$$

i.e. an observer in the inertial system S detects that the clock in the moving inertial system S' goes slower than the clock in S .

6.1.2 Indexes, minuses, positions

There is a typical pitfall, to which everyone gets trapped during learning of Poincare group - the indices and their position. There are a lot of subtleties, which often do not matter, because anyway one always understand what is meant by them.

How really indices work

Для исследования свойств матриц спина векторной частицы напомним ряд определений для квадратных матриц $\hat{A}$ размером $n \times n$, которые действуют на n -мерные столбцы, т.е. в n -мерном комплексном пространстве.

Транспонированная матрица A^T имеет элементы

$$(A^T)_{\beta}^{\alpha} = A_{\bullet\beta}^{\alpha}$$

Эрмитово сопряженная матрица $A^{\dagger}$ имеет элементы, комплексно сопряженные элементам транспонированной матрицы:

$$(A^{\dagger})_{\beta}^{\bullet\alpha} = (A^*)_{\bullet\beta}^{\alpha}$$

Эрмитово самосопряженная матрица или просто эрмитова матрица совпадает со своей эрмитово сопряженной,

$$A^{\dagger} = A \quad \Rightarrow \quad A_{\bullet\beta}^{\alpha} = (A^*)_{\beta}^{\alpha}$$

Для исследования свойств матриц спина векторной частицы напомним ряд определений для квадратных матриц $\hat{A}$ размером $n \times n$, которые действуют на n -мерные столбцы, т.е. в n -мерном комплексном пространстве.

Транспонированная матрица A^T имеет элементы

$$(A^T)_{\beta}^{\alpha} = A_{\bullet\beta}^{\alpha}$$

Эрмитово сопряженная матрица $A^{\dagger}$ имеет элементы, комплексно сопряженные элементам транспонированной матрицы:

$$(A^{\dagger})_{\beta}^{\bullet\alpha} = (A^*)_{\bullet\beta}^{\alpha}$$

Эрмитово самосопряженная матрица или просто эрмитова матрица совпадает со своей эрмитово сопряженной,

$$A^{\dagger} = A \quad \Rightarrow \quad A_{\bullet\beta}^{\alpha} = (A^*)_{\beta}^{\alpha}$$

To which extent is it good to think about indexes

(discuss where it matters and where it is not? most always it does not matter much)

Examples about indices that make people puzzled

(I'll write them from Kiselev's derivations)

Selected examples about details of indices

(I'll write some features, there are many notations, many books about them, so there will be several ones to add)

6.1.3 Rotations in Minkowski Space

Вид поворотов

Бесконечно малые повороты координат 3-мерного евклидова пространства вокруг оси, направленной вдоль единичного вектора $\mathbf{e}$, на угол $\phi \rightarrow 0$ в декартовой системе координат задаются векторным произведением

$$\delta \mathbf{r} = \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r},$$

где псевдовектор поворота $\boldsymbol{\phi} = \phi \mathbf{e}$.

Преобразованные координаты можно записать покомпонентно

$$\mathbf{r}'^{\alpha} = (\mathbf{r}_{\mathbb{E}} + \delta \mathbf{r}_{\mathbb{E}})^{\alpha} = \left(\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\gamma} + \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \phi_{\mathbb{E}}^{\beta} \right) r_{\mathbb{E}}^{\gamma},$$

что можно также представить в виде действия матричного оператора $\hat{R}_{\mathbb{E}}(\phi)$, который умножается на координатный вектор-столбец,

$$\mathbf{r}' \stackrel{\text{def}}{=} \hat{R}_{\mathbb{E}}(\phi) \circ \mathbf{r}, \quad \hat{R}_{\mathbb{E}}(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1} - i \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi},$$

причем компоненты трех 3×3 -матриц $\mathbf{s}$ согласно явному виду поворота задаются явно как

$$\left(s_{\mathbb{E}}^{\beta} \right)^{\alpha\gamma} = -i \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha\gamma},$$

и эти эрмитово самосопряженные матрицы можно рассматривать как линейные операторы на трехмерных комплекснозначных векторах.

Для полноты представления приведем эти матрицы в явном виде,

$$s_{\mathbb{E}}^x = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{\mathbb{E}}^y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{\mathbb{E}}^z = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разложение оператора непрерывного преобразования $\hat{R}_{\mathbb{E}}(\phi)$ в ряд Тейлора в малой окрестности тождественного преобразования $\hat{R}_{\mathbb{E}}(\mathbf{0}) = \mathbb{1}$ с точностью до линейных членов по непрерывному параметру преобразования в (17.4), т.е. при $\phi \rightarrow 0$ определяет генератор инфинитезимального преобразования $\mathbf{\Gamma}$ в виде производной

$$\mathbf{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} i \left. \frac{\partial \hat{R}_{\mathbb{E}}(\phi)}{\partial \phi} \right|_{\phi \rightarrow 0}.$$

В случае поворотов $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{s}$, а значит, матрицы $\mathbf{s}$ - это генераторы группы поворотов, которые действуют в векторном пространстве декартовых координат.

Коммутационные соотношения генераторов поворота и казимир

Коммутационные соотношения для генераторов поворотов имеют вид

$$\left[\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\beta} \right] = i \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma}$$

Это проверяется прямыми вычислениями:

$$\begin{aligned}
 \left[\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\beta} \right]_{\mathbb{E}}^{\alpha' \beta'} &= (-i)^2 \left\{ \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \alpha'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta \gamma \beta'} - \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta \alpha'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \gamma \beta'} \right\} = \\
 &= \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \alpha'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta \beta' \gamma} - \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta \alpha'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta' \gamma} = \\
 &= \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta} \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha' \beta'} - \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta'} \delta_{\mathbb{E}}^{\beta \alpha'} - \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta} \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha' \beta'} + \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha \alpha'} \delta_{\mathbb{E}}^{\beta \beta'} = \\
 &= \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha \alpha'} \delta_{\mathbb{E}}^{\beta \beta'} - \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta'} \delta_{\mathbb{E}}^{\beta \alpha'}
 \end{aligned}$$

и справа имеется это же выражение:

$$i(-i) \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta \gamma} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\gamma \alpha' \beta'} = \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha \alpha'} \delta_{\mathbb{E}}^{\beta \beta'} - \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta'} \delta_{\mathbb{E}}^{\beta \alpha'}.$$

Квадрат вектора $\mathbf{s}$ равен

$$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})_{\mathbb{E}}^{\alpha' \beta'} = (\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha})_{\mathbb{E}}^{\alpha' \gamma} (\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha})_{\mathbb{E}}^{\gamma \beta'} = -\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \alpha'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \gamma \beta'} = \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \gamma \alpha'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \gamma \beta'} = 2 \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha' \beta'},$$

а значит, опуская индексы, имеем

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 2 \cdot \mathbb{1}$$

Единичная матрица, очевидно, коммутирует со всеми тремя матрицами генераторами поворотов $\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}$:

$$[\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^2, \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}] = 0,$$

что можно трактовать как тот факт, что скалярная величина (квадрат вектора $\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^2$) не изменяется при поворотах. Такой инвариант, построенный из генераторов поворотов как однородный полином второго порядка, называют квадратичным оператором Казимира.

Поворот скалярного поля

Функция $\Phi(\mathbf{r})$, которая сопоставляет векторам координат число, не зависящее от выбора базиса в векторном пространстве координат, называется скалярным полем. В координатном подходе по определению скалярного поля его значение инвариантно относительно обратимых замен координатного базиса $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}'$,

$$\Phi'(\mathbf{r}') = \Phi(\mathbf{r}),$$

и в частном случае поворота, когда $\mathbf{r}' = \hat{R}_{\mathbb{E}}(\phi) \circ \mathbf{r}$,

$$\Phi'(\hat{R}_{\mathbb{E}}(\phi) \circ \mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) \Rightarrow \Phi'(\mathbf{r}) = \Phi(\hat{R}_{\mathbb{E}}^{-1}(\phi) \circ \mathbf{r}),$$

а значит, для бесконечно малых поворотов новое поле в старых координатах выражается через исходное поле как

$$\Phi'(\mathbf{r}) \approx \Phi(\mathbf{r} - \delta \mathbf{r}) \approx \Phi(\mathbf{r}) - \delta r_{\mathbb{E}}^{\alpha} \partial_{\alpha} \Phi(\mathbf{r}) =$$

$$= \Phi(\mathbf{r}) - (\phi \times \mathbf{r})_{\mathbb{E}}^{\alpha} \partial_{\alpha} \Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) - \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta \gamma} \phi_{\mathbb{E}}^{\beta} r_{\mathbb{E}}^{\gamma} \partial_{\alpha} \Phi(\mathbf{r})$$

Последнее равенство можно трактовать как действие оператора на скалярное поле при бесконечно малых поворотах

$$\Phi'(\mathbf{r}) = (\mathbb{1} - i(\mathbf{l} \cdot \phi)) \Phi(\mathbf{r}) = \left(\mathbb{1} - i \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\beta} \phi_{\mathbb{E}}^{\beta} \right) \Phi(\mathbf{r}),$$

откуда сразу находим выражение для генератора преобразования координат в аргументе поля

$$\mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\beta} = -i \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha \beta \gamma} r_{\mathbb{E}}^{\gamma} \partial_{\alpha} \Rightarrow \mathbf{l} = -i \mathbf{r} \times \nabla,$$

а это - безразмерный оператор момента импульса $\mathbf{l} = \mathbf{L}/\hbar$.

Коммутаторы оператора момента

Из квантовой механики нам известны коммутаторы

$$[l_{\mathbb{E}}^{\alpha}, l_{\mathbb{E}}^{\beta}] = i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} l_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad [l_{\mathbb{E}}^2, l_{\mathbb{E}}^{\alpha}] = 0.$$

(? мб тут проверю явными вычислениями, пока верю.)

Ковекторы имеют такое же преобразование как векторы

Коммутационные соотношения

$$[l_{\mathbb{E}}^{\alpha}, l_{\mathbb{E}}^{\beta}] = i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} l_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad [l_{\mathbb{E}}^2, l_{\mathbb{E}}^{\alpha}] = 0.$$

совпадают с

$$[s_{\mathbb{E}}^{\alpha}, s_{\mathbb{E}}^{\beta}] = i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} s_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad [s_{\mathbb{E}}^2, s_{\mathbb{E}}^{\alpha}] = 0$$

Разница заключается только в том, что дифференциальные операторы момента импульса l действуют в пространстве функций от координат, а матрицы s - в векторном пространстве самих координат.

В математике такая ситуация описывается следующим образом: говорят, что абстрактная группа поворотов реализуется в функциональном и матричном представлении, а значит, все законы групповых преобразований в абстрактной группе переходят в точно такие же законы преобразований в пространстве представления. В частности, для групп Ли, в которых групповые преобразования зависят от непрерывных параметров, описание бесконечно малых преобразований возле тождественного преобразования сводится к одним и тем же коммутационным соотношениям для генераторов, которые действуют в своих пространствах представления.

Размерность пространства представления равна $2s + 1$ (???)

генераторы преобразований s - это матрицы, которые действуют в векторном пространстве размерности $2s + 1$

(?? почему??)

fibre bundle

Итак, локальное поле v_A с точки зрения группы поворотов - это элемент неприводимого представления алгебры группы поворотов, причем пространство представления - это векторное пространство, а элемент представления v_A может зависеть от точки пространства $\mathbf{r}$. Как элемент неприводимого представления поле v_A принадлежит $2s + 1$ -мерному векторному пространству, $A \in \overline{\{1, 2s + 1\}}$, а как функция от координат $\mathbf{r}$ поле $v_A(\mathbf{r})$ - это $2s + 1$ -мерная функция, свойства которой относительно поворотов строго заданы тем, какому представлению принадлежит поле. Такая конструкция в математике называется локально тривиальным прямым произведением v_A над координатной базой $\mathbf{r} : \mathbf{r} \times v_A = v_a(\mathbf{r})$, - а также гладким или главным расслоением [в англоязычной литературе - fibre bundle (UK), fiber bundle(US)].

Почему в интернете локально тривиальное расслоение это что-то вообще не похожее на это? (!?!?!?)

(?? хз)

Дальше

¹ Алгебра Ли группы поворотов $SO(3)$ совпадает с алгеброй Ли группы специальных унитарных преобразований комплекснозначных двумерных столбцов $SU(2)$, так что возможны реализации с полуцелым спином.

Например, рассмотренное нами скалярное поле $\Phi(\mathbf{r})$ - это локальное поле спина 0. Из этого примера ясно, что как функции от координат поля преобразуются одинаково: генераторы орбитального момента $\mathbf{l}$ действуют в пространстве функций и преобразуют аргументы этих функций по одной и той же схеме. Значит, локальные поля отличаются только тем, какому представлению они принадлежат, а базис неприводимых представлений алгебры генераторов непрерывных преобразований задает базис всех локальных полей. Для примера, локальное векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ принадлежит 3-мерному пространству представления со спином $s = 1$, так что закон его преобразования

$$A'^{\alpha}_{\mathbb{E}}(\mathbf{r}') = \left(\hat{R}_{\mathbb{E}}(\phi) \right)^{\alpha\beta} A^{\beta}_{\mathbb{E}}(\mathbf{r}),$$

где 3×3 -матрица - это та же матрица преобразований, что и матрица преобразований вектора координат в (17.4).

Согласно 17.14 преобразование векторной функции поля в заданной точке есть

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = (\mathbb{1} - i(\mathbf{l} + \mathbf{s}) \cdot \boldsymbol{\phi}) \mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

и, следовательно, можно ввести комбинированный оператор, который действует в пространстве векторного поля как локального векторного расслоения $\mathbf{r} \times v$ (fibre bundle) для векторного представления v группы поворотов,

$$j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{l} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{s} \cong \mathbf{l} + \mathbf{s},$$

причем формально $\mathbb{1} \mathbf{l} \cong \mathbf{l} \otimes \mathbb{1}$, где первый множитель в тензорном произведении $\mathbf{l}$ - это дифференциальный оператор на функциях от координат, а второй множитель $\mathbb{1}$ действует в пространстве представления v , и $\mathbb{K} \otimes \sim$, где уже первый множитель в тензорном произведении $\mathbb{1}$ действует как тождественное преобразование на функции от координат, а второй - матрица в пространстве представления v . От безразмерной величины j переходят к размерной

$$\mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} \hbar j.$$

Этот оператор называют полным моментом импульса векторного поля, который составлен из суммы дифференциального оператора орбитального момента $\mathbf{L} = \hbar \mathbf{l}$ и матричного оператора спина $\mathbf{S} = \hbar \mathbf{s}$.

Соотношения 17.15 и 17.16 как раз и указывают на смысл понятия спина поля. С точки зрения представления поля в виде fibre bundle как локально тривиального прямого произведения $\mathbf{r} \times \mathbf{A}$ генератор орбитального момента $\mathbf{l}$ определяет преобразование в базовом пространстве евклидовых координат $\mathbf{r}$ (первый фактор в прямом произведении), а оператор спинного момента - во втором факторе прямого произведения, т.е. в векторном представлении. Ясно, что эти преобразования неразрывно связаны, так как они происходят с одними и теми же параметрами - углами поворотов. Поэтому и спин неразрывно связан с изометриями поворотов. Если эти же утверждения сформулировать более наглядно физически, то можно говорить, что аргумент локального поля - пространственные координаты - преобразуются дифференциальным оператором орбитального момента, а повороты компонент поля, которые называют поляризациями, задаются спинными матрицами. Отсюда сразу следует, что повороты осей евклидовых координат и повороты поляризаций связаны. В

случае представления алгебры генераторов $\mathfrak{so}(3)$, которое действует в 3-мерном векторном пространстве, поворот поляризации поля и поворот евклидовых координат происходят на один и тот же угол, конечно. Мы увидим, что отношение угла поворота поляризации поля к углу поворота осей евклидовых координат изменяется при значениях спина $s \neq 1, s^2 = s(s+1) \neq 2$. Например, для спина $\frac{1}{2}$ поворот на угол 2π меняет поляризацию поля на противоположную, в то время как оси евклидовых координаты совершают полный оборот, т.е. угол поворота поляризации

¹ В дальнейшем мы лишь изредка будем в явном виде указывать, как комбинированные операторы действуют в гладком расслоении, обычно обозначая это действие просто словами. 34334

составляет половину от угла поворота осей евклидовых координат. Для спина, равного двум, поворот поляризации происходит в 2 раза быстрее, чем поворот осей евклидовых координат: при полном обороте евклидовых координат поляризация совершает 2 полных оборота.

Полный момент $\mathbf{j}_{\mathbb{E}}$ имеет те же коммутационные соотношения, что и составляющие его коммутирующие между собой слагаемые, поскольку коммутатор $[l_{\mathbb{E}}^{\alpha}, s_{\mathbb{E}}^{\beta}] \equiv 0$, так как орбитальный момент и спиновый момент действуют в разных множителях гладкого расслоения $\mathbf{r} \times v$:

$$[l_{\mathbb{E}}^{\alpha} \otimes \mathbb{1}, \mathbb{1} \otimes s_{\mathbb{E}}^{\beta}] = [l_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \mathbb{1}] \otimes [\mathbb{1}, s_{\mathbb{E}}^{\beta}] \equiv 0,$$

- а значит, для $\mathbf{j}_{\mathbb{E}}$ повторяются коммутационные соотношения для орбитального момента (17.13) и для спиновых матриц (17.7),

$$[\mathbf{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \mathbf{j}_{\mathbb{E}}^{\beta}] = i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{j}_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad [\mathbf{j}_{\mathbb{E}}^2, \mathbf{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}] = 0,$$

т. е. генераторы поворотов на векторных полях образуют алгебру группы $SO(3)$ или группы $SU(2)$ (две эти алгебры изоморфны).

Тензорные обозначения пространстве-времени Минковского.

Для того, чтобы описывать повороты не только в 3-мерном евклидовом пространстве, необходимо говорить не об оси поворота, а о плоскости, в которой производится поворот: поворот на угол $\phi_{\mathbb{E}}^z$ вокруг оси z обозначается как поворот в плоскости (x, y) на угол $\omega^{xy} = \phi_{\mathbb{E}}^z$ и т. п. В такой логике Эли Картаном был введен антисимметричный тензор второго ранга

$$\omega^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \phi_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad \omega^{\beta\alpha} = -\omega^{\alpha\beta}, \quad \phi_{\mathbb{E}}^{\gamma} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \omega^{\alpha\beta}.$$

Тогда

$$\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\phi} = \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\gamma} \phi_{\mathbb{E}}^{\gamma} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \omega^{\alpha\beta} \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\gamma}.$$

Для того, чтобы в подобных выражениях перейти от 3-мерных обозначений с выделенными евклидовыми координатами и временем к явно ковариантным обозначениям, мы будем также использовать более универсальную запись с использованием отличающихся верхних и нижних индексов в пространстве-времени Минковского, выделяя евклидовы величины и индексы символом $\mathbb{E}$, например, «иксовые» координаты $x_{\alpha} = g_{\alpha\beta} \mathbf{r}_{\mathbb{E}}^{\beta} = -\mathbf{r}_{\mathbb{E}}^{\alpha}$, $x^{\alpha} = g^{\alpha\gamma} x_{\gamma} = \mathbf{r}_{\mathbb{E}}^{\alpha}$. Тогда для преобразований поворотов запишем $\delta \mathbf{r}_{\mathbb{E}}^{\alpha} = \delta x^{\alpha} = \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \phi_{\beta} x_{\gamma}$, где мы перешли к 4-мерным тензорным

обозначениям, так что $\phi_\beta = -\phi_\beta^\beta$, а $\hat{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\rho}$ - полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты в 4-мерном пространстве-времени Минковского, для которого мы принимаем следующее соглашение о выборе знака: $\hat{\epsilon}^{0123} = 1$.

В 4-мерных обозначениях теперь

$$\omega^{\alpha\beta} = \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \phi_\gamma^\gamma = \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} (-\phi_\gamma) = -\hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \phi_\gamma,$$

а тензорная структура в 17.19

$$\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} l_\gamma^\gamma = -\hat{\epsilon}_{0\alpha\beta\gamma} (-i) \epsilon_{\mathbb{E}}^{\gamma\alpha'\beta'} r_{\mathbb{E}}^{\beta'} \partial_{\gamma'} = i \hat{\epsilon}_{0\alpha\beta\gamma} \hat{\epsilon}^{0\gamma\alpha'\beta'} (-x_{\beta'}) \partial_{\gamma'} = i (x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)$$

Поэтому, определяя антисимметричный безразмерный тензор второго ранга 1

$$\ell_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} i \{x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha\} = \frac{1}{\hbar} L_{\alpha\beta},$$

в согласии с (17.19) найдем

$$l \cdot \phi = l_{\mathbb{E}}^\gamma \phi_\gamma^\gamma = \frac{1}{2} \ell_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}$$

и

$$l_{\mathbb{E}}^\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \ell_{\beta\gamma}$$

Из этих построений следует, что для генераторов группы поворотов в функциональном представлении определяется тензор $\ell_{\alpha\beta}$, а значит, для матричных представлений необходимо ввести тензор $\mathfrak{s}_{\alpha\beta}$, который при свертке с тензором углов поворотов, $\frac{1}{2} s_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}$, действует как линейное преобразование в векторном пространстве представления размерности $2s + 1$.

Кроме того, убедимся, что изометрии пространства-времени Минковского столь же универсально описываются в этих тензорных обозначениях: при бесконечно малых поворотах 3-мерные координаты преобразуются согласно (17.3)

$$x'^\alpha = x^\alpha + \omega^{\alpha\beta} x_\beta, \quad \omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}.$$

Откуда следует, что с необходимой точностью первого порядка по $\omega^{\alpha\beta}$

$$x'^\alpha x'_\alpha = x^\alpha x_\alpha + \omega^{\alpha\beta} x_\beta x_\alpha + x^\alpha \omega_{\alpha\beta} x^\beta = x^\alpha x_\alpha + 2\omega^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = x^\alpha x_\alpha,$$

поскольку свертка антисимметричного тензора второго ранга $\omega^{\alpha\beta}$ с симметричным $x_\alpha x_\beta$ тождественно обращается в нуль, а значит, сохраняется и $x^\mu x_\mu = x^0 x_0 + x^\alpha x_\alpha$, т.е. релятивистская мера-интервал, как это и должно быть.

Переход от псевдовектора углов поворота ϕ к антисимметричному тензору $\omega^{\alpha\beta}$ обобщается и на случай гиперповоротов в плоскостях «время - пространственная координата», т.е. для лоренцевых бустов.

¹ Ясно, что постоянная Планка с чертой возникает в выражениях только при фиксации единиц измерения импульса и энергии при заданных единицах измерения расстояний и времени: значение $\hbar$ зависит от выбора этих единиц. Поэтому в физике часто используют единицы измерения, в которых квант действия $\hbar = 1$. Однако мы для наглядности всё же оставляем $\hbar$ в тех выражениях, которые относятся к физическим величинам с произвольной системой единиц измерения импульса и энергии, например, для орбитального момента $\mathbf{L}$ и спина $\mathbf{S}$. Важно подчеркнуть, что генераторы характеризуют бесконечно малые преобразования, а собственные значения операторов, полученных из генераторов умножением на квант действия, отвечают точным

характеристикам движения, а не преобразований. Например, собственное значение проекции орбитального момента на ось z отвечает величине проекции момента количества движения, т.е. характеризует вращение вокруг оси z , а не преобразование поворота вокруг этой оси. Именно поэтому возникает жаргон «группа вращений» вместо группы поворотов.

Другое о поворотах

Обобщение генераторов поворотов на случай пространства Минковского (???)

(? потом напишу, когда лучше это пойму)

В 3-мерном евклидовом пространстве

$$s_{\mathbb{E}}^x = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{\mathbb{E}}^y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{\mathbb{E}}^z = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В 4-мерном

(??? напишу потом, как там?)

Когда мы станем описывать повороты в 4-мерном пространстве-времени Минковского, необходимо будет дать вид этих матриц для преобразования 4-компонентных столбцов, т.е. дать представление как матриц 4×4 .

Явный пример поворота в пространстве Минковского (??)

(тоже напишу, хорошая иллюстрация будет.)

О поворотах в искривленной системе координат (?)

(? что если рассмотреть сферическую систему координат? пока не четко вижу, как в ней будет эта же теория записываться?)

6.1.4 Boosts

Boosts in relativistic notation

Трансляции декартовых координат пространства Минковского

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} = \exp \{ a^{\nu} \partial_{\nu} \} x^{\mu} = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} a^{\nu} p_{\nu} \right\} x^{\mu}$$

где генератор сдвигов - оператор 4-импульса

$$p_{\nu} = i\hbar \partial_{\nu}$$

не преобразуют тензорные индексы полей, так что, например, для векторного поля

$$A'_{\mu}(x') = A_{\mu}(x)$$

т.е.

$$A'_\mu(x') = A'_\mu(x + a) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} a^\nu p_\nu \right\} A'_\mu(x) = A_\mu(x)$$

Умножая на обратный оператор сдвига 4 -координат, получим

$$A'_\mu(x) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} a^\nu p_\nu \right\} A_\mu(x)$$

Полная группа Пуанкаре есть объединение группы трансляций и группы Лоренца. В таком случае говорят также о неоднородной (Inhomogeneous) группе Лоренца: ISO(3, 1).

Бусты

(!!! тут по Киселеву и тут гениальная идея через тильду l обозначать бусты, а через l - повороты. пока полностью это еще не поня (????))

Специальные преобразования Лоренца от одной инерциальной декартовой системы 4-координат к другой, движущейся инерциальной системе штрихованных 4-координат - лоренцевы бусты

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu,$$

имеют вид

$$\begin{cases} x'^0 = x^0 \operatorname{ch} \vartheta - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \operatorname{sh} \vartheta \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{e} \{ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})(\operatorname{ch} \vartheta - 1) - x^0 \operatorname{sh} \vartheta \} \end{cases}$$

где $\mathbf{e}$ - единичный вектор в направлении скорости движения штрихованной системы отсчета относительно начальной,

$$v = ev$$

а модуль скорости связан с углом гиперповорота ϑ

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th} \vartheta.$$

Для бесконечно малых бустов, очевидно, разложение по ϑ дает

$$\begin{cases} x'^0 = x^0 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\vartheta}), & \delta x^0 = -r_\Sigma^\alpha \vartheta_\Sigma^\alpha \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} - x^0 \boldsymbol{\vartheta}, & \delta x^\alpha = -x^0 \vartheta_\Sigma^\alpha \end{cases}$$

где мы ввели 3-мерный евклидов вектор гиперповорота $\boldsymbol{\vartheta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e} \vartheta$. Релятивистское скалярное поле $\Phi(x)$ зависит от 4-координат x^μ пространствавремени Минковского, в котором при обратимых заменах базиса

$$\Phi'(x') = \Phi(x).$$

В случае лоренцевых бустов

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu$$

и

$$\Phi'(\Lambda \circ x) = \Phi(x), \quad \Rightarrow \quad \Phi'(x) = \Phi(\Lambda^{-1} \circ x)$$

так что для бесконечно малых преобразований

$$\Phi'(x) \approx \Phi(x - \delta x) \approx \Phi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \Phi(x) = \Phi(x) + r_z^\alpha \vartheta_z^\alpha \partial_0 \Phi(x) + x^0 \vartheta_z^\alpha \partial_\alpha \Phi(x),$$

что мы трактуем как действие оператора на скалярное поле при инфинитезимальных гиперуглах

$$\Phi'(x) = (\mathbb{1} - i(\tilde{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\vartheta}))\Phi(x) = \left(\mathbb{1} - i\tilde{\mathbf{l}}_B^\alpha \vartheta_{\mathbb{E}}^\alpha \right) \Phi(x),$$

а значит,

$$\tilde{l}_Z^\alpha = i(x_0 \partial_\alpha + r_{\mathbb{E}}^\alpha \partial_0) = i(x_0 \partial_\alpha - x_\alpha \partial_0).$$

Коммутатор

Посчитаем коммутатор $[\tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\beta}]$, он равен

$$\left[i(x_0 \partial_{\alpha} + r_{\mathbb{E}}^{\alpha} \partial_0), i(x_0 \partial_{\beta} + r_{\mathbb{E}}^{\beta} \partial_0) \right] = -[x_0 \partial_{\alpha}, r_{\mathbb{E}}^{\beta} \partial_0] - [r_{\mathbb{E}}^{\alpha} \partial_0, x_0 \partial_{\beta}],$$

так что

$$[x_0 \partial_{\alpha}, r_{\mathbb{E}}^{\beta} \partial_0] = x_0 \partial_0 (\delta_{\alpha}^{\beta} + r_{\mathbb{E}}^{\beta} \partial_{\alpha}) - r_{\mathbb{E}}^{\beta} \partial_{\alpha} (1 + x_0 \partial_0) = -r_{\mathbb{E}}^{\beta} \partial_{\alpha} + x_0 \partial_0 \delta_{\alpha}^{\beta},$$

и точно также

$$[r_{\mathbb{E}}^{\alpha} \partial_0, x_0 \partial_{\beta}] = -[x_0 \partial_{\beta}, r_{\mathbb{E}}^{\alpha} \partial_0] = r_{\mathbb{E}}^{\alpha} \partial_{\beta} - x_0 \partial_0 \delta_{\beta}^{\alpha},$$

а приведение подобных членов дает

$$[\tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\beta}] = r_{\mathbb{E}}^{\beta} \partial_{\alpha} - r_{\mathbb{E}}^{\alpha} \partial_{\beta} = -\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\gamma\alpha'\beta'} r_{\mathbb{E}}^{\alpha'} \partial_{\beta'} = -\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{r} \times \nabla)^{\gamma} = -i \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\gamma}.$$

Аналогично вычисляются и другие коммутаторы, так что, суммируя, мы устанавливаем следующие коммутационные соотношения для операторов поворотов и лоренцевых бустов:

$$\begin{aligned} [\mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\beta}] &= +i \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \\ [\mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\beta}] &= +i \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \\ [\tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\beta}] &= -i \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\gamma}. \end{aligned}$$

Эти коммутационные соотношения показывают, что генераторы бустов по своему закону преобразования при поворотах являются трехмерными векторами. Кроме того, коммутатор двух бустов по разным осям сводится, вообще говоря, к повороту.

Генераторы поворотов и лоренцевых бустов как матрицы линейных преобразований в векторных пространствах представлений по построению удовлетворяют точно таким же коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\beta}] &= +i \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \\ [\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^{\beta}] &= +i \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \\ [\tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^{\beta}] &= -i \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma}. \end{aligned}$$

¹ При вычислении коммутаторов дифференциальных операторов нужно иметь ввиду, что эти операторы при рассмотрении их действия предполагают наличие правее них функции 4-координат, на которую операторы дифференцирования также действуют согласно формуле Лейбница для дифференцирования.

² Знак минус перед генератором поворотов в значении коммутатора генераторов лоренцевых бустов по разным осям в последней формуле 17.32 означает, что имеет место поворот вокруг оси не против, а по часовой стрелке. Физический смысл этого коммутатора особенно ярко раскрывается в задаче о прецессии Томаса: если система отсчета движется не прямолинейно по направлению мгновенного значения скорости $\mathbf{v}$, а испытывает ускорение в другом направлении, то это как раз отвечает ситуации с произведением двух лоренцевых бустов в разных направлениях, так что за бесконечно малое время dt преобразование пространственно-временных осей подвижной системы отвечает не только переходу от скорости $\mathbf{v}$ к скорости $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, но и повороту на угол $d\phi$, так что угловая скорость $\boldsymbol{\omega} = d\phi/dt$ и есть частота прецессии Томаса.

Дуальность

Наш выбор обозначений для генераторов лоренцевых бустов с использованием знака тильды не случаен. Он обусловлен введением понятия дуальности для антисимметричного тензора второго ранга. Например, тензор $\tilde{\ell}^{\mu\nu}$, дуальный дифференциальному оператору орбитального момента $\ell_{\lambda\rho}$, задается связью

$$\tilde{\ell}^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\rho} \ell_{\lambda\rho}.$$

Мы ввели ранее компоненты тензора орбитального момента в виде

$$\ell_{0\alpha} = \tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \quad \ell_{\beta\gamma} = \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\alpha} l_{\mathbb{E}}^{\alpha},$$

откуда находим

$$\tilde{\ell}^{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{\beta\gamma 0\alpha} 2\tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha} = \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\alpha} \tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha},$$

$$\tilde{\ell}^{0\alpha} = \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\alpha'} l_{\mathbb{E}}^{\alpha'} = l_{\mathbb{E}}^{\alpha}.$$

Отсюда совершенно ясно, что преобразование дуальности антисимметричных тензоров переводит генераторы друг в друга $l_{\mathbb{E}}^{\alpha} \leftrightarrow \tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}$ при $\ell_{\mu\nu} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\ell}^{\mu\nu}$. Именно поэтому логично было ввести такие дуальные обозначения.

При дуальном преобразовании ковариантного тензора $\ell_{\mu\nu}$ в ковариантный $\tilde{\ell}_{\mu\nu}$ произойдет смена знака для компонент $\tilde{\ell}_{0\alpha} = -\tilde{\ell}^{0\alpha}$, и связь примет стандартный вид, похожий на преобразование электрического и магнитного полей, образующих тензор напряженностей электромагнитного поля,

$$\ell_{\mu\nu} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\ell}_{\mu\nu} : \quad l_{\mathbb{E}}^{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \quad \tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{D}} -l_{\mathbb{E}}^{\alpha}.$$

Двукратное применение дуального преобразования

Двукратное применение дуального преобразования в пространстве-времени Минковского из-за смены знака у тензора Леви-Чивиты при переходе от контрвариантных компонент к ковариантным приводит к смене знака антисимметричного тензора второго ранга,

$$\ell_{\mu\nu} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\ell}_{\mu\nu} \xrightarrow{\mathcal{D}} -\ell_{\mu\nu}, \quad l_{\mathbb{E}}^{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{D}} -l_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \quad \tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{D}} -l_{\mathbb{E}}^{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{D}} -\tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}.$$

Для наглядности приведем вид тензора орбитального момента и дуального тензора в терминах орбитального момента $l_{\mathbb{E}}$ и дуального ему генератора координатных бустов $\tilde{l}_{\mathbb{E}}$, в виде матриц

$$\ell_{\mu\nu} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \tilde{l}_{\mathbb{E}}^x & \tilde{l}_{\mathbb{E}}^y & \tilde{l}_{\mathbb{E}}^z \\ -\tilde{l}_{\mathbb{E}}^x & 0 & l_{\mathbb{E}}^z & -l_{\mathbb{E}}^y \\ -\tilde{l}_{\mathbb{E}}^y & -l_{\mathbb{E}}^z & 0 & l_{\mathbb{E}}^x \\ -\tilde{l}_{\mathbb{E}}^z & l_{\mathbb{E}}^y & -l_{\mathbb{E}}^x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\ell}^{\mu\nu} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & l_{\mathbb{E}}^x & l_{\mathbb{E}}^y & l_{\mathbb{E}}^z \\ -l_{\mathbb{E}}^x & 0 & \tilde{l}_{\mathbb{E}}^z & -\tilde{l}_{\mathbb{E}}^y \\ -l_{\mathbb{E}}^y & -\tilde{l}_{\mathbb{E}}^z & 0 & \tilde{l}_{\mathbb{E}}^x \\ -l_{\mathbb{E}}^z & \tilde{l}_{\mathbb{E}}^y & -\tilde{l}_{\mathbb{E}}^x & 0 \end{pmatrix},$$

Дуальность для спина

Для спиновых матриц $\mathfrak{s}_{\mu\nu}$ выполняются такие же соотношения, поскольку операция дуальности не затрагивает матричные индексы тензора $\mathfrak{s}_{\mu\nu}$: генератор лоренцевых бустов $\tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^\alpha$ дуален генератору спиновых поворотов,

$$\mathfrak{s}_{\mu\nu} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\mathfrak{s}}_{\mu\nu} : \quad \mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^\alpha, \quad \tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^\alpha \xrightarrow{\mathcal{D}} -\mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^\alpha.$$

Очевидно, что для спинового тензора $\mathfrak{s}_{\mu\nu}$ и дуального ему $\tilde{\mathfrak{s}}_{\mu\nu}$ имеют место точно такие же выражения, что и 17.42, (17.43, но только с подстановкой $\tilde{\mathfrak{l}}_{\mathbb{E}} \mapsto \tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}$ и $\mathfrak{l}_{\mathbb{E}} \mapsto \mathfrak{s}_{\mathbb{E}}$. Таким образом, для евклидовых векторов $\mathfrak{s}_{\mathbb{E}}$ и $\tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}$

$$\mathfrak{s}_{\mu\nu} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^x & \tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^y & \tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^z \\ -\tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^x & 0 & \mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^z & -\mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^y \\ -\tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^y & -\mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^z & 0 & \mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^x \\ -\tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^z & \mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^y & -\mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^x & 0 \end{pmatrix}$$

где по определению

$$\tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^\alpha = \mathfrak{s}_{0\alpha}, \quad \mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\alpha} \mathfrak{s}_{\beta\gamma}$$

Такая связь антисимметричных тензоров $\mathfrak{s}_{\mu\nu}$ с матрицами сохраняется вне зависимости от природы матричных индексов, которые задаются матричным представлением для генераторов группы Лоренца, когда матрица преобразований задается в стандартном экспоненциальном виде

$$T_\Lambda = \exp\{-i(\mathfrak{s} \cdot \phi + \tilde{\mathfrak{s}} \cdot \vartheta)\}$$

как решение дифференциального уравнения, связанного с определением бесконечно малого преобразования для представления группы.

Напомним, что генератор инфинитезимального преобразования с точностью до мнимой единицы определяется через производную оператора преобразования возле тождественного преобразования (см., например, (17.6)). В случае матрицы T_Λ мы сначала введем параметры групповых преобразований $\omega^{\mu\nu}$, которые задают углы поворотов и гиперуглы лоренцевых бустов (см., 17.18) и 17.34), так что $\hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \phi_\gamma^\gamma = -\hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \phi_\gamma = \omega^{\alpha\beta}$ и $\vartheta_{\mathbb{E}}^\gamma = \omega^{0\gamma} = -\omega^{\gamma 0}$, и умножим $\omega^{\mu\nu}$ на $u \rightarrow 0$. Тогда можно определить генераторы инфинитезимальных преобразований

$$\Gamma = \frac{1}{2} \mathfrak{s}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}$$

для матрицы $T_\Lambda = T_\Lambda[u\omega^{\mu\nu}]$ как производную

$$\left. \frac{d}{du} T_\Lambda[u\omega^{\mu\nu}] \right|_{u \rightarrow 0} \stackrel{\text{def}}{=} -i\Gamma \cdot T_\Lambda[u\omega^{\mu\nu}]|_{u \rightarrow 0}$$

согласовав это выражение с тем, как ранее нами вводились преобразования при малых углах и гиперуглах,

$$\left. \frac{d}{du} T_\Lambda[u\omega^{\mu\nu}] \right|_{u \rightarrow 0} = -\frac{i}{2} \mathfrak{s}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \cdot T_\Lambda[u\omega^{\mu\nu}]|_{u \rightarrow 0},$$

где, конечно, учтено, что при $u\omega^{\mu\nu} \rightarrow 0$ получается тождественное преобразование

$$T_\Lambda[0] = \mathbb{1},$$

и

$$\frac{1}{2}\mathfrak{s}_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi} + \tilde{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\vartheta}.$$

Обобщение определения генераторов в (17.47) и (17.48) получается, если принять, что одни и те же генераторы задают малое отклонение элемента группы не только от тождественной единицы, но и возле любого элемента группы: по сути это просто определяет выбор непрерывных параметров группы, который согласуется с физической интерпретацией углов поворотов и гиперуглов лоренцевых бустов в группе Лоренца, так что

$$\frac{d}{du}T_{\Lambda}[u\omega^{\mu\nu}] = -\frac{i}{2}\mathfrak{s}_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \cdot T_{\Lambda}[u\omega^{\mu\nu}]$$

с решением в форме 17.46), если учесть граничное условие $T_{\Lambda}[0] = \mathbb{1}$, а затем положить в решении $u = 1$.

Генераторы Бустов

6.1.5 Lie Algebra of the Lorentz Group

Коммутаторы генераторов группы Лоренца в трёхмерных обозначениях

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{J}}_i, \hat{\mathcal{J}}_j] &= i\epsilon_{ijk}\hat{\mathcal{J}}_k, \\ [\hat{\mathcal{J}}_i, \hat{\mathcal{K}}_j] &= i\epsilon_{ijk}\hat{\mathcal{K}}_k, \\ [\hat{\mathcal{K}}_i, \hat{\mathcal{K}}_j] &= -i\epsilon_{ijk}\hat{\mathcal{J}}_k, \\ [\hat{\mathcal{J}}_i, \hat{\mathbf{p}}_j] &= i\epsilon_{ijk}\hat{\mathbf{p}}_k, \\ [\hat{\mathcal{K}}_i, \hat{\mathbf{p}}_j] &= -i\hat{H}\delta_{ij}, \\ [\hat{\mathcal{J}}_i, \hat{H}] &= [\hat{\mathbf{p}}_i, \hat{H}] = [\hat{H}, \hat{H}] = 0, \\ [\hat{\mathcal{K}}_i, \hat{H}] &= -i\hat{\mathbf{p}}_i \end{aligned}$$

Коммутатор генераторов группы Лоренца

(!!! это нужно еще раз перевывести!!!!)

Положим в равенстве (36 Бухбиндера) $a^{\mu} = a'^{\mu} = 0$. Тогда это равенство примет вид

$$U(\Lambda)U(\Lambda') = U(\Lambda\Lambda')$$

Отсюда

$$U(\Lambda)U(\Lambda')U(\Lambda'') = U(\Lambda\Lambda')U(\Lambda'') = U(\Lambda\Lambda'\Lambda'')$$

Положим здесь $\Lambda'' = \Lambda^{-1}$. Следовательно

$$U(\Lambda)U(\Lambda')U^{-1}(\Lambda) = U(\Lambda\Lambda'\Lambda^{-1}).$$

Тут в левой части из разложения экспоненты в ряд и снова собирания ряда:

$$U(\Lambda)U(\Lambda')U^{-1}(\Lambda) = U(\Lambda)e^{\frac{i}{2}\omega'^{\mu\nu}J_{\mu\nu}}U^{-1}(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega'^{\mu\nu}U(\Lambda)J_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda)}$$

Правую часть преобразуем, подставив $\Lambda'^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega'^{\mu}_{\nu}$:

$$\begin{aligned}
(\Lambda\Lambda'\Lambda^{-1})^\lambda{}_\sigma &= \delta^\lambda{}_\sigma + \Lambda^\lambda\omega'^\mu{}_\tau (\Lambda^{-1})^\tau{}_\sigma = \\
&= \delta^\lambda{}_\sigma + \Lambda^\lambda_\mu \omega'^{\mu\nu} \eta_{\nu\tau} \eta_{\sigma\rho} \Lambda^\rho{}_\kappa \eta^{\kappa\tau} = \\
&= \delta^\lambda{}_\sigma + \frac{1}{2} \omega'^{\mu\nu} (\Lambda^\lambda{}_\mu \eta_{\sigma\rho} \Lambda^\rho{}_\nu - \Lambda^\lambda{}_\nu \eta_{\sigma\rho} \Lambda^\rho{}_\mu)
\end{aligned}$$

Поэтому, если ввести ω'' такой, что $(\Lambda\Lambda'\Lambda^{-1})^\lambda{}_\sigma = \delta^\lambda{}_\sigma + \omega''^\lambda{}_\sigma$, то

$$\omega''^\lambda{}_\sigma = \frac{1}{2} \omega'^{\mu\nu} (\Lambda^\lambda{}_\mu \eta_{\sigma\rho} \Lambda^\rho{}_\nu - \Lambda^\lambda{}_\nu \eta_{\sigma\rho} \Lambda^\rho{}_\mu)$$

Следовательно

$$U(\Lambda\Lambda'\Lambda^{-1}) = e^{\frac{i}{2}\omega''^{\lambda\sigma} J_{\lambda\sigma}} = e^{\frac{i}{2}\omega'^{\mu\nu} \Lambda^\lambda{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu J_{\lambda\sigma}}$$

В итоге имеем равенство $e^{\frac{i}{2}\omega'^{\mu\nu} U(\Lambda) J_{\mu\nu} U^{-1}(\Lambda)} = e^{\frac{i}{2}\omega'^{\mu\nu} \Lambda^\lambda{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu J_{\lambda\sigma}}$, откуда

$$U(\Lambda) J_{\mu\nu} U^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\lambda{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu J_{\lambda\sigma}$$

То есть преобразование $J'_{\mu\nu} = U(\Lambda) J_{\mu\nu} U^{-1}(\Lambda)$ индуцирует преобразование генератора $J_{\mu\nu}$ как ковариантного тензора относительно преобразований Лоренца.

Далее запишем бесконечно малую форму тождества $U(\Lambda) J_{\mu\nu} U^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\lambda{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu J_{\lambda\sigma}$, полагая $\Lambda'^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega'^\mu{}_\nu$:

$$\left(1 + \frac{i}{2} \omega^{\lambda\sigma} J_{\lambda\sigma}\right) J_{\mu\nu} \left(1 - \frac{i}{2} \omega^{\lambda\sigma} J_{\lambda\sigma}\right) = (\delta^\lambda{}_\mu + \omega^\lambda{}_\mu) (\delta^\sigma{}_\nu + \omega^\sigma{}_\nu) J_{\lambda\sigma}$$

отсюда

$$J_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \omega^{\lambda\sigma} J_{\lambda\sigma} J_{\mu\nu} - \frac{i}{2} \omega^{\lambda\sigma} J_{\mu\nu} J_{\lambda\sigma} = J_{\mu\nu} + \omega^\lambda{}_\mu J_{\lambda\nu} + \omega^\sigma{}_\nu J_{\mu\sigma}$$

отсюда

$$\frac{i}{2} \omega^{\lambda\sigma} [J_{\lambda\sigma}, J_{\mu\nu}] = \omega^{\lambda\sigma} \eta_{\sigma\mu} J_{\lambda\nu} + \omega^{\sigma\lambda} \eta_{\lambda\nu} J_{\mu\sigma} = \frac{\omega^{\lambda\sigma}}{2} (\eta_{\sigma\mu} J_{\lambda\nu} + \eta_{\sigma\nu} J_{\mu\lambda} - \eta_{\lambda\mu} J_{\sigma\nu} - \eta_{\lambda\nu} J_{\mu\sigma})$$

отсюда

$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = i (\eta_{\mu\lambda} J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} J_{\mu\sigma})$$

Коммутатор генераторов группы Лоренца

Теперь положим в формуле (1.21): $a_1 = 0, \Lambda_2 = \Lambda_1^{-1}, a_2 = a, \Lambda_1 = \Lambda$.

Тогда $\hat{F}(\Lambda) \hat{F}(a) \hat{F}(\Lambda^{-1}) = \hat{F}(\Lambda a) \hat{F}(\Lambda \Lambda^{-1})$, то есть $\hat{F}(\Lambda) \hat{F}(a) \hat{F}^{-1}(\Lambda) = \hat{F}(\Lambda a)$ или $\hat{F}(\Lambda) e^{ia_\mu \hat{p}^\mu} \hat{F}^{-1}(\Lambda) = e^{ia_\mu \hat{F}(\Lambda) \hat{p}^\mu \hat{F}^{-1}(\Lambda)} = e^{i\Lambda^\nu{}_\mu a_\nu \hat{p}^\mu} = e^{ia_\mu \Lambda^\mu{}_\nu \hat{p}^\nu}$.

Отсюда

$$\hat{F}(\Lambda) \hat{p}^\mu \hat{F}^{-1}(\Lambda) \equiv p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \hat{p}^\nu$$

т.е.

преобразование $p'^\mu = \hat{F}(\Lambda) \hat{p}^\mu \hat{F}^{-1}(\Lambda)$ индуцирует преобразование генератора трансляций как ковариантного вектора относительно преобразований Лоренца.

Действительно, $p'^\mu = \hat{F}(\Lambda) \hat{p}^\mu \hat{F}^{-1}(\Lambda) = \eta_{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} \Lambda^\alpha{}_\beta \hat{p}^\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \hat{p}^\nu$. В инфинитезимальном виде формулу (1.23) можно записать как

$$\left(1 + \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} \hat{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}\right) \hat{p}^\mu \left(1 - \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} \hat{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}\right) = \hat{p}^\mu + \omega^\mu{}_\nu \hat{p}^\nu$$

отсюда

$$\hat{p}^\mu + \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} [\hat{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}, \hat{p}^\mu] = \hat{p}^\mu + \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} (\eta^{\mu\beta} \hat{p}^\alpha - \eta^{\mu\alpha} \hat{p}^\beta),$$

отсюда

$$[\hat{p}^\mu, \hat{\mathcal{J}}^{\alpha\beta}] = i (\eta^{\mu\beta} \hat{p}^\alpha - \eta^{\mu\alpha} \hat{p}^\beta)$$

Выписка из хороших лекций, впишу себе скоро уже (!?!?!?!?)

Using the anti-symmetry (6.41) the elements $\omega^\mu{}_\nu$ of the Lorentz algebra can be represented as

$$\omega^\mu{}_\nu = g^{\alpha\mu} g^\beta{}_\nu \omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g^{\alpha\mu} g^\beta{}_\nu - g^{\beta\mu} g^\alpha{}_\nu) \omega_{\alpha\beta}.$$

Thus, all elements $\omega^\mu{}_\nu$ of the Lorentz algebra can be expanded with respect to basis elements as follows:

$$\omega^\mu{}_\nu = -\frac{i}{2} (L^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \omega_{\alpha\beta}.$$

Here $\omega_{\alpha\beta}$ represent expansion coefficients and the representation matrices of the basis elements $L^{\alpha\beta}$ read:

$$(L^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = i (g^{\alpha\mu} g^\beta{}_\nu - g^{\beta\mu} g^\alpha{}_\nu).$$

The indices α, β characterize the respective basis elements $L^{\alpha\beta}$, whereas the indices μ, ν indicate the components $(L^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu$ of their respective 4×4 representation matrices. One calls (6.44) the defining representation of the Lorentz algebra as it was derived via (6.39) and (6.43) from the elements Λ of the Lorentz group acting on space-time. Its representation matrices (6.44) have obviously the properties to be anti-symmetric with respect to both pairs of indices α, β and μ, ν :

$$\begin{aligned} (L^{\beta\alpha})^\mu{}_\nu &= - (L^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \\ (L^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu &= - (L^{\alpha\beta})^\nu{}_\mu \end{aligned}$$

And now we determine the commutator between two basis elements $L^{\alpha\beta}$ and $L^{\gamma\delta}$. After a lengthy but straight-forward calculation, which we have relegated to the exercises, one obtains

$$[L^{\alpha\beta}, L^{\gamma\delta}]_- = i (g^{\alpha\delta} L^{\beta\gamma} + g^{\beta\gamma} L^{\alpha\delta} - g^{\alpha\gamma} L^{\beta\delta} - g^{\beta\delta} L^{\alpha\gamma}).$$

This means that the Lorentz algebra is closed with respect to performing the commutator between two of its basis elements. Furthermore, the result (6.47) can be summarized according to

$$[L^{\alpha\beta}, L^{\gamma\delta}]_- = i C_{\epsilon\xi}^{\alpha\beta\gamma\delta} L^{\epsilon\xi},$$

where the structure constants of the Lorentz algebra are given by

$$C_{\epsilon\xi}^{\alpha\beta\gamma\delta} = g^{\alpha\delta} g^\beta{}_\epsilon g^\gamma{}_\xi + g^{\beta\gamma} g^\alpha{}_\epsilon g^\delta{}_\xi - g^{\alpha\gamma} g^\beta{}_\epsilon g^\delta{}_\xi - g^{\beta\delta} g^\alpha{}_\epsilon g^\gamma{}_\xi.$$

Классификация генераторов группы Лоренца (!!!!!)

(!!! тут у Киселева, про всякие дуальности!!!)

Генератор вращений

$$\begin{aligned} L_1 = L^{23} &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g^{22} g^3{}_3 \\ 0 & 0 & g^{33} g^2{}_2 & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_2 = L^{31} &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{11} g^3{}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g^{33} g^1{}_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_3 = L^{12} &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g^{11} g^2{}_2 & 0 \\ 0 & g^{22} g^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Генератор бустов

$$\begin{aligned}
 M_1 = L^{01} &= i \begin{pmatrix} 0 & g^{00}g_1^1 & 0 & 0 \\ -g^{11}g^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 M_2 = L^{02} &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & g^{00}g_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g^{22}g_0^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 M_3 = L^{03} &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g^{00}g_3^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g^{33}g_0^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$[L_k, L_l]_- = i\epsilon_{klm}L_m$$

$$[L_k, M_l]_- = i\epsilon_{klm}M_m$$

$$[M_k, M_l]_- = -i\epsilon_{klm}L_m$$

Повышающий и понижающий операторы в группе вращений (??)

Действие преобразований группы Лоренца на классические поля классифицируется введением базиса собственных функций для генераторов группы и инвариантов (независимых операторов Казимира), которые дополняют взаимно коммутирующие генераторы до полного набора наблюдаемых. Для этого сначала необходимо выделить среди генераторов совместно измеримые, т. е. взаимно коммутирующие, величины. Введем комбинации генераторов 1

$$\mathbf{s}^\uparrow = \frac{1}{2}(\mathbf{s} + i\tilde{\mathbf{s}}), \quad \mathbf{s}^\downarrow = \frac{1}{2}(\mathbf{s} - i\tilde{\mathbf{s}}),$$

которые при зеркальной инверсии пространства переходят друг в друга (см. вывод формул (17.88),

$$\mathbb{P}\mathbf{s}^\uparrow\mathbb{P}^{-1} = \mathbf{s}^\downarrow, \quad \mathbb{P}\mathbf{s}^\downarrow\mathbb{P}^{-1} = \mathbf{s}^\uparrow.$$

при обращении стрелы времени переходят сами в себя со сменой знака ²,

$$\mathbb{T}\mathbf{s}^\uparrow\mathbb{T}^{-1} = -\mathbf{s}^\uparrow, \quad \mathbb{T}\mathbf{s}^\downarrow\mathbb{T}^{-1} = -\mathbf{s}^\downarrow.$$

т.е. ведут себя как 3-мерные евклидовы векторы с отрицательной Т-четностью, а при полной инверсии пространства-времени переходят друг в друга с точностью до знака,

$$\mathbb{P}\mathbb{T}\mathbf{s}^\uparrow(\mathbb{P}\mathbb{T})^{-1} = -\mathbf{s}^\downarrow, \quad \mathbb{P}\mathbb{T}\mathbf{s}^\downarrow(\mathbb{P}\mathbb{T})^{-1} = -\mathbf{s}^\uparrow.$$

Поскольку в природе наблюдаются разные поля с разными компонентами, нам необходимо выяснить, как преобразуются компоненты поля, а не то, как происходит замена аргументов поля при преобразовании 4-мерных координат в базовом пространстве-времени. Замену аргументов полей, как мы видели, определяют дифференциальные операторы орбитального момента $\mathbf{l}_\mathbb{E}$ и лоренцева буста $\tilde{\mathbf{l}}_\mathbb{E}$, одинаковые для всех полей. Поэтому мы вводим в определение комбинаций генераторов только те матричные вклады генераторов $\mathbf{s}_\mathbb{E}$ и $\tilde{\mathbf{s}}_\mathbb{E}$, которые задают преобразование

именно компонент поля как элемента представления алгебры, построенной из генераторов группы Лоренца. Другими словами, поскольку релятивистское поле - это локально тривиальное гладкое расслоение $x \times v$, где x - элемент пространства-времени Минковского, а v - представление алгебры генераторов группы Лоренца, то совершенно ясно, что элементы x для всех полей преобразуются одинаково дифференциальными операторами $\ell_{\mu\nu} \otimes \mathbb{1}$, которые действуют в базовом

¹ В литературе встречаются другие обозначения, такие, например, как $\tilde{s} \mapsto \mathcal{K}$ для генератора лоренцевых бустов или $s^\uparrow \mapsto \mathcal{A} \mapsto \mathcal{J}^{(+)} \mapsto \mathcal{N}$ и $s^\downarrow \mapsto \mathcal{B} \mapsto \mathcal{J}^{(-)} \mapsto \mathcal{N}^\dagger$, но мы будем придерживаться схемы обозначений, которая согласуется с понятием дуального преобразования антисимметричного тензора второго ранга, как это описано на стр. 338

² Учитываем, что операция обращения стрелы времени совершает комплексное сопряжение чисел, так что мнимая единица в формулах 17.89 для $s^{\uparrow\downarrow}$ меняет знак.

пространстве, а отличия между полями возникают в представлениях v , которые преобразуются матричными операторами $\mathbb{1} \otimes s_{\mu\nu}$, и именно эти представления и характеризуют базис релятивистских полей.

Коммутационные соотношения для $s_E^\uparrow$ и $s_E^\downarrow$

Тогда коммутационные соотношения для величин $s_E^\uparrow$ и $s_E^\downarrow$ получаются из коммутаторов для s_E и $\tilde{s}_E$ (17.33), так что

$$[s_E^{\uparrow\alpha}, s_E^{\uparrow\beta}] = i\epsilon^{\alpha\beta\gamma} s_E^{\uparrow\gamma}, \quad [s_E^{\downarrow\alpha}, s_E^{\downarrow\beta}] = i\epsilon^{\alpha\beta\gamma} s_E^{\downarrow\gamma}, \quad [s_E^{\uparrow\alpha}, s_E^{\downarrow\beta}] = 0,$$

и

$$\left[\left(s_E^\uparrow \right)^2, s_E^{\uparrow\beta} \right] = 0, \quad \left[\left(s_E^\downarrow \right)^2, s_E^{\downarrow\beta} \right] = 0.$$

Эти соотношения показывают, что алгебра генераторов группы Лоренца $SO(3, 1)$ эквивалентна (изоморфна) паре алгебр произведения групп поворотов $SO(3) \otimes SO(3)$, или, что то же, алгебре произведения унитарных преобразований двухкомпонентных столбцов $SU(2) \otimes SU(2)$:

$$\mathfrak{so}(3, 1) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2).$$

Поэтому поля можно разлагать по базису полей, обладающих всем набором собственных значений операторов на этих базисных полях, для которых мы вводим специальные обозначения (семантика этих обозначений станет более понятной при описании свойств базисных полей):

- 1) Поля с чертой для системы собственных функций операторов $(s^\uparrow)^2$ и $s_3^\uparrow$,
- 2) поля без черты для системы собственных функций операторов $(s^\downarrow)^2$ и $s_3^\downarrow$

Т.е.

$$\begin{aligned} (s^\uparrow)^2 \bar{\chi}(x) &= s_u (s_u + 1) \bar{\chi}(x), \quad s_u - \text{полуцелое или целое, } s_u \geq 0, \\ s_3^\uparrow \bar{\chi}(x) &= m_u \bar{\chi}(x), \quad m_u \in \{s_u, s_u - 1, \dots, 1 - s_u, -s_u\}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (s^\downarrow)^2 \theta(x) &= s_d (s_d + 1) \theta(x), \quad s_d - \text{полуцелое или целое, } s_d \geq 0, \\ s_3^\downarrow \theta(x) &= m_d \theta(x), \quad m_d \in \{s_d, s_d - 1, \dots, 1 - s_d, -s_d\}. \end{aligned}$$

Решение уравнений на собственные значения (17.95) и 17.96 означает построение базиса релятивистских полей в группе Лоренца: все остальные поля представляют собой суперпозиции и произведения полей из этого базиса или, как говорят, являются составными (композиционными, composite) полями, построенными из полей базиса неприводимых представлений алгебры генераторов группы Лоренца 1.

Значит, базис полей можно характеризовать парой чисел (s_u, s_d) , имея также в виду, что в этот базис входят поля с соответствующими этой

¹ Неприводимость базисных полей относительно группы Лоренца фактически следует конструктивно из самой процедуры построения этих полей: все компоненты поля получаются из старшего вектора представления с заданным значением инварианта квадратичного оператора Казимира путем многократного действия генераторов алгебры группы симметрии, а это значит, что все компоненты базисного поля входят в один класс эквивалентности старшего вектора относительно преобразований группы в заданном представлении.

паре проекциям $m_{u,d}$ в 17.95 и 17.96: поля $\bar{\chi}$ и θ могут иметь $2s_u + 1$ и $2s_d + 1$ компонент, соответственно, так что количество этих компонент определяет размерности неприводимых представлений $\bar{\chi}$ и θ , а также и размерность спиновых матриц в этих представлениях $(2s_u + 1) \times (2s_u + 1)$ и $(2s_d + 1) \times (2s_d + 1)$, соответственно. Квантовые числа $m_{u,d}$ называют спиральностью (в англоязычной литературе helicity), а поля в представлении (s_u, s_d) называют киральными, если сумма $s_u + s_d$ принимает полуцелые значения, или тензорными, если $s_u + s_d$ - это целое число. Представления $(s_u, 0)$ с полуцелыми значениями s_u называют правыми киральными полями, а представления $(0, s_d)$ с полуцелыми значениями s_d - левыми киральными полями. Математически представление (s_u, s_d) действует в пространстве тензорного произведения для представлений каждого члена в прямой сумме алгебр $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ для операторов «S-up» и «S-down», $s^{\uparrow\downarrow}$.

Обратные преобразования для наглядности можно записать в виде

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^{\uparrow} + \mathbf{s}^{\downarrow}, \quad i\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^{\uparrow} - \mathbf{s}^{\downarrow}.$$

Эти операторы также действуют в пространстве указанного нами тензорного произведения для представлений прямой суммы алгебр $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^{\uparrow} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{s}^{\downarrow}, \quad \tilde{\mathbf{s}} = -i(\mathbf{s}^{\uparrow} \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes \mathbf{s}^{\downarrow}),$$

Формулы (17.97) показывают, что, во-первых, собственные значения генератора спиновых поворотов s принимают вещественные значения, поскольку спин $\mathbf{s}$ представляет собой оператор суммы двух эрмитовых операторов $\mathbf{s}^{\uparrow\downarrow}$, а собственные значения генератора бустов $\tilde{\mathbf{s}}$ - чисто мнимые, так как генератор бустов получается домножением на мнимую единицу результата суммирования двух эрмитовых операторов: такие представления группы Лоренца называются неунитарными 1 просто потому что при таких условиях матрицы преобразований, которые выражаются через генераторы и вещественные непрерывные параметры поворотов и лоренцевых бустов, для многокомпонентных полей не являются унитарными, как мы в этом убедимся на конкретных примерах. Во-вторых, зависящие от 4-координат пространств-времени многокомпонентные поля в пространстве представлений (s_u, s_d) или в пространстве прямой суммы представлений, например, в сумме $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \bar{\chi} \\ \theta \end{pmatrix}$$

допускают затем еще и разложение по базису с определенными значениями полного момента количества движения $\mathbf{j}$, включающего в себя, как мы знаем, спиновый и орбитальный вклады. Наконец в-третьих, соотношения (17.97) показывают, что оператор спина s есть сумма $\mathbf{s}^{\uparrow}$ и $\mathbf{s}^{\downarrow}$, а, стало быть, эта сумма,

¹ Неунитарные преобразования поля по группе Лоренца также наводят на мысль, что поле не есть волновая функция, которая описывает квантовое состояние, поскольку

сохранение вероятности, отвечающей нормировке поля, означает, что допустимы только унитарные преобразования волновой функции. На место вероятности в теории поля приходит релятивистски инвариантная нормировка поля.

вообще говоря, представляет собой приводимое представление по группе поворотов, которое разбивается на неприводимые точно также, как это делалось при сложении двух отличных от нуля моментов количества движения, когда $\mathbf{s}^\uparrow \neq 0$ и $\mathbf{s}^\downarrow \neq 0$. А именно, в данной задаче неприводимые представления получаются выделением собственных подпространств квадрата спина поля $\mathbf{s}$ в (17.97). Это мы увидим в дальнейшем изложении на примере представления $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Подчеркнем, что группа поворотов - это подгруппа группы Лоренца, так что представления, неприводимые по группе $SL(2, \mathbb{C})$, конечно, могут быть приводимы по её подгруппе $SU(2)$.

Спиноры: от $SO(3, 1)$ к $SL(2, \mathbb{C})$

Наличие полуцелых значений $s_{u,d}$ указывает на важнейший факт: подобно тому, как группа поворотов 3-мерного евклидова пространства $SO(3)$ при введении спиноров обобщалась до группы поворотов спиноров $SU(2)$, так и группа Лоренца пространствавремени Минковского обобщается до группы преобразований релятивистских спиноров $SL(2, \mathbb{C})$. Действительно, поскольку алгебры генераторов $\mathfrak{so}(3)$ и $\mathfrak{su}(2)$ изоморфны, поля в представлениях $\mathfrak{su}(2)$ обобщают поля в представлениях $\mathfrak{so}(3)$, так как в $\mathfrak{su}(2)$ становятся допустимы полуцелые значения спина, которые разрешены в группе $SU(2)$ и запрещены в группе $SO(3)$. Точно также для изоморфных алгебр генераторов $\mathfrak{so}(3, 1) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ представления $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ с полуцелыми спинами расширяют рассмотрение с $SO(3, 1)$ до $SL(2, \mathbb{C})$.

Рассмотрим поля - релятивистские спиноры, которые характеризуются парами (s_u, s_d) с определенными значениями $s_{u,d}$, а именно,

$$\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \leftarrow (s_u, s_d)$$

и

$$\theta_\alpha \leftrightarrow \left(0, \frac{1}{2} \right) \leftarrow (s_u, s_d)$$

где контрвариантные индексы $\dot{\alpha}, \alpha$ принимают только 2 значения 1, 2, так как размерность представления (s_u, s_d) в общем случае согласно (17.95), (17.96) равна $(2s_u + 1)(2s_d + 1)$, так что для выбранных нами представлений эта размерность равна двум. Двумерные представления принято называть спинорными. Матрицы спинорного представления хорошо известны в квантовой механике из описания спина $\frac{1}{2}$. Для спинора $\bar{\chi}$ в представлении $(\frac{1}{2}, 0)$

$$\mathbf{s}^\uparrow = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{s}^\downarrow = 0,$$

¹ При использовании греческих индексов из начала алфавита для индексов в спинорных пространствах, нам придется для индексов трехмерного пространства уже использовать не греческие, а латинские буквы из начала алфавита $\{a, b, c, \dots\}$, чтобы отличать от спинорных индексов $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$, которые пробегают только 2 значения.

где $\boldsymbol{\sigma}$ - матрицы Паули 1 для двумерного представления $\bar{\chi}$, а стало быть, это матрицы 2×2 с верхним контрвариантным индексом $\dot{\beta}$ и нижним ковариантным индексом $\dot{\alpha}$, т.е. $(\boldsymbol{\sigma})^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$, так что согласно 17.97

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}, \quad \tilde{\mathbf{s}} = -\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}.$$

Совершенно аналогично для спинора θ в представлении $(0, \frac{1}{2})$

$$s^\uparrow = 0, \quad s^\downarrow = \frac{1}{2}\sigma$$

и получаем выражения

$$s = \frac{1}{2}\sigma, \quad \tilde{s} = \frac{i}{2}\sigma,$$

где матрицы Паули действуют в представлении θ , а стало быть, это матрицы 2×2 с верхним ковариантным индексом β и нижним контрвариантным индексом α , т.е. $(\sigma)_\alpha^\beta$. После того, как матрицы генераторов спина s и бустов $\tilde{s}$ записаны через матрицы Паули, матрица преобразований для спинора θ задается в стандартном экспоненциальном виде

$$\Lambda_- = \exp\{-i(s \cdot \phi + \tilde{s} \cdot \vartheta)\} = \exp\left\{-\frac{i}{2}\sigma \cdot \phi + \frac{1}{2}\sigma \cdot \vartheta\right\}$$

как решение дифференциального уравнения, связанного с определением бесконечно малого преобразования для представления группы $SL(2, \mathbb{C})$. В (17.101) тензорные индексы матрицы Λ_- в точности повторяют тензорные индексы матриц Паули в этом представлении: $(\Lambda_-)_\alpha^\beta$.

Для обратимых матриц вида $M = \mathbb{E}^A$ имеет место тождество

$$\det \mathbb{E}^A = \mathbb{E}^{\text{tr} A},$$

где $\text{tr} A$ означает взятие следа матрицы A . Кстати, это утверждение легко доказать, если рассмотреть решение уравнений для матриц $X(\tau)$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} X(\tau) &= A \circ X(\tau) \\ X(0) &= \mathbb{1}, \quad X(1) = M. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \det X(\tau) &= \det X(\tau) (X^{-1}(\tau))^{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} X(\tau)_{\alpha\beta} = \\ &= \det X(\tau) (X^{-1}(\tau))^{\beta\alpha} (A \circ X(\tau))_{\alpha\beta} = \\ &= \det X(\tau) \text{tr} (X^{-1}(\tau) \circ A \circ X(\tau)) = \det X(\tau) \text{tr} A. \end{aligned}$$

Элементарное интегрирование этого уравнения с учетом граничных условий дает (17.102).

Из (17.102) следует, что введенные нами в (17.101) матрицы 2×2 самого общего вида $M_\alpha^\beta = (\Lambda_-)_\alpha^\beta$ имеют единичный детерминант:

$$\det M = 1$$

(для обозначения таких специальных матриц используется символ S). Равенство $\text{tr} A = 0$ следует из того, что A выражается через бесследовые матрицы Паули, причем эти матрицы образуют базис для комплекснозначных матриц со следом, равным нулю. Тот факт, что матрицы $M = \Lambda_-$ имеют комплекснозначные элементы, обозначается символом $\mathbb{C}$. Поскольку матрицы $M = \Lambda_-$ задают линейные преобразования спиноров (символ L), группа преобразований двухкомпонентных комплексных спиноров носит название $SL(2, \mathbb{C})$.

Матрица преобразований для спиноров $\bar{\chi}$ после подстановки в общую формулу, описанную при получении (17.101), генераторов для этого поля из 17.99 приобретает вид

$$\Lambda_+ = \exp\{-i(s \cdot \phi + \tilde{s} \cdot \vartheta)\} = \exp\left\{-\frac{i}{2}\sigma \cdot \phi - \frac{1}{2}\sigma \cdot \vartheta\right\}$$

Матрица Λ_+ может быть связана с Λ_- с помощью операции сопряжения спиноров в представлении $(0, \frac{1}{2})$ со спинорами в представлении $(\frac{1}{2}, 0)$, $\hat{I}_c$,

$$\hat{I}_c \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\epsilon} \mathbb{K}$$

где $\mathbb{K}$ - операция комплексного сопряжения (звездочка $*$), которая входит в операцию эрмитова сопряжения матриц $\dagger \equiv * \text{T} \equiv \mathbb{K} \cdot \text{T}$ наряду с операцией транспонирования т. По определению $\hat{\epsilon}$ - это вещественная матрица,

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\epsilon}^2 = -\mathbb{1}, \quad \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon}^T = -\hat{\epsilon}$$

откуда сразу следует, что

$$\hat{I}_c^{-1} = -\hat{I}_c.$$

Подчеркнем, что определение операции сопряжения является инвариантным: действие операции задается одинаково для любого выбора базиса в векторном пространстве представления. При действии операции сопряжения происходит смена тензорных индексов с точками и без точек, и как именно это происходит, мы увидим на конкретных примерах. Более того, обозначение $\hat{\epsilon}$ напрямую связано с полностью антисимметричным тензором Леви-Чивиты в двумерном пространстве, а в этом случае мы ставим символ шляпки и указываем порядок следования индексов.

Для матрицы 2×2 , которая действует на спинор $\theta : \theta \rightarrow A\theta$, - можно определить сопряженную матрицу A_c , которая действует на сопряженный спинор $\bar{\theta}_c$,

$$\hat{I}_c A \theta = \hat{I}_c A \hat{I}_c^{-1} \hat{I}_c \theta, \quad \bar{\theta}_c = \hat{I}_c \theta,$$

так что

$$\hat{I}_c A \hat{I}_c^{-1} \bar{\theta}_c = \mathbb{K} (\hat{\epsilon} \circ A \circ \hat{\epsilon}^{-1} \bar{\theta}_c^*) = \hat{\epsilon} \circ A^* \circ \hat{\epsilon}^{-1} \bar{\theta}_c,$$

а значит,

$$A_c = \hat{I}_c A \hat{I}_c^{-1} = \hat{\epsilon} \circ A^* \circ \hat{\epsilon}^{-1}.$$

Покажем теперь, что

$$\Lambda_+ = \hat{I}_c \Lambda_- \hat{I}_c^{-1} = \hat{\epsilon} \circ \Lambda_-^* \circ \hat{\epsilon}^{-1}.$$

Так как $\hat{\epsilon} \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \mathbb{1}$, разложение экспоненты от матрицы в ряд приводит к

$$\hat{\epsilon} \circ \exp\{A\} \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon} \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{ \hat{\epsilon} \circ A \circ \hat{\epsilon}^{-1} \}^n = \exp \{ \hat{\epsilon} \circ A \circ \hat{\epsilon}^{-1} \},$$

Для

$$\Lambda_- = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\vartheta} \right\}$$

находим

$$\Lambda_-^* = \exp \left\{ \frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{\vartheta} \right\}.$$

Поэтому для вычисления $\hat{\epsilon} \circ \sigma^* \circ \hat{\epsilon}^{-1}$ заметим, что матрицы σ_x, σ_z симметричные и вещественные, так что

$$\sigma_x^* = \sigma_x^T = \sigma_x, \quad \sigma_z^* = \sigma_z^T = \sigma_z,$$

а матрица σ_y чисто мнимая и антисимметричная, так что

$$\sigma_y^* = \sigma_y^T = -\sigma_y.$$

Поэтому в силу

$$\sigma_x \hat{\epsilon} = -\hat{\epsilon} \sigma_x, \quad \sigma_z \hat{\epsilon} = -\hat{\epsilon} \sigma_z, \quad \sigma_y \hat{\epsilon} = \hat{\epsilon} \sigma_y,$$

получаем

$$\hat{\epsilon} \circ \sigma^* \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon} \circ \sigma^T \circ \hat{\epsilon}^{-1} = -\sigma,$$

после чего 17.106 можно вывести в уме.

Транспонированные и комплексно сопряженные конечномерные представления алгебры Ли.

Представление алгебры Ли определяется гомоморфизмом алгебры на алгебру матриц-генераторов групповых преобразований, которые действуют в векторном пространстве представления, так что центральным элементом рассмотрения этого гомоморфизма являются коммутационные соотношения для матричных генераторов Γ^a

$$[\Gamma^a, \Gamma^b] = i f^{abc} \Gamma^c,$$

где структурные константы алгебры Ли f^{abc} являются полностью антисимметричными по перестановке любой пары индексов числами 1 а индексы a, b, c принимают натуральные значения от 1 до размерности групповых координат группы Ли.

Транспонирование² соотношения 17.108 дает для левой части

$$[\Gamma^a, \Gamma^b]^T = (\Gamma^a \Gamma^b)^T - (\Gamma^b \Gamma^a)^T = [(\Gamma^b)^T, (\Gamma^a)^T] = -[(\Gamma^a)^T, (\Gamma^b)^T],$$

¹ Мы имеем ввиду простые компактные алгебры Ли.

² Транспонирование в обычном матричном смысле - перестановка номеров строк и столбцов.

а для правой -

$$i f^{abc} (\Gamma^c)^T.$$

В итоге, мы получаем, что

$$[(\Gamma^a)^T, (\Gamma^b)^T] = -i f^{abc} (\Gamma^c)^T,$$

и формально структурные константы сменили знак.

Напомним, что вещественные координаты u_a в группе Ли можно задать так, чтобы производная группового элемента $g(u)$ в любой точке определялась бы точно так же, как и возле групповой единицы, т. е. в терминах генераторов бесконечно малых преобразований,

$$\frac{\partial g(u)}{\partial u_a} \circ g^{-1}(u) = -i \Gamma^a$$

а поскольку генератор не зависит от групповых координат, то имеет место экспоненциальное представление группового элемента в таких координатах,

$$g(u) = e^{-iu_a \Gamma^a}.$$

Проведем зеркальную замену групповых координат $u_a \mapsto -u_a$. Эта замена приведет к смене знака генераторов, а значит, и к смене знака структурных констант. В частности, запись коммутационных соотношений для транспонированных матриц генераторов 17.109 в виде

$$\left[(-\Gamma^a)^T, (-\Gamma^b)^T \right] = i f^{abc} (-\Gamma^c)^T$$

означает, что транспонированное представление реализует представление алгебры исходной группы Ли с зеркальными групповыми координатами.

Если в представлении существует обратимая матрица ${}^1C$, такая что

$$C \circ (\Gamma^a)^T \circ C^{-1} = -\Gamma^a,$$

то говорят, что транспонированное представление эквивалентно исходному:

$$(T_g)^T \cong T_g,$$

поскольку после такого преобразования коммутатор генераторов 17.112 в точности совпадает с исходным 17.108. В противном случае транспонированное представление не сводится к исходному, и оно является абсолютно независимым. Как мы увидим на примере алгебры Ли группы Лоренца, транспонированное представление для спиноров связано с введением спинорной метрики, а роль матрицы эквивалентности C исполнит матрица спинорной метрики $\hat{\epsilon}$.

Аналогично с транспонированием можно взять комплексное сопряжение для коммутатора генераторов группы Ли, так что в случае, если структурные константы являются вещественными числами, найдем

$$\left[(-\Gamma^a)^*, (-\Gamma^b)^* \right] = i f^{abc} (-\Gamma^c)^*,$$

а значит, комплексно сопряженное представление реализует представление исходной группы с зеркальными групповыми координатами. Точно также можно установить

¹ Речь идет именно о матрице в определенном представлении, а это значит, в векторном пространстве представления размерности n матрица C имеет размерность $n \times n$. Как правило, рассматривают неприводимое представление алгебры Ли, и из факта существования матричной операции эквивалентности в одном неприводимом представлении (C с размером $n \times n$) не следует факт существования аналогичной операции в другом неприводимом представлении (C' с размером $n' \times n'$). Для примера, 3-мерные комплексно сопряженные представления алгебры $\mathfrak{su}(3)$ не являются эквивалентными исходным 3-мерным представлениям, а 8-мерные представления этой алгебры и комплексно сопряженные им 8-мерные представления эквивалентны. 60360

эквивалентность комплексно сопряженного представления исходному представлению, если существует обратимая матрица C , такая что

$$C \circ (\Gamma^a)^* \circ C^{-1} = -\Gamma^a, \quad T_g^* \cong T_g.$$

В частности, формула 17.107) устанавливает эквивалентность комплексно сопряженного спинорного представления алгебры $\mathfrak{su}(2)$ исходному спинорному представлению этой алгебры, в котором генераторы задаются матрицами Паули $\Gamma^a = \frac{1}{2}\sigma^a$, а матрица эквивалентности $C = \hat{\epsilon}$.

Однако в случае алгебры лоренцевых преобразований спиноров ситуация становится не столь простой: комплексно сопряженное спинорное представление не эквивалентно исходному. Это связано с тем, что соотношение эквивалентности (17.115 для спинорных представлений не может быть построено для генераторов поворотов и генераторов лоренцевых бустов одновременно: если матрицы Паули удовлетворяют соотношению эквивалентности, то умноженные на мнимую единицу матрицы Паули удовлетворяют соотношению, аналогичному 17.115, но в котором вместо $-\Gamma^a$ фигурирует Γ^a . Это означает, что реализуется представление группы, в которой часть групповых координат осталась неизменной, а другая часть зеркально отражена. Для спинорных представлений алгебры Ли группы Лоренца это, как раз, и означает переход между представлениями с матрицами преобразований $\Lambda_- \leftrightarrow \Lambda_+$.

Из преобразования (17.106 следует, что спиноры, полученные комплексным сопряжением и умножением на матрицу $\hat{\epsilon}$, преобразуются согласно правилу

$$\hat{\epsilon}\theta^* \mapsto \hat{\epsilon}(\Lambda_- \theta)^* = \hat{\epsilon} \circ \Lambda_-^* \circ \hat{\epsilon}^{-1} \circ \hat{\epsilon}\theta^* = \Lambda_+ \hat{\epsilon}\theta^*,$$

т.е. как спиноры в представлении $(\frac{1}{2}, 0)$, так что определение сопряженного спинора $\hat{I}_c \theta$ даст нам спинор с контрвариантным индексом с точкой,

$$\hat{I}_c \theta = \{(\hat{\epsilon}\theta)^*\} \equiv \mathbb{K}(\hat{\epsilon}\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\theta}_c, \quad \bar{\theta}'_c = \Lambda_+ \bar{\theta}_c,$$

где мы учли, что $\hat{\epsilon}$ - это вещественная матрица.

Аналогично введем спиноры, сопряженные $\bar{\chi}$,

$$\hat{I}_c^{-1} \bar{\chi} = \{(-\hat{\epsilon}\bar{\chi})^*\} \equiv \mathbb{K}(-\hat{\epsilon}\bar{\chi}) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_c, \quad \chi'_c = \Lambda_- \chi_c$$

которые преобразуются как спиноры в представлении $(0, \frac{1}{2})$. При таком выборе определений сопряжения спиноров θ и $\bar{\chi}$ двукратное применение сопряжения к θ , например, дает тождественное преобразование. Это и значит, что операция сопряжения для спиноров $\bar{\chi}$ задается обратным оператором $\hat{I}_c^{-1}$.

Кроме того, из явного вида матриц $\Lambda_{\pm}$ в формулах (17.101) и (17.103) следует, что действие на эти матрицы обычного эрмитова сопряжения матриц как композиции комплексного сопряжения элементов матрицы и перестановки номеров строк и столбцов приводит к

$$\Lambda_-^\dagger = \Lambda_+^{-1}, \quad \Lambda_+^\dagger = \Lambda_-^{-1},$$

так как матрицы Паули являются эрмитово самосопряженными

$$\sigma^\dagger = \sigma.$$

61361

Эти соотношения можно описать символично, если, как и с самого начального момента введения спинорных представлений, условиться, что верхние индексы с точками у спинорных полей с чертой $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ отвечают контрвариантному пространству представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, т.е. по договоренности их можно считать спинорными столбцами, которые преобразуются матрицами Λ_+ , а нижние индексы с точками у спинорных полей с чертой $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$ отвечают ковариантному пространству представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, т.е. по договоренности их можно считать спинорными строками, которые преобразуются матрицами Λ_+^{-1} . В этой связи напомним, что по определению понятия дуального векторного пространства, которое называют ковариантным, элементы векторного пространства (в данном случае спинорного контрвариантного пространства) и элементы дуального к нему или ковекторного пространства (в данном случае спинорного

ковариантного пространства) преобразуются взаимно обратными матрицами, так как по построению элементы ковариантного пространства задаются как элементы пространства линейных инвариантных функций на векторном пространстве, и свертка ковектора с вектором является инвариантом.

С другой стороны, нижние индексы без точек у спинорных полей без черты θ_α отвечают контрвариантному пространству представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, т.е. по договоренности их можно считать спинорными столбцами, которые преобразуются матрицами Λ_- , а верхние индексы без точек у спинорных полей без черты θ^α отвечают ковариантному (дуальному) пространству представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, т.е. по договоренности их можно считать спинорными строками, которые преобразуются матрицами Λ_-^{-1} .

Из соотношений 17.118 следуют важные свойства: поскольку матрицы Λ_- преобразуют контрвариантные спиноры θ , т.е. являются представлениями группы $SL(2, \mathbb{C})$ на спинорах θ , то эрмитово сопряженные спиноры $\theta^\dagger$, определенные как результат действия матричной операции комплексного сопряжения элементов с транспонированием строк в столбцы и столбцов в строки, будут преобразовываться матрицами $\Lambda_-^\dagger$, которые тождественно совпадают с Λ_+^{-1} , а значит, $\theta^\dagger$ будут преобразовываться как элементы спинорного пространства, дуального не пространству спинорных столбцов θ , а как элементы спинорного пространства, дуального спинорам-столбцам $\bar{\chi}$, так как $\bar{\chi}$ преобразуются матрицами Λ_+ в представлении $SL(2, \mathbb{C})$, а элементы дуального $\bar{\chi}$, ковариантного пространства преобразуются матрицами Λ_+^{-1} .

Из (17.118) также следует, что эрмитово сопряженные к спинорным столбцам $\bar{\chi}$ спинорные строки $\bar{\chi}^\dagger$ преобразуются как элементы пространства, дуального или ковариантно сопряженного к спинорным столбцам θ , а не к спинорным столбцам $\bar{\chi}$.

В итоге, согласно (17.118), эрмитово сопряженные спиноры определяют представления

$$\theta_\alpha \mapsto (\theta^\dagger)_{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \quad \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \mapsto (\bar{\chi}^\dagger)^\alpha = \chi^\alpha.$$

Отсюда следует, что эрмитово сопряжение переводит индексы с точками и без точек друг в друга. А значит, операция комплексного сопряжения, 62362

которая отличается от эрмитова сопряжения только дополнительным транспонированием, также переводит индексы с точками в индексы без точек, но представление, по которому преобразуются такие индексы без точек нам еще предстоит описать с помощью операций эквивалентности спинорных представлений. Аналогично и индексы без точек при комплексном сопряжении переходят в индексы с точками, и нам предстоит выяснить с помощью операций эквивалентности спинорных представлений, по которому представлению преобразуются такие индексы с точками. Это позволяет соответствующим образом расставить индексы у матрицы $\hat{\epsilon}$ в операции сопряжения $\hat{I}_c$. Мы же обратимся к этому вопросу чуть позже при выводе тензора спинорной метрики.

Подчеркнем, что запись матриц преобразования спиноров через параметры углов поворотов ϕ и углов гиперповоротов ϑ не является явно ковариантной в терминах 4-мерных обозначений. Для ковариантной записи используются тензорные величины $\omega^{\mu\nu}$, задающие бесконечно малые преобразования координат

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu$$

а также тензорные матрицы спина и лоренцевых бустов $\mathfrak{s}_{\mu\nu}$. Компоненты тензорных генераторов $\mathfrak{s}_{\mu\nu}$ в каждом представлении связаны с генераторами поворотов $\mathfrak{s}$ и бустов $\tilde{\mathfrak{s}}$ в явном виде, например, для спиноров 11 θ :

$$\mathfrak{s}_{ab} = \epsilon_{\mathbb{E}}^{abc} \frac{1}{2} \sigma_{\mathbb{E}}^c, \quad \mathfrak{s}_{0a} = \frac{i}{2} \sigma_{\mathbb{E}}^a.$$

Здесь и далее в этом разделе мы используем не греческие, а латинские буквы для обозначения 3-мерных пространственных компонент, чтобы не путать их с 2-мерными спинорными индексами, которые обозначаются греческими буквами с точками и без точек.

В целях записи выражений в ковариантном виде определим релятивистские матрицы Паули

$$\begin{aligned}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{1}_{\alpha\dot{\alpha}}, +\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}), \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{1}^{\dot{\alpha}\alpha}, -\sigma^{\dot{\alpha}\alpha}).\end{aligned}$$

При этом мы указали вполне определенные спинорные индексы этих матриц: матрицы σ^μ переводят контрвариантные спиноры с точками в контрвариантные спиноры без точек, матрицы $\bar{\sigma}^\mu$ переводят контрвариантные спиноры без точек в контрвариантные спиноры с точками. Такое предписание для индексов не случайно, оно является следствием свойств этих матриц, которые мы сейчас и рассмотрим.

¹ См. стр. 356 о спинорных индексах матриц, действующих в представлении $(0, \frac{1}{2})$. 63363

Построим симметричные по 4-мерным индексам произведения релятивистских матриц Паули, которые можно вычислить и найти, что 1

$$\begin{aligned}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)^{\alpha}_{\beta} &= 2g^{\mu\nu} \delta^{\alpha}_{\beta}, \\ (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} &= 2g^{\mu\nu} \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}},\end{aligned}$$

где у символа Кронекера при использовании матричного умножения обычно опускают указание на порядок следования индексов, так как отличны от нуля только диагональные элементы и

$$\delta^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \equiv \delta^{\alpha}_{\beta}.$$

А также введем антисимметричные по перестановке пары 4-мерных индексов символы с чертой и без черты

$$\begin{aligned}\frac{i}{4} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)^{\alpha}_{\beta} &\stackrel{\text{def}}{=} (\sigma^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta}, \\ \frac{i}{4} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} &\stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}.\end{aligned}$$

Из этих определений следует, что произведения релятивистских матриц Паули выражаются через метрику и антисимметричные символы с чертой и без черты,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu &= g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1} - 2i\bar{\sigma}^{\mu\nu}, \\ \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu &= g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1} - 2i\sigma^{\mu\nu}\end{aligned}$$

где мы, конечно, подразумеваем, что у этих матриц 2×2 имеются по 2 подходящих спинорных индекса, которые мы не указываем в этих формулах явно, как это было сделано нами в 17.123 - 17.127).

Заметим, что введенные нами в (17.126) и (17.127) сигма-матрицы с двумя 4-мерными индексами $\sigma^{\mu\nu}$ и $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ в случае, когда эти индексы отвечают компонентам в 3-мерном пространстве, выражаются через обычные матрицы Паули $\sigma = \sigma_{\mathbb{E}}$ с учетом того, что они действуют в пространствах столбцов с точками и без точек ², так что формулы выглядят одинаково,

$$\sigma^{ab} = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \sigma^c, \quad \bar{\sigma}^{ab} = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \sigma^c$$

а в случае, когда один из 4-мерных индексов отвечает временной компоненте, а другой индекс - компоненте в 3-мерном пространстве, имеет место связь

$$\bar{\sigma}^{0a} = \frac{i}{2} \sigma_{\mathbb{E}}^a, \quad -\sigma^{0a} = \frac{i}{2} \sigma_{\mathbb{E}}^a.$$

¹ Мы будем при надобности специально указывать порядок расположения верхних и нижних спинорных индексов, обозначая отступ в порядке следования индексов с помощью символа $\bullet$, чтобы подчеркнуть разницу в обозначениях ко- и контравариантных индексов с точкой и без точек: контравариантный индекс с точкой является верхним, а контравариантный индекс без точки является нижним, - а также для того, чтобы однозначно трактовать порядок индексов при действии операции транспонирования или при опускании и поднимании тензорных индексов с помощью спинорной метрики.

² Мы не указываем спинорные индексы в этих формулах явно, но читатель, конечно, должен иметь ввиду, что наличие этих индексов подразумевается в точном соответствии с определениями 17.126 и 17.127. 64364

Поэтому, сравнивая эти связи между $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$ и матрицами Паули в формулах (17.130), (17.131) с соотношениями между генераторами $\mathfrak{s}_{\mu\nu}$ и матрицами Паули в формуле 17.120, например, для спиноров в представлении $(0, \frac{1}{2})$ с учетом смены знака $\sigma^{0a} = -\sigma_{0a}$, находим, что матрицы преобразований в представлениях $(0, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, 0)$ группы $SL(2, \mathbb{C})$ записываются в виде

$$\Lambda_- = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \right\}, \quad \Lambda_+ = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \right\}$$

Матрицы преобразований контравариантных спиноров $\theta_\alpha, \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ имеют строго определенные индексы: $(\Lambda_-)_{\beta}^{\bullet\alpha}$ и $(\Lambda_+)_{\bullet\alpha}^{\dot{\alpha}}$, так как эти матрицы переводят ковариантные спиноры в ковариантные спиноры с теми же индексами, которые были изначально до преобразований, чего можно добиться только при тех индексных обозначениях, которые мы указали в 17.122.

Спинорная метрика определяется как ковариантный спинорный тензор второго ранга, который при свертке с двумя спинорами дает инвариант по отношению к действию группы $SL(2, \mathbb{C})$. В случае представления $(0, \frac{1}{2})$ на полях θ_β спинорная метрика имеет 2 ковариантных, т.е. верхних спинорных индекса $-\epsilon^{\alpha\beta}$, так что она переводит контравариантный спинор (по договоренности, столбец) в ковариантный спинор (по договоренности, в строку): $\epsilon^{\alpha\beta} \theta_\beta = \theta^\alpha$. Вид этой метрики записывается в виде композиции матричных операций транспонирования и преобразования матрицей $\hat{\epsilon}$,

$$\epsilon^{\alpha\beta} = (\hat{\epsilon})^{\alpha\beta} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и его легко установить, если обратиться к свойствам сопряженных спиноров, определенных в 17.116) и 17.117). Например, сопряженные спиноры $\bar{\theta}_c = \hat{\epsilon} \theta^*$ - это спиноры-столбцы, которые преобразуются по представлению $(\frac{1}{2}, 0)$ с помощью матриц Λ_+ в отличие от исходного представления $(0, \frac{1}{2})$ для столбца θ с преобразованием матрицами Λ_- . Это значит, что столбец $\bar{\theta}_c$ преобразуется точно также как столбец с индексами с точкой $\bar{\chi}$. Тогда эрмитово сопряжение столбца $\bar{\theta}_c$, т.е. композиция комплексного сопряжения и транспонирования $\bar{\theta}_c$ приведет к строке, которая преобразуется как ковариантный спинор с индексами без точек с помощью Λ_-^{-1} , как мы это установили в 17.119,, а значит, $(\bar{\theta}_c)^\dagger$ - это строка с верхним индексом без точки, которая при свертке со столбцом ψ_α даст инвариант $\left\{ (\bar{\theta}_c)^\dagger \right\}^\alpha \psi_\alpha = \text{inv.}$

Действительно, в матричных обозначениях с использованием операции транспонирования T , которая переводит строчные и столбцовые индексы друг в друга, и с учетом того, что эрмитово сопряжение - это композиция комплексного сопряжения и транспонирования, запишем

$$\bar{\theta}_c^\dagger = (\hat{\epsilon}\theta^*)^* T = (\hat{\epsilon}\theta)^T,$$

или то же в индексах

$$\left\{ (\bar{\theta}_c)^\dagger \right\}^\alpha = \left\{ (\hat{\epsilon}\theta)^T \right\}^{*\alpha} = \left\{ (\hat{\epsilon}\theta) \right\}^{\alpha*} = \epsilon^{\alpha\beta} \theta_\beta = \theta^\alpha,$$

а это и значит, что спинорная метрика задается в виде 17.133. Подчеркнем, что спинорная метрика антисимметрична

$$\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha},$$

поэтому при записи скалярного произведения спиноров нужно следить за порядком расположения индексов и полей,

$$(\theta\psi) \equiv \theta^\alpha \psi_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \theta_\beta \psi_\alpha = \theta_\beta (-\psi^\beta).$$

В этой формуле, как мы увидим в дальнейшем при квантовании полей с полуцелым спином, затем учитывают, что спинорные поля описываются грассмановыми переменными, которые антиперестановочны,

$$\theta_\beta \psi^\beta = -\psi^\beta \theta_\beta,$$

что весьма нетривиально, но тогда при записи строки слева от столбца мы получим для грассмановых переменных

$$\theta^\alpha \psi_\alpha = \psi^\beta \theta_\beta \Leftrightarrow (\theta\psi) = (\psi\theta).$$

Поэтому понятно, что для метрики в векторном пространстве над полем обычных чисел, когда $a^\alpha a^\beta = a^\beta a^\alpha$, имеет место симметрия по перестановке индексов метрики, потому что

$$g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta = g_{\alpha\beta} a^\beta a^\alpha$$

и замена немых индексов $\beta \mapsto \beta', \alpha \mapsto \alpha'$ дает

$$g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta = g_{\beta'\alpha'} a^{\alpha'} a^{\beta'},$$

и «стирание» штрихов у немых индексов означает, что

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}.$$

Если же координаты в векторном пространстве - грассмановы числа, и $\theta_\alpha \theta_\beta = -\theta_\beta \theta_\alpha$, то та же цепочка выкладок, что и для a^α , в случае скалярного произведения $\epsilon^{\alpha\beta} \theta_\alpha \theta_\beta$ приводит к антисимметричности метрики

$$\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}.$$

В группе $SL(2, \mathbb{C})$ спинорная метрика $\epsilon^{\alpha\beta}$ как ковариантный тензор второго ранга преобразуется матрицей Λ_-^{-1} по каждому из строчных спинорных индексов, т.е. по каждому ковариантному индексу без точек (напомним, что для спиноров без точек ковариантные индексы верхние!), так что

$$\epsilon'^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha_1\beta_1} (\Lambda_-^{-1})_{\alpha_1}^{\bullet\alpha} (\Lambda_-^{-1})_{\beta_1}^{\bullet\beta} = \epsilon^{\alpha_1\beta_1} \left((\Lambda_-^{-1})^T \right)_{\bullet\alpha_1}^{\alpha} (\Lambda_-^{-1})_{\beta_1}^{\bullet\beta},$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha_1\beta_1} \left((\Lambda_-^{-1})^T \right)^{\alpha} \cdot \alpha_1 &= \epsilon^{\alpha_1\beta_1} \delta_{\alpha_2}^{\alpha} \left((\Lambda_-^{-1})^T \right)^{\alpha_2} \cdot \alpha_1 = \epsilon^{\alpha_1\beta_1} \hat{\epsilon}^{\alpha\gamma} (\hat{\epsilon}^{-1})_{\gamma\alpha_2} \left((\Lambda_-^{-1})^T \right)^{\alpha_2} \cdot \alpha_1 = \\ &= \hat{\epsilon}^{\alpha\gamma} \left((\hat{\epsilon}^{-1})_{\gamma\alpha_2} \left((\Lambda_-^{-1})^T \right)^{\alpha_2} \cdot \alpha_1 \epsilon^{\alpha_1\beta_1} \right) = \hat{\epsilon}^{\alpha\gamma} \left(\hat{\epsilon}^{-1} \circ (\Lambda_-^{-1})^T \circ \hat{\epsilon} \right)^{\bullet\beta_1}_{\gamma}. \end{aligned}$$

66366

где мы использовали матричные обозначения для свертки немых индексов. Из 17.101

$$\Lambda_-^{-1} = \exp \left\{ \frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\vartheta} \right\} \Rightarrow (\Lambda_-^{-1})^T = \exp \left\{ \frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\phi} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\vartheta} \right\}$$

Но поскольку, как для комплексно сопряженных матриц

$$\hat{\epsilon} \circ \boldsymbol{\sigma}^* \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon}^{-1} \circ \boldsymbol{\sigma}^* \circ \hat{\epsilon} = -\boldsymbol{\sigma},$$

так и для транспонированных матриц

$$\hat{\epsilon} \circ \boldsymbol{\sigma}^T \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon}^{-1} \circ \boldsymbol{\sigma}^T \circ \hat{\epsilon} = -\boldsymbol{\sigma},$$

то

$$\hat{\epsilon} \circ (\Lambda_-^{-1})^T \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon}^{-1} \circ (\Lambda_-^{-1})^T \circ \hat{\epsilon} = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\vartheta} \right\} = \Lambda_-,$$

и мы можем завершить выкладки для спинорной метрики, которая получается после действия группы $SL(2, \mathbb{C})$,

$$\epsilon'^{\alpha\beta} = \hat{\epsilon}^{\alpha\gamma} \left(\hat{\epsilon}^{-1} \circ (\Lambda_-^{-1})^T \circ \hat{\epsilon} \right)^{\bullet\beta_1}_{\gamma} (\Lambda_-^{-1})_{\beta_1}^{\bullet\beta} = \hat{\epsilon}^{\alpha\gamma} (\Lambda_-)_{\gamma}^{\bullet\beta_1} (\Lambda_-^{-1})_{\beta_1}^{\bullet\beta} = \hat{\epsilon}^{\alpha\gamma} \delta_{\gamma}^{\beta} = \epsilon^{\alpha\beta}.$$

Это равенство значит, что преобразования группы $SL(2, \mathbb{C})$ являются изометриями спинорной метрики: спинорная метрика переходит сама в себя!

Обратная метрика с двумя контрвариантными индексами без точек также выражается через матрицу $\hat{\epsilon}$ евклидова пространства

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -(\hat{\epsilon})_{\alpha\beta} = (\hat{\epsilon}^{-1})_{\alpha\beta} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

так как ее свертка с метрикой равна

$$\epsilon^{\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha} = (\hat{\epsilon})^{\beta\gamma} (\hat{\epsilon}^{-1})_{\gamma\alpha} = \mathbb{1}_{\alpha}^{\beta}.$$

Аналогичные выкладки можно провести и для метрики в случае спиноров в представлении $(\frac{1}{2}, 0)$, когда используются индексы с точками: инвариантная антисимметричная контрвариантная спинорная метрика $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ вводится с тем же выбором знака, что и для спинорной метрики в пространстве спиноров без точек, $\epsilon^{12} = 1$; спиноры-строки $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}}$ эквивалентны $\{(-\hat{\epsilon})\bar{\chi}\}^T = \{\chi_c\}^{\dagger}$, и они преобразуются матрицей $\Lambda_+^{-1} = \Lambda_-^{\dagger}$, так что $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\phi}^{\dot{\alpha}} = \chi_c^{\dagger} \bar{\phi} = \text{inv.}$

Резюмируя связи между различными спинорными представлениями, мы теперь можем утверждать следующее:

- спинорные столбцы θ имеют контрвариантный индекс без точки θ_α и преобразуются матрицами $(\Lambda_-)^{\bullet\beta}_\alpha$, так что

$$\theta'_\alpha = (\Lambda_-)^{\bullet\beta}_\alpha \theta_\beta,$$

- эрмитово сопряженные строки $\theta^\dagger$ преобразуются матрицами $\Lambda_-^\dagger$ в представлении, эквивалентном представлению, которое преобразуется матрицами $(\Lambda_+^{-1})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$, и согласно тензорному исчислению эти строки имеют ковариантный индекс с точкой $(\theta^\dagger)_{\dot{\beta}} = (\theta^\dagger)_{\dot{\alpha}} \cdot \dot{\beta}$, так что

$$(\theta^\dagger)'_{\dot{\beta}} = (\theta^\dagger)_{\dot{\alpha}} (\Lambda_+^{-1})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}},$$

- транспонированные строки θ^T преобразуются матрицами Λ_-^T в транспонированном представлении, эквивалентном исходному контрвариантному представлению, и согласно тензорному исчислению эти строки имеют контрвариантный индекс без точки $(\theta^T)_{\alpha} = \theta_\alpha$,
- переход от контрвариантных векторов θ_γ к ковариантным векторам θ^α записывается как операция поднятия контрвариантного индекса с помощью ковариантного тензора спинорной метрики $11\epsilon^{\alpha\gamma}$, т. е. $\theta^\alpha = \epsilon^{\alpha\gamma}\theta_\gamma$, и строки θ^α в смысле матричного умножения преобразуются матрицами $(\Lambda_-^{-1})^\alpha_\beta$, так что

$$\theta'^\alpha = \theta^\beta (\Lambda_-^{-1})^\alpha_\beta,$$

- комплексно сопряженные столбцы θ^* преобразуются матрицами Λ_-^* в представлении, эквивалентном представлению, которое преобразуется матрицами $(\Lambda_+)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$, и согласно тензорному исчислению эти столбцы имеют ковариантный индекс с точкой $(\theta^*)_{\dot{\alpha}} \cdot \dot{\alpha}$, а соотношение эквивалентности устанавливается с помощью матрицы метрики $\hat{\epsilon}$, так что

$$(\bar{\theta}_c)^{\dot{\alpha}} = (\hat{\epsilon})^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\theta^*)_{\dot{\beta}} = ((\hat{\epsilon}\theta)^*)^{\dot{\alpha}}, \quad (\bar{\theta}_c)'^{\dot{\alpha}} = (\Lambda_+)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \dot{\beta}' (\bar{\theta}_c)^{\dot{\beta}},$$

и аналогично:

- спинорные столбцы $\bar{\chi}$ имеют контрвариантный индекс с точкой $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ и преобразуются матрицами $(\Lambda_+)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \cdot \dot{\beta}$, так что

$$\bar{\chi}'^{\dot{\alpha}} = (\Lambda_+)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \cdot \dot{\beta} \bar{\chi}^{\dot{\beta}},$$

- эрмитово сопряженные строки $\bar{\chi}^\dagger$ преобразуются матрицами $\Lambda_+^\dagger$ в представлении, эквивалентном представлению, которое преобразуется матрицами $(\Lambda_-^{-1})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$, и согласно тензорному исчислению эти строки имеют ковариантный индекс без точки $(\bar{\chi}^\dagger)^\alpha = (\bar{\chi}^\dagger)^{\dot{\alpha}} \cdot \dot{\alpha}$, так что

$$(\bar{\chi}^\dagger)'^\alpha = (\bar{\chi}^\dagger)^{\dot{\beta}} (\Lambda_-^{-1})^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} \cdot \dot{\alpha},$$

- транспонированные строки $\bar{\chi}^T$ преобразуются матрицами Λ_+^T в транспонированном представлении, эквивалентном исходному контрвариантному представлению, и согласно тензорному исчислению эти строки имеют контрвариантный индекс с точкой $(\bar{\chi}^T)^{\dot{\alpha}} = (\bar{\chi})^{\dot{\alpha}*}$
- переход от контрвариантных векторов $\bar{\chi}^{\dot{\gamma}}$ к ковариантным векторам $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$ записывается как операция опускания контрвариантного индекса с помощью ковариантного тензора спинорной метрики $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}$, т. е. $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} \bar{\chi}^{\dot{\gamma}}$, и строки $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$ в смысле матричного умножения преобразуются матрицами $(\Lambda_+^{-1})^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}$, так что

$$\bar{\chi}'_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\beta}} (\Lambda_+^{-1})^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}},$$

Чтобы вещественные компоненты столбца переходили в вещественные компоненты строки элементы матрицы эквивалентности должны быть вещественными.

- комплексно сопряженные столбцы $\bar{\chi}^*$ преобразуются матрицами Λ_+^* в представлении, эквивалентном представлению, которое преобразуется матрицами $(\Lambda_-)^*_{\beta}$, и согласно тензорному исчислению эти столбцы имеют ковариантный индекс без точки $(\bar{\chi}^*)^{\alpha}$, а соотношение эквивалентности устанавливается с помощью матрицы обратной метрики $\hat{\epsilon}^{-1} = -\hat{\epsilon}$, так что

$$(\chi_c)_{\alpha} = \hat{\epsilon}_{\alpha\beta}^{-1} (\bar{\chi}^*)^{\beta} = ((\hat{\epsilon}^{-1}\bar{\chi})^*)_{\alpha}, \quad (\chi'_c)_{\alpha} = (\Lambda_-)^*_{\alpha}{}^{\beta} (\chi_c)_{\beta}.$$

Опорные формулы (17.135-17.142) мы используем во всех дальнейших построениях для ковариантного описания величин, составленных из спиноров.

4-вектор. Рассмотрим эрмитово самосопряженную 2×2 -матрицу $\hat{V}$, которая переводит столбец $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ в представлении $(\frac{1}{2}, 0)$ в столбец χ_{α}^V в представлении $(0, \frac{1}{2})$:

$$\text{def: } \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \xrightarrow{\hat{V}} \chi_{\alpha}^V \Leftrightarrow \chi_{\alpha}^V = \hat{V}_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}.$$

Всякая такая эрмитова матрица $\hat{V}$ может быть разложена по базису эрмитовых матриц σ^{ν} с вещественными коэффициентами V_{ν} :

$$\hat{V}_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\nu} V_{\nu},$$

а поскольку как спинорный объект матрица $\hat{V}_{\alpha\dot{\alpha}}$ имеет индекс без точки и индекс с точкой, то она обладает теми же свойствами относительно преобразований $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, что и тензорное произведение $\theta_{\alpha} \otimes \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$, а значит, $\hat{V}_{\alpha\dot{\alpha}}$ лежит в представлении $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Вещественные коэффициенты V_{ν} находятся по заданной матрице $\hat{V}$ с помощью преобразования, обратного для 17.144,

$$V^{\mu} = \frac{1}{2} \text{tr} \{ \bar{\sigma}^{\mu} \hat{V} \} = \frac{1}{2} \text{tr} \{ \hat{V} \bar{\sigma}^{\mu} \},$$

так как согласно (17.129), например,

$$\text{tr} \{ \bar{\sigma}^{\mu} \hat{V} \} = V_{\nu} \text{tr} \{ \bar{\sigma}^{\mu} \sigma^{\nu} \} = V_{\nu} \text{tr} \{ g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1} - 2i\sigma^{\mu\nu} \} = V_{\nu} g^{\mu\nu} \text{tr} \mathbb{1} = 2V^{\mu},$$

потому что антисимметричная по 4-координатным индексам часть произведения сигма-матриц $\sigma^{\mu\nu}$ не дает вклада в след, так как она выражается через бесследовые матрицы Паули в 3-мерном пространстве (см. (17.130 и (17.131), так что

$$\text{tr} \{ \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \} = 2g^{\mu\nu}.$$

Согласно определению 17.143 матрица $\hat{V}_{\alpha\dot{\alpha}}$ преобразуется по следующему закону, общему для верхних и нижних спинорных индексов в группе $\text{SL}(2, \mathbb{C})$: по нижнему индексу без точки (по контрвариантному индексу) как столбец умножением на матрицу Λ_- , а по нижнему индексу с точкой (по ковариантному индексу) как строка умножением на матрицу Λ_+^{-1} ,

$$\hat{V}' = \Lambda_- \circ \hat{V} \circ \Lambda_+^{-1} = \Lambda_- \circ \hat{V} \circ \Lambda_-^\dagger,$$

69369

где мы учли связь $\Lambda_+^{-1} = \Lambda_-^\dagger$, установленную ранее в 17.118. После преобразования $\hat{V}'$ опять может быть разложена по базису релятивистских матриц Паули:

$$V'^\mu = \frac{1}{2} \text{tr} \{ \bar{\sigma}^\mu \hat{V}' \} = \frac{1}{2} \text{tr} \{ \hat{V}' \bar{\sigma}^\mu \}.$$

Заметим, что в группе $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ детерминант матрицы преобразований равен единице $\det \Lambda_- = 1$, и стало быть,

$$\det \hat{V}' = \det \{ \Lambda_- \circ \hat{V} \circ \Lambda_-^\dagger \} = |\det \Lambda_-|^2 \det \hat{V} = \det \hat{V},$$

и следовательно, детерминант матрицы $\hat{V}$ является инвариантом преобразований $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. При этом из явного вида матриц Паули следует, что

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} V_0 + V_3 & V_1 - iV_2 \\ V_1 + iV_2 & V_0 - V_3 \end{pmatrix},$$

так что

$$\det \hat{V} = V_0^2 - \mathbf{V}^2 = V_\nu V^\nu,$$

и равенство детерминантов 17.149 означает, что преобразование из $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ сохраняет лоренц-инвариантную длину 4-вектора V^ν , т. е. это преобразование представляет собой действие элемента группы Лоренца на 4-векторах.

Подчеркнем, что согласно (17.147) матрицы из группы $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \Lambda_-$ и $-\Lambda_-$, которые отличаются только знаком, приводят к идентичным преобразованиям из группы $\text{SO}(3, 1)$ для 4-векторов, а это значит, что одному преобразованию из группы Лоренца отвечают 2 разных преобразования $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. В этом случае говорят, что ядро гомоморфизма $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \mapsto \text{SO}(3, 1)$, т.е. множество прообразов единичного элемента, составляют элементы $\mathbb{1}$ и $-\mathbb{1}$, т.е. ядро - это циклическая группа $\mathbb{E}_2$ из двух элементов, так что собственная ортохронная группа Лоренца представляет собой фактор-группу: $\text{SO}(3, 1) \cong \text{SL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{E}_2$, и имеет место двузначное представление $\text{SO}(3, 1)$ в $\text{SL}(2, \mathbb{C})$.

В случае инфинитезимальных преобразований $\omega^{\lambda\rho} \rightarrow 0$ матрицы Λ_- и Λ_+^{-1} связаны с генераторами соотношениями

$$\Lambda_- = \mathbb{1} - \frac{i}{2} \sigma_{\lambda\rho} \omega^{\lambda\rho}, \quad \Lambda_+^{-1} = \Lambda_-^\dagger = \mathbb{1} + \frac{i}{2} \bar{\sigma}_{\lambda\rho} \omega^{\lambda\rho},$$

откуда из (17.147) и 17.148 находим, что

$$V'^\mu = V^\mu + \frac{i}{4} \text{tr} \{ \bar{\sigma}_{\lambda\rho} \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \sigma_{\lambda\rho} \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \} \omega^{\lambda\rho} V_\nu,$$

где разложение произведения релятивистских матриц Паули на симметричную и антисимметричную по перестановке 4-мерных индексов части согласно (17.128) и 17.129, например,

$$\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu = g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1} - 2i\bar{\sigma}^{\mu\nu}$$

приводит к

$$\text{tr} \{ \bar{\sigma}_{\lambda\rho} \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \} = -2i \text{tr} \{ \bar{\sigma}_{\lambda\rho} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \},$$

поскольку вклад с $g^{\mu\nu}$ в след обращается в нуль, так как $\text{tr} \bar{\sigma}_{\lambda\rho} = 0$ из-за того, что, как мы уже использовали этот факт выше, матрицы $\bar{\sigma}_{\lambda\rho}$ выражаются

через бесследовые матрицы Паули в 3-мерном пространстве (см. 17.130) и (17.131).

Далее, выражение для $\text{tr} \{ \bar{\sigma}^{\lambda\rho} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \}$ со всеми верхними индексами, очевидно, имеет определенную симметрию относительно перестановок своих 4-мерных индексов: антисимметрично по $\lambda \leftrightarrow \rho, \mu \leftrightarrow \nu$ и симметрично при перестановке пар $\lambda\rho \leftrightarrow \mu\nu$. Поэтому выражение для следа матриц должно быть инвариантно 1 относительно преобразований группы $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, а стало быть, след должен выражаться через инвариантные тензоры, т.е. через метрику, символ Кронекера и символ Леви-Чивиты, и удовлетворять условиям симметрии по перестановке индексов, откуда сразу следует, что

$$\text{tr} \{ \bar{\sigma}^{\lambda\rho} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \} = A \{ g^{\lambda\mu} g^{\rho\nu} - g^{\lambda\nu} g^{\rho\mu} \} + B \hat{\epsilon}^{\lambda\rho\mu\nu},$$

или, что то же,

$$\text{tr} \{ \bar{\sigma}_{\lambda\rho} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \} = A \{ \delta_\lambda^\mu \delta_\rho^\nu - \delta_\lambda^\nu \delta_\rho^\mu \} + B \hat{\epsilon}_{\lambda\rho}^{\mu\nu}$$

где мы использовали стандартную процедуру опускания индексов у тензорной величины с помощью метрики, в том числе, для полностью антисимметричного символа Леви-Чивиты, так что $\hat{\epsilon}_{01}^{23} = -1$, так как, согласно принятому выбору знаков $\hat{\epsilon}^{0123} = 1$, и опускание временного индекса не меняет знак, а опускание 3-мерного индекса меняет знак. Коэффициенты A и B в (17.151) можно определить, подставляя в формулу явный вид генераторов при фиксированном выборе 4-мерных индексов. Например, фиксируем $\{\lambda, \rho, \mu, \nu\} = \{0, 1, 2, 3\}$. Тогда в правой части 17.151 получим $-B$, а в левой, согласно 17.130 и 17.131,

$$\text{tr} \{ \bar{\sigma}_{01} \bar{\sigma}^{23} \} = \text{tr} \left\{ \left(-\frac{i}{2} \right) \sigma_1 \frac{1}{2} \sigma_1 \right\} = -\frac{i}{4} \text{tr} \mathbb{1} = -\frac{i}{2}$$

т.е. $B = \frac{i}{2}$. Если же $\{\lambda, \rho, \mu, \nu\} = \{0, 1, 0, 1\}$, то в правой части 17.151 получим A , а в левой -

$$\text{tr} \{ \bar{\sigma}_{01} \bar{\sigma}^{01} \} = \text{tr} \left\{ \left(-\frac{i}{2} \right) \sigma_1 \frac{i}{2} \sigma_1 \right\} = \frac{1}{4} \text{tr} \mathbb{1} = \frac{1}{2},$$

т.е. $A = \frac{1}{2}$.

В итоге получаем

$$\text{tr} \{ \bar{\sigma}_{\lambda\rho} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \} = \frac{1}{2} \{ \delta_\lambda^\mu \delta_\rho^\nu - \delta_\lambda^\nu \delta_\rho^\mu \} + \frac{i}{2} \hat{\epsilon}_{\lambda\rho}^{\mu\nu}.$$

Совершенно аналогично для матриц $\sigma^{\mu\nu}$ без черты и с индексами без точек выводится, что

$$\text{tr} \{ \sigma_{\lambda\rho} \sigma^{\mu\nu} \} = \frac{1}{2} \{ \delta_\lambda^\mu \delta_\rho^\nu - \delta_\lambda^\nu \delta_\rho^\mu \} - \frac{i}{2} \hat{\epsilon}_{\lambda\rho}^{\mu\nu}.$$

Приведение подобных членов в 17.150

$$\begin{aligned}
V'^\mu &= V^\mu + \frac{i}{4}(-2i)\text{tr}\{\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\bar{\sigma}^{\mu\nu} - \sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\}\omega^{\lambda\rho}V_\nu = \\
&= V^\mu + \frac{1}{2}\text{tr}\{\bar{\sigma}_{\lambda\rho}\bar{\sigma}^{\mu\nu} + \sigma_{\lambda\rho}\sigma^{\mu\nu}\}\omega^{\lambda\rho}V_\nu
\end{aligned}$$

¹ След по своей структуре спинорных индексов есть спинорный скаляр, т.е. инвариант. 71371

записывается с учетом перестановки $\mu \leftrightarrow \nu$ в последнем члене, и это выражение при подстановке в него (17.152) и (17.153) дает сокращение вкладов с символом Леви-Чивиты, так что свертка символов Кронекера приводит к окончательной формуле

$$V'^\mu = V^\mu + \omega^{\mu\nu}V_\nu,$$

а это ничто иное как инфинитезимальное преобразование 4-вектора, как этого и следовало ожидать. Очевидно, что для конечных преобразований следует использовать общий закон

$$V'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} V^\nu \quad \Leftrightarrow \quad V'_\mu = V_\nu \{\Lambda^{-1}\}^\nu_{\ \mu}.$$

Подводя итог, констатируем, что преобразования группы $SL(2, \mathbb{C})$ с параметрами $\omega^{\mu\nu}$, которые мы будем указывать как аргумент, например, $\Lambda_-(\omega)$, для матрицы $\hat{V}$ сводятся к преобразованиям группы Лоренца, которые в случае ковектора принимают вид

$$\begin{aligned}
\hat{V}'_{\alpha\dot{\alpha}} &= \left\{ \Lambda_-(\omega) \circ \hat{V} \circ \Lambda_+^{-1}(\omega) \right\}_{\alpha\dot{\alpha}} = \{\Lambda_-(\omega)\}^\beta_{\ \alpha} \{\sigma^\mu\}_{\beta\dot{\beta}} \{\Lambda_+^{-1}(\omega)\}^{\dot{\beta}}_{\ \dot{\alpha}} V_\mu = \\
&= \{\sigma^\mu\}_{\alpha\dot{\alpha}} V_\nu \{\Lambda^{-1}(\omega)\}^\nu_{\ \mu}.
\end{aligned}$$

Мы убедились в этом только что для бесконечно малых преобразований при $\omega^{\mu\nu} \rightarrow 0$. Для конечных преобразований мы установили сохранение лоренц-инвариантной длины 4-ковектора. Теперь мы можем утверждать, что конечные преобразования $SL(2, \mathbb{C})$ за исключением ядра гомоморфизма $SL(2, \mathbb{C}) \mapsto SO(3, 1)$ не сводятся ни к элементарному тождественному преобразованию, ни к трансляциям, оставляющим инвариантной длину 4-вектора, ни к дискретной инверсии пространственных координат и стрелы времени, потому что их близкие к единице преобразования являются элементами $SO(3, 1)$ для 4-вектора V^μ .

Покажем теперь, что величины

$$\theta\sigma^\mu\bar{\chi} = \theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \quad \text{и} \quad \bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\chi = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\chi_\alpha$$

ведут себя как 4-векторы. В самом деле, воспользуемся стандартным способом построения инвариантов: введем величину без внешних индексов, а только с немymi. В данном случае, например, используем свертку с 4-ковектором V_μ ,

$$V_\mu\theta\sigma^\mu\bar{\chi} = V_\mu\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}},$$

и докажем, что эта величина является инвариантом. Действительно, преобразование из группы $SL(2, \mathbb{C})$ с параметрами $\omega^{\mu\nu}$ дает для спиноров соответствующее домножение строк и столбцов на матрицы 2×2

$$\theta^\alpha \mapsto \theta^{\alpha_1} \{\Lambda_-^{-1}(\omega)\}^{\alpha}_{\ \alpha_1}, \quad \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \mapsto \{\Lambda_+(\omega)\}^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\alpha}_1} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}_1}$$

и преобразование из группы Лоренца для ковектора

$$V_\mu \mapsto V_\nu \{\Lambda^{-1}(\omega)\}^\nu_{\ \mu} = V'_\mu(\omega),$$

где $\{\Lambda(\omega)\}_\bullet^\nu - 4 \times 4$ -матрица преобразований координат, так что ковектор преобразуется обратной матрицей. 72372

Тогда составная величина

$$\theta^\alpha \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} V_\mu$$

переходит в

$$\theta^{\alpha_1} \{\Lambda_-^{-1}(\omega)\}_{\alpha_1}^{\bullet\alpha} \{\Lambda_+(\omega)\}_\bullet^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}_1 \bar{\chi}^{\dot{\alpha}_1} V'_\mu(\omega)$$

Учтем теперь, что после умножения на релятивистскую матрицу Паули мы получим выражение

$$\theta^{\alpha_1} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}_1} \{\Lambda_-^{-1}(\omega)\}_{\alpha_1}^{\bullet\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \{\Lambda_+(\omega)\}_{\bullet\dot{\alpha}_1}^{\dot{\alpha}} V'_\mu(\omega),$$

в котором обратим внимание на члены без спиноров. Сначала заметим, что смена знака параметра $\omega^{\mu\nu} \mapsto -\omega^{\mu\nu}$, конечно, заменяет матрицу преобразования на обратную,

$$\Lambda_-^{-1}(\omega) = \Lambda_-(-\omega), \quad \Lambda_+(\omega) = \Lambda_+^{-1}(-\omega),$$

так что получается выражение, значение которого мы уже установили в (17.154),

$$\{\Lambda_-(-\omega)\}_{\alpha_1}^{\bullet\alpha} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \{\Lambda_+^{-1}(-\omega)\}_{\bullet\dot{\alpha}_1}^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}_1 V'_\mu = \sigma_{\alpha_1\dot{\alpha}_1}^\mu V'_\nu \{\Lambda^{-1}(-\omega)\}_\bullet^\nu.$$

Используя обращение матрицы преобразований при переходе к параметрам противоположного знака и подставляя V'_ν , найдем, что

$$V'_\nu \{\Lambda^{-1}(-\omega)\}_\bullet^\nu = V'_\nu \{\Lambda(\omega)\}_\bullet^\nu = V_\nu \{\Lambda^{-1}(\omega)\}_\bullet^\nu \{\Lambda(\omega)\}_\bullet^\nu = V_\mu.$$

Следовательно, мы установили, что величина $V_\mu \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ после преобразований переходит в $V_\mu \theta^{\alpha_1} \sigma_{\alpha_1\dot{\alpha}_1}^\mu \bar{\chi}^{\dot{\alpha}_1}$, т.е. в явном виде переходит сама в себя, и стало быть, она является инвариантом. С другой стороны, этот инвариант свертка 4-ковектора V_μ с $\theta^\mu \bar{\chi}$ по немоу индексу μ , а значит, билинейная по киральным полям форма $\theta^\mu \bar{\chi}$ (см. определение понятия кирального поля на стр. 354) представляет собой 4-вектор.

Резюмируя содержание раздела, сформулируем основные выводы: мы построили схему представления полей в базисе, который характеризуется парой чисел $\{s_u, s_d\}$ в группе $SL(2, \mathbb{C})$, и продемонстрировали процедуру применения этой схемы на примере полей спиноров и 4-векторов. Важно, что в случае представлений $(s_u, 0)$ или $(0, s_d)$ оператор спина поля $\mathbf{s}$, как мы видели, совпадал с отличными от нуля генераторами $\mathbf{s}^\uparrow \mapsto \mathbf{s}$ и $\mathbf{s}^\downarrow \mapsto \mathbf{s}$, соответственно, так что в этих случаях собственное значение спина поля определялось значениями s_u и s_d .

Выше мы рассмотрели, как 4-вектор можно записать в виде спинорной матрицы $\hat{V}_{\alpha\dot{\alpha}}$, которая реализует представление $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, являющееся неприводимым в группе $SL(2, \mathbb{C})$ по построению. Но для подгруппы пространственных поворотов в группе $SL(2, \mathbb{C})$ оно является приводимым, так как в представлении $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ для 4-вектора V^μ генераторы $\mathbf{s}^{\uparrow\downarrow}$ задают спин как сумму $\mathbf{s} = \mathbf{s}^\uparrow + \mathbf{s}^\downarrow$ (см. (17.97)). Это вполне согласуется с тем, что 4-вектор V^μ включает в себя 3-мерный скаляр V_0 со спином $s = 0$ и 3-мерный вектор $\mathbf{V}$ со спином $s = 1$, 73373

а это и значит, что представление $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ приводимо по отношению к группе 3-мерных поворотов. Это не должно нас удивлять, поскольку по сути имеет место сложение двух спинов $\frac{1}{2}$, а в этой сумме, как известно, есть состояния с суммарным спином 0 и 1.

Подчеркнем, что действие группы $SL(2, \mathbb{C})$ на релятивистских полях не сводится, вообще говоря, к унитарным преобразованиям, как это имело место, например, в

нерелятивистской квантовой механике с трансляциями и поворотами, которые действовали на волновые функции унитарно. Поэтому сами эти поля не могут рассматриваться в качестве волновых функций или векторов состояний релятивистских частиц в гильбертовом пространстве. Например, в случае спиноров, поскольку эрмитово сопряжение переводит столбцы в комплексно сопряженные строки так, что согласно (17.119) $(\theta^\dagger)_{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ и $(\bar{\chi}^\dagger)^\alpha = \chi^\alpha$, величины (см. определения релятивистских матриц Паули в (17.121) и (17.122))

$$\theta^\dagger \theta = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \delta^{\dot{\alpha}\alpha} \theta_\alpha = \bar{\theta} \bar{\sigma}^0 \theta$$

и

$$\bar{\chi}^\dagger \bar{\chi} = \chi^\alpha \delta_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \chi \sigma^0 \bar{\chi}$$

преобразуются как нулевые компоненты 4-векторов и не являются скалярами. Впрочем, их можно рассматривать как пространственные плотности, так как интегралы

$$\int d^3r \bar{\theta} \bar{\sigma}^0 \theta \quad \text{и} \quad \int d^3r \chi \sigma^0 \bar{\chi}$$

являются релятивистскими инвариантами. Спрашивается: можно ли считать эти инварианты вероятностями по аналогии с тем, как строилось уравнение непрерывности для плотности вероятности и потока вероятности в нерелятивистской механике? Для обоснованного ответа на это вопрос необходимо построить уравнения движения для полей, исходя из вариационного принципа, с введением положительно определенного гамильтониана поля и рассмотреть его совместимость с положительной определенностью вероятностей. Эта программа будет реализована при так называемом вторичном квантовании полей, т.е. при построении пространства квантовых состояний при описании базиса полей группы Пуанкаре.

Задача 10.1. Покажите, что $(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{\alpha\beta} \sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}}$

Задача 10.2. Покажите, что для грассмановых спиноров $\bar{\chi} \bar{\sigma}^\mu \theta = -\theta \sigma^\mu \bar{\chi}$.

Как догадаться до спиноров (??????)

(остался вопрос, хз)

6.1.6 Spin Tensor $S^{\mu\nu}$

Основные свойства

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &\equiv (S_x, S_y, S_z) \equiv (S^{yz}, S^{zx}, S^{xy}), \\ \tilde{\mathbf{S}} &\equiv (\tilde{S}_x, \tilde{S}_y, \tilde{S}_z) \equiv (S^{tx}, S^{ty}, S^{tz}). \\ S^{\mu\nu} &\equiv \begin{pmatrix} 0 & \tilde{S}_x & \tilde{S}_y & \tilde{S}_z \\ -\tilde{S}_x & 0 & S_z & -S_y \\ -\tilde{S}_y & -S_z & 0 & S_x \\ -\tilde{S}_z & S_y & -S_x & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Другие свойства**О применениях****Тензор спина для спина 3/2 (?????)**

(не знаю, пока просто вопрос такой есть.)

6.1.7 Orbital Momenta Tensor $L^{\mu\nu}$ **Основные свойства**

$$J^{\mu\nu} \equiv L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$$

Генератор вращений

$$\begin{aligned} L_1 = L^{23} &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g^{22}g^3_3 \\ 0 & 0 & g^{33}g^2_2 & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_2 = L^{31} &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{11}g^3_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g^{33}g^1_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_3 = L^{12} &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g^{11}g^2_2 & 0 \\ 0 & g^{22}g^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Генератор бустов

$$\begin{aligned} M_1 = L^{01} &= i \begin{pmatrix} 0 & g^{00}g^1_1 & 0 & 0 \\ -g^{11}g^0_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_2 = L^{02} &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & g^{00}g^2_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g^{22}g^0_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_3 = L^{03} &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g^{00}g^3_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g^{33}g^0_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.1.8 Full Orbital Momenta Tensor $J^{\mu\nu}$

Основные свойства

We can define the following three-vectors from the independent components of $J^{\mu\nu}$ and $S^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &\equiv (J_x, J_y, J_z) \equiv (J^{yz}, J^{zx}, J^{xy}), \\ \mathbf{K} &\equiv (K_x, K_y, K_z) \equiv (J^{tx}, J^{ty}, J^{tz}),\end{aligned}$$

We will call $\mathbf{S}$ the system's spin three-vector and $\tilde{\mathbf{S}}$ its dual spin-three vector.

We can now write the system's total angularmomentum tensor $J^{\mu\nu}$ and its spin tensor $S^{\mu\nu}$ as

$$J^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & K_x & K_y & K_z \\ -K_x & 0 & J_z & -J_y \\ -K_y & -J_z & 0 & J_x \\ -K_z & J_y & -J_x & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu}$$

Note that if $\mathbf{S} = 0$, then $\mathbf{J} = \mathbf{L} = \mathbf{X} \times \mathbf{p}$ reduces to the usual Newtonian definition $L_k = X_i p_j - X_j p_i$ of orbital angular momentum.

$$\begin{aligned}[\mathbf{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \mathbf{j}_{\mathbb{E}}^{\beta}] &= +i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{j}_{\mathbb{E}}^{\gamma} \\ [\mathbf{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{\mathbf{j}}_{\mathbb{E}}^{\beta}] &= +i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \tilde{\mathbf{j}}_{\mathbb{E}}^{\gamma} \\ [\tilde{\mathbf{j}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{\mathbf{j}}_{\mathbb{E}}^{\beta}] &= -i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \tilde{\mathbf{j}}_{\mathbb{E}}^{\gamma} \\ \mathbf{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha} &\mapsto \frac{1}{\hbar} \mathbf{L}_{\mathbb{E}}^{\alpha} = -i(\mathbf{r} \times \nabla)_{\mathbb{E}}^{\alpha} = \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \quad \tilde{\mathbf{j}}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \mapsto \frac{1}{\hbar} L_{0\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \tilde{\mathbf{j}}_{\mathbb{E}} \mapsto i \left(ct \nabla + \frac{\mathbf{r}}{c} \partial_t \right) = \tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}} \\ [\tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\beta}] &= r_{\mathbb{E}}^{\beta} \partial_{\alpha} - r_{\mathbb{E}}^{\alpha} \partial_{\beta} = -\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\gamma\alpha'\beta'} r_{\mathbb{E}}^{\alpha'} \partial_{\beta'} = -\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{r} \times \nabla)^{\gamma} = -i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\gamma}.\end{aligned}$$

$$\tilde{\ell}^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\rho} \ell_{\lambda\rho}.$$

$$\begin{aligned}\ell_{0\alpha} &= \tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \\ \ell_{\beta\gamma} &= \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\alpha} \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \\ \tilde{\ell}^{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{\beta\gamma 0\alpha} 2\tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\alpha} = \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\alpha} \tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \\ \tilde{\ell}^{0\alpha} &= \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\alpha'} \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha'} = \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}. \\ \ell_{\mu\nu} &\xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\ell}_{\mu\nu} \xrightarrow{\mathcal{D}} -\ell_{\mu\nu}, \quad \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{D}} -\mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \quad \tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{D}} -\mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{D}} -\tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}. \\ \mathfrak{s}_{\mu\nu} &\xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\mathfrak{s}}_{\mu\nu}, \quad \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \quad \tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{D}} -\mathbf{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}.\end{aligned}$$

6.1.9 Casimir operators of Lorentz Group

Теория

Обратимся к соотношениям (51), определяющим коммутационные соотношения генераторов Лоренцевских вращений $J_{\mu\nu}$. В силу антисимметрии эти операторы имеют компоненты J_{0i}, J_{ij} . Запишем, исходя из (51), коммутационные соотношения между этими компонентами. Подставляя в (51) последовательно $\mu = 0, i$ и $\nu = 0, j$, получим

$$\begin{aligned}
[J_{0i}, J_{0j}] &= iJ_{ij} \\
[J_{0i}, J_{jk}] &= i(\delta_{ij}J_{0k} - \delta_{ik}J_{0j}) \\
[J_{ij}, J_{kl}] &= i(\delta_{il}J_{jk} + \delta_{jk}J_{il} - \delta_{ik}J_{jl} - \delta_{jl}J_{ik})
\end{aligned}$$

Введем операторы

$$\begin{aligned}
K_i &= J_{0i} \\
J_i &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_{jk}
\end{aligned}$$

Из последнего соотношения

$$J_{ij} = -\epsilon_{ijk}J_k$$

Здесь использовано тождество $\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$. Тогда коммутационные соотношения (153) между J_{0i}, J_{ij} можно переписать в терминах J_i, K_i в виде

$$\begin{aligned}
[K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk}J_k \\
[K_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}K_k \\
[J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k
\end{aligned}$$

Определим теперь операторы

$$\begin{aligned}
A_i &= \frac{1}{2}(J_i + iK_i) \\
B_i &= \frac{1}{2}(J_i - iK_i)
\end{aligned}$$

Используя соотношения (154), (155), (156), получим

$$\begin{aligned}
[A_i, A_j] &= i\epsilon_{ijk}A_k \\
[B_i, B_j] &= i\epsilon_{ijk}B_k
\end{aligned}$$

В результате мы получили коммутационные соотношения для генераторов двух, несвязанных друг с другом, групп $SU(2)$. Описание неприводимых представлений группы $SU(2)$ хорошо известны (например из теории углового момента в нерелятивистской квантовой механике). Мы приведем только основные результаты для рассматриваемого случая. Имеется два независимых оператора Казимира, $A^2 = A_i A_i$ и $B^2 = B_i B_i$. Базис неприводимого представления составляют векторы $|N, N_3; M, M_3\rangle$ (мы используем здесь удобные квантовомеханические обозначения), где $N, M = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$, и для заданных N, M , числа N_3, M_3 , принимают значения $N_3 = -N, -N+1, \dots, N-1, N$; $M_3 = -M, -M+1, \dots, M-1, M$. При этом

$$\begin{aligned}
A^2 |N, N_3; M, M_3\rangle &= N(N+1) |N, N_3; M, M_3\rangle \\
A_3 |N, N_3; M, M_3\rangle &= N_3 |N, N_3; M, M_3\rangle \\
B^2 |N, N_3; M, M_3\rangle &= M(M+1) |N, N_3; M, M_3\rangle \\
B_3 |N, N_3; M, M_3\rangle &= M_3 |N, N_3; M, M_3\rangle
\end{aligned}$$

Ранее было показано, что неприводимое представление группы Лоренца, обозначенное $(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$; $n, m = 0, 1, 2, \dots$ реализуется на спинтензорах вида $\psi_{(a_1 \dots a_n)(\dot{a}_1 \dots \dot{a}_m)}$. Это означает, что в пространстве спинтензоров $|N, N_3; M, M_3\rangle = \psi_{(a_1 \dots a_n)(\dot{a}_1 \dots \dot{a}_m)}$, причем $N = \frac{n}{2}, M = \frac{m}{2}$. В соответствии с соотношениями (162) будем считать, что операторы A_i действуют на неточечные индексы спин-тензора, а операторы B_i - на точечные индексы.

6.1.10 Other Properties of Lorentz Group

Структурные константы в группе Лоренца

(напишу потом быстро.)

6.1.11 Overview of Discrete Symmetries of Lorentz Group

(?? напишу постепенно)

Схематически структуру связных компонент группы Лоренца можно представить следующим образом:

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{SO_+^\uparrow(3,1)} & \xleftrightarrow{\mathbb{T}} & \boxed{SO_+^\downarrow(3,1)} \\
 \mathbb{P} \uparrow \downarrow & \mathbb{C} \searrow \swarrow & \uparrow \downarrow \mathbb{P} \\
 \boxed{SO_-^\uparrow(3,1)} & \xleftrightarrow[\mathbb{T}]{} & \boxed{SO_-^\downarrow(3,1)}.
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{T}j &= j^*|_{t \rightarrow -t} = -j \\
 \mathbb{T}K &= K^*|_{t \rightarrow -t} = +K
 \end{aligned}$$

где $(\cdot)^*$ означает комплексное сопряжение. Далее заметим, что действие этих дискретных преобразований на генераторы можно представить в виде

$$\begin{array}{cccc}
 & \mathbb{P} & \mathbb{T} & \mathbb{PT} \\
 \mathfrak{J}^+ & \mathfrak{J}^- & -\mathfrak{J}^+ & -\mathcal{J}^- \\
 \mathcal{J}^- & \mathfrak{J}^+ & -\mathfrak{J}^- & -\mathfrak{J}^+ \\
 \hat{k}_0 & \hat{k}_0 & \hat{k}_0 & \hat{k}_0 \\
 \hat{k} & -\hat{k} & -\hat{k} & \hat{k}
 \end{array}$$

(??? так и не понял, норм эти формулы выше или нет, пока оставил, там много еще читать придется.)

6.1.12 Reversal of the Arrow of Time in Lorentz Group

(? maybe it is useful, so I'll write this operator, or maybe I'll delete this section)

6.2 Properties of the Poincaré Group and Algebra

6.2.1 Translations of Minkowski Space

(??? короче, соберу потом для рел случая.)

4-генератор трансляций (??)

(помним знаки + и -, это важно.)

Генераторы трансляций и их алгебра

Генераторы трансляций Γ_α вводятся из рассмотрения бесконечно малых преобразований вблизи единичного элемента:

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \approx \hat{1} - i\Gamma_\alpha a^\alpha, \quad \mathbf{a} \rightarrow 0,$$

как

$$\Gamma_\alpha \equiv i \lim_{\mathbf{a} \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial a^\alpha} \hat{T}(\mathbf{a})$$

Рассмотрим бесконечно малые (инфинитезимальные) трансляции координат вблизи единичного элемента $\mathbb{1}$, т.е. в окрестности тождественного преобразования,

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \approx \mathbb{1} - i\Gamma_\alpha a^\alpha, \quad \mathbf{a} \rightarrow 0,$$

где мы ввели генераторы инфинитезимальных преобразований

$$\Gamma_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} i \lim_{\mathbf{a} \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial a^\alpha} \hat{T}(\mathbf{a}).$$

Для закона преобразования скалярной, векторной или тензорной функции, т.е. поля $\Phi(\mathbf{r})$, важно знать

$$\frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} = \frac{\partial (r^\alpha + a^\alpha)}{\partial r^\beta} = \delta_\beta^\alpha,$$

а значит, в законе преобразования тензорных величин ранга n в индексных обозначениях

$$\Phi'^{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\mathbf{r}') = \frac{\partial r'^{\alpha_1}}{\partial r^{\beta_1}} \dots \frac{\partial r'^{\alpha_n}}{\partial r^{\beta_n}} \Phi^{\beta_1 \dots \beta_n}(\mathbf{r})$$

как для контравариантных, так для ковариантных индексов, все индексы умножаются на символ Кронекера, т.е. не меняются, а значит, тензорные индексы у величин можно опустить, что мы и сделаем при рассмотрении трансляций.

Действие оператора трансляций на скалярную функцию

Преобразование при трансляциях евклидова пространства теперь можно записать в виде $\hat{T} \circ \Phi(\mathbf{r}) = \Phi_T(\mathbf{r}_T)$, или

$$\Phi_T(\mathbf{r}_T) = \Phi(\mathbf{r}),$$

т.е.

$$\Phi_T(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{r})$$

И для бесконечно малых преобразований

$$\Phi_T(\mathbf{r}) \approx \Phi(\mathbf{r}) - a^\alpha \partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}), = \left(\mathbb{1} - i\hat{k}_\alpha a^\alpha \right) \Phi(\mathbf{r})$$

где генератор трансляций

$$\hat{k}_\alpha = -i\partial_\alpha$$

Тогда функция после действия оператора трансляций имеет вид:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r} + \mathbf{a}) &= \sum_n \frac{1}{n!} a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_n} \frac{\partial^n f(\mathbf{r})}{\partial r^{\alpha_1} \dots \partial r^{\alpha_n}} = \\ &= \sum_n \frac{1}{n!} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^n f(\mathbf{r}) \\ &= e^{a^\alpha \partial_\alpha} f(\mathbf{r}) = e^{ia^\alpha \hat{k}_\alpha} f(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

и, в частности, для собственной функции генератора с определенной нормировкой

$$f(\mathbf{a}) = e^{i\mathbf{a}^\alpha k_\alpha}, \quad \text{если} \quad f(0) = 1, \quad -i\partial_\alpha f(\mathbf{r}) = \hat{k}_\alpha f(\mathbf{r}) = k_\alpha f(\mathbf{r}).$$

Таким образом, генератор $\hat{k}_\alpha$ задает волновой вектор плоской монохроматической волны. Заметим, что последнее условие - это уравнение на вещественные собственные значения и собственные функции генератора пространственных трансляций, откуда становится ясным введение мнимой единицы в определение генератора трансляций: эта мнимая единица связана с ясным физическим смыслом собственных функций генераторов с вещественными собственными значениями, отвечающими наблюдаемым величинам.

О квантовой механике (?)

Отметим, что плоская монохроматическая волна отвечает амплитуде вероятности достоверности траектории свободной частицы и, согласно гипотезе де Бройля, волновой вектор $\mathbf{k}$ связан с импульсом: $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Таким образом, генератор трансляций после умножения на постоянную Планка с чертой становится оператором импульса, который действует в пространстве амплитуд вероятности Ψ : $-i\hbar\partial_\alpha = \hat{p}_\alpha$. В пространстве амплитуд вероятности достоверности траекторий оператор импульса имеет вещественные собственные значения. Такие операторы называются эрмитовыми. Теория операторов в пространстве амплитуд траекторий относится не к классической, а к квантовой механике, так что мы здесь не будем развивать эту тему.

³ Амплитуда вероятности достоверности траектории Ψ определяется через действие S как $\Psi = \exp\{iS/\hbar\}$, где S удовлетворяет уравнениям Гамильтона-Якоби $\nabla_\alpha S = p_\alpha$, $\partial S/\partial t = -E(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Отсюда сразу следует утверждение для волны де Бройля, например. При этом для траектории на уравнениях движения вероятность достоверности такой траектории равна $W = |\Psi|^2 = 1$.

Коммутативность трансляций

Вычислим разность действия двух инфинитезимальных операторов

$$(\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(\mathbf{b}) - \hat{T}(\mathbf{b}) \cdot \hat{T}(\mathbf{a}))f(\mathbf{r}) = -a^\alpha b^\beta (\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta - \hat{k}_\beta \hat{k}_\alpha) f(\mathbf{r})$$

Для генераторов трансляций в силу перестановочности частного дифференцирования по различным переменным в декартовых координатах $\partial_\alpha \partial_\beta f(\mathbf{r}) = \partial_\beta \partial_\alpha f(\mathbf{r})$, следует, что

$$\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta - \hat{k}_\beta \hat{k}_\alpha = 0,$$

т.е. результат не зависит от порядка преобразований.

О случаях применений трансляций

(тут развернутый ответ на вопрос, зачем мы их изучали вообще?)

6.2.2 Poincaré Group

Обзор теории группы Пуанкаре по Киселеву (!?)

Трансляции декартовых координат пространства Минковского

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu = \exp\{a^\nu \partial_\nu\} x^\mu = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} a^\nu p_\nu\right\} x^\mu,$$

где генератор сдвигов - оператор 4-импульса

$$p_\nu = i\hbar\partial_\nu,$$

не преобразуют тензорные индексы полей, так что, например, для векторного поля

$$A'_\mu(x') = A_\mu(x),$$

Т.е.

$$A'_\mu(x') = A'_\mu(x+a) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}a^\nu p_\nu\right\} A'_\mu(x) = A_\mu(x).$$

Умножая на обратный оператор сдвига 4-координат, получим

$$A'_\mu(x) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}a^\nu p_\nu\right\} A_\mu(x).$$

Полная группа Пуанкаре есть объединение группы трансляций и группы Лоренца - это так называемая неоднородная (Inhomogeneous) группа Лоренца $ISO(3, 1)$.

Для того, чтобы определить базис полей в группе Пуанкаре, необходимо установить коммутационные соотношения для генераторов трансляций и генераторов группы Лоренца. Поскольку генераторы трансляций в декартовых координатах - линейные дифференциальные операторы, они, естественно, коммутируют между собой, а также со спинными генераторами, которые представляют собой числовые матрицы:

$$[p_\mu, p_\nu] = 0, \quad [p_\mu, S_{\lambda\rho}] = 0$$

Вакуумному состоянию (без частиц) приписывается нулевая энергия, а физическим состояниям релятивистской частицы отвечают положительные значения энергии на фоне вакуума:

$$p_0 \geq 0,$$

а также 4-импульсы с неотрицательной инвариантной массой:

$$p^2 \geq 0$$

Нас же интересует базис релятивистских полей в группе Пуанкаре. Для этого нам необходимо построить решения полевых уравнений на собственные значения для полного набора операторов, построенных из генераторов группы Пуанкаре. В этот набор входит релятивистски инвариантный квадрат 4вектора Паули-Любанского W^2 , так что для построения базиса необходимо решить уравнения на собственные значения W^2 .

вкратце свойства группы Пуанкаре

Учитывая связь представлений группы Ли с ее представлениями ее алгебры (??), операторы записываются как

$$U(\Lambda, a) = \exp\left\{ia^\mu P_\mu + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}\right\}$$

так как $U(\Lambda) = \exp\left\{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}\right\}$ и $U(a) = \exp\{ia^\mu P_\mu\}$.

В итоге оператор задается десятью параметрами a^μ, ω^μ , как и должно быть для десятипараметрической группы Пуанкаре (?? где раньше сказано про это?)

Нахождение алгебры - это (?) по сути нахождение коммутационных соотношений между элементами.

(кст, что это дает?)

Эти коммутационные соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned}[P_\mu, J_{\lambda\sigma}] &= i(\eta_{\mu\sigma}P_\lambda - \eta_{\mu\lambda}P_\sigma) \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] &= i(\eta_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma})\end{aligned}$$

Таким образом мы построили алгебру Ли группы Пуанкаре: нашли все коммутационные соотношения между генераторами трансляций и генераторами лоренцевских вращений.

Список преобразований величин в группах Пуанкаре и Лоренца

(!!! тоже важно выписать все формулы!!!)

$$\begin{aligned}\delta_s A^\beta &= \omega^{\beta\gamma} A_\gamma = -i\frac{1}{2} \left\{ \delta_{\beta'}^\beta \delta_{\gamma'}^\gamma - \delta_{\gamma'}^\beta \delta_{\beta'}^\gamma \right\} \omega^{\beta'\gamma'} A_\gamma \\ A'^\beta(\mathbf{r}) &= -\epsilon^{0\alpha\beta\gamma} \phi_\alpha A_\gamma = A^\beta(\mathbf{r}) + \delta_s A^\beta(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \ell_{\beta'\gamma'} \omega^{\beta'\gamma'} A^\beta(\mathbf{r}) = \\ &= A^\beta(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} (\mathfrak{s}_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma} \omega^{\beta'\gamma'} A_\gamma - \frac{1}{2} \ell_{\beta'\gamma'} \omega^{\beta'\gamma'} A^\beta(\mathbf{r}), \\ A'^\beta(\mathbf{r}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\hat{R}(\omega)\}_\gamma^\beta A^\gamma(\mathbf{r}), \\ \hat{R}(\omega) &= \mathbb{1} - \frac{1}{2} \left\{ \hat{\ell}_{\beta'\gamma'} + \hat{\mathfrak{s}}_{\beta'\gamma'} \right\} \omega^{\beta'\gamma'}, \\ \{(\mathbf{s}_\mathbb{E})^{\beta\gamma} \cdot \phi_\mathbb{E}\} A_\mathbb{E}^\gamma &= \frac{1}{2} (\mathfrak{s}_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma} \omega^{\beta'\gamma'} A_\gamma, \\ \{\mathbf{l}_\mathbb{E} \cdot \phi_\mathbb{E}\} A_\mathbb{E}^\beta &= \frac{1}{2} \left(\hat{\ell}_{\beta'\gamma'} \right)^{\beta\gamma} \omega^{\beta'\gamma'} A_\gamma,\end{aligned}$$

Преобразования из группы Пуанкаре

Преобразования из группы Пуанкаре составляют группу

Рассмотрим неоднородные преобразования Лоренца

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu$$

Покажем, что эти преобразования также составляют группу. Подействуем последовательно двумя преобразованиями вида:

$$x'^\alpha = \Lambda_1^\alpha x^\nu + a_1^\alpha, \quad x''^\mu = \Lambda_2^\mu x'^\alpha + a_2^{\mu 2}$$

Тогда получим, что если обозначить $\Lambda_\nu^\mu = (\Lambda_2 \Lambda_1)_\nu^\mu$, $a^\mu = (\Lambda_2 a_1)^\mu + a_2^\mu$, то получается равенство:

$$x''^\mu = \Lambda_2^\mu \alpha (\Lambda_1^\alpha x^\nu + a_1^\alpha) + a_2^\mu = (\Lambda_2 \Lambda_1)_\nu^\mu x^\nu + (\Lambda_2 a_1)^\mu + a_2^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu$$

Получилось отображение из двух элементов множества неоднородных преобразований Лоренца в другое преобразование Лоренца.

Очевидно, что существует единичное преобразование и обратное, таким образом, это множество образует группу, которая называется группой Пуанкаре.

Для элемента группы Пуанкаре используется обозначение (Λ, a) , а закон умножения записывается как

$$(\Lambda_2, a_2) (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$$

Единичный элемент обозначается как $(I, 0)$, обратный как $(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$.

Действительно, их свойства выполняются:

$$(\Lambda, a)(I, 0) = (\Lambda I, \Lambda 0 + a) = (\Lambda, a),$$

$$(I, 0)(\Lambda, a) = (I\Lambda, Ia + 0) = (\Lambda, a);$$

$$(\Lambda, a) (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = (\Lambda\Lambda^{-1}, -\Lambda\Lambda^{-1}a + a) = (I, 0),$$

$$(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) (\Lambda, a) = (\Lambda^{-1}\Lambda, \Lambda^{-1}a - \Lambda^{-1}a) = (I, 0).$$

Формализм представлений группы Пуанкаре

Оператор соответствующий элементу группы Пуанкаре в заданном представлении группы Пуанкаре обозначим как $U(\Lambda, a)$.

Для операторов имеются следующие преобразования:

$$U(\Lambda, a)U(\Lambda', a') = U((\Lambda, a)(\Lambda', a')) = U(\Lambda\Lambda', \Lambda a' + a)$$

$$U(\Lambda, a) = U((I, a)(\Lambda, 0)) = U(I, a)U(\Lambda, 0)$$

Обозначим

$$U(\Lambda, 0) = U(\Lambda)$$

$$U(I, a) = U(a)$$

тогда

$$U(\Lambda, a) = U(a)U(\Lambda).$$

Также элементы группы Пуанкаре можно представлять матрицами:

$$\begin{pmatrix} \Lambda^\mu_\nu & a^\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда умножение записывается

$$\begin{pmatrix} \Lambda^\mu_2 & a^\mu_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^\alpha_1 & a^\alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Lambda_2 \Lambda_1)^\mu_\nu & (\Lambda_2 a_1)^\mu + a^\mu_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

А в случае бесконечно малых преобразований, запись имеет вид:

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

где $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ - элемент группы Лоренца.

Коммутаторы генераторов группы Лоренца и генераторов сдвигов в 3+1 мерном виде (??)

(!! тут важно прорешать задачи!!!)

Остальные коммутаторы легко найти, используя их явный вид, так что

$$[j_{\mathbb{E}}^{\alpha}, p_{\mathbb{E}}^{\beta}] = i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} p_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad [j_{\mathbb{E}}^{\alpha}, p_0] = 0,$$

$$[\tilde{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, p_{\mathbb{E}}^{\beta}] = i\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta} p_0, \quad [\tilde{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, p_0] = ip_{\mathbb{E}}^{\alpha}.$$

Тут при вычислениях используется в явном виде то, что $p_{\mu} = i\hbar\partial_{\mu}$, а также выражения для генераторов $\mathbf{l}$ и $\tilde{\mathbf{l}}$. Важно подчеркнуть, что коммутаторы генераторов группы Лоренца с компонентами 4-импульса в точности соответствуют выражениям для таких же коммутаторов генераторов с компонентами 4-координат. Это значит, что оператор 4-импульса действительно 4-вектор.

Значит, 4-вектор импульса преобразуется при поворотах и бустах, как это и должно быть, причем

$$[j_{\mathbb{E}}^{\alpha}, p^2] = [\tilde{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, p^2] = 0,$$

т. е. квадрат 4-импульса- релятивистский инвариант.

Другой инвариант был введен Паули и Любанским. Псевдовектор Паули-Любанского определяется как

$$W^{\mu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_{\nu} S_{\lambda\rho} = \frac{1}{2} p_{\nu} \tilde{S}^{\mu\nu},$$

причем по построению

$$p \cdot W = 0, \quad [p^{\mu}, W^{\nu}] = 0.$$

Его квадрат представляет собой релятивистский скаляр и коммутирует со всеми генераторами:

$$[j_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W^2] = [\tilde{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W^2] = [p_{\mu}, W^2] = 0,$$

а компоненты этого псевдовектора естественным образом преобразуются при действии группы Лоренца.

О безмассовых и массивных операторах сдвигов

Затем рассматривают случаи массивных и безмассовых частиц. Под этим в локальной теории поля мы будем понимать описание полей с определенным законом дисперсии - соотношением между энергией p_0 и импульсом $\mathbf{p}$. Закон дисперсии задается собственным значением другого релятивистского инварианта $p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2$, который также, как и W^2 , мы включаем в полный набор наблюдаемых для построения базиса релятивистских полей.

Теория

Обратимся теперь к неоднородным преобразованиям Лоренца

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu},$$

где матрица Λ удовлетворяет базовому соотношению (8). Мы видим, что произвольное неоднородное преобразование Лоренца задается матрицей Λ и вектором a^{μ} , будем записывать такое преобразование как (Λ, a) . Рассмотрим два неоднородных преобразования Лоренца (Λ_1, a_1) и (Λ_2, a_2) и выполним их последовательно одно за другим. Получим

$$x'^\alpha = \Lambda_1^\alpha{}_\nu x^\nu + a_1^\alpha, \quad x'' = \Lambda_2^\mu{}_\alpha x'^\alpha + a_2^\mu$$

Отсюда

$$x''^\mu = \Lambda_{2\alpha\alpha} (\Lambda_1^\alpha{}_\nu x^\nu + a_1^\alpha) + a_2^\mu = (\Lambda_2 \Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu + (\Lambda_2 a_1)^\mu + a_2^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

где $\Lambda^\mu{}_\nu = (\Lambda_2 \Lambda_1)^\mu{}_\nu$, $a^\mu = (\Lambda_2 a_1)^\mu + a_2^\mu$. Ясно, что a^μ - это постоянный 4 вектор, а Λ удовлетворяет базовому соотношению (8), поскольку каждая из матриц Λ_1, Λ_2 удовлетворяет базовому соотношению. Поэтому соотношение (28) снова есть неоднородное преобразование Лоренца. То есть, результат последовательного выполнения двух неоднородных преобразований Лоренца является некоторым преобразованием Лоренца. Мы будем записывать это обстоятельство так

$$(\Lambda_2, a_2) (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$$

Покажем, что множество всех неоднородных преобразований Лоренца образует группу, где в качестве группового произведения используется последовательное выполнение двух таких преобразований. Поскольку каждое неоднородное преобразование Лоренца однозначно задается матрицей Λ и вектором a^μ и наоборот, то покажем, что множество величин (Λ, a) с законом умножения (29) образует группу. Определим единичный элемент как $(I, 0)$ где I единичная 4×4 матрица. Тогда из (29) получим

$$(\Lambda, a)(I, 0) = (\Lambda I, \Lambda 0 + a) = (\Lambda, a)$$

$$(I, 0)(\Lambda, a) = (I\Lambda, Ia + 0) = (\Lambda, a)$$

То есть $(I, 0)$ действительно единичный элемент. Определим элемент обратный к элементу (Λ, a) как $(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$. Тогда получим

$$(\Lambda, a) (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = (\Lambda \Lambda^{-1}, -\Lambda \Lambda^{-1}a + a) = (I, 0)$$

$$(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) (\Lambda, a) = (\Lambda^{-1}\Lambda, \Lambda^{-1}a - \Lambda^{-1}a) = (I, 0)$$

То есть $(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ действительно обратный элемент. Таким образом, все условия, определяющие группу выполнены. Данная группа называется неоднородной группой Лоренца или группой Пуанкаре. Мы будем обозначать ее $\mathcal{P}$.

Группа Пуанкаре имеет две очевидные подгруппы. Одну из них формируют элементы вида $(I, 0)$, осуществляющие преобразования

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu$$

Операция умножения согласно (29) есть

$$(I, a_2) (I, a_1) = (I, a_1 + a_2)$$

Здесь единичный элемент - это $(I, 0)$, элемент обратный к элементу (I, a) есть $(I, -a)$. Эта подгруппа называется группой трансляций, соответствующие преобразования (30) называются пространственновременными трансляциями. Другая подгруппа формируется элементами $(\Lambda, 0)$ и представляет собой группу Лоренца.

Поскольку группа Лоренца состоит из четырех компонент связности $L_+^\uparrow, L_+^\downarrow, L_-^\uparrow, L_-^\downarrow$, то и группа Пуанкаре состоит из четырех компонент связности $\mathcal{P}_+^\uparrow, \mathcal{P}_+^\downarrow, \mathcal{P}_-^\uparrow, \mathcal{P}_-^\downarrow$. При этом только множество $\mathcal{P}_+^\uparrow$ содержит единичный элемент $(I, 0)$, поэтому из четырех компонент связности только это множество является подгруппой группы Пуанкаре. Данная подгруппа называется собственной группой Пуанкаре.

Существует простая матричная реализация группы Пуанкаре. Каждому элементу (Λ, a) можно взаимно однозначно сопоставить 5×5 матрицу

$$\begin{pmatrix} \Lambda^\mu{}_\nu & a^\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При этом

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{2\alpha} & a_2^\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{1\nu\alpha} & a_1^\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Lambda_2\Lambda_1)^\mu{}_\nu & (\Lambda_2 a_1)^\mu + a_2^\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что в точности соответствует (29).

Рассмотрим еще бесконечно малое неоднородное преобразование Лоренца. Оно получается в случае когда $\Lambda = I + \omega$ где $\omega^\mu{}_\nu$ и a^μ - бесконечно малые величины. Тогда

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

где $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Данное преобразование задается в окрестности единичного элемента десятью независимыми вещественными параметрами. Поэтому группа Пуанкаре - это десяти параметрическая группа Ли.

6.2.3 Lie Algebra of the Poincaré Group

(из киселева, подумал, добавлю, хорошая ведь теория, чуть что и соберу)

Элемент группы Пуанкаре

Вид элементов

Будем рассматривать унитарные представления группы Пуанкаре (хотя сейчас условие унитарности не является очень важным).

Пусть $\hat{F}(\Lambda, a)$ - оператор такого представления.

Тогда

$$\hat{F}(\Lambda_1, a_1) \hat{F}(\Lambda_2, a_2) = \hat{F}((\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2)) = \hat{F}(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1)$$

Заметим, что $(\mathbf{1}, a)(\Lambda, 0) = (\Lambda, a)$.

Поэтому $\hat{F}(\Lambda, a) = \hat{F}((\mathbf{1}, a)(\Lambda, 0))$, то есть

$$\hat{F}(\Lambda, a) = \hat{F}(\mathbf{1}, a)\hat{F}(\Lambda, 0) \equiv \hat{F}(a)\hat{F}(\Lambda)$$

Отсюда

$$\hat{F}(a_1) \hat{F}(\Lambda_1) \hat{F}(a_2) \hat{F}(\Lambda_2) = \hat{F}(a_1 + \Lambda_1 a_2) \hat{F}(\Lambda_1\Lambda_2)$$

Оператор $\hat{F}(a)$ является представлением подгруппы элементов вида $(\mathbf{1}, a)$ группы Пуанкаре, т.е.

пространственновременных трансляций: $x' = x + a$.

Учитывая связь представлений группы Ли с представлениями её алгебры Ли, запишем $\hat{F}(a) = 1 + i a_\mu \hat{p}^\mu \approx e^{i a_\mu \hat{p}^\mu} (a_\mu \rightarrow 0)$.

Здесь $\hat{p}^\mu$ - генератор пространственно-временных трансляций.

Аналогично оператор $\hat{F}(\Lambda)$ является представлением подгруппы элементов вида $(\Lambda, 0)$ группы Пуанкаре, т.е.

представлением группы Лоренца: $x' = \Lambda x$.

В инфинитезимальном виде $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, где $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Поэтому $\hat{F}(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu}}$, причём генератор лоренцевских вращений, очевидно, является антисимметричным: $\hat{J}^{\mu\nu} = -\hat{J}^{\nu\mu}$.

Таким образом, произвольное унитарное представление группы Пуанкаре даётся оператором

$$\hat{F}(\Lambda, a) = e^{i a_\mu \hat{p}^\mu} e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu}}$$

Нельзя так просто переставить генераторы в представлении группы Пуанкаре (!!!!!)

Выражение

$$\hat{F}(\Lambda, a) = e^{ia_\mu \hat{p}^\mu} e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu}}$$

не эквивалентно выражению $\hat{F}(\Lambda, a) = e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu}} e^{ia_\mu \hat{p}^\mu}$.

(??? тут подробно про это! важная мелочь, вначале всей этой теории это укажу тоже!)

поиск алгебры Ли группы Пуанкаре (?? как только увижу хорошо это написанное - удалю эту копию бухбиндера)

Найдём алгебру Ли группы Пуанкаре.

Для начала положим в формуле (1.21): $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$, что соответствует $\omega_{\mu\nu}^1 = \omega_{\mu\nu}^2 = 0$.

Тогда $\hat{F}(a_1) \hat{F}(a_2) = \hat{F}(a_1 + a_2)$, т.е. $e^{ia_\mu^1 \hat{p}^\mu} e^{ia_\mu^2 \hat{p}^\mu} = e^{i(a_\mu^1 + a_\mu^2) \hat{p}^\mu}$.

Для инфинитезимальных параметров трансляций во втором порядке имеем

$$\left(1 + ia_\mu^1 \hat{p}^\mu - \frac{1}{2} a_\mu^1 a_\nu^1 \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu\right) \left(1 + ia_\mu^2 \hat{p}^\mu - \frac{1}{2} a_\mu^2 a_\nu^2 \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu\right) = 1 + i(a_\mu^1 + a_\mu^2) \hat{p}^\mu - \frac{1}{2} (a_\mu^1 + a_\mu^2) (a_\nu^1 + a_\nu^2) \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu$$

или

$$1 + i(a_\mu^1 + a_\mu^2) \hat{p}^\mu - a_\mu^1 a_\nu^2 \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu - \frac{1}{2} a_\mu^1 a_\nu^1 \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu - \frac{1}{2} a_\mu^2 a_\nu^2 \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu = 1 + i(a_\mu^1 + a_\mu^2) \hat{p}^\mu - \frac{1}{2} a_\mu^1 a_\nu^1 \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu - \frac{1}{2} a_\mu^2 a_\nu^2 \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu - \frac{1}{2} (a_\mu^1 a_\nu^2 + a_\mu^2 a_\nu^1) \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu$$

откуда $a_\mu^1 a_\nu^2 \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu = \frac{1}{2} a_\mu^1 a_\nu^2 (\hat{p}^\mu \hat{p}^\nu + \hat{p}^\nu \hat{p}^\mu)$, а значит $[\hat{p}^\mu, \hat{p}^\nu] = 0$.

Коммутаторы контравариантных компонент генераторов

$$\begin{aligned} [\hat{p}^\mu, \hat{p}^\nu] &= 0, \\ [\hat{p}^\mu, \hat{J}^{\alpha\beta}] &= i(\eta^{\mu\beta} \hat{p}^\alpha - \eta^{\mu\alpha} \hat{p}^\beta) \\ [\hat{J}^{\alpha\beta}, \hat{J}^{\mu\nu}] &= i(\eta^{\alpha\mu} \hat{J}^{\beta\nu} + \eta^{\alpha\nu} \hat{J}^{\mu\beta} - \eta^{\beta\mu} \hat{J}^{\alpha\nu} - \eta^{\beta\nu} \hat{J}^{\mu\alpha}) \end{aligned}$$

(?? пару комментариев про то, что так ловко можно индексы менять)

Алгебра Ли группы Пуанкаре

Как мы уже отмечали, произвольное преобразование из группы Пуанкаре задается набором (Λ, a) , где постоянная матрица с элементами Λ^μ_ν Удовлетворяет условию $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ и a^μ - произвольный постоянный вектор. Закон умножения в группе Пуанкаре имеет вид

$$(\Lambda, a) (\Lambda', a') = (\Lambda \Lambda', \Lambda a' + a)$$

Бесконечно малое преобразование из группы Пуанкаре характеризуется бесконечно малыми параметрами ω^μ_ν и a^μ , причем $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$ и $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$.

Мы будем рассматривать унитарные представления группы Пуанкаре. Пусть $U(\Lambda, a)$ - оператор такого представления. Используя определение представления группы и закон умножения в группе Пуанкаре получим

$$U(\Lambda, a) U(\Lambda', a') = U((\Lambda, a) (\Lambda', a')) = U(\Lambda \Lambda', \Lambda a' + a)$$

Рассмотрим очевидное соотношение $(I, a)(\Lambda, 0) = (\Lambda, a)$. Тогда

$$U(\Lambda, a) = U((I, a)(\Lambda, 0)) = U(I, a)U(\Lambda, 0)$$

Обозначим

$$U(\Lambda, 0) = U(\Lambda)$$

$$U(I, a) = U(a)$$

Тогда из (32) будем иметь

$$U(\Lambda, a) = U(a)U(\Lambda)$$

Подставляя соотношение (35) в соотношение (31) получим

$$U(a)U(\Lambda)U(a')U(\Lambda') = U(a + \Lambda a')U(\Lambda\Lambda')$$

это есть основное соотношение, для ввода коммутационных соотношений в алгебре Ли группы Пуанкаре.

Согласно (33), оператор $U(\Lambda)$ является представлением подгруппы элементов вида $(\Lambda, 0)$ в группе Пуанкаре, то есть представлением группы Лоренца преобразований $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$. В окрестности единичного элемента $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$, поэтому, учитывая связь представлений группы Ли с представлениями ее алгебры Ли, запишем

$$U(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}}$$

Оператор $J_{\mu\nu}$ представляет собой генератор преобразований Лоренца, называемый также генератором Лоренцовских вращений. Поскольку $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, то $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$.

Согласно (34) оператор $U(a)$ является представлением подгруппы элементов вида (I, a) в группе Пуанкаре, то есть трансляций $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$. Учитывая связь представлений группы Ли с представлениями ее алгебры Ли, запишем

$$U(a) = e^{ia^\mu P_\mu}$$

Оператор P_μ представляет собой генератор трансляций.

Таким образом произвольное унитарное представление группы Пуанкаре дается оператором

$$U(\Lambda, a) = e^{ia^\mu P_\mu} e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}}$$

Этот оператор задается десятью параметрами a^μ, ω^μ как и должно быть для десятипараметрической группы Пуанкаре. Наша цель состоит в нахождении коммутационные соотношения для операторов $P_\mu, J_{\mu\nu}$. Для этого мы будем использовать основное равенство (36).

Коммутатор P_μ и P_ν , генераторов сдвигов

а. Подставим в соотношении (36) $\Lambda = \Lambda' = I$, что соответствует $\omega_{\mu\nu} = \omega'_{\mu\nu} = 0$. В этом случае $U(\Lambda) = U(\Lambda') = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ - единичный оператор. Тогда (36) примет вид

$$U(a)U(a') = U(a + a')$$

учитывая явный вид $U(a)$ (38) запишем

$$e^{ia^\mu P_\mu} e^{ia'^\mu P_\mu} = e^{i(a^\mu + a'^\mu)P_\mu}$$

Пусть параметры a^μ и a'^μ являются бесконечно малыми. Тогда во втором порядке из (41) будем иметь

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{1} + ia^\mu P_\mu - \frac{1}{2} a^\mu a^\nu P_\mu P_\nu \right) \left(\mathbf{1} + ia'^\mu P_\mu - \frac{1}{2} a'^\mu a'^\nu P_\mu P_\nu \right) = \\ & = \mathbf{1} + i(a^\mu + a'^\mu) P_\mu - \frac{1}{2} (a^\mu + a'^\mu) (a^\nu + a'^\nu) P_\mu P_\nu \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} & \mathbf{1} + i(a^\mu + a'^\mu) P_\mu - a^\mu a'^\nu P_\mu P_\nu - \frac{1}{2} a^\mu a^\nu P_\mu P_\nu - \frac{1}{2} a'^\mu a'^\nu P_\mu P_\nu = \\ & \mathbf{1} + i(a^\mu + a'^\mu) P_\mu - \frac{1}{2} a^\mu a^\nu P_\mu P_\nu - \frac{1}{2} a'^\mu a'^\nu P_\mu P_\nu - \frac{1}{2} (a^\mu a'^\nu + a'^\mu a^\nu) P_\mu P_\nu \end{aligned}$$

Отсюда

Следовательно

$$a^\mu a'^\nu P_\mu P_\nu = \frac{1}{2} a^\mu a'^\nu (P_\mu P_\nu + P_\nu P_\mu)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

Коммутатор P_μ и $J_{\lambda\sigma}$, генераторов сдвигов и генераторов группы Лоренца

б. Положим в равенстве (36) $a^\mu = 0$, учтем, что $U(0) = \mathbf{1}$. Тогда это равенство примет вид

$$U(\Lambda)U(a')U(\Lambda') = U(\Lambda a')U(\Lambda\Lambda')$$

Положим $\Lambda' = \Lambda^{-1}$ и учтем, что согласно определению представления группы $U(\Lambda^{-1}) = U^{-1}(\Lambda)$. Тогда соотношение из (43) находим

$$U(\Lambda)U(a')U^{-1}(\Lambda) = U(\Lambda a')$$

или

$$e^{ia'^\mu U(\Lambda)P_\mu U^{-1}(\Lambda)} = e^{i\Lambda^\mu{}_\nu a'^\nu P_\mu} = e^{ia'^\mu \Lambda^\nu{}_\mu P_\nu}$$

Отсюда

$$U(\Lambda)P_\mu U^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu P_\nu$$

Обозначим $P'_\mu = U(\Lambda)P_\mu U^{-1}(\Lambda)$. Тогда из соотношения (44)

$$P'_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu P_\nu$$

То есть преобразование $P'_\mu = U(\Lambda)P_\mu U^{-1}(\Lambda)$ индуцирует преобразование генератора P_μ как ковариантного вектора относительно преобразований Лоренца.

Запишем бесконечно-малую форму соотношения (44)

$$\left(\mathbf{1} + \frac{i}{2} \omega^{\lambda\sigma} J_{\lambda\sigma} \right) P_\mu \left(\mathbf{1} - \frac{i}{2} \omega^{\lambda\sigma} J_{\lambda\sigma} \right) = P_\mu + \omega^\nu{}_\mu P_\nu$$

или

$$P_\mu + \frac{i}{2} \omega^{\lambda\sigma} [J_{\lambda\sigma}, P_\mu] = P_\mu + \frac{i}{2} \omega^{\lambda\sigma} (\eta_{\mu\sigma} P_\lambda - \eta_{\mu\lambda} P_\sigma)$$

Отсюда следует

$$[P_\mu, J_{\lambda\sigma}] = i(\eta_{\mu\sigma}P_\lambda - \eta_{\mu\lambda}P_\sigma)$$

Коммутаторы ковекторов (??)

(напишу лучше и проверю, что это так!)

Собирая приведенные выше покомпонентные коммутационные соотношения для генераторов группы Пуанкаре, выпишем в целях полноты изложения эти коммутаторы в ковариантном виде

$$[J_{\mu\nu}, J_{\mu'\nu'}] = -i\hbar \{g_{\mu\mu'}J_{\nu\nu'} - g_{\mu\nu'}J_{\nu\mu'} + g_{\nu\nu'}J_{\mu\mu'} - g_{\nu\mu'}J_{\mu\nu'}\},$$

что можно также установить непосредственно, используя явный вид генераторов $L_{\mu\nu}$. Аналогично,

$$[J_{\mu\nu}, p_\lambda] = -i\hbar \{g_{\mu\lambda}p_\nu - g_{\nu\lambda}p_\mu\}$$

6.2.4 Casimir Operators in the Poincaré Group

Обсудим подробно операторы Казимира в группе Пуанкаре.

Обзор

Операторы Казимира имеют вид:

$$C_1 = P^\mu P_\mu, \\ W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}P^\nu J^{\lambda\sigma} = \frac{1}{3}(P_\nu J_{\alpha\beta} + P_\beta J_{\nu\alpha} + P_\alpha J_{\beta\nu})$$

Найдем первый оператор Казимира.

Вместо его вывода мы проверим, что он таковым является.

Соотношение $[C_1, P_\mu] = 0$ очевидно.

Коммутатор $P^\mu P_\mu$ с $J_{\lambda\sigma}$

$[C_1, J_{\lambda\sigma}] = 0$ можно получить, расписывая по определению в явном виде генератор $J_{\lambda\sigma}$:

$$\begin{aligned} [C_1, J_{\lambda\sigma}] &= P^\mu [P_\mu, J_{\lambda\sigma}] + [P_\mu, J_{\lambda\sigma}] P^\mu = \\ &= i(\eta_{\mu\sigma}P^\mu P_\lambda - \eta_{\mu\lambda}P^\mu P_\sigma + \eta_{\mu\sigma}P_\lambda P^\mu - \eta_{\mu\lambda}P_\sigma P^\mu) = \\ &= i(P_\sigma P_\lambda - P_\lambda P_\sigma + P_\lambda P_\sigma - P_\sigma P_\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Здесь мы подставили $[P_\mu, J_{\lambda\sigma}] = i(\eta_{\mu\sigma}P_\lambda - \eta_{\mu\lambda}P_\sigma)$.

$$\hat{p}^2 = g_{\alpha\beta}\hat{p}^\alpha\hat{p}^\beta.$$

Taking into account (3.10) and (6.131) one can directly show that $\hat{p}^2$ commutes with all momentum operators:

$$[\hat{p}^2, \hat{p}^\alpha]_- = g_{\beta\gamma} [\hat{p}^\beta \hat{p}^\gamma, \hat{p}^\alpha]_- = g_{\beta\gamma} \left\{ \hat{p}^\beta [\hat{p}^\gamma, \hat{p}^\alpha]_- + [\hat{p}^\beta, \hat{p}^\alpha]_- \hat{p}^\gamma \right\} = 0.$$

Furthermore, $\hat{p}^2$ is per construction a Lorentz scalar and, thus, commutes with all generators of the Lorentz algebra $\hat{M}^{\alpha\beta}$ due to (3.10), (6.133), and (6.137):

$$\begin{aligned} [\hat{p}^2, \hat{M}^{\alpha\beta}]_- &= g_{\gamma\delta} [\hat{p}^\gamma \hat{p}^\delta, \hat{M}^{\alpha\beta}]_- = g_{\gamma\delta} \left\{ \hat{p}^\gamma [\hat{p}^\delta, \hat{M}^{\alpha\beta}]_- + [\hat{p}^\gamma, \hat{M}^{\alpha\beta}]_- \hat{p}^\delta \right\} \\ &= ig_{\gamma\delta} \left\{ \hat{p}^\gamma (g^{\alpha\delta}\hat{p}^\beta - g^{\beta\delta}\hat{p}^\alpha) + (g^{\alpha\gamma}\hat{p}^\beta - g^{\beta\gamma}\hat{p}^\alpha) \hat{p}^\delta \right\} = 0. \end{aligned}$$

Оператор Казимира $W^\mu W_\mu$ **Проверка, что $W^\mu W_\mu$ это оператор Казимира**

Проверим, что $W^\mu W_\mu$ является оператором Казимира. Требуется, чтобы $[C_2, P_\mu] = 0$, $[C_2, J_{\mu\nu}] = 0$ и $[C_2, J_{\mu\nu}] = 0$.

(?? про первые 2 содержательно что-то напишу!)

$$\begin{aligned} [W^\tau W_\tau, J_{\mu\nu}] &= W^\tau [W_\tau, J_{\mu\nu}] + [W_\tau, J_{\mu\nu}] W^\tau = \\ &= -i (\eta_{\mu\tau} W^\tau W_\nu - \eta_{\nu\tau} W^\tau W_\mu + \eta_{\mu\tau} W_\nu W^\tau - \eta_{\nu\tau} W_\mu W^\tau) = \\ &= -i (W_\mu W_\nu - W_\nu W_\mu + W_\nu W_\mu - W_\mu W_\nu) = 0 \end{aligned}$$

Таким образом оператор $W^\mu W_\mu$ является оператором Казимира.

6.2.5 Pauli-Lubanski Pseudovector (??)

Обсудим подробно свойства псевдовектора Паули-Любанского. Для краткости будем называть его вектором.

О тензоре спина для псевдовектора Паули-Любанского (???)

(?? потом в другое место это перенесу.)

(???? что нужно знать про тензор спина, чтобы с ним работать!!!)

Пространственная и временная компоненты

Временная компонента

$$\begin{aligned} W^0 &= -\frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} p_\alpha S_{\beta\gamma} = \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} (-p_{\mathbb{E}}^\alpha) \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\alpha'} s_{\mathbb{E}}^{\alpha'} = \\ &= (\mathbf{p}_{\mathbb{E}} \cdot \mathbf{s}_{\mathbb{E}}). \end{aligned}$$

Пространственные компоненты

$$\begin{aligned} W^\alpha &= W_{\mathbb{E}}^\alpha = -\frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{\alpha\nu\lambda\rho} p_\nu S_{\lambda\rho} = \\ &= -\frac{1}{2} (\hat{\epsilon}^{\alpha 0\beta\gamma} p_0 S_{\beta\gamma} + 2\hat{\epsilon}^{\alpha\beta 0\gamma} p_\beta S_{0\gamma}) = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} p_0 \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\alpha'} s_{\mathbb{E}}^{\alpha'} - \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} (-p_{\mathbb{E}}^\beta) \tilde{s}_{\mathbb{E}}^\gamma = \\ &= p_0 s_{\mathbb{E}}^\alpha + (\mathbf{p}_{\mathbb{E}} \times \tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}})^\alpha. \end{aligned}$$

Ковектор Паули-Любанского W_μ **Ковектор Паули-Любанского W_μ в матричной форме (!?!?!?)**

(??? так пока не уверен, какой он???? размер же такой же, как у матрицы спина, да?)

Квадрат вектора Паули-Любанского

W^2 находится как

$$W^2 = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} \delta_{\nu'}^{\nu} & \delta_{\lambda'}^{\nu} & \delta_{\rho'}^{\nu} \\ \delta_{\nu'}^{\lambda} & \delta_{\lambda'}^{\lambda} & \delta_{\rho'}^{\lambda} \\ \delta_{\nu'}^{\rho} & \delta_{\lambda'}^{\rho} & \delta_{\rho'}^{\rho} \end{vmatrix} p_{\nu} p^{\nu'} S_{\lambda\rho} S^{\lambda'\rho'},$$

$$W^2 = -\frac{1}{4} \{ p_{\nu} p^{\nu} S_{\lambda\rho} S^{\lambda\rho} + p_{\nu} p^{\rho} S_{\lambda\rho} S^{\nu\lambda} + p_{\nu} p^{\lambda} S_{\lambda\rho} S^{\rho\nu} - p_{\nu} p^{\rho} S_{\lambda\rho} S^{\lambda\nu} - p_{\nu} p^{\lambda} S_{\lambda\rho} S^{\nu\rho} - p_{\nu} p^{\nu} S_{\lambda\rho} S^{\rho\lambda} \} =$$

$$= -\frac{1}{2} \{ p^2 S^2 - 2 p_{\nu} p^{\lambda} S_{\lambda\rho} S^{\nu\rho} \},$$

где учтена антисимметричность тензора спина и $S^2 = S_{\lambda\rho} S^{\lambda\rho}$.

Коммутаторы W с p, J в 4-мерной форме

Коммутатор P^{μ} с W_{ν}

$$[p^{\mu}, W^{\nu}] = 0,$$

поскольку дифференциальные операторы импульсов коммутируют между собой и с матричными операторами.

(??? тут же эта тема с действиями на разные пространства (!?!?!))

(?? тут ниже просто если W определить через J)

Или другим способом

$$P^{\mu} W_{\mu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} P^{\mu} P^{\nu} J^{\lambda\sigma} = 0$$

Коммутатор P^{μ} с W_{ν}

$$\begin{aligned} [P^{\mu}, W_{\nu}] &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\rho\lambda\sigma} [P^{\mu}, P^{\rho} J^{\lambda\sigma}] = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\rho\lambda\sigma} P^{\rho} [P^{\mu}, J^{\lambda\sigma}] = \\ &= \frac{i}{2} \varepsilon_{\nu\rho\lambda\sigma} P^{\rho} (\eta^{\mu\sigma} P^{\lambda} - \eta^{\mu\lambda} P^{\sigma}) = \\ &= i \varepsilon_{\nu\rho\lambda}^{\mu} P^{\rho} P^{\lambda} = 0 \end{aligned}$$

Коммутатор $J_{\mu\nu}$ с W_τ

$$\begin{aligned}
[J_{\mu\nu}, W_\tau] &= \frac{1}{2} \varepsilon_\tau^{\rho\lambda\sigma} [J_{\mu\nu}, P_\rho J_{\lambda\sigma}] = \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_\tau^{\rho\lambda\sigma} ([J_{\mu\nu}, P_\rho] J_{\lambda\sigma} + P_\rho [J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}]) = \\
&= \frac{i}{2} \varepsilon_\tau^{\rho\lambda\sigma} (-\eta_{\rho\nu} P_\mu J_{\lambda\sigma} + \eta_{\rho\mu} P_\nu J_{\lambda\sigma} + \eta_{\mu\lambda} P_\rho J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} P_\rho J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma} P_\rho J_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda} P_\rho J_{\mu\sigma}) = \\
&= \frac{i}{2} (-\varepsilon_{\tau\nu}^{\lambda\sigma} P_\mu J_{\lambda\sigma} + \varepsilon_{\tau\mu}^{\lambda\sigma} P_\nu J_{\lambda\sigma} - 2\varepsilon_{\tau\mu}^{\lambda\sigma} P_\lambda J_{\nu\sigma} + 2\varepsilon_{\tau\nu}^{\lambda\sigma} P_\lambda J_{\mu\sigma}) = \\
&= \frac{i}{2} (\varepsilon_{\tau\mu}^{\lambda\sigma} (P_\nu J_{\lambda\sigma} - 2P_\lambda J_{\nu\sigma}) - \varepsilon_{\tau\nu}^{\lambda\sigma} (P_\mu J_{\lambda\sigma} - 2P_\lambda J_{\mu\sigma})) = \\
&= \frac{i}{2} (\varepsilon_{\tau\mu}^{\lambda\sigma} (P_\nu J_{\lambda\sigma} - P_\lambda J_{\nu\sigma} + P_\sigma J_{\nu\lambda}) - \varepsilon_{\tau\nu}^{\lambda\sigma} (P_\mu J_{\lambda\sigma} - P_\lambda J_{\mu\sigma} + P_\sigma J_{\mu\lambda})) = \\
&= \frac{i}{2} (\varepsilon_{\tau\mu\lambda\sigma} \eta_{\nu\rho} - \varepsilon_{\tau\mu\rho\sigma} \eta_{\nu\lambda} - \varepsilon_{\tau\mu\lambda\rho} \eta_{\nu\sigma} - \varepsilon_{\tau\nu\lambda\sigma} \eta_{\mu\rho} + \varepsilon_{\tau\nu\rho\sigma} \eta_{\mu\lambda} + \varepsilon_{\tau\nu\lambda\rho} \eta_{\mu\sigma}) P^{[\rho} J^{\lambda\sigma]}
\end{aligned}$$

(?? Тут в первом переходе мы добавили и вычли члены, так что суммарно эти два коммутатора являются одним коммутатором, который был.)

(!?!?!?!? проделаю это еще раз!!!! тут много может быть вопросов еще!!!)

А есть свойство $P^{[\rho} J^{\lambda\sigma]} = -\frac{1}{3} W_\omega \varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma}$, поэтому получим

$$\begin{aligned}
[J_{\mu\nu}, W_\tau] &= -\frac{i}{6} \varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma} (\varepsilon_{\tau\mu\lambda\sigma} \eta_{\nu\rho} - \varepsilon_{\tau\mu\rho\sigma} \eta_{\nu\lambda} - \varepsilon_{\tau\mu\lambda\rho} \eta_{\nu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)) W_\omega = \\
&= \frac{i}{3} 3 (\eta_{\nu\rho} (\delta_\tau^\omega \delta_\mu^\rho - \delta_\mu^\omega \delta_\tau^\rho) - \eta_{\mu\rho} (\delta_\tau^\omega \delta_\nu^\rho - \delta_\nu^\omega \delta_\tau^\rho)) W_\omega = \\
&= i (\eta_{\mu\nu} W_\tau - \eta_{\nu\tau} W_\mu - \eta_{\mu\nu} W_\tau + \eta_{\mu\tau} W_\nu) = \\
&= i (\eta_{\mu\tau} W_\nu - \eta_{\nu\tau} W_\mu)
\end{aligned}$$

Коммутатор двух W_μ

$$\begin{aligned}
[W_\mu, W_\nu] &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma} [W_\mu, P^\lambda J^{\rho\sigma}] = \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma} P^\lambda [W_\mu, J^{\rho\sigma}] = \\
&= -\frac{i}{2} \varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma} P^\lambda (\delta_\mu^\rho W^\sigma - \delta_\mu^\sigma W^\rho) = \\
&= -i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} P^\lambda W^\sigma
\end{aligned}$$

Коммутаторы пространственных и временных компонент W с p, J

$$\begin{aligned}
[\mathbf{j}_E^\alpha, \mathbf{W}_E^\beta] &= i \epsilon_E^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{W}_E^\gamma, \\
[\mathbf{j}_E^\alpha, W_0] &= 0, \\
[\tilde{\mathbf{j}}_E^\alpha, \mathbf{W}_E^\beta] &= i \delta_E^{\alpha\beta} W_0, \\
[\tilde{\mathbf{j}}_E^\alpha, W_0] &= i W_E^\alpha.
\end{aligned}$$

Докажем это, пользуясь известными (?? добавлю их сюда) коммутационными соотношениями для $\mathbf{j}_E = \mathbf{l}_E + \mathbf{s}_E$ и $\tilde{\mathbf{j}}_E = \tilde{\mathbf{l}}_E + \tilde{\mathbf{s}}_E$ друг с другом и с компонентами импульса. Для упрощения выкладок положим $\hbar = 1$.

Коммутатор $W_{\mathbb{E}}^0$ с $j_{\mathbb{E}}^{\alpha}$, генератором вращений

Для генераторов поворотов

$$[j_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_0] = [l_{\mathbb{E}}^{\alpha}, p_0] s_{\mathbb{E}}^{\beta} + p_{\mathbb{E}}^{\beta} [s_{\mathbb{E}}^{\alpha}, s_{\mathbb{E}}^{\beta}] = i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} p_{\mathbb{E}}^{\gamma} s_{\mathbb{E}}^{\beta} + i p_{\mathbb{E}}^{\beta} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} s_{\mathbb{E}}^{\gamma} = 0,$$

а стало быть, временная компонента 4-вектора Паули-Любанского является трехмерным скаляром.

Коммутатор $W_{\mathbb{E}}^{\beta}$ с $j_{\mathbb{E}}^{\alpha}$, генератором вращений

Вычислим коммутатор слагаемых в $j_{\mathbb{E}}^{\alpha}$:

$$\begin{aligned} [l_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_{\mathbb{E}}^{\beta}] &= [l_{\mathbb{E}}^{\alpha}, p_0] s_{\mathbb{E}}^{\beta} + \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma'} [l_{\mathbb{E}}^{\alpha}, p_{\mathbb{E}}^{\alpha'}] \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma'} = \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma'} i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\alpha'\gamma} p_{\mathbb{E}}^{\gamma} \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma'} = i\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta} (p_{\mathbb{E}} \cdot \tilde{s}_{\mathbb{E}}) - i p_{\mathbb{E}}^{\beta} \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \\ [s_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_{\mathbb{E}}^{\beta}] &= p_0 [s_{\mathbb{E}}^{\alpha}, s_{\mathbb{E}}^{\beta}] + \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma'} p_{\mathbb{E}}^{\alpha'} [s_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma'}] = i p_0 \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} s_{\mathbb{E}}^{\gamma} + p_{\mathbb{E}}^{\alpha'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma'} i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\gamma'\beta'} \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\beta'}, \end{aligned}$$

где

$$i p_{\mathbb{E}}^{\alpha'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\gamma'\beta'} \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\beta'} = i p_{\mathbb{E}}^{\alpha'} \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\beta'} \left(-\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta} \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha'\beta'} + \delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\alpha'} \delta_{\mathbb{E}}^{\beta\beta'} \right) = -i\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta} (p_{\mathbb{E}} \cdot \tilde{s}_{\mathbb{E}}) + i p_{\mathbb{E}}^{\alpha} \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\beta}$$

Приведение подобных членов дает

$$[j_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_{\mathbb{E}}^{\beta}] = i p_0 \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} s_{\mathbb{E}}^{\gamma} + i p_{\mathbb{E}}^{\alpha} \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\beta} - i p_{\mathbb{E}}^{\beta} \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha} = i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} (p_0 s_{\mathbb{E}}^{\gamma} + (p_{\mathbb{E}} \times \tilde{s}_{\mathbb{E}})^{\gamma}) = i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} W_{\mathbb{E}}^{\gamma},$$

и $W_{\mathbb{E}}^{\beta}$ преобразуется при поворотах как 3-мерный вектор.

Коммутатор $W_{\mathbb{E}}^0$ с $\tilde{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}$, генератором бустов

Учтем теперь, что пространственные части генераторов $l_{\mathbb{E}}$ и $\tilde{l}_{\mathbb{E}}$ коммутируют с матричными вкладами $s_{\mathbb{E}}$ и $\tilde{s}_{\mathbb{E}}$. Тогда сначала найдем

$$[\tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W^0] = [\tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, (p_{\mathbb{E}} \cdot s_{\mathbb{E}})] = [\tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, p_{\mathbb{E}}^{\beta}] s_{\mathbb{E}}^{\beta} = i\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta} p_0 s_{\mathbb{E}}^{\beta} = i p_0 s_{\mathbb{E}}^{\alpha},$$

а потом

$$[\tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W^0] = [\tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, (p_{\mathbb{E}} \cdot s_{\mathbb{E}})] = p_{\mathbb{E}}^{\beta} [\tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, s_{\mathbb{E}}^{\beta}] = p_{\mathbb{E}}^{\beta} i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma} = i (p_{\mathbb{E}} \times \tilde{s}_{\mathbb{E}})^{\alpha},$$

и после сложения этих вкладов устанавливаем

$$[\tilde{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_0] = i W_{\mathbb{E}}^{\alpha}.$$

Коммутатор $W_{\mathbb{E}}^{\beta}$ с $\tilde{j}_{\mathbb{E}}^{\alpha}$, генератором бустов

Найдем (??)

$$\begin{aligned} [\tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_{\mathbb{E}}^{\beta}] &= [\tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, p_0] s_{\mathbb{E}}^{\beta} + [\tilde{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, p_{\mathbb{E}}^{\alpha'}] \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma} \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma} = \\ &= i p_{\mathbb{E}}^{\alpha} s_{\mathbb{E}}^{\beta} + i\delta_{\mathbb{E}}^{\alpha\alpha'} p_0 \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma} \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma} = \\ &= i p_{\mathbb{E}}^{\alpha} s_{\mathbb{E}}^{\beta} - i p_0 \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma} \\ [\tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, W_{\mathbb{E}}^{\beta}] &= p_0 [\tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, s_{\mathbb{E}}^{\beta}] + p_{\mathbb{E}}^{\alpha'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma} [\tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma}] = \\ &= i p_0 \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \tilde{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma} + p_{\mathbb{E}}^{\alpha'} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha'\gamma} (-i) \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\gamma\beta'} s_{\mathbb{E}}^{\beta'}. \end{aligned}$$

Здесь $-\mathbf{p}_E^{\alpha'} \epsilon_E^{\beta\alpha'\gamma} i \epsilon_E^{\alpha\gamma\beta'} \mathbf{s}_E^{\beta'} = i \mathbf{p}_E^{\alpha'} \mathbf{s}_E^{\beta'} \left(\delta_E^{\alpha\beta} \delta_E^{\alpha'\beta'} - \delta_E^{\beta\beta'} \delta_E^{\alpha\alpha'} \right) = i \delta_E^{\alpha\beta} (\mathbf{p}_E \cdot \mathbf{s}_E) - i \mathbf{p}_E^\alpha \mathbf{s}_E^\beta$, поэтому после сложения этих вкладов найдем

$$\left[\tilde{\mathbf{j}}_E^\alpha, W_E^\beta \right] = i \delta_E^{\alpha\beta} W^0.$$

Итак, мы установили, что W^μ при лоренцевых бустах преобразуется как 4-вектор, а значит, квадрат 4-вектора - это инвариант.

(?? подумаю про это потом ещё.)

Как догадаться до псевдовектора Паули-Любанского

(??? нужно лучше изучить преобразования дуальности!!!)

Просто ищем казимиров в виде простейших комбинаций генераторов, не находим - ищем в виде простейших комбинаций генераторов и дуальных генераторов, там и находим казимиров. Мораль в том, что дуальное преобразование важно.

Другие свойства псевдовектора Паули-Любанского

(?? также укажу, где они применяются! если бы нигде не применялись, то не писал бы их!)

Индексы псевдовектора Паули-Любанского (?!?!?!?!?)

(там был и остается все еще вопрос про них, как так, что мы их не пишем, но они подразумеваются?)

Выражение для $W_\omega \varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma}$

$$\begin{aligned} W_\omega \varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma} \varepsilon_{\omega\mu\nu\kappa} P^{[\mu} J^{\nu\kappa]} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\delta_\omega^\rho \delta_\nu^\lambda \delta_\kappa^\sigma - \delta_\omega^\rho \delta_\kappa^\lambda \delta_\nu^\sigma - \delta_\omega^\lambda \delta_\nu^\rho \delta_\kappa^\sigma + \delta_\omega^\lambda \delta_\kappa^\rho \delta_\nu^\sigma + \delta_\omega^\sigma \delta_\nu^\rho \delta_\kappa^\lambda - \delta_\omega^\sigma \delta_\kappa^\rho \delta_\nu^\lambda \right) P^{[\mu} J^{\nu\kappa]} = \\ &= -3 P^{[\rho} J^{\lambda\sigma]} \end{aligned}$$

Отсюда

$$P^{[\rho} J^{\lambda\sigma]} = -\frac{1}{3} W_\omega \varepsilon^{\omega\rho\lambda\sigma}$$

Оно где-то в преобразованиях коммутаторов пригождается.

Lorentz covariance of Pauli-Lubanski pseudo-vector (????)

(??? сделаю это когда-то)

Since you're interested in the transformation law of W^μ under the Lorentz group, let us set $a^\mu = 0$ in your equations. Also, notice that you've got the first one wrong; it should read

$$U(\Lambda) P^\mu U(\Lambda)^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu P^\nu$$

Using the latter together with the transformation law for $J^{\mu\nu}$, we write

$$\begin{aligned} U(\Lambda) W_\mu U(\Lambda)^{-1} &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} U(\Lambda) J^{\nu\lambda} P^\rho U(\Lambda)^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} U(\Lambda) J^{\nu\lambda} U(\Lambda)^{-1} U(\Lambda) P^\rho U(\Lambda)^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} (\Lambda^{-1})^\nu_\tau (\Lambda^{-1})^\lambda_\sigma (\Lambda^{-1})^\rho_\alpha J^{\tau\sigma} P^\alpha \end{aligned}$$

Now, observe that from the definition of the determinant

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} (\Lambda^{-1})^\mu_\beta (\Lambda^{-1})^\nu_\tau (\Lambda^{-1})^\lambda_\sigma (\Lambda^{-1})^\rho_\alpha = \det (\Lambda^{-1}) \epsilon_{\beta\tau\sigma\alpha}$$

follows the equality

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} (\Lambda^{-1})^\nu_\tau (\Lambda^{-1})^\lambda_\sigma (\Lambda^{-1})^\rho_\alpha = \det (\Lambda^{-1}) \Lambda^\beta_\mu \epsilon_{\beta\tau\sigma\alpha}$$

Therefore

$$U(\Lambda)W_\mu U(\Lambda)^{-1} = \det (\Lambda^{-1}) \Lambda^\beta_\mu \frac{1}{2} \epsilon_{\beta\tau\sigma\alpha} J^{\tau\sigma} P^\alpha = \det (\Lambda^{-1}) \Lambda^\beta_\mu W_\beta$$

Rearranging the indices and using the defining property of the Λ 's, $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, we find

$$U(\Lambda)W^\mu U(\Lambda)^{-1} = \det (\Lambda^{-1}) (\Lambda^{-1})^\mu_\beta W^\beta$$

Since $\det (\Lambda^{-1}) = \pm 1$ depending on the Lorentz transformation, we find

$$U(\Lambda)W^\mu U(\Lambda)^{-1} = \pm (\Lambda^{-1})^\mu_\beta W^\beta$$

which is the transformation law for a pseudo-vector.

6.2.6 Transformations of Vectors, Tensors, Spin-Tensors in the Poincaré Group

Преобразования глобальных векторов по Киселеву (?)

Наконец, рассмотрим преобразования глобальных, не зависящих от координат, векторов. По определению закон преобразования векторов такой же, как и для координат. Выше мы уже записывали эти преобразования в случае поворотов в матричной форме (генераторы l_α). Нетрудно вывести общий вид матриц-генераторов в векторном представлении, включая бусты. Если 4-вектор A^λ не является координатой, то соответствующие матрицы поворота обозначаются символом $S_{\mu\nu}$, так что инфинитезимальные преобразования²⁶

$$A'^\rho = \left(1 - \frac{i}{2} S_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \right)_\lambda^\rho A^\lambda$$

где матрицы $S_{\mu\nu}$ равны:

$$(S_{\mu\nu})_\lambda^\rho = i \{ \delta_\mu^\rho g_{\nu\lambda} - \delta_\nu^\rho g_{\mu\lambda} \}$$

Действительно, для бустов вдоль оси x имеем $\omega^{\mu\nu} \rightarrow \omega^{01}$ и

$$(S_{01})_\lambda^\rho = i \{ \delta_0^\rho g_{1\lambda} - \delta_1^\rho g_{0\lambda} \}$$

или в виде матрицы 2×2 с индексами 0,1 (другие компоненты не преобразуются)

$$S_{01} = K_x = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

что, как легко видеть, и получается при дифференцировании матрицы $\Lambda(v)$ по v при $v \rightarrow 0$. Аналогично, удовлетворяются и матричные представления для $l_\alpha = s_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\beta\gamma}$. Приведенные выражения для генераторов группы Лоренца в векторном представлении $(S_{\mu\nu})_\lambda^\rho$ называются тензором спина векторной частицы.

6.2.7 Proofs that Poincaré Group Is Useful

(one can think "oh, it is too mathematical and useless, why should I study it?" here, I'll collect the results of this approach)

6.2.8 Glossary of Notations in the Poincaré Group

Еще раз приведем обозначения уже известных нам объектов. Сигнатура метрики Минковского далее везде равна $(+1, -1, -1, -1)$, Также обозначено $\delta_L \mathbf{A} := \mathbf{A}'(\mathbf{r}') - \mathbf{A}'(\mathbf{r})$, и $\delta_S \mathbf{A}$ - изменение за счет спиновой части вращений.

Обозначения для вращений в 3D пространстве

$$\Lambda = \exp(-i\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi})$$

$$\delta_S r_{\mathbb{E}}^{\beta} = -i(\mathbf{s}_{\mathbb{E}} \cdot \boldsymbol{\phi}_{\mathbb{E}})^{\beta\gamma} r_{\mathbb{E}}^{\gamma}$$

$$\text{где } \left(s_{\mathbb{E}}^{\beta}\right)_{\mathbb{E}}^{\alpha\gamma} = -i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha\gamma}.$$

$$\delta_S A^{\beta} = -i(\mathbf{s}_{\mathbb{E}} \cdot \boldsymbol{\phi}_{\mathbb{E}})^{\beta\gamma} A^{\gamma} = -i(s_{\mathbb{E}}^{\alpha})_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma} \phi_{\mathbb{E}}^{\alpha} A_{\mathbb{E}}^{\gamma},$$

$$\delta_L A^{\beta} = i(\vec{l} \cdot \vec{\phi}) A^{\beta}(r)$$

$$\text{где } l_{\alpha} = \frac{i}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(r^{\beta}\partial_{\gamma} - r^{\gamma}\partial_{\beta}), \text{ или иначе } l_{\mathbb{E}}^{\beta} = -i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma}r_{\mathbb{E}}^{\gamma}\partial_{\alpha}$$

$$\mathcal{A}_G(\mathbf{r}) = \left(1 - i\hat{\mathbf{j}}_{\gamma}\phi_{\gamma}\right)\mathcal{A}(\mathbf{r}),$$

$$\text{где } \hat{\mathbf{j}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{l} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{s} \cong \mathbf{l} + \mathbf{s}.$$

Обозначения для алгебры 3D вращений

$$\left(s_{\mathbb{E}}^{\beta}\right)_{\mathbb{E}}^{\alpha\gamma} = -i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\alpha\gamma},$$

$$s_{\mathbb{E}}^x = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{\mathbb{E}}^y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{\mathbb{E}}^z = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{\boldsymbol{\ell}} = \hbar \hat{\mathbf{l}} = -i\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}$$

$$\text{где } \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$$

$$\mathbf{j} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{l} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{s} \cong \mathbf{l} + \mathbf{s}$$

$$\mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} \hbar \mathbf{j} \quad \mathbf{L} \stackrel{\text{def}}{=} \hbar \mathbf{l} \quad \mathbf{S} \stackrel{\text{def}}{=} \hbar \mathbf{s}$$

$$\left[s_{\mathbb{E}}^{\alpha}, s_{\mathbb{E}}^{\beta}\right] = i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} s_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad \left[s_{\mathbb{E}}^2, s_{\mathbb{E}}^{\alpha}\right] = 0$$

$$\left[l_{\mathbb{E}}^{\alpha}, l_{\mathbb{E}}^{\beta}\right] = i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} l_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad \left[l_{\mathbb{E}}^2, l_{\mathbb{E}}^{\alpha}\right] = 0$$

$$\left[l_{\mathbb{E}}^{\alpha}, s_{\mathbb{E}}^{\beta}\right] \equiv 0$$

$$s_{\pm} = s_x \pm i s_y, \quad s_+^{\dagger} = s_-, \quad s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Переход из 3D пространства в (3+1)D пространство

Индексы:

$$x_{\alpha} = g_{\alpha\beta} \mathbf{r}_{\mathbb{E}}^{\beta} = -\mathbf{r}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \quad x^{\alpha} = g^{\alpha\gamma} x_{\gamma} = r_{\mathbb{E}}^{\alpha}.$$

$$\phi_{\beta} = -\phi_{\mathbb{E}}^{\beta}$$

$$A_{\mathbb{E}}^{\gamma} = g^{\gamma\gamma'} A_{\gamma'} = -A_{\gamma}$$

Параметры:

$$\omega^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} -\hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \phi_{\gamma},$$

$$\omega^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \phi_{\mathbb{E}}^{\gamma}, \quad \omega^{\beta\alpha} = -\omega^{\alpha\beta}, \quad \phi_{\mathbb{E}}^{\gamma} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \omega^{\alpha\beta}.$$

Вращение спиновым моментом

$$\delta r_{\mathbb{E}}^{\alpha} = \delta x^{\alpha} = \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \phi_{\beta} x_{\gamma}$$

$$(\mathbf{s}^{\alpha})^{\mu\nu} = i \hat{\epsilon}^{0\alpha\mu\nu}$$

$$\left\{ (\mathbf{s}_{\mathbb{E}})^{\beta\gamma} \cdot \boldsymbol{\phi}_{\mathbb{E}} \right\} A_{\mathbb{E}}^{\gamma} = \frac{1}{2} (\mathbf{s}_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma} \omega^{\beta'\gamma'} A_{\gamma},$$

Вращение орбитальным моментом

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}') = \mathbf{A}'(\mathbf{r}) + \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \phi_{\beta} x_{\gamma} \partial_{\alpha} \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

$$l^{\alpha} = \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha} = \frac{i}{2} \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \{x_{\beta} \partial_{\gamma} - x_{\gamma} \partial_{\beta}\} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \ell_{\beta\gamma}.$$

$$\{\mathbf{l}_{\mathbb{E}} \cdot \boldsymbol{\phi}_{\mathbb{E}}\} A_{\mathbb{E}}^{\beta} = \frac{1}{2} \left(\hat{\ell}_{\beta'\gamma'} \right)^{\beta\gamma} \omega^{\beta'\gamma'} A_{\gamma},$$

$$\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\phi} = \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\gamma} \phi_{\mathbb{E}}^{\gamma} = -l^{\gamma} \phi_{\gamma} = -\frac{1}{2} \ell_{\alpha\beta} \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \phi_{\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \ell_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta},$$

$$\mathcal{A}_G(\mathbf{r}) = \left(1 - i \hat{j}_{\gamma} \phi_{\gamma} \right) \mathcal{A}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad A'^{\beta}(\vec{r}) = A^{\beta}(\vec{r}) - \frac{i}{2} (\hat{l}_{\beta'\gamma'} + \hat{s}_{\beta'\gamma'})_{\gamma}^{\beta} \omega^{\beta'\gamma'} A^{\gamma}(\vec{r})$$

Обозначения для вращений в (3+1)D пространстве

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \omega^{\alpha\beta} x_{\beta}$$

$$\delta_S A^{\beta} = \omega^{\beta\gamma} A_{\gamma} = -\frac{i}{2} (\mathbf{s}_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma} \omega^{\beta'\gamma'} A_{\gamma}$$

$$\delta_L A^{\beta} = \frac{i}{2} l_{\alpha'\beta'} \omega^{\alpha'\beta'} A^{\beta}(r)$$

$$A'^{\beta}(x) = A^{\beta}(x) - \frac{i}{2} \omega^{\beta'\gamma'} (j_{p'\gamma'})^{\beta\gamma} A_{\gamma}(x) \equiv A^{\beta}(\mathbf{r}) - \frac{i}{2} (\mathbf{s}_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma} \omega^{\beta'\gamma'} A_{\gamma} - \frac{i}{2} \ell_{\beta'\gamma'} \omega^{\beta'\gamma'} A^{\beta}(\mathbf{r})$$

Обозначения для алгебры (3+1)D вращений

$$(\mathfrak{s}_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{i} \left\{ \delta_{\beta'}^{\beta} \delta_{\gamma'}^{\gamma} - \delta_{\gamma'}^{\beta} \delta_{\beta'}^{\gamma} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\hbar} (S_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma}.$$

$$L_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{i} \hbar \{x_{\alpha} \partial_{\beta} - x_{\beta} \partial_{\alpha}\} = \{x_{\alpha} p_{\beta} - x_{\beta} p_{\alpha}\}, \quad p_{\alpha} \equiv \mathfrak{i} \hbar \partial_{\alpha},$$

$$(L_{\mu\nu})^{\mu'\nu'} = \mathfrak{i} \hbar g^{\mu'\nu'} (x_{\mu} \partial_{\nu} - x_{\nu} \partial_{\mu}),$$

$$\ell_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{i} \{x_{\alpha} \partial_{\beta} - x_{\beta} \partial_{\alpha}\} = \frac{1}{\hbar} L_{\alpha\beta},$$

Обозначения для бустов

$$\Lambda(\vartheta) = \exp\{-\mathfrak{i} \tilde{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\vartheta}\} = \text{ch } \vartheta - \sigma_1 \text{sh } \vartheta = \begin{pmatrix} \text{ch } \vartheta & -\text{sh } \vartheta \\ -\text{sh } \vartheta & \text{ch } \vartheta \end{pmatrix},$$

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \{\delta_0^{\mu} \delta_{\alpha}^{\nu} - \delta_0^{\nu} \delta_{\alpha}^{\mu}\} \vartheta^{\alpha} x_{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} x^{\mu} - \mathfrak{i} \{(\tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}})^{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_{\mathbb{E}}\} x_{\nu},$$

$$A'^{\mu}(x') = \{\mathbb{1} - \mathfrak{i}(\tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_{\mathbb{E}})\}^{\mu\nu} A_{\nu}(x) = \left\{ \mathbb{1} - \frac{\mathfrak{i}}{2} \omega^{\rho\lambda} \mathfrak{s}_{\rho\lambda} \right\}^{\mu\nu} A_{\nu}(x)$$

$$A'^{\mu}(x) = \left\{ \mathbb{1} - \frac{\mathfrak{i}}{2} \omega^{\rho\lambda} (\hat{\ell}_{\rho\lambda} + \hat{\mathfrak{s}}_{\rho\lambda}) \right\}^{\mu\nu} A_{\nu}(x)$$

Обозначения для алгебры бустов

$$\vartheta_{\mathbb{E}}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \omega^{0\alpha} = -\omega^{\alpha 0},$$

Также обозначается как

$$\tilde{\mathbf{s}} \mapsto \mathcal{K}$$

$$(\tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha})^{\mu\nu} = -(\tilde{s}_{\alpha})^{\mu\nu} = \mathfrak{i} \{\delta_0^{\mu} \delta_{\alpha}^{\nu} - \delta_0^{\nu} \delta_{\alpha}^{\mu}\}$$

$$\mathfrak{s}_{0\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} -\tilde{s}_{\alpha} = \tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\hbar} S_{0\alpha},$$

$$\ell_{0\alpha} = -\ell_{\alpha 0} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\ell}_{\mathbb{E}}^{\alpha} = \mathfrak{i} (x_0 \partial_{\alpha} - x_{\alpha} \partial_0).$$

$$\tilde{\ell}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \vartheta_{\mathbb{E}}^{\alpha} = \frac{1}{2} (\ell_{0\alpha} \omega^{0\alpha} + \ell_{\alpha 0} \omega^{\alpha 0}).$$

$$\hbar \tilde{\mathbf{j}}_{\mathbb{R}}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{L}_{0\alpha} + \hat{S}_{0\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \hbar \tilde{\ell}_{\mathbb{R}}^{\alpha} + \hbar \tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha} = -\hbar \tilde{\mathbf{j}}_{\alpha}$$

$$\tilde{\mathbf{j}}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \mapsto \frac{1}{\hbar} L_{0\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \tilde{\mathbf{j}}_{\mathbb{E}} \mapsto \mathfrak{i} \left(ct \boldsymbol{\nabla} + \frac{\mathbf{r}}{c} \partial_t \right) = \tilde{\ell}_{\mathbb{E}}^{\alpha}$$

$$\left[\tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{\mathbf{s}}_{\mathbb{E}}^{\beta} \right] = -\mathfrak{i} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^{\gamma}$$

$$[\mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\beta}] = -i\epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\gamma}.$$

Дуальность:

$$\tilde{\ell}^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\rho} \ell_{\lambda\rho}.$$

$$\ell_{0\alpha} = \tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \quad \ell_{\beta\gamma} = \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\alpha} \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha},$$

$$\tilde{\ell}^{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{\beta\gamma 0\alpha} 2\tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\alpha} = \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\alpha} \tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\alpha},$$

$$\tilde{\ell}^{0\alpha} = \frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\alpha'} \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha'} = \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}.$$

$$\ell_{\mu\nu} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\ell}_{\mu\nu}, \quad \mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \quad \tilde{\mathbf{l}}_{\mathbb{E}}^{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{D}} -\mathbf{l}_{\mathbb{E}}^{\alpha}.$$

Обозначения для группы $SO(3, 1)$, учитывающее вращения и бусты

$$\Lambda = \exp\{-i(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi} + \tilde{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\vartheta})\}$$

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu\nu} x_{\nu}$$

$$A^{\mu'}(x) = \left\{ g^{\mu'\nu'} - \frac{i}{2\hbar} J_{\mu\nu}^{\mu'\nu'} \omega^{\mu\nu} \right\} A_{\nu'}(x) = \left\{ g^{\mu'\nu'} - \frac{i}{2} j_{\mu\nu}^{\mu'\nu'} \omega^{\mu\nu} \right\} A_{\nu'}(x)$$

$$J_{\mu\nu} = \hat{L}_{\mu\nu} + \hat{S}_{\mu\nu} = \hbar j_{\mu\nu}$$

$$(L_{\mu\nu})^{\mu'\nu'} = i\hbar g^{\mu'\nu'} (x_{\mu} \partial_{\nu} - x_{\nu} \partial_{\mu}), \quad (S_{\mu\nu})^{\mu'\nu'} = i\hbar \left\{ \delta_{\mu}^{\mu'} \delta_{\nu}^{\nu'} - \delta_{\nu}^{\mu'} \delta_{\mu}^{\nu'} \right\}$$

Напоминаю, что ранее мы вывели, что:

$$\delta t^{\mu}(x) = \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} (J_{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} t^{\nu}$$

где

$$\begin{aligned} (J_{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} &= (L_{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} + (S_{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} \\ (L_{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} &= i\delta^{\mu}_{\nu} (\eta_{\beta\lambda} x^{\lambda} \partial_{\alpha} - \eta_{\alpha\lambda} x^{\lambda} \partial_{\beta}) \\ (S_{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} &= i(\delta^{\mu}_{\beta} \eta_{\alpha\nu} - \delta^{\mu}_{\alpha} \eta_{\beta\nu}) \end{aligned}$$

Обозначения для алгебры $\mathfrak{so}(3, 1)$, учитывающей вращения и бусты

$$\frac{1}{2} \mathfrak{s}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi} + \tilde{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\vartheta}$$

Спиновая часть:

$$(\mathfrak{s}_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} i \left\{ \delta_{\beta'}^{\beta} \delta_{\gamma'}^{\gamma} - \delta_{\gamma'}^{\beta} \delta_{\beta'}^{\gamma} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\hbar} (S_{\beta'\gamma'})^{\beta\gamma}.$$

$$(S_{\rho\lambda})^{\mu\nu} = i\hbar \left\{ \delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\lambda}^{\nu} - \delta_{\rho}^{\nu} \delta_{\lambda}^{\mu} \right\}$$

$$S_{\mu\nu} = \hbar \mathfrak{s}_{\mu\nu}$$

$$\mathfrak{s}_{\mu\nu} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^x & \tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^y & \tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^z \\ -\tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^x & 0 & \mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^z & -\mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^y \\ -\tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^y & -\mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^z & 0 & \mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^x \\ -\tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^z & \mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^y & -\mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^\alpha = \mathfrak{s}_{0\alpha}, \quad \mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\alpha} \mathfrak{s}_{\beta\gamma}.$$

$$(\mathfrak{s}_{\beta'\gamma'})_\gamma^\beta \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{i} \left\{ \delta_{\beta'}^\beta \delta_{\gamma'}^{\gamma_1} - \delta_{\gamma'}^\beta \delta_{\beta'}^{\gamma_1} \right\} g_{\gamma_1\gamma} = \mathfrak{i} \left\{ \delta_{\beta'}^\beta g_{\gamma\gamma'} - \delta_{\gamma'}^\beta g_{\gamma\beta'} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\hbar} (S_{\beta'\gamma'})_\gamma^\beta,$$

$$(\hat{\mathfrak{s}}_{\beta'\gamma'})_\gamma^\beta \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1} \otimes (\mathfrak{s}_{\beta'\gamma'})_\gamma^\beta.$$

Орбитальная часть:

$$L_{\rho\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \{x_\rho p_\lambda - x_\lambda p_\rho\} \stackrel{\text{def}}{=} \hbar \ell_{\rho\lambda}, \quad p_\lambda \equiv \mathfrak{i} \hbar \partial_\lambda, \quad \left(\hat{\ell}_{\rho\lambda} \right)^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \ell_{\rho\lambda} \otimes g^{\mu\nu}.$$

$$\ell_{\mu\nu} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \tilde{l}_{\mathbb{E}}^x & \tilde{l}_{\mathbb{E}}^y & \tilde{l}_{\mathbb{E}}^z \\ -\tilde{l}_{\mathbb{E}}^x & 0 & l_{\mathbb{E}}^z & -l_{\mathbb{E}}^y \\ -\tilde{l}_{\mathbb{E}}^y & -l_{\mathbb{E}}^z & 0 & l_{\mathbb{E}}^x \\ -\tilde{l}_{\mathbb{E}}^z & l_{\mathbb{E}}^y & -l_{\mathbb{E}}^x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\hat{\ell}_{\beta'\gamma'} \right)_\gamma^\beta \stackrel{\text{def}}{=} \ell_{\beta'\gamma'} \otimes \mathbb{1}_\gamma^\beta,$$

Полный момент:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\mu'\nu'}] = -\mathfrak{i} \hbar \{g_{\mu\mu'} J_{\nu\nu'} - g_{\mu\nu'} J_{\nu\mu'} + g_{\nu\nu'} J_{\mu\mu'} - g_{\nu\mu'} J_{\mu\nu'}\},$$

$$(\mathfrak{j}_{\beta'\gamma'})_\gamma^\beta \stackrel{\text{def}}{=} \left(\hat{\ell}_{\beta'\gamma'} \right)_\gamma^\beta + (\hat{\mathfrak{s}}_{\beta'\gamma'})_\gamma^\beta,$$

$$\begin{aligned} [\mathfrak{j}_{\mathbb{E}}^\alpha, \mathfrak{j}_{\mathbb{E}}^\beta] &= +\mathfrak{i} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathfrak{j}_{\mathbb{E}}^\gamma, \\ [\mathfrak{j}_{\mathbb{E}}^\alpha, \tilde{\mathfrak{j}}_{\mathbb{E}}^\beta] &= +\mathfrak{i} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \tilde{\mathfrak{j}}_\gamma^\beta, \\ [\tilde{\mathfrak{j}}_{\mathbb{E}}^\alpha, \tilde{\mathfrak{j}}_{\mathbb{E}}^\beta] &= -\mathfrak{i} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathfrak{j}_{\mathbb{E}}^\gamma \end{aligned}$$

или по орбитальному и спиновому моментам:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^\alpha, \mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^\beta] &= +\mathfrak{i} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^\gamma & [l_{\mathbb{E}}^\alpha, l_{\mathbb{E}}^\beta] &= +\mathfrak{i} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} l_{\mathbb{E}}^\gamma, \\ [\mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^\alpha, \tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^\beta] &= +\mathfrak{i} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \tilde{\mathfrak{s}}_\gamma^\beta & [l_{\mathbb{E}}^\alpha, \tilde{l}_{\mathbb{E}}^\beta] &= +\mathfrak{i} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} l_\gamma^\beta, \\ [\tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^\alpha, \tilde{\mathfrak{s}}_{\mathbb{E}}^\beta] &= -\mathfrak{i} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} \mathfrak{s}_{\mathbb{E}}^\gamma & [\tilde{l}_{\mathbb{E}}^\alpha, \tilde{l}_{\mathbb{E}}^\beta] &= -\mathfrak{i} \epsilon_{\mathbb{E}}^{\alpha\beta\gamma} l_{\mathbb{E}}^\gamma. \end{aligned}$$

Обозначения в подалгебрах алгебры $\mathfrak{so}(3, 1)$

$$\mathfrak{s}^\uparrow = \frac{1}{2}(\mathfrak{s} + \mathfrak{i}\tilde{\mathfrak{s}}), \quad \mathfrak{s}^\downarrow = \frac{1}{2}(\mathfrak{s} - \mathfrak{i}\tilde{\mathfrak{s}})$$

Также обозначается как

$$\mathfrak{s}^\uparrow \mapsto \mathcal{A} \mapsto \mathcal{J}^{(+)} \mapsto \mathcal{N}$$

и

$$\mathbf{s}^\downarrow \mapsto \mathcal{B} \mapsto \mathcal{J}^{(-)} \mapsto \mathcal{N}^\dagger$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^\uparrow \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{s}^\downarrow, \quad \tilde{\mathbf{s}} = -\mathbf{i} (\mathbf{s}^\uparrow \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes \mathbf{s}^\downarrow)$$

$$\left[\mathbf{s}_\mathbb{E}^{\uparrow\alpha}, \mathbf{s}_\mathbb{E}^{\uparrow\beta} \right] = \mathbf{i} \epsilon_\mathbb{E}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{s}_\mathbb{E}^{\uparrow\gamma}, \quad \left[\mathbf{s}_\mathbb{E}^{\downarrow\alpha}, \mathbf{s}_\mathbb{E}^{\downarrow\beta} \right] = \mathbf{i} \epsilon_\mathbb{E}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{s}_\mathbb{E}^{\downarrow\gamma}, \quad \left[\mathbf{s}_\mathbb{E}^{\uparrow\alpha}, \mathbf{s}_\mathbb{E}^{\downarrow\beta} \right] = 0,$$

$$\left[\left(\mathbf{s}_\mathbb{E}^\uparrow \right)^2, \mathbf{s}_\mathbb{E}^{\uparrow\beta} \right] = 0, \quad \left[\left(\mathbf{s}_\mathbb{E}^\downarrow \right)^2, \mathbf{s}_\mathbb{E}^{\downarrow\beta} \right] = 0.$$

$$\left(\mathbf{s}^\uparrow \right)^2 \bar{\chi}(x) = \mathbf{s}_\mathbf{u} (\mathbf{s}_\mathbf{u} + 1) \bar{\chi}(x), \quad \mathbf{s}_\mathbf{u} - \text{полуцелое или целое, } \mathbf{s}_\mathbf{u} \geq 0,$$

$$\mathbf{s}_3^\uparrow \bar{\chi}(x) = m_\mathbf{u} \bar{\chi}(x), \quad m_\mathbf{u} \in \{ \mathbf{s}_\mathbf{u}, \mathbf{s}_\mathbf{u} - 1, \dots, 1 - \mathbf{s}_\mathbf{u}, -\mathbf{s}_\mathbf{u} \},$$

$$\left(\mathbf{s}^\downarrow \right)^2 \theta(x) = \mathbf{s}_\mathbf{d} (\mathbf{s}_\mathbf{d} + 1) \theta(x), \quad \mathbf{s}_\mathbf{d} - \text{полуцелое или целое, } \mathbf{s}_\mathbf{d} \geq 0,$$

$$\mathbf{s}_3^\downarrow \theta(x) = m_\mathbf{d} \theta(x), \quad m_\mathbf{d} \in \{ \mathbf{s}_\mathbf{d}, \mathbf{s}_\mathbf{d} - 1, \dots, 1 - \mathbf{s}_\mathbf{d}, -\mathbf{s}_\mathbf{d} \}.$$

$$\mathrm{SO}(3, 1) \cong \mathrm{SO}(3) \otimes \mathrm{SO}(3)$$

$$\mathfrak{so}(3, 1) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2).$$

Обозначения для сдвигов в $(\mathbf{3}+\mathbf{1})\mathbf{D}$

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu = \exp \{ \partial_\nu a^\nu \} x^\mu = \exp \left\{ -\frac{\mathbf{i}}{\hbar} p_\nu a^\nu \right\} x^\mu,$$

где

$$p_\nu = \mathbf{i} \hbar \partial_\nu$$

При сдвигах $A'_\mu(x') = A_\mu(x)$, поэтому из $A'_\mu(x') = A'_\mu(x + a) = \exp \left\{ -\frac{\mathbf{i}}{\hbar} p_\nu a^\nu \right\} A'_\mu(x) = A_\mu(x)$ получим

$$A'_\mu(x) = \exp \left\{ \frac{\mathbf{i}}{\hbar} p_\nu a^\nu \right\} A_\mu(x).$$

Обозначения для алгебры группы Пуанкаре

$$p_\nu = \mathbf{i} \hbar \partial_\nu$$

$$J_{\mu\nu} = \hat{L}_{\mu\nu} + \hat{S}_{\mu\nu} = \hbar \mathbf{j}_{\mu\nu}$$

$$(L_{\mu\nu})^{\mu'\nu'} = \mathbf{i} \hbar g^{\mu'\nu'} (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu), \quad (S_{\mu\nu})^{\mu'\nu'} = \mathbf{i} \hbar \left\{ \delta_\mu^{\mu'} \delta_\nu^{\nu'} - \delta_\nu^{\mu'} \delta_\mu^{\nu'} \right\}$$

$$[p_\mu, p_\nu] = 0, \quad [p_\mu, S_{\lambda\rho}] = 0.$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\mu'\nu'}] = -\mathbf{i} \hbar \{ g_{\mu\mu'} J_{\nu\nu'} - g_{\mu\nu'} J_{\nu\mu'} + g_{\nu\nu'} J_{\mu\mu'} - g_{\nu\mu'} J_{\mu\nu'} \},$$

$$[J_{\mu\nu}, p_\lambda] = -\mathbf{i} \hbar \{ g_{\mu\lambda} p_\nu - g_{\nu\lambda} p_\mu \}.$$

$$[\mathbf{j}_\mathbb{E}^\alpha, \mathbf{p}_\mathbb{E}^\beta] = \mathbf{i} \epsilon_\mathbb{E}^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{p}_\mathbb{E}^\gamma, \quad [\mathbf{j}_\mathbb{E}^\alpha, p_0] = 0,$$

$$[\tilde{\mathbf{j}}_\mathbb{E}^\alpha, \mathbf{p}_\mathbb{E}^\beta] = \mathbf{i} \delta_\mathbb{E}^{\alpha\beta} p_0, \quad [\tilde{\mathbf{j}}_\mathbb{E}^\alpha, p_0] = \mathbf{i} p_\mathbb{E}^\alpha.$$

$$[\mathbf{j}_\mathbb{E}^\alpha, p^2] = [\tilde{\mathbf{j}}_\mathbb{E}^\alpha, p^2] = 0$$

О псевдовекторе Паули-Любанского

Особая роль в группе Пуанкаре у псевдовектора Паули-Любанского:

$$\begin{aligned}
 W^\mu &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}p_\nu S_{\lambda\rho} = -p_\nu \tilde{S}^{\mu\nu}, \\
 p^2 &= 0, \quad W^2 = 0, \quad p \cdot W = 0 \\
 [j_\mathbb{E}^\alpha, W^2] &= [\tilde{j}_\mathbb{E}^\alpha, W^2] = [p_\mu, W^2] = 0, \\
 W^2 &= -\frac{1}{2}\{p^2 S^2 - 2p_\nu p^\lambda S_{\lambda\rho} S^{\nu\rho}\} \\
 \frac{1}{\hbar}W_0 &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{s}, \quad \frac{1}{\hbar}\mathbf{W} = p_0 \mathbf{s} - \text{sign}(\mathbf{s})i(\mathbf{p} \times \mathbf{s}), \\
 [j_\mathbb{E}^\alpha, \mathbf{W}_\mathbb{E}^\beta] &= i\epsilon_\mathbb{E}^{\alpha\beta\gamma}\mathbf{W}_\mathbb{E}^\gamma, \quad [j_\mathbb{E}^\alpha, W_0] = 0, \\
 [\tilde{j}_\mathbb{E}^\alpha, \mathbf{W}_\mathbb{R}^\beta] &= i\delta_\mathbb{R}^{\alpha\beta}W_0, \quad [\tilde{j}_\mathbb{E}^\alpha, W_0] = iW_\mathbb{E}^\alpha, \\
 W^2 &= -\frac{1}{2}\{p^2 S^2 - 2p_\nu p^\lambda S_{\lambda\rho} S^{\nu\rho}\}
 \end{aligned}$$

6.3 Discrete Symmetries in the Poincaré Group (?)

Обсудим подробно дискретные симметрии в группе Пуанкаре.
(у Киселева спишу!)

Дискретные симметрии в группе Пуанкаре, СРТ-теорема по Киселеву

Дискретные симметрии пространства-времени Минковского в квантовом случае могут приводить к новым квантовым числам - собственным значениям этих симметрий при действии на поля. Эти квантовые числа пространственная четность и Т-четность, которые, конечно, принимают значения ± 1 , поскольку двукратное применение оператора дискретной симметрии дает тождественное преобразование пространства-времени, а значит, и квадрат собственного числа дискретной симметрии должен быть равен единице.

Относительно зеркальных инверсий пространства операторы спина и момента являются тензорами

$$\mathbb{P}J_{\mu\nu}\mathbb{P}^{-1} = \mathcal{P}_\mu^{\mu'}\mathcal{P}_\nu^{\nu'}J_{\mu'\nu'},$$

где $\mathcal{P} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ - симметричная диагональная матрица преобразований координат при инверсии (см. явный вид матрицы $\mathcal{P}$ в формуле (17.79)). Напомним, что оператор спина $\mathbf{s}_\mathbb{E}^\gamma = \frac{1}{2}\epsilon_\mathbb{E}^{\alpha\beta\gamma}\mathbf{s}_{\alpha\beta}$ - псевдовектор. Импульс является вектором:

$$\mathbb{P}p_\mu\mathbb{P}^{-1} = \mathcal{P}_\mu^\nu p_\nu,$$

и соответственно вектор Паули-Любанского - псевдовектор, поскольку 4тензор Леви-Чивиты имеет отрицательную пространственную четность:

$$\mathbb{P}W_\mu\mathbb{P}^{-1} = -\mathcal{P}_\mu^\nu W_\nu.$$

Из последних двух уравнений (18.23, 18.22) и связи между импульсом и 4-вектором Паули-Любанского для безмассовых частиц (18.18) заключаем, что спиральность безмассовой частицы меняет знак при пространственных инверсиях:

$$\mathfrak{s} \xrightarrow{\mathbb{P}} -\mathfrak{s}.$$

Аналогично, для действия оператора обращения стрелы времени с учетом его антилинейности находим, что импульс является вектором с отрицательной T -четностью

$$\mathbb{T} p_\mu \mathbb{T}^{-1} = -\mathcal{T}_\mu^\nu p_\nu,$$

а генераторы 4-вращений-тензором 2-го ранга с отрицательной T -четностью

$$\mathbb{T} J_{\mu\nu} \mathbb{T}^{-1} = -\mathcal{T}_\mu^{\mu'} \mathcal{T}_\nu^{\nu'} J_{\mu'\nu'},$$

где $\mathcal{T}$ - соответствующая матрица преобразований декартовых координат пространства Минковского. Вектор Паули-Любанского также имеет отрицательную T -четность, поскольку 4-тензор Леви-Чивиты имеет отрицательную четность по отношению операции обращения стрелы времени:

$$\mathbb{T} W_\mu \mathbb{T}^{-1} = -\mathcal{T}_\mu^\nu W_\nu$$

Поэтому спиральность безмассовых частиц, сохраняется при обращении стрелы времени:

$$\mathfrak{s} \xrightarrow{\mathbb{T}} \mathfrak{s}.$$

С учетом матричного произведения

$$\mathcal{P}_{\mu'}^\mu \mathcal{T}_\nu^{\mu'} = -\delta_\nu^\mu$$

действие антиунитарного преобразования полной инверсии пространства Минковского $\mathbb{PT}$ дает

$$\begin{aligned} \mathbb{PT} p^\nu (\mathbb{PT})^{-1} &= p^\nu, \\ \mathbb{PT} J_{\mu\nu} (\mathbb{PT})^{-1} &= -J_{\mu\nu}, \\ \mathbb{PT} W^\nu (\mathbb{PT})^{-1} &= -W^\nu \end{aligned}$$

и обращение спиральности

$$\mathfrak{s} \xrightarrow{\mathbb{PT}} -\mathfrak{s}.$$

Действие для полей строится как функционал, зависящий от самих полей и генераторов группы Пуанкаре в соответствующих представлениях так, чтобы оно было инвариантно относительно преобразований собственной ортохронной группы Лоренца и пространственно-временных трансляций, т. е. так, чтобы действие было скаляром. Это, в частности, означает, что спинорные поля (фермионы) входят в виде билинейных комбинаций, ковариантным образом преобразующихся при действии собственной ортохронной подгруппы Пуанкаре. Второе важнейшее свойство - действие является вещественным скаляром. Наконец, в-третьих, действие строится по локальному лагранжиану, который представляет собой сумму лагранжианов взаимодействий составных токов с локальными полями. Составной ток тоже реализует локальное представление группы Пуанкаре, построенное как произведение локальных полей неприводимых представлений той же группы Пуанкаре. Поэтому каждый ток также характеризуется действием на него все тех же генераторов группы Пуанкаре. Произведение ток-поле входит в лагранжиан с множителем g , который называют

константой взаимодействия тока с полем. Эти константы могут принимать, вообще говоря, комплексные значения: важно, чтобы сумма членов с взаимодействием составляла вещественное действие в целом. Тип константы взаимодействия g зависит от свойств тока и поля: если при замене частиц на античастицы произведение тока на поле меняет знак, то взаимодействие отличает частицы от античастиц, и тогда говорят, что g - это заряд e , умноженный на вещественный дискретный фактор квантования заряда Y , отвечающий данным полям и току в лагранжиане взаимодействия; если же при замене частиц на античастицы произведение тока на поле не меняет знак, то взаимодействие называется нейтральным, и тогда говорят, что g - это нейтральная постоянная e_N , умноженная на вещественный дискретный множитель Y^N .

Действие $S[\Psi(x), p^\nu, J_{\mu\nu}, W^\nu, Ye, Y^N e_N]$ после $\mathbb{PT}$ становится

$$S_{\mathbb{PT}} = S[\Psi_{\mathbb{PT}}(-x), p_\nu, -J_{\mu\nu}, -W^\nu, Y_{\mathbb{PT}}e^*, Y_{\mathbb{PT}}^N e_N^*].$$

Учтено, что операция обращения стрелы времени антилинейна.

Воспользуемся тем, что действие как функционал является скаляром, так что замена переменных с единичным якобианом

$$x^\mu \rightarrow -x^\mu$$

оставляет инвариантным и само действие, и лагранжиан, а для дифференциальных генераторов $p_\mu = i\hbar\nabla_\mu$ и $L_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$, которые выражаются через x^μ и ∇_ν , легко найти закон преобразования, и если учесть гомоморфизм свойств этих операторов и свойств их матричных представлений, то эта замена 4-координат в функционале дает

$$p^\nu \rightarrow -p^\nu, \quad J_{\mu\nu} \rightarrow J_{\mu\nu}, \quad W^\nu \rightarrow -W^\nu,$$

так что

$$\begin{aligned} S[\Psi(x), p^\nu, J_{\mu\nu}, W^\nu, Ye, Y^N e_N] &\xrightarrow{\mathbb{PT}} \\ S_{\mathbb{PTT}} = S[\Psi_{\mathbb{PT}}(x), -p_\nu, -J_{\mu\nu}, W^\nu, Y_{\mathbb{PT}}e^*, Y_{\mathbb{PT}}^N e_N^*]. \end{aligned}$$

Используем тот факт, что действие - это вещественный скаляр, и следовательно, комплексное сопряжение (преобразование $\mathbb{K}$) оставляет действие инвариантным $S = S^*$, но при этом преобразуются генераторы группы Пуанкаре,

$$\mathbb{K}p^\nu\mathbb{K}^{-1} = -p^\nu, \quad \mathbb{K}J_{\mu\nu}\mathbb{K}^{-1} = -J_{\mu\nu}, \quad \mathbb{K}W^\nu\mathbb{K}^{-1} = W^\nu$$

Тогда после комплексного сопряжения действия

$$\begin{aligned} S[\Psi(x), p^\nu, J_{\mu\nu}, W^\nu, Ye, Y^N e_N] &\xrightarrow{\mathbb{PT}} \\ S_{\mathbb{PT}} = S[\Psi_{\mathbb{PT}}^*(x), p_\nu, J_{\mu\nu}, W^\nu, Y_{\mathbb{PT}}e, Y_{\mathbb{PT}}^N e_N]. \end{aligned}$$

¹ Действие дискретных преобразований на генераторы группы изометрии пространствавремени сопровождается комплексным сопряжением зарядов g, e и изменением вещественных факторов квантования зарядов Y, Y^N в соответствии с переходом к преобразованным полям.

С

Как мы увидим ниже, возможно введение независимой линейной операции, действующей на поля так, что частицы заменяются на античастицы и

$$\Psi_{\text{PT}}^*(x) \xrightarrow{\mathbb{C}} \Psi_{\text{CPT}}(x),$$

а для заряженных токов преобразование зарядов имеет вид

$$e \xrightarrow{\mathbb{C}} -e,$$

в то время как сохраняются нейтральные константы взаимодействия

$$e_N \xrightarrow{\mathbb{C}} e_N,$$

причем генераторы группы Лоренца никак не преобразуются

$$\mathbb{C}p^\nu \mathbb{C}^{-1} = p^\nu, \quad \mathbb{C}J_{\mu\nu} \mathbb{C}^{-1} = J_{\mu\nu}, \quad \mathbb{C}W^\nu \mathbb{C}^{-1} = W^\nu$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} S[\Psi(x), p^\nu, J_{\mu\nu}, W^\nu, Ye, Y^N e_N] &\xrightarrow{\text{CPT}} \\ S_{\text{CPT}} &= S[\Psi_{\text{CPT}}(x), p_\nu, J_{\mu\nu}, W^\nu, -Y_{\text{CPT}} e, Y_{\text{CPT}}^N e_N] \end{aligned}$$

Для факторов квантования мы полагаем естественные условия связи с зарядово сопряженным полностью зеркальным миром,

$$Y_{\text{CPT}} = -Y, \quad Y_{\text{CPT}}^N = Y^N.$$

Значит, операция CPT приводит к действию на полях Ψ_{CPT} , которые удовлетворяют тем же уравнениям движения, что и исходные поля Ψ , поскольку действие является CPT-инвариантным, так как все генераторы преобразований и произведения токов на заряды остаются равными исходным значениям, что составляет содержание CPT-теоремы Паули-Людера-Вигнера:

$$\begin{aligned} S[\Psi(x), p^\nu, J_{\mu\nu}, W^\nu, Ye, Y^N e_N] &\xrightarrow{\text{CPT}} \\ S_{\text{CPT}} &= S[\Psi_{\text{CPT}}(x), p_\nu, J_{\mu\nu}, W^\nu, Ye, Y^N e_N]. \end{aligned}$$

Применение CPT теоремы для основного уравнения для безмассовых полей

Поэтому говорят, что действие, полученное операцией полного пространственно-временного отражения PT, описывает зарядово сопряженные поля, для которых мы имеем те же значения генераторов группы Пуанкаре. Следовательно, движение в зеркальном мире с обратной стрелой времени описывает движение античастиц - частиц противоположного знака заряда.

В качестве важного примера применения CPT-теоремы рассмотрим основное уравнение для безмассовых полей

$$\frac{1}{\hbar} W^\mu = \mathfrak{s} p^\mu.$$

Из проведенных нами построений следует, что это уравнение инвариантно относительно обращения стрелы времени. Но тогда из CPT-теоремы сразу следует, что $\frac{1}{\hbar} W^\mu = \mathfrak{s} p^\mu$ описывает и CP-сопряженное поле, т.е. наряду с полем спиральности $\mathfrak{s}$ решением уравнению будет и CP-сопряженное поле, которое отвечает полю противоположного заряда и противоположной спиральности!

И какое же это поле????

6.3.1 C Symmetry

О применениях (??)

6.3.2 T Symmetry

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

О применениях (??)

6.3.3 P Symmetry

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

О применениях (??)

6.3.4 CPT Symmetry

6.4 Other Properties of the Poincaré Group

6.4.1 Various Questions About the Poincaré Group

О переходе из СТО в рамках группы Пуанкаре к квантовой механике (??)

(потом подумаю)

В квантовой механике особую роль играют сохраняющиеся операторы, т.е. операторы, коммутирующие с гамильтонианом $\hat{H} = \hat{p}^0$.

Рассматривая (1.25) можно понять, что таковыми является 3-вектор импульса $\hat{\mathbf{p}} = \{\hat{p}^1, \hat{p}^2, \hat{p}^3\}$, а также 3-вектор углового момента с компонентами $\hat{\mathcal{J}}_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\hat{\mathcal{J}}^{jk}$ и, конечно, энергия $\hat{p}^0$.

Остальные генераторы образуют т.н.

3-вектор буста с компонентами $\hat{\mathcal{K}}^i = \hat{\mathcal{J}}^{0i}$.

Последние не соответствуют сохраняющейся величине, поэтому мы не будем использовать собственные значения $\hat{\mathcal{K}}$ для обозначения физических состояний.

6.4.2 Spinor Homomorphism (??)

(вроде все известное мне, только слова заумные.)

6.4.3 Lorentz Invariance and Relativistic Symmetry Principles 1

16.1 Orthogonal Transformations in Four Dimensions

We consider the four-dimensional space with coordinates $x_\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$, which assuming the most general case - may be complex numbers. The absolute value of the position vector is

given by (summation convention)

$$s = \sqrt{g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu} = \sqrt{x_\mu x^\mu}, \quad (16.1)$$

and the length s can also take complex values. Examining an orthogonal transformation $a_{\mu\nu}$, which relates each point with coordinates x_μ to new ones x'^μ :

$$x^\nu = a^\nu_\mu x^\mu \quad (16.2)$$

the absolute value should remain unchanged by this transformation (this is the fundamental, defining condition for orthogonal transformations), i.e.

$$s' = \sqrt{x'_\mu x^\mu} = \sqrt{x_\mu x^\mu} = s. \quad (16.3)$$

From this relation $x'^\mu x'_\mu = a^\mu_\sigma a^\tau_\mu x_\sigma x_\tau = x^\sigma x_\sigma$ it directly follows that

$$a^\mu_\sigma a^\tau_\mu = \delta^\tau_\sigma \quad (\sigma, \tau = 0, 1, 2, 3), \quad (16.4)$$

implying that the $a_{\mu\nu}$ generate a linear orthogonal transformation. Equivalently to (16.2) and (16.3), Eq. (16.4) can be envisaged as a defining equation for orthogonal transformations: Sequential application of two transformations gives

$$x''^\nu = a'^\nu_\mu x'^\mu = a'^\nu_\mu a^\mu_\sigma x^\sigma = \beta^\nu_\sigma x^\sigma, \quad (16.5)$$

where the transformation β^ν_σ again represents an orthogonal transformation, since

$$\beta^\nu_\sigma \beta^\sigma_\varrho = a'^\nu_\sigma a^\sigma_\mu a'^\mu_\varrho a^\varepsilon_\mu a^\varepsilon_\sigma = \delta^\mu_\varepsilon a^\nu_\mu a^\varepsilon_\varrho = \delta^\nu_\varrho. \quad (16.6)$$

Thus the orthogonal transformations a^ν_μ form a group. The unit element of this group is given by $a^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu$ (the identity transformation) and the existence of the inverse elements follows from (16.4) ($a \cdot a^{-1} = 11$). Accordingly all conditions characterizing the group structure are fulfilled (the associative law is also valid because the transformations a^ν_μ are linear and orthogonal).

This group of homogeneous, linear transformations that keep the distance between two points invariant is called a group of the four-dimensional, complex, orthogonal transformations. In analogy to the three-dimensional group $O(3)$ we use the compact notation $O(4)$ [more precisely, $O(4, C)$ because this group is defined over the field C of the complex numbers].

At first $a_{\mu\nu}$ has sixteen components; however, due to the ten orthogonality relations (16.1) only six independent (complex) parameters remain. Additional restrictions for the $a_{\mu\nu}$ yield the subgroup of $O(4, C)$: Let us assume all x_μ to be real, then the same must hold for all $a_{\mu\nu}$. We are led to the real four-dimensional group $O(4, R)$, whose group properties follow from those of $O(4, C)$.

Furthermore, we may consider the case that the coordinates entering the scalar product of two vectors may occur with different sign, eg.

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = -dx^2 + dt^2.$$

The orthogonal group keeping this line element invariant is called $O(3, 1)$. (In general the group $O(p, q)$ leaves a bilinear form $-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2$ invariant.) This non-symmetric expression for the line element can also be treated in the framework of $O(4, C)$, if one does choose the coordinates x_1, x_2, x_3 as real and the coordinate $x_0 = it$ as purely imaginary - the corresponding space being called Minkowski space. In that case the transformed coordinates x'_μ must also have the same properties, which yields for the elements $a_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
& a_{ik} & (i, k = 1, 2, 3) \\
& a_{00} \\
a_{0i}, a_{i0} & (i = 1, 2, 3) & \text{real} \quad \text{imaginary} .
\end{aligned} \tag{16.7}$$

The group, whose elements are restricted by the conditions (16.7), is called the homogeneous Lorentz group L of the Minkowski space, and the elements are given by the Lorentz transformations.

Further subgroups already known to us can be obtained by the restrictions $a_{i0} = a_{0i} = 0$ and $a_{00} = 1$. The group with these properties represents the complex, three-dimensional group $O(3, C)[O(3)$ and $O(4)$ always means $O(3, C)$ and $O(4, C)$, respectively]. For real x_μ we are led to the real, three-dimensional group $O(3, R)$. In the following we shall discuss the groups $O(4)$ and L in more detail.

16.2 Infinitesimal Transformations and the Proper Subgroup of $O(4)$

First we write down an infinitesimal element of $O(4)$:

$$a_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + \varepsilon_\mu^\nu \quad (|\varepsilon_\mu^\nu| \ll 1) . \tag{16.8}$$

The transformation of x^ν then reads

$$(x^\nu)' = a_\mu^\nu x^\mu = (\delta_\mu^\nu + \varepsilon_\mu^\nu) x^\mu, \tag{16.9}$$

from which, according to the orthogonality relations for a_μ^ν , it follows that

$$\begin{aligned}
a_\mu^\nu a_\sigma^\mu &= \delta_\sigma^\nu = (\delta_\mu^\nu + \varepsilon_\mu^\nu) (\delta_\sigma^\mu + \varepsilon_\sigma^\mu) \\
&= \delta_\mu^\nu \delta_\sigma^\mu + \delta_\mu^\nu \varepsilon_\sigma^\mu + \varepsilon_\mu^\nu \delta_\sigma^\mu + O(\varepsilon^2) \\
&= \delta_\sigma^\nu + \varepsilon_{\sigma\sigma}^\nu + \varepsilon_\sigma^\nu + O(\varepsilon^2) .
\end{aligned}$$

In order to satisfy the orthogonality relations at least up to terms of the order $O(\varepsilon^2)$,

$$\varepsilon_\sigma^\nu = -\varepsilon_\sigma^\nu \tag{16.10}$$

must be valid. Since

$$\varepsilon_\sigma^\nu = g^{\nu\varrho} \varepsilon_{\sigma\varrho}, \quad \varepsilon_\sigma^\nu = g^{\nu\varrho} \varepsilon_{\varrho\sigma},$$

we also obtain [in view of (16.3)] $\varepsilon_{\varrho\sigma} = -\varepsilon_{\sigma\varrho}$, i.e. the infinitesimal quantities $\varepsilon_{\mu\nu}$ have to be antisymmetric. In accordance with our result obtained previously, this implies that there exist six independent parameters of an infinitesimal transformation. In the case of $O(4)$ the $\varepsilon_{\mu\nu}$ are arbitrary complex numbers, while they are all real for $O(4, R)$. As already mentioned before, the group parameters of $L\varepsilon_{ik}(i, k = 1, 2, 3)$ are real and $\varepsilon_{i0} = \varepsilon_{0i}$ are imaginary.

In order to construct generators of $O(4)$ group transformations we rewrite (16.9) as

$$(x^\nu)' = \left(\delta_\mu^\nu + \alpha_s (\hat{I})_\mu^{\nu(s)} \right) x^\mu, \tag{16.11}$$

where α_s denote the parameters of the transformation. In order to understand the meaning of the $(\hat{I})_\mu^{\nu(s)}$ let us have a look at the transformation of a vector with components A^σ :

$$(A^\sigma)' = D^\sigma_\varrho(\alpha_i) A^\varrho$$

D^σ_ϱ stands for the transformation matrix dependent on the parameter α_i . Expansion of the matrix elements for small α_i yields

$$(A^e)' = \left(\delta^e_\sigma + \sum_i \left(\frac{\partial D^e}{\partial \alpha_i} \right)_{\alpha=0} \alpha_i + O(\alpha^2) \right) A^\sigma \quad (16.12)$$

and comparison with (16.11) shows that

$$\left(\hat{I}_\mu^{\nu(s)} = \left(\frac{\partial D^\nu_\mu}{\partial \alpha_s} \right)_{\alpha=0} \right) \quad (16.13)$$

is valid. Such a Taylor expansion about the identity transformation ($\alpha_i = 0$) is only possible if the D^ν_μ are continuously differential functions of the parameters α_i ; however, this is the essential condition for a group to be a Lie group, and since all groups considered in the following are Lie groups [Lorentz group, $O(4)$, $O(4, R)$, ...], the improper Lorentz transformations will be excluded from this discussion. In our case the parameters α_s , stand for the infinitesimal quantities $\varepsilon^\sigma_\sigma$, which means that s is the short-hand notation for two indices ($s \leftrightarrow \varrho\sigma$). Accordingly the infinitesimal operators (generators) $(\hat{I}^\nu_\mu)$ have to be characterized not only by s , but by two indices ϱ, σ . In order to avoid confusion and to distinguish between four-dimensional matrix indices and generator indices, we write the latter in brackets¹ and rewrite (16.11) as

$$(x^\nu)' = \left(\delta^\nu_\mu + \frac{1}{2} \sum_{\sigma\varrho} \varepsilon_{\sigma\varrho} \left(\hat{I}_\mu^\nu \right)^{(\sigma\varrho)} \right) x^\mu. \quad (16.14)$$

Since we sum over ϱ and σ , each term is counted twice. For this reason we have to multiply the sum by the factor $1/2$. In view of the antisymmetry of $\varepsilon_{\varrho\sigma}$, we also choose $\left(\hat{I}_\mu^\nu \right)^{(\sigma\varrho)}$ to be antisymmetric with respect to the indices ϱ, σ . Parts symmetric in ϱ, σ would not contribute when contracting with the antisymmetric $\varepsilon_{\varrho\sigma}$. Thus we obtain six infinitesimal operators $\left(\hat{I}_\mu^\nu \right)^{(\sigma\varrho)}$, the generators of the orthogonal group $O(4)$. Comparing (16.14) with (16.9) we are led to a defining equation for $\hat{I}_\mu^\nu$:

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma\varrho} \varepsilon_{\sigma\varrho} \left(\hat{I}_\mu^\nu \right)^{(\sigma\varrho)} = \varepsilon_\mu^\nu \quad (16.15)$$

First we lower the tensor index ν :

or

$$\sum_{\sigma,\varrho} \frac{1}{2} \varepsilon_{\sigma\varrho} g_{\tau\nu} \left(\hat{I}_\mu^\nu \right)^{(\sigma\varrho)} = g_{\tau\nu} \varepsilon_\mu^\nu = \varepsilon_{\tau\mu}$$

$$\sum_{\sigma,\varrho} \frac{1}{2} \varepsilon_{\sigma\varrho} \left(\hat{I}_{\tau\mu} \right)^{(\sigma\varrho)} = \varepsilon_{\tau\mu}$$

respectively. Since the sum over ϱ and σ only contributes for $\varrho = \mu$ and $\sigma = \tau$, then it must terminate. Accordingly an ansatz for a solution of (16.15) must look similar to $\left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(\rho\sigma)} = g^\sigma_\mu g^\rho_\nu$. Taking into account the antisymmetry with respect to μ, ν , it follows that

$$\left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(\sigma\varrho)} = g^\sigma_\mu g^\varrho_\nu - g^\sigma_\nu g^\varrho_\mu = \left(-\hat{I}_{\nu\mu} \right)^{(\sigma\varrho)}, \quad (16.16)$$

and the antisymmetry with respect to σ, ϱ also becomes obvious:

¹ Note, this notation appears somewhat different from the one used in Chap. 3 [e.g. (3.44)ff]. It is assumed that the reader will be able to establish the connection without major problems.

$$\left(\hat{I}_{\mu\nu}\right)^{(\sigma\rho)} = -\left(\hat{I}_{\mu\nu}\right)^{(\rho\sigma)}. \quad (16.17)$$

With the aid of the relation $g^\mu{}_\rho = g^{\mu\nu}g_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\rho$ we can directly denote the matrix representation of the generators, e.g.

$$\left(\hat{I}_{\mu\nu}\right)^{(10)} = g^1{}_\mu g^0{}_\nu - g^1{}_\nu g^0{}_\mu = \delta^1{}_\mu \delta^0{}_\nu - \delta^1{}_\nu \delta^0{}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and for mixed tensors

$$\left(\hat{I}_\nu^\mu\right)^{(10)} = g^{\mu\tau} \left(\hat{I}_{\tau\nu}\right)^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Furthermore,

$$\left(\hat{I}_{\mu\nu}\right)^{(13)} = g_\mu^1 g_\nu^3 - g_\nu^1 g_\mu^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\hat{I}_{\mu\nu}\right)^{(21)} = g_\mu^2 g_\nu^1 - g_\nu^2 g_\mu^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\hat{I}_{\mu\nu}\right)^{(32)} = g_\mu^3 g_\nu^2 - g_\nu^3 g_\mu^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\hat{I}_{\mu\nu}\right)^{(20)} = g_\mu^2 g_\nu^0 - g_\nu^2 g_\mu^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\hat{I}_{\mu\nu}\right)^{(30)} = g_\mu^3 g_\nu^0 - g_\nu^3 g_\mu^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Now the commutation relations of $(I_{\mu\nu})^{(\sigma\rho)}$ can be easily verified: for example

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(21)}, \left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(32)} \right]_- \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= - \left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(13)}.
 \end{aligned}$$

Analogously we get

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(32)}, \left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(13)} \right]_- = - \left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(21)}, \\
 & \left[\left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(13)}, \left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(21)} \right]_- = - \left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(32)}, \\
 & \left[\left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(10)}, \left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(20)} \right]_- = - \left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(21)},
 \end{aligned} \tag{16.18}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(20)}, \left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(30)} \right]_- = - \left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(32)}, \\
 & \left[\left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(30)}, \left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(10)} \right]_- = - \left(\hat{I}_{\mu\nu} \right)^{(13)}.
 \end{aligned} \tag{16.19}$$

(There are nine further commutators left, but they appear rather seldom in applications.) All fifteen commutation relations can be summarized within a single one (for the sake of more clarity we omit the tensor indices μ and ν and note only the parameter indices σ and ϱ ; we also drop the brackets $()$ on the parameter indices)

$$\left[\hat{I}^{\alpha\beta}, \hat{I}^{\gamma\delta} \right]_- = -\delta^{\alpha\gamma} \hat{I}^{\beta\delta} + \delta^{\alpha\delta} \hat{I}^{\beta\gamma} + \delta^{\beta\gamma} \hat{I}^{\alpha\delta} - \delta^{\beta\delta} \hat{I}^{\alpha\gamma} \tag{16.20a}$$

or, if the parameter indices are lowered,

$$\left[\hat{I}_{\alpha\beta}, \hat{I}_{\gamma\delta} \right]_- = -g_{\alpha\gamma} \hat{I}_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta} \hat{I}_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma} \hat{I}_{\alpha\delta} - g_{\beta\delta} \hat{I}_{\alpha\gamma} \tag{16.20b}$$

These equations represent the Lie algebra of the group $O(4)$. It is convenient to introduce six linearly independent combinations instead of $\hat{I}^{\sigma\varrho}(k, l = 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned}
 \hat{I}^{i(+)} &= \frac{1}{2} \left(\hat{I}^{kl} + \hat{I}^{i0} \right), \\
 \hat{I}^{i(-)} &= \frac{1}{2} \left(\hat{I}^{kl} - \hat{I}^{i0} \right),
 \end{aligned} \tag{16.21}$$

where i, k, l are cyclic permutations of 1, 2, 3. From (16.20a) the commutation relations of $\hat{I}^{i(+)}, \hat{I}^{i(-)}$ are derived as

$$\begin{aligned} [\hat{I}^{i(+)}, \hat{I}^{k(+)}]_- &= -\hat{I}^{l(+)}, \\ [\hat{I}^{i(-)}, \hat{I}^{k(-)}]_- &= -\hat{I}^{l(-)}, \\ [\hat{I}^{i(+)}, \hat{I}^{k(-)}]_- &= 0, \\ i, k, l &= 1, 2, 3 \text{ cyclic.} \end{aligned}$$

Since $\hat{I}^{i(+)}$ and $\hat{I}^{i(-)}$ are not hermitian, we introduce the hermitian operators

$$\hat{J}^{i(+)} = -i\hat{I}^{i(+)} \quad , \quad \hat{J}^{i(-)} = -i\hat{I}^{i(-)}. \quad (16.23)$$

Then, it follows from (16.22) that

$$\begin{aligned} [\hat{J}^{i(+)}, \hat{J}^{k(+)}]_- &= i\hat{J}^{l(+)}, \\ [\hat{J}^{i(-)}, \hat{J}^{k(-)}]_- &= i\hat{J}^{l(-)}, \\ [\hat{J}^{i(+)}, \hat{J}^{k(-)}]_- &= 0, \\ i, k, l &= 1, 2, 3 \text{ cyclic.} \end{aligned} \quad (16.24)$$

By introducing $\hat{I}^{i(\pm)}$ we have constructed two 3×3 matrices from the 4×4 matrices $\hat{I}^{\sigma e}$. Consequently we have left four-dimensional space and moved to a three-dimensional subspace, where $\hat{I}^{i(\pm)}$ are the infinitesimal generators. Therefore, each four-dimensional transformation can be performed by combining appropriate transformations on the subspaces. Because of (16.21), one has

$$\begin{aligned} \hat{I}^{kl} &= \hat{I}^{i(+)} + \hat{I}^{i(-)} \text{ and } \hat{I}^{i0} = \hat{I}^{i(+)} - \hat{I}^{i(-)} \\ i, k, l &= 1, 2, 3 \text{ cyclic,} \end{aligned} \quad (16.25)$$

and the $\hat{J}^{i(\pm)}$ are the generators of the three-dimensional subgroup of $O(4)$. As (16.24) shows, they obey the same commutation relations as the angular momentum components $\hat{L}_x, \hat{L}_y$ and $\hat{L}_z$; hence they are generators of an $O(3)$ subgroup. Since we have selected two three-dimensional subspaces of the four-dimensional space with the operators $\hat{I}^{i(+)}$ and $\hat{I}^{i(-)}$, the reduction from $O(4)$ to $O(3)$ yields six operators $\hat{J}^{i(\pm)} (i = 1, 2, 3)$, instead of three. This point will later on be studied more rigorously in connection with the spin, but for the moment we want to get a more intuitive understanding of the meaning of the parameters ε_μ^ν in the case of the real rotation group $O(4, R)$. To do this we choose $\varepsilon_2^1 = -\varepsilon_1^2 = \varepsilon$ and all other $\varepsilon_\mu^\nu = 0$. The components of the transformation (16.9) then read:

$$\begin{aligned} (x^0)' &= x^0, \\ (x^1)' &= x^1 + \varepsilon x^2, \\ (x^2)' &= x^2 - \varepsilon x^1, \\ (x^3)' &= x^3. \end{aligned} \quad (16.26)$$

In fact this describes a rotation about the infinitesimal angle ε within the $(x^1 - x^2)$ plane, i.e. ε_2^1 represents a rotation angle; hence $\left(\hat{I}^\nu_\mu\right)^{(12)}$ is the operator which effects infinitesimal rotations in the $(x^1 - x^2)$ plane. Therefore we can say, in general: $\varepsilon_{\mu\nu}$ is the rotation angle about two axes $^2x_\sigma$ and x_ϱ which are perpendicular to the $\mu\nu$ plane and, in addition, the $\mu\nu$ plane remains unchanged by this rotation. All infinitesimal rotations of the group $O(4)$ are rotations in the six planes:

$$x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, x_1x_0, x_2x_0, x_3x_0.$$

The situation is different for the Lorentz group L of the Minkowski space ($x_0 = ict$). Here $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}$ and ε_{31} are real and have the same meaning as in the case of $O(4, R)$; but ε_{10} and ε_{01} are imaginary ($\varepsilon_{10} = -\varepsilon_{01} = i\varepsilon$): if all other $\varepsilon_{\mu\nu}$ vanish, we have

$$\begin{aligned}(x^0)' &= -i\varepsilon x^1 + x^0, \\(x^1)' &= x^1 + i\varepsilon x^0, \\(x^2)' &= x^2, \\(x^3)' &= x^3.\end{aligned}\tag{16.27}$$

This is no rotation, but an infinitesimal special Lorentz transformation along the x^1 axis, which becomes clear if we look at this Lorentz transformation in more detail:

$$\begin{aligned}(x^1)' &= \gamma \left(x^1 + i\frac{v}{c}x^0 \right), \\(x^2)' &= x^2 \\(x^3)' &= x^3, \\(x^0)' &= \gamma \left(-i\frac{v}{c}x^1 + x^0 \right),\end{aligned}$$

where

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

In the case of the two coordinate systems $v/c = \varepsilon \ll 1$ this yields the result (16.27); hence ε_{10} represents the ratio of the relative velocity and the light velocity, and $\left(\hat{I}^\nu_\mu\right)^{(10)}$ is the operator which effects a special Lorentz transformation along the x^1 axis (Lorentz boost). The parameters ε_{20} and ε_{30} and the operators $\left(\hat{I}^\nu_\mu\right)^{(20)}$ and $\left(\hat{I}^\nu_\mu\right)^{(30)}$ have analogous meanings.

By multiple application of the infinitesimal rotation we can perform a rotation about the finite angle ε_{12} :

$$\begin{aligned}(x^\nu)' &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\delta^\nu_\mu + \frac{1}{N} \left(\frac{1}{2} \sum_{\sigma\varrho} \varepsilon_{\sigma\varrho} \left(\hat{I}^\nu_\mu \right)^{(\sigma\varrho)} \right)^N \right) x^\mu \\(x^\nu)' &= \exp \left(\sum_{\sigma\varrho} \varepsilon_{\sigma\varrho} \left(\hat{I}^\nu_\mu \right)^{(\sigma\varrho)} \right) x^\mu,\end{aligned}\tag{16.28}$$

² This is just a manner of speaking analogous to that describing rotations of a plane in $\mathbf{R}^3$. Mathematically it is correct only that $\varepsilon_{\mu\nu}$ causes a rotation of the plane which is spanned by the μ and the ν axes into itself.

i.e. in the case $\varepsilon_{12} \neq 0$ and all other $\varepsilon_{\mu\nu} = 0$, we have

$$(x^\nu)' = \exp \left\{ \varepsilon_{12} \left(\hat{I}_\mu^\nu \right)^{(12)} \right\} x^\mu \quad (16.29)$$

Here we should note that there exist transformations in $O(4)$ which cannot be achieved by infinitesimal transformations (i.e., the space and time inversions). Such examples will be discussed later on.

Remark. If all group elements can be created from the unit element by infinitesimal continuous variation of the parameters, then the group is called connected [$O(4)$ is not connected!].

16.3 Classification of the Subgroups of $O(4)$

Now we want to study the properties of the group $O(4)$ more rigorously. To that end we consider an arbitrary transformation $\hat{a} = [a^\mu_\nu]$. The orthogonality relations read

$$a^\nu_\mu a^\mu_\sigma = \delta^\nu_\sigma \quad (16.30)$$

or, in abbreviated notation,

$$\hat{a}\hat{a} = 11. \quad (16.31)$$

Therefore, for the determinants it holds that

$$\det(\hat{a}\hat{a}) = \det \hat{a} \cdot \det \hat{a} = (\det \hat{a})^2 = 1,$$

which implies

$$\det \hat{a} = \pm 1 \quad (16.32)$$

Transformations with determinants ± 1 are called unimodular: the group $O(4)$ and its subgroups are therefore unimodular. By classifying the elements into those with $\det \hat{a} = +1$ and $\det \hat{a} = -1$, respectively, $O(4)$ is divided into two parts. First we consider the group $O(4, R)$: The part with $\det \hat{a} = +1$ is denoted by $SO(4, R)$ (SO for special orthogonal transformations). Besides the identity transformation, it contains all infinitesimal transformations ($\det(\delta^\nu_\mu + \varepsilon^\nu_\mu) = +1$), i.e. all finite transformations which can be assembled by these infinitesimal transformations belong to the group $SO(4, R)$ (proper four-dimensional rotations). A typical member of the other part of $O(4, R)$ with $\det \hat{a} = -1$ is the coordinate inversion

$$(x^k)' = -x^k \quad , \quad (x^0)' = x^0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (16.33)$$

Since

$$a^\nu_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

this transformation belongs to the group $O(4, R)$ (all a^ν_μ are real) and it cannot be decomposed into infinitesimal transformations. Furthermore this second part of $O(4, R)$ is no group, because it does not contain the identity transformation; but, together with the $SO(4, R)$, it does make up the whole group $O(4, R)$! [These statements are also valid for the $O(3, R)$.] To study the properties of the Lorentz group L in more detail, the situation is more complicated because, in addition to $\det \hat{a} = \pm 1$, we find with the orthogonality relations that

$$a_\mu^0 a_0^\mu = a_k^0 a_0^k + a_0^0 a_0^0 = 1.$$

Since a_0^k is imaginary, it holds that $a_k^0 a_0^k = -|a_k^0|^2$ and consequently

$$(a_0^0)^2 = 1 + |a_k^0|^2 \geq 1,$$

i.e.

$$a_0^0 \geq 1 \text{ or } a_0^0 \leq -1. \quad (16.34)$$

Thus the Lorentz group can be split up into four parts, namely:

- Part I or $L_+^\uparrow$: $\det \hat{a} = +1, a_0^0 \geq 1$ (orthochronous LT),
- Part II or $L_-^\uparrow$: $\det \hat{a} = -1, a_0^0 \geq 1$ (orthochronous LT),
- Part III or $L_-^\downarrow$: $\det \hat{a} = -1, a_0^0 \leq -1$ (antichronous LT),
- Part VI or $L_+^\downarrow$: $\det \hat{a} = +1, a_0^0 \leq -1$ (antichronous LT).

Part I is named the group of proper Lorentz transformations. It includes the unit transformation, infinitesimal transformations and their iterations, i.e. all spatial rotations and the special Lorentz transformations of the Minkowski space.

In the following we shall denote Part I by L_p (p = proper). L_p is a subgroup of L . On the contrary Part II or $L_-^\uparrow$ is no group, and a typical representative member is again space inversion. [Thus everything mentioned in connection with $O(4, R)$ is valid.] Together with $L_p, L_-^\uparrow$ forms the so-called full Lorentz group L_f , which is a subgroup of L . It includes the unit transformation, space rotations, special Lorentz transformations, space inversion as well as any combination of all members.

The basic element of Part III is time reversal

$$\begin{aligned} (x^i)' &= x^i \quad (i = 1, 2, 3), \\ (x^0)' &= -x^0, \end{aligned} \quad (16.36)$$

that is

$$\begin{aligned} a_\mu^\nu &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \det a_\mu^\nu &= -1, a_0^0 = -1. \end{aligned}$$

However, $L_-^\downarrow$ does not form a group because this part does not include the unit transformation. The same is true for Part IV, one example being the total inversion of Minkowski space:

$$(x^\mu)' = -x^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (16.37)$$

$L_+^\downarrow$ is not a group, either.

Together with $L_f, L_+^\downarrow$ form the so-called extended Lorentz group. Because L_f (full Lorentz group) does not change the sign of the zero component of a time-like vector, it is frequently denoted orthochronous Lorentz group.

16.4 The Inhomogeneous Lorentz Group

The inhomogeneous Lorentz group L keeps the distance between two points of the Minkowski space invariant, and the transformation of points x^μ of the Minkowski space by L has been given by $(x^\nu)' = a^\nu_\mu x^\mu$. We now drop the requirement of homogeneity and use the transformation

$$(x^\nu)' = a^\nu_\mu x^\mu + \beta^\nu. \quad (16.38)$$

It can be seen that the term β^ν cancels in the expression for the distance between two points, i.e. (16.38) also keeps the distance between two points invariant, whereby the orthogonality relation $a^\nu_\mu a^\mu_\sigma = \delta^\nu_\sigma$ holds once more. [Of course, the transformations (16.38) do not keep the length of x^μ invariant.] Furthermore β^0 has to be imaginary and the $\beta^i (i = 1, 2, 3)$ have to be real and obviously the β^ν characterize space-time translations. The transformations (16.38) form a group, the so-called inhomogeneous Lorentz group or Poincar group P .

Like the homogeneous Lorentz group, P also disintegrates into four parts, e.g. the proper inhomogeneous Lorentz group [the group theoretical expression: $SO(4)$ corresponds to $ISO(4)$; I for "inhomogeneous"].

P has ten parameters (six independent a^ν_μ and the four components of β^ν). The subgroups of P are the homogeneous Lorentz group L and the four-dimensional group of translations S , whose elements are given by $(x^\nu)' = x^\nu + \beta^\nu$. Because the transformations do not commute with the homogeneous Lorentz transformations, the group P is not the direct product of L and S , i.e.

$$a^\nu_\mu (x^\mu + \beta^\mu) \neq a^\nu_\mu x^\mu + \beta^\nu. \quad (16.39)$$

We now consider the translational group and first look for the infinitesimal generators of the transformation $\hat{P}_\varrho (\varrho = 0, 1, 2, 3)$. The infinitesimal transformation is analogous to (11):

$$\psi \rightarrow \psi' = \left(1 + \frac{i}{\hbar} \varepsilon^\varrho \hat{P}_\varrho \right) \psi \quad (16.40)$$

The ε^ϱ are the infinitesimal transformations, i.e. $(x^\varrho)' = x^\varrho + \varepsilon^\varrho (|\varepsilon^\varrho| \ll 1)$, though because of (16.12) we have

$$\psi((x^\varrho)') = \psi(x^\varrho + \varepsilon^\varrho) = \psi(x^\varrho) + \varepsilon^\varrho \frac{\partial \psi}{\partial x^\varrho}. \quad (16.41)$$

Comparison of (16.40) and (16.41) yields

$$\hat{P}_\varrho = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\varrho} \quad (16.42)$$

which are the generators of the infinitesimal translations. As in the case of nonrelativistic quantum mechanics, the momentum operator is connected with space (time) translations. Each finite translation can be generated by iterative application of (16.42), i.e. according to (16.28) and (16.29) the unitary operator

$$\hat{U} = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \beta^\varrho \hat{P}_\varrho \right] \quad (16.43)$$

is the relativistic translation operator.

The translational group S is an abelian group, because

$$[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] = 0 \quad (16.44)$$

However, $\hat{P}_\varrho$ does not commute with the generators $\left(\hat{I}^\nu_\mu\right)^{(\rho\sigma)}$ (16.13) of the homogeneous Lorentz group and therefore does not commute with the invariants constructed with $\hat{J}^{i(+)}$ and $\hat{J}^{i(-)}$, though it is possible to show that the operators

$$\hat{P}_\mu^2 = \hat{P}_\mu \hat{P}^\mu \quad \text{and} \quad \hat{W}_\lambda = \frac{1}{2} \sum \varepsilon_{\lambda\mu\nu\varrho} \hat{P}^\mu \hat{I}^{(\nu\varrho)} \quad (16.45)$$

commute with all $\hat{I}^{(\varrho\sigma)}$ and $\hat{P}_\varrho$, i.e. $\hat{P}_\mu^2$ and $\hat{W}_\lambda$ are the invariants (Casimir operators) of the Poincaré group. For a free particle we have $P^\mu P_\mu = m_0^2 c^2$, the particle's mass, and the operators $\hat{W}_\lambda$ are connected with the spin of the particle, as will be seen later. Obviously the Casimir operators provide all quantities (mass, spin) necessary for the description of the free particle, which is the reason for the great importance of this group in modern elementary particle physics.

16.5 The Conformal Group

In the preceding section we have seen that the generators of the physically important Poincaré group are given by the six generators of the homogeneous Lorentz group $\left(\hat{I}^\nu_\mu\right)^{(\rho\sigma)}$ and the four generators $\hat{P}_\mu$ of the space-time translations. The Poincaré group can be extended to the 15-parametric conformal group of the four-dimensional Minkowski space, by considering transformations that keep the light-like line element $ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = 0$ invariant. That is, the conformal transformations include changes of length, but keep the angle between two vectors invariant (hence "conformal mapping"); thus we have to add five more generators to the ten generators of the Poincaré group. The first operator is that of scale transformations or dilatation $\hat{D}$ and it yields the transformation

$$(x^\mu)' = \varrho x^\mu \quad (\varrho > 0). \quad (16.46)$$

The four remaining generators $\hat{K}_\mu$ create the so-called proper (special) conformal transformations, which change the length scale point by point, thus forming position-dependent dilatations. These transformations can be written as a product of an inversion $\hat{I}_1$:

$$(x^\mu)' = \frac{k^2}{(x_\nu x^\nu)} x^\mu$$

a translation $\hat{T}$:

$$(x^\mu)'' = (x^\mu)' - a^\mu, \quad (16.47)$$

and a further inversion $\hat{I}_2$:

$$(x^\mu)''' = \frac{k^2}{(x''_\nu x^{\nu\prime\prime})} (x^\mu)''$$

All together, this yields the special conformal transformation $\hat{K} = \hat{I}_2 \hat{T} \hat{I}_1$:

$$(x^\mu)' = \frac{x^\mu - a^\mu x^2}{\sigma(x)}, \quad \text{with} \quad (16.48)$$

$$\sigma(x) = 1 - 2a^\nu x_\nu + a^2 x^2 \quad \text{and} \\ a^2 = a_\nu a^\nu, \quad x^2 = x_\nu x^\nu.$$

For the conformal group we get a total of fifteen infinitesimal generators:

$\left(\hat{I}^\nu_\mu\right)^{(\rho\sigma)}$: six generators of the Lorentz group
 $\hat{P}_\mu$: four generators of the translational group
 $\hat{D}$: one generator of dilatations
 $\hat{K}^\mu$: four generators of special conformal transformations
 Pouncere

It is possible to give an explicit representation of $\hat{D}$ and $\hat{K}_\mu$, by

$$\begin{aligned}
 \hat{D} &= ix^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\
 \hat{K}_\mu &= i \left(2x_\mu x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right).
 \end{aligned} \tag{16.49}$$

Furthermore, one may calculate the commutators of $\hat{D}$ and $\hat{K}_\mu$ with the remaining generators of the conformal group by help of the explicit representations (16.16), (16.20), (16.42) and (16.49): We find

$$\begin{aligned}
 [\hat{P}_\mu, \hat{D}] &= i\hat{P}_\mu, \\
 [\hat{P}_\mu, \hat{K}_\nu] &= 2i \left(g_{\mu\nu} \hat{D} - \left(\hat{I}_{\mu\nu}\right)^{(\varrho\sigma)} \right), \\
 \left[\hat{D}, \left(\hat{I}_{\mu\nu}\right)^{(\varrho\sigma)} \right] &= 0, \\
 [\hat{D}, \hat{K}_\mu] &= i\hat{K}_\mu, \\
 [\hat{K}_\mu, \hat{K}_\nu] &= 0, \\
 \left[\hat{K}_\sigma, \left(\hat{I}_{\mu\nu}\right)^{(\varrho\lambda)} \right] &= i \left(g^{\varrho\lambda} \hat{K}_\sigma - g^{\lambda\sigma} \hat{K}_\varrho \right).
 \end{aligned} \tag{16.50}$$

The importance of the conformal group is based on the fact that, e.g., the Maxwell equations without sources are not only Lorentz invariant but also conformal invariant! However problems do occur in the discussion of the Maxwell equations with source terms or of equations of motion for massive particles: Because of $m_0^2 c^2 = P_\mu P^\mu$ and

$$e^{i\theta\hat{D}} P_\mu P^\mu e^{-i\theta\hat{D}} = e^{2\theta} P_\mu P^\mu, \tag{16.51}$$

the rest mass is not invariant with respect to dilatations, i.e. equations of motion like the Dirac equation including a mass term are not conformal invariant. An exact symmetry of dilatation is thus only possible for a continuous mass spectrum or vanishing mass.

6.4.4 Lorentz Invariance and Relativistic Symmetry Principles 2

16.1 Transformation Relations of the Rest Mass under Dilatations

Problem. Show the validity of (16.51) with the help of (16.50)!

Solution

Use $[\hat{P}_\mu, \hat{D}] = i\hat{P}_\mu$. For any given $\hat{A}$ and $\hat{B}$ the Campbell-Hausdorff relation holds:

$$e^{-\hat{A}}\hat{B}e^{\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!}[\hat{B}, \hat{A}] + \frac{1}{2!}[[\hat{B}, \hat{A}], \hat{A}] + \dots \quad (1)$$

In our case we have $\hat{A} = -i\theta\hat{D}$ and $\hat{B} = \hat{P}_\mu\hat{P}^\mu$, so that

$$\begin{aligned} [\hat{B}, \hat{A}] &= -i\theta [\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu, \hat{D}] \\ &= -i\theta \left\{ [\hat{P}_\mu, \hat{D}] \hat{P}^\mu + \hat{P}_\mu [\hat{P}^\mu, \hat{D}] \right\} \\ &= -i\theta \left\{ i\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu + i\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu \right\} = 2\theta\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu = 2\theta\hat{B}, \end{aligned} \quad (2)$$

i.e. the multiple commutators in (1) always reduce to $[\hat{B}, \hat{A}] = 2\theta\hat{B}$. Thus it is possible to write down the series in a closed form and perform the summation

$$\begin{aligned} e^{i\theta\hat{D}}\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu e^{-i\theta\hat{D}} &= \hat{P}_\mu\hat{P}^\mu + 2\theta\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu + \frac{1}{2!}(2\theta)^2\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu + \dots \\ &= \hat{P}_\mu\hat{P}^\mu \left(1 + \frac{2\theta}{1!} + \frac{1}{2!}(2\theta)^2 + \dots \right) \\ &= e^{2\theta}\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu \end{aligned}$$

16.6 Representations of the Four-Dimensional Orthogonal Group and Its Subgroups

In this section we consider only the homogeneous proper groups.

16.6.1 Tensor Representation of the Proper Groups

We consider a linear space of dimension 4^n . One element or "vector" of this space has 4^n components, which is denoted by $\psi_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n}$ with indices μ_ν equal to 0, 1, 2, 3. In the case of the group $SO(4, R)$ all components are real; however for L_p all components including an odd number of indices "0" are imaginary, all the others being real. [This will become clear at once by taking into account the law of transformation (16.52).] First we look at a proper transformation $x^\nu \rightarrow (x^\nu)' = a^\nu_\mu x^\mu$ of $SO(4, R)$ or L_p . Here ψ should transform like

$$\psi_{\mu_1 \dots \mu_n} \rightarrow \psi'_{\mu_1 \dots \mu_n} = a_{\mu_1}^{\nu_1} a_{\mu_2}^{\nu_2} \dots a_{\mu_n}^{\nu_n} \psi_{\nu_1 \dots \nu_n} \quad (16.52)$$

and the identity transformation reads

$$\psi'_{\mu_1 \dots \mu_n} = \delta_{\mu_1}^{\nu_1} \delta_{\mu_2}^{\nu_2} \dots \delta_{\mu_n}^{\nu_n} \psi_{\nu_1 \dots \nu_n} \quad (16.53)$$

Because of the orthogonality relations for a_μ^ν the transformations (16.52) form a linear transformation group in 4^n dimensions; thus we have found a connection between the group $SO(4, R)$ (of L_p) and the linear transformation group in 4^n dimensions (mathematically: an isomorphism).

Hence one says: The transformations (16.52) form a 4^n -dimensional representation of the group $SO(4, R)$ (or L_p). The elements of the 4^n -dimensional representation space we shall name tensors of rank n , and the tensor transformation has the form

$$\psi_{\mu\nu\dots\varepsilon} \rightarrow \psi'_{\mu\nu\dots\varepsilon} = a_\mu^\rho a_\nu^\sigma \dots a_\varepsilon^\omega \psi_{\rho\sigma\dots\omega}. \quad (16.54)$$

A tensor of rank 2 accordingly transforms like

$$\psi'_{\mu\nu} = a_\mu^\rho a_\nu^\sigma \psi_{\rho\sigma} \quad (16.55)$$

The most simple representation is the one without indices, the scalar representation, where the transformation obeys

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi. \quad (16.56)$$

The next possibility is for $n = 1$, i.e. in 4 dimensions:

$$\psi_\mu \rightarrow \psi'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 a_\mu^\nu \psi_\nu \quad (16.57)$$

This is the vector representation. Since the group $\text{SO}(4, R)$ is four dimensional, the ψ_μ are just the self-representation of the group: we denote the quantities ψ_μ as four-vectors. The next representation is the tensor representation of rank 2, which is $4^2 = 16$ dimensional. The behaviour of this transformation follows

$$\psi_{\mu\nu} \rightarrow \psi'_{\mu\nu} = a_\mu^\rho a_\nu^\sigma \psi_{\rho\sigma}. \quad (16.58)$$

We can also interpret this as follows: The tensors $\psi_{\mu\nu}$ can be written as a 16-component vector in representation space, using the transformation law (16.58), as

$$\psi'_N = A_N^M \psi_M \quad (M, N = 1, \dots, 16) \quad (16.59)$$

whereby the 16×16 matrix A_N^M is built up of the corresponding a_μ^ν . Symbolically we can write this as $A = a \otimes a$. The components of a tensor of rank 2 thus transform like the product of two vector components. In general, tensors of rank n transform with the $4^n \times 4^n$ matrix:

$$\hat{A} = \underbrace{\hat{a} \otimes \hat{a} \otimes \hat{a} \otimes \dots \otimes \hat{a}}_{n \text{ factors}}$$

i.e. the components transform like the product of n vector components. Hence we conclude:

All tensor representations of the group $\text{SO}(4, R)$ and L_p can be reduced to the vector representation (they are reducible). Only the scalar and the vector representation are irreducible.

16.6.2 Spinor Representations

First we consider the representations of the group $\text{SU}(2, C)$, i.e. the group of two-dimensional unitary, unimodular transformations:

$$u'_1 = au_1 + bu_2 \quad , \quad u'_2 = cu_1 + du_2. \quad (16.60)$$

Because of unimodularity

$$\det \hat{M} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 1 \quad (16.61)$$

and because of unitarity

$$\hat{M}^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \hat{M}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (16.62)$$

must hold; therefore $d = a^*$ and $c = -b^*$, i.e.

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (16.63)$$

and (16.61) becomes

$$aa^* + bb^* = |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (16.64)$$

The group elements are the unitary, unimodular matrices

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (16.65)$$

and the group has three real parameters: the complex numbers a and b minus the condition (16.64). These are called the Cayley-Klein parameters.

The elements of the complex linear space which have the transformation behaviour (16.63) are called elementary (or two component) spinors of the three-dimensional space [SU(2) is an isomorph to SO(3, R)].

We consider the linear space of monomials (a monomial of degree v is an expression of the form: $x^a y^b \dots z^c$, where $a + b + \dots c = v$) of degree v :

$$P_k = u_1^{v-k} u_2^k \quad (16.66)$$

(e.g. $P_0 = u_1^v$, $P_1 = u_1^{v-1} u_2$, etc.), where v and k are integers and $0 \leq k \leq v$. For a given v there are $v + 1$ monomials of the form (16.66), i.e. the space is $(v + 1)$ dimensional. It is also the desired representation space of the group SU(2). Applying the transformation $\hat{M}$ on P_k , one notes the following:

1. Because of the linearity of the transformations, application of the $\hat{M}$ results once more in P_k 's, or linear combinations of P_k 's.
2. The product of two SU(2) transformations has the same effect on P_k as the single transformations applied to P_k one after another.
3. The identity transformation of $\hat{M}$ with $a = 1$ and $b = 0$ corresponds to the identity transformation $P_k \rightarrow P_k$ in representation space. To the matrix $\hat{M}$ corresponds a $(v + 1) \times (v + 1)$ matrix in representation space. To find this matrix, we apply $\hat{M}$ on P_k :

$$P'_k = (au_1 + bu_2)^{v-k} (-b^*u_1 + a^*u_2)^k \quad (16.67)$$

Obviously it transforms according to

$$P'_k = \sum_{l=0}^v D_{kl} u_1^{v-l} u_2^l = \sum_{l=0}^v D_{kl} P_l \quad (16.68)$$

after ordering according to monomials of P_k in (16.67). The matrix elements D_{kl} of the matrix $\hat{D}[a(v + 1) \times (v + 1) \text{ matrix}]$ depend on the parameters a and b of the transformation in SU(2).

It is advantageous to introduce the abbreviation $j = v/2$, whereby $j = 0, 1/2, 1, \dots$ can assume all integer or half-integer values. We denote the representation which we have constructed this way by D^j , where $D_j = \{ \dots D^j(\hat{M}) \dots \}$ is the set of $(2j + 1) \times (2j + 1)$ dimensional matrices which depend on the parameters of the SU(2) transformations $\hat{M}$. The corresponding elements of the $(2j + 1)$ -dimensional representation space are called spinors of order $2j$ of the three-dimensional real space.

The most simple representation is D^0 : All elements $\hat{M}$ of SU(2) have as their image the number 1, and the representation $D^{1/2}$ is SU(2) itself: $P_1 = u_1$, $P_2 = u_2$ are the two components of the elements of representation space, higher representations being obtained analogously.

16.2 D^1 Representation of $SU(2)$

Problem. What does the $D^1(\hat{M})$ representation of $SU(2)$ look like? Give the matrix $D^1(\hat{M})$ in the case of

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}.$$

Solution

D^1 operates on three-dimensional space since there are three components of representation space:

$$P_0 = u_1^2, \quad P_1 = u_1 u_2, \quad P_2 = u_2^2,$$

and, additionally, $v = 2j = 2$. With (16.67) and (16.68), it follows that

$$P'_k = \sum_{l=0}^2 D_{kl} P_l = (au_1 + bu_2)^{v-k} (-b^* u_1 + a^* u_2)^k$$

i.e.

$$\begin{aligned} P'_0 &= D_{00} u_1^2 + D_{01} u_1 u_2 + D_{02} u_2^2 \\ &= (au_1 + bu_2)^2 = a^2 u_1^2 + 2abu_1 u_2 + b^2 u_2^2, \\ P'_1 &= D_{10} u_1^2 + D_{11} u_1 u_2 + D_{12} u_2^2 \\ &= (au_1 + bu_2)(-b^* u_1 + a^* u_2) \\ &= -ab^* u_1^2 + (aa^* - bb^*) u_1 u_2 + a^* b u_2^2, \\ P'_2 &= D_{20} u_1^2 + D_{21} u_1 u_2 + D_{22} u_2^2 \\ &= (-b^* u_1 + a^* u_2)^2 = b^{*2} u_1^2 - 2a^* b^* u_1 u_2 + a^{*2} u_2^2. \end{aligned}$$

Comparison of coefficients with

$$\begin{pmatrix} P'_0 \\ P'_1 \\ P'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{00} & D_{01} & D_{02} \\ D_{10} & D_{11} & D_{12} \\ D_{20} & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \text{ yields}$$

$$\hat{D}^1(\hat{M}) = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ -ab^* & (aa^* - bb^*) & a^* b \\ b^{*2} & -2a^* b^* & a^{*2} \end{pmatrix}.$$

One can now show in a lengthy algebraic proof that the representations D^j :

- a) are irreducible, i.e. there is no representation D^{j_1} which could be built up from D^{j_2} , with $j_2 < j_1$; and
- b) the D^{j_2} represent all possible representations of $U(2)$.

16.7 Representation of $SL(2, C)$

The group $SL(2, C)$ is the group of the linear complex 2×2 matrices with the determinant +1. We consider now the four-dimensional unimodular group $SL(2, C)$. The transformations are, analogously to $SU(2)$, given by

$$u'_1 = au_1 + bu_2, \quad u'_2 = cu_1 + du_2 \quad (16.69a)$$

The only restriction now is the unimodularity

$$\det \hat{M} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 1 \quad (16.69b)$$

[The unitarity drops in the case of $\text{SL}(2, C)$.]

Since $\text{SL}(2, C)$ is isomorphic to L_p , we denote the elements $u = (u_1, u_2)$ of $\text{SL}(2, C)$ as two component spinors of Minkowski space.

The complex conjugate transformation to (16.69a) reads

$$\dot{u}'_1 = a^*_1 \dot{u}_1 + b^*_1 \dot{u}_2, \quad \dot{u}'_2 = c^*_1 \dot{u}_1 + d^*_1 \dot{u}_2, \quad (16.70a)$$

with

$$\det \hat{M} = \begin{vmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{vmatrix} = a^* d^* - b^* c^* = 1. \quad (16.70b)$$

The dot on the components (e.g. $\dot{u}_1, \dot{u}_2$ etc.) denotes complex conjugation. Because of the independence of a and a^* etc., the elements $\dot{u} = (\dot{u}_1, \dot{u}_2)$ behave differently under transformations to the elements u , i.e. the group has six real parameters [between the four complex coefficients a, b, c, d there exists only the one complex relation (16.69b)]. Thus the representations split into two groups: The spinors u , to which belong all matrices $\hat{M}$, and the dotted spinors $\dot{u}$, to which belong the matrices $\hat{\dot{M}}$. Correspondingly we construct the monomials analogous to P_k in the spinors of degree v and in the dotted spinors of degree v' as

$$P_{kk'} = u_1^{v-k} \dot{u}_1^{v'-k'} u_2^k \dot{u}_2^{k'}. \quad (16.71)$$

Altogether the monomial (16.71) has the degree $v + v'$, e.g. one has

$$\begin{aligned} P_{00} &= u_1^v \dot{u}_1^{v'}, & P_{01} &= u_1^v \dot{u}_1^{v'-1} u_2, \\ P_{10} &= u_1^{v-1} \dot{u}_1^{v'} u_2, & P_{11} &= u_1^{v-1} \dot{u}_1^{v'-1} u_2 \dot{u}_2, \end{aligned}$$

and since k, k' are integers, then $0 \leq k \leq v$ and $0 \leq k' \leq v'$. For fixed v and v' there are altogether $(v+1)(v'+1)$ monomials, i.e. the representation space has the dimension $(v+1)(v'+1)$ and the monomials (16.71) span this representation space. Now we again introduce $j = v/2$ and $j' = v'/2$ and denote the representations by $D^{jj'}$, where $j, j' = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$. The representation has the dimension $(2j+1)(2j'+1)$ and its elements are called spinors of rank $(2j+1)(2j'+1)$ of Minkowski space. Of course, the representations are not unitary. Now we consider the matrix form of the representation $D^{jj'} = \{ \dots D^{jj'}(\hat{M}, \hat{\dot{M}}) \dots \}$, whose most simple representation is D^{00} , which is one-dimensional and yields the image 1 for every element. The next representation is $D^{\frac{1}{2}0}$, which is the self-representation of $\text{SL}(2, C)$ by the spinors u_1 and u_2 . The four-dimensional representation is based on the elements

$$P_{00} = u_1 \dot{u}_1, P_{01} = u_1 \dot{u}_2, P_{10} = u_2 \dot{u}_1, P_{11} = u_2 \dot{u}_2.$$

With the aid of the unimodularity relation (16.69b) one obtains analogously, for example for $\text{SU}(2)$, the image of the transformation $\hat{M}$ of $\text{SL}(2, C)$:

$$\hat{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\hat{M}, \hat{\dot{M}}) = \begin{pmatrix} aa^* & ab^* & ba^* & bb^* \\ ac^* & ad^* & bc^* & bd^* \\ ca^* & cb^* & da^* & db^* \\ cc^* & cd^* & dc^* & dd^* \end{pmatrix} \quad (16.72)$$

The $D^{jj'}$ represent all irreducible spinor representations of $\text{SL}(2, C)$ and thus also of L_p [because of the isomorphism of $\text{SL}(2, C)$ and L_p].

6.4.5 Lorentz Invariance and Relativistic Symmetry Principles 3

16.8 Representations of $SO(3, R)$

The three-dimensional rotation group $SO(3, R)$ is isomorphous to the group $SU(2)$. We have seen that all irreducible representations of $SU(2)$ are spinor representations, and therefore this holds for $SO(3, R)$, too. We have already constructed the tensor representation to $SO(3, R)$: we now show that the tensor representations are included in the representations D^j , starting with D^1 . Therefore we transform the basis in representation space (P_0, P_1, P_2) with the help of the matrix

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

into

$$\psi = \hat{T}P = \begin{cases} \psi_1 & = -P_0 + P_2 \\ \psi_2 & = -iP_0 - iP_2 \\ \psi_3 & = -2P_1 \end{cases} \quad (16.73)$$

Because of $P' = \hat{D}^1(\hat{M})P$ [we have calculated $\hat{D}^1(\hat{M})$ in Exercise 16.2], it holds that

$$\psi' = \hat{T}\hat{D}^1(\hat{M})\hat{T}^{-1}\psi$$

where

$$\begin{aligned} & \hat{D}^1(\hat{M})\hat{T}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - b^{*2} + a^{*2} & i(a^{*2} + b^{*2} - a^2 - b^2) & -2(ab + a^*b^*) \\ i(a^2 - b^2 - a^{*2} + b^{*2}) & a^2 + b^2 + a^{*2} + b^{*2} & -2i(ab - a^*b^*) \\ 2(ab^* + a^*b) & 2i(a^*b - ab^*) & 2(aa^* - bb^*) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Because of $aa^* + bb^* = 1$, one directly obtains

$$\psi'_i \psi'_i = \psi_i \psi_i = \text{invariant}$$

Furthermore $\det(\hat{T}\hat{D}^1\hat{T}^{-1}) = \det \hat{D}^1 = +1$ and all matrix elements are real. The transformation is therefore identical to the vector transformation $\psi_i \rightarrow \psi'_i = \alpha_i^k \psi_k$. Hence it follows that D^1 is identical to the vector representation. So one can show that (we don't want to give the proof here):

All representations D^j , where j is integer, are tensor representations, while all representations with half-integer j are proper spinor representations.

Now we turn to the Lorentz group.

16.9 Representations of the Lorentz Group L_p

The proper Lorentz group L_p is isomorphic to the group $SL(2, C)$; therefore the spinor representations $D^{jj'}$ are all the irreducible representations of L_p . First we consider the representation $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, which is based on: $P_{00} = u_1 \dot{u}_1$, $P_{01} = u_1 \dot{u}_2$ and $P_{11} = u_2 \dot{u}_2$, these transforming with the matrix $\hat{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\hat{M}, \hat{M})$. Because of $ad - bc = 1$ and $a^*d^* - b^*c^* = 1$, it follows that

$$-P'_{00}P'_{11} + P'_{01}P'_{10} = -P_{00}P_{11} + P_{01}P_{10}. \quad (16.74)$$

With the coordinate transformation $\psi = 1/\sqrt{2}\hat{T}P$ or $P = \sqrt{2}\hat{T}^{-1}\psi$, where

$$\hat{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ i & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad (16.75)$$

we now introduce new axes in P space. This transformation reads explicitly:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}(P_{10} + P_{01}), & \text{or} & & P_{00} &= \psi_3 - i\psi_4, \\ \psi_2 &= \frac{1}{2i}(P_{10} - P_{01}), & & & P_{01} &= \psi_1 - i\psi_2, \\ \psi_3 &= \frac{1}{2}(P_{00} - P_{11}), & & & P_{10} &= \psi_1 + i\psi_2, \\ \psi_4 &= -\frac{1}{2i}(P_{00} + P_{11}), & & & P_{11} &= -\psi_3 - i\psi_4, \end{aligned} \quad (16.76)$$

and one obtains

$$\psi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{T} P' = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{T} \hat{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} (\hat{M} \hat{M}) P = \hat{T} \hat{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} (\hat{M} \hat{M}) \hat{T}^{-1} \psi \quad (16.77)$$

If we insert the $P_{ik}(i, k = 0, 1)$ from (16.76) in (16.74), we see that the transformation (16.77) keeps

$$\psi'_\mu \psi'_\mu = \psi_\mu \psi_\mu$$

invariant.

Because the dot in $P_{00} = u_1 \dot{u}_1$ etc. denotes complex conjugation, one recognizes from (16.77) that ψ_1, ψ_2, ψ_3 are real and ψ_4 is complex. Furthermore

$$\begin{aligned} \det(\hat{T} \hat{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \hat{T}^{-1}) &= \det \hat{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \det \hat{M} \times \det \hat{M} = +1 \quad \text{and} \\ (\hat{T} \hat{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \hat{T}^{-1})_{44} &= \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2) \geq 1 \end{aligned}$$

because of unimodularity. The transformation $\hat{T} \hat{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \hat{T}^{-1}$ transforms the ψ_μ in a manner similar to a four-vector in a proper Lorentz transformation, i.e. the representation $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ is just the vector representation. The representation of the vector ψ_μ by the spinor components P is given in (16.76).

We now show a relation between $\hat{M}$ from $SL(2, C)$ and an element of L_p , taking as an example a rotation around the z axis:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \\ x'_2 &= -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \\ x'_3 &= x_3, \\ x'_0 &= x_0 \end{aligned} \quad (16.78)$$

or, equivalently,

$$\begin{aligned} x'_3 - ix'_0 &= x_3 - ix_0, \\ x'_1 - ix'_2 &= e^{i\varphi} (x_1 - ix_2), \\ x'_1 + ix'_2 &= e^{-i\varphi} (x_1 + ix_2), \\ -x'_3 - ix'_0 &= -x_3 - ix_0. \end{aligned} \quad (16.79)$$

If we compare this with (16.76), it follows for the spinor components that

$$\begin{aligned} P'_{00} &= P_{00}, & P'_{10} &= e^{i\varphi} P_{10}, \\ P'_{01} &= e^{-i\varphi} P_{01}, & P'_{11} &= P_{11}. \end{aligned} \quad (16.80)$$

Comparing this with the general transformation (16.72) we find:

$$\begin{aligned} aa^* &= 1, & ad^* &= e^{i\varphi}, & da^* &= e^{-i\varphi}, & dd^* &= 1 \\ bb^* &= 0, & cc^* &= 0, & & & & \text{etc.} \end{aligned}$$

The solution of these equations is

$$a = \pm e^{i\varphi/2}, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = \pm e^{-i\varphi/2}.$$

The rotation around the z axis by the angle φ corresponds in $\text{SL}(2, C)$ or in $D^{\frac{1}{2}0}$ to the transformation

$$\hat{M} = \hat{D}^{\frac{1}{2}0}(\hat{M}, \hat{M}) = \pm \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad (16.81a)$$

$$\hat{M} = \hat{D}^{0\frac{1}{2}}(\hat{M}, \hat{M}) = \pm \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}, \quad (16.81b)$$

respectively, for the dotted spinors.

In analogy to this one can show, e.g., that the transformation

$$\hat{M} = \hat{D}^{\frac{1}{2}0}(\hat{M}, \hat{M}) = \pm \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1/\gamma \end{pmatrix}$$

corresponds to a special Lorentz transformation of the z axis, where

$$\gamma^2 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

is valid. Therefore the representations $D^{\frac{1}{2}0}$ and $D^{0\frac{1}{2}}$ are not tensor representations, but proper spinor representations. In general one finds for $D^{jj'}$ that

$(j + j')$ integer $\Rightarrow D^{jj'}$ is a tensor representation

$(j + j')$ half integer $\Rightarrow \mathbf{D}^{jj'}$ is a proper spinor representation.

16.10 Spin and the Rotation Group

We consider a field $\psi_\alpha(x_\mu)$ whose components should have a distinct property of transformation, i.e. $\psi_\alpha(x_\mu)$ is a member of a representation space $D^{jj'}$ of the proper Lorentz group L_p . If we perform an infinitesimal Lorentz transformation, then the change in $\psi_\alpha(x_\mu)$ is given with the help of the generators $(\hat{I}^\nu)^{(\sigma\varrho)}$ of the transformation (16.16) and the infinitesimal transformation $\varepsilon_{\sigma\varrho}$ by

$$\delta\psi_\alpha(x_\tau) = \psi'_\alpha(x'_\tau) - \psi_\alpha(x_\tau) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\varrho} (\hat{I}^\beta)^{(\sigma\varrho)} \psi_\beta(x_\tau) \quad (16.82)$$

or, in matrix form,

$$\delta\psi = \psi'(x') - \psi(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\varrho} \hat{I}^{(\sigma\varrho)} \psi(x) \quad (16.83)$$

On the other hand we can only consider the local variation of ψ , not of x ; then, we have

$$\delta^* \psi = \psi'(x) - \psi(x)$$

The quantities $\delta\psi$ and $\delta^*\psi$ are not independent, because $(x')^\tau = x^\tau + \varepsilon^\tau_\sigma x^\sigma$ and therefore

$$\delta^* \psi = \psi'((x')^\tau - \varepsilon^\tau_\sigma x^\sigma) - \psi(x) \quad (16.84)$$

Mow we evaluate this expression in a Taylor series and neglect terms of 2 nd order, which yields

$$\begin{aligned} \delta^* \psi &= \psi'((x')^\tau) - \psi(x^\tau) - \varepsilon^\tau_\sigma x^\sigma \partial_\tau \psi \\ &= \delta\psi - \varepsilon^\tau_\sigma x^\sigma \partial_\tau \psi \end{aligned} \quad (16.85)$$

and therefore

$$\delta^* \psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{\sigma\varrho} \hat{I}^{(\sigma\varrho)} \psi - \varepsilon^\nu_\mu x^\mu \partial_\nu \psi. \quad (16.86)$$

As we sum over σ, ϱ we relabel the indices:

$$\delta^* \psi = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \hat{I}^{(\mu\nu)} - \varepsilon^\nu_\mu x^\mu \partial_\nu \right) \psi. \quad (16.87)$$

Rewriting the second term:

$$\begin{aligned} \varepsilon^\nu_\mu x^\mu \partial_\nu \psi &= \frac{1}{2} \varepsilon^\nu_\mu [(x^\mu \partial_\nu + x_\nu \partial^\mu) + (x^\mu \partial_\nu - x_\nu \partial^\mu)] \psi \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^\nu_\mu (x^\mu \partial_\nu - x_\nu \partial^\mu) \psi \end{aligned} \quad (16.88)$$

then, because of the antisymmetry of ε^ν_μ , it results that

$$\delta^* \psi = \frac{1}{2} \left[-\varepsilon^\nu_\mu (x^\mu \partial_\nu - x_\nu \partial^\mu) + \varepsilon_{\mu\nu} \hat{I}^{(\mu\nu)} \right] \psi.$$

Hence, for the space-like components ($i, k = 1, 2, 3$) one gets

$$\delta^* \psi = \frac{1}{2} \left[-\varepsilon_i^k (x^i \partial_k - x_k \partial^i) + \varepsilon_{ik} \hat{I}^{(ik)} \right] \psi. \quad (16.89)$$

Up to the factor $i/\hbar$ the first expression in brackets is just the angular momentum operator

$$\hat{L}^i_k = \frac{i}{\hbar} (x^i \partial_k - x_k \partial^i). \quad (16.90)$$

The second term, i.e. $(i/\hbar) \hat{I}^{(ik)}$, is independent of the coordinates and therefore also of the coordinate system; thus it is straight-forward to interpret this term as an "inner" angular momentum, i.e. as a spin. With the help of the generators we see that [see (16.21-16.23)]

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 &= \frac{\hbar}{i} \hat{I}^{(32)} = \hbar \left(\hat{J}^{1(+)} + \hat{J}^{1(-)} \right), \\ \hat{S}_2 &= \frac{\hbar}{i} \hat{I}^{(13)} = \hbar \left(\hat{J}^{2(+)} + \hat{J}^{2(-)} \right), \\ \hat{S}_3 &= \frac{\hbar}{i} \hat{I}^{(21)} = \hbar \left(\hat{J}^{3(+)} + \hat{J}^{3(-)} \right). \end{aligned} \quad (16.91)$$

Now, the commutation relations of the $\hat{S}_i$ are a direct consequence of the commutation relations of the $\hat{J}^{i(\pm)}$ and thus of the generators of the infinitesimal Lorentz transformation, i.e.

$$\hat{S}_1\hat{S}_2 - \hat{S}_2\hat{S}_1 = i\hbar\hat{S}_3 \quad (16.92)$$

and cyclic commutations therefrom.

Consequently the operators $\hat{S}_i$ have all the properties of an angular momentum operator: thus for a given integer or half-integer s , $\hat{S}_3$ has the $(2s+1)$ eigenvalues $(-s, -s+1, \dots, s-1, s)$. Furthermore there exists a Casimir operator $\hat{S}^2 = \sum_i \hat{S}_i^2$ with the eigenvalues $\hbar^2 s(s+1)$.

Using these considerations, we define the operator of the total angular momentum to be

$$\hat{M}^{ik} = \frac{\hbar}{i} (x^i \partial^k - x^k \partial^i) + \frac{\hbar}{i} \hat{I}^{(ik)} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}, \quad (16.93)$$

and hence we get from (16.89) that

$$\delta^* \psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} \frac{i}{\hbar} \hat{M}^{ik} \psi \quad (16.94)$$

Thus the coefficient of the local variation of the field defines the operator of the total angular momentum, and we conclude: To determine the spin of the field $\psi(x)$ we must find infinitesimal operators generating space-like rotations in the representation space $D^{jj'}$ which is determined by the transformation properties of ψ . Let us now only consider the subgroup of the Lorentz group L_p which characterizes the space-like rotations. Furthermore we can then conclude: In this case also, the matrices $\hat{M}$ from $SL(2, C)$, which belong to space-like rotations, are unitary [not only unimodular, and thus they do not belong to $SU(2)$]. To understand the consequences we define the direct product of two matrices $\hat{A}$ and $\hat{B}$ as

$$\hat{C} = \hat{A} \otimes \hat{B} \quad (16.95)$$

or, in matrix notation,

$$\hat{C}_{\alpha\beta, \gamma\delta} = \hat{A}_{\alpha\gamma} \hat{B}_{\beta\delta} \quad (16.96)$$

This definition becomes clearer in the following example:

$$\begin{aligned} \hat{A} \otimes \hat{B} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}\hat{B} & a_{12}\hat{B} \\ a_{21}\hat{B} & a_{22}\hat{B} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16.97)$$

Of course this operation is not commutative, i.e.

$$\hat{B} \otimes \hat{A} = \begin{pmatrix} b_{11}\hat{A} & b_{12}\hat{A} \\ b_{21}\hat{A} & b_{22}\hat{A} \end{pmatrix} \neq \hat{A} \otimes \hat{B}$$

With the help of the definition (16.97), one can easily derive the following properties:

1. The direct product of two diagonal matrices is diagonal
2. $(\hat{A} + \hat{B}) \otimes \hat{C} = (\hat{A} \otimes \hat{C}) + (\hat{B} \otimes \hat{C})$

3. If $\hat{A}, \hat{A}'$ are $n \times n$ matrices and $\hat{B}, \hat{B}'$ $m \times m$ matrices, then it holds that $(\hat{A} \otimes \hat{B})(\hat{A}' \otimes \hat{B}') = \hat{A}\hat{A}' \otimes \hat{B}\hat{B}'$
4. If $\hat{A}$ and $\hat{B}$ are unitary, then $\hat{A} \otimes \hat{B}$ is also unitary
5. $\text{tr}(\hat{A} \otimes \hat{B}) = \text{tr} \hat{A} \cdot \text{tr} \hat{B}$

With the help of these definitions we are now able to rewrite the representation (16.72) as

$$\hat{D}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\hat{M}, \hat{M}) = \begin{pmatrix} aa^* & ab^* & ba^* & bb^* \\ ac^* & ad^* & bc^* & bd^* \\ ca^* & cb^* & da^* & db^* \\ cc^* & cd^* & dc^* & dd^* \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}. \quad (16.98)$$

From this example one can conclude that this representation can be described as a direct product, i.e. for the matrices we have

$$\hat{D}^{jj'}(\hat{M}, \hat{M}) = \hat{D}^j(\hat{M}) \otimes \hat{D}^{j'}(\hat{M}). \quad (16.99)$$

The matrices $\hat{D}^j(\hat{M})$ and $\hat{D}^{j'}(\hat{M})$ are not identical with the matrices of the representation $D^j, D^{j'}$ of the $SU(2)$! Of course this is only the case if the matrix $\hat{M}$ is unitary. But this is just the case for space-like rotations. Thus for the total representation space we can write:

$$D^{jj'} \triangleq D^j \otimes D^{j'} \quad (16.100)$$

i.e. for space-like rotations the representation $D^{jj'}$ of the Lorentz group L_p splits up into a direct product of the representations D^j and $D^{j'}$ of the three-dimensional rotation group, each D^j representing a different spin. Therefore, in general a covariant Lorentz field $\psi_\alpha(x_\mu)$ does not possess unique spin representations, but splits up into different spin representations $D^j, D^{j'}$.

First we consider the representation D^j . As we have seen it is $(2j+1)$ dimensional. In this space the infinitesimal operators which determine the spin are $(2j+1) \times (2j+1)$ matrices and consequently have $(2j+1)$ eigenvalues. Degeneracy does not appear, because the quantities spanning up the representation space are linearly independent. But we have seen that these are the $2s+1$ eigenvalues of the spin, i.e. the spin is given by the index j of the representation D^j . For example, $j=0$ belongs to the scalar representation D^0 describing spinless fields. For the vector representation D^1 the spin has the value 1. This becomes clear with help of the infinitesimal operators: For space-like rotations we have:

$$\hat{I}^3 = \hat{I}^{(21)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16.3 Vector Representation and Spin

Problem. Show that spin 1 belongs to the vector representation D^1 .

Solution

The vector representation D^1 is just the selfrepresentation of the space of three-dimensional rotations, i.e. the spin values are given by the eigenvalues of the corresponding generators of the Lorentz group. For threedimensional rotations this is

$$\hat{I}^3 = \hat{I}^{(21)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The characteristic equation reads

$$\det(\hat{I}^3 - \lambda 11) = 0, \text{ i.e.}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 = -\lambda(1 + \lambda^2),$$

hence $\lambda = 0, \pm i$. Because $s = (\hbar/i)\lambda$, one gets $s = (-1, 0, 1)\hbar$.

For the representation $D^{\frac{1}{2}}$, one finds analogously, $s = \hbar/2$, etc. Without prove we note that (16.100) can be written as a sum with the help of a generalized Clebsch-Gordan theorem:

$$D^{jj'} \triangleq D^j \otimes D^{j'} = D^{j+j'} \oplus D^{j+j'-1} \oplus \dots \oplus D^{j-j'} \quad (16.101)$$

Therefore we have, for example,

$$D^{\frac{1}{2}0} \triangleq D^{\frac{1}{2}} \otimes D^0 = D^{\frac{1}{2}},$$

because

$$D^{\frac{1}{2}} = \pm \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}.$$

$D^{\frac{1}{2}}$ is the self-representation of $SU(2)$ (i.e. of all unitary, unimodular matrices), and indeed, $D^{0\frac{1}{2}}$ is a matrix of $SU(2)$ ($D^{\frac{1}{2}}$).

From (16.101) it follows that: the spin which belongs to the representation $D^{jj'}$ is
 half integer, if $j + j'$ is half-integer
 integer, if $j + j'$ is integer

However, this means: the tensor representation belongs to the integer spins, the spinor representation to the half-integer spins.

The described representation is not unique, which is illustrated in the following example: One has

$$D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \triangleq D^{\frac{1}{2}} \otimes D^{\frac{1}{2}} = D^1 \oplus D^0 \quad (16.102)$$

According to our rules $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ describes spin-1 fields. However, we see that (16.102) also contains scalar parts, which do not lead to spin values $s = 1$. To get a unique representation one has to introduce auxiliary fields, which just eliminate this scalar part (D^0). Such auxiliary conditions play an important role in the quantum theory of the Maxwell field.

7 Representations of Poincare Group

7.1 Representation Formalism of the Poincaré Group

7.1.1 Method of Constructing Representations and General Questions

Перейдем к изучению неприводимых представлений группы Пуанкаре. Под группой Пуанкаре мы будем понимать только собственную группу Пуанкаре, содержащую в

качестве подгрупп собственную группу Лоренца и группу трансляции. Как и в случае группы Лоренца, нас будет интересовать только описания пространств неприводимого представления.

Ранее было показано, что группа Пуанкаре имеет два генератора P_μ и $J_{\mu\nu}$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям. (42), (45), (51). Из этих генераторов строятся два оператора Казимира $C_1 = P_\mu P^\mu$ и $C_2 = W^\mu W_\mu$, где W_μ - Вектор Паули-Любаньского (55)

Мы будем рассматривать неприводимые унитарные представления в бесконечномерном пространстве и использовать для векторов этого пространства квантовомеханические обозначения $|\Psi\rangle$. Однако задача, которую мы рассматриваем является чисто математической и прямого отношения к квантовой механике не имеет.

Общая схема построения неприводимого унитарного представления группы Пуанкаре

Известно, что в пространстве неприводимого представления операторы Казимира действуют как операторы умножения на константу. Поэтому для нахождения пространства неприводимого представления можно рассмотреть задачу на собственные значения.

$$\begin{aligned} C_1 |\Psi\rangle &= m^2 |\Psi\rangle \\ C_2 |\Psi\rangle &= l |\Psi\rangle \end{aligned}$$

здесь m^2, l - собственные значения операторов C_1, C_2 соответственно. При этом каждое пространство неприводимого представления характеризуется своими фиксированными значениями параметров m^2, l .

Поставим перед собой задачу о нахождении базиса в пространстве неприводимого представления. Это можно сделать следующим образом. Дополним операторы Казимира C_1, C_2 до полного набора взаимно коммутирующих операторов, добавляя необходимые операторы. Далее рассмотрим задачу на собственные значения для всех операторов этого набора. Соответствующие собственные векторы и формируют искомый базис.

Часть подходящих для полного набора операторов находится сразу, это генераторы трансляций P_μ , коммутирующие со всеми коммутаторами Казимира C_1, C_2 и между собой. Рассмотрим задачу на собственные значения.

$$\begin{aligned} P_\mu |m^2, l, p, \sigma\rangle &= p_\mu |m^2, l, p, \sigma\rangle \\ P^2 |m^2, l, p, \sigma\rangle &= m^2 |m^2, l, p, \sigma\rangle \\ W^2 |m^2, l, p, \sigma\rangle &= l |m^2, l, p, \sigma\rangle \end{aligned}$$

здесь p_μ - собственное значение операторов P_μ . Индекс σ нумерует дополнительные индексы, которые возможно надо ввести, чтобы набор векторов $|m^2, l, p, \sigma\rangle$ формировал базис.

Поскольку $P^2 = P^\mu P_\mu$, то из двух первых уравнений (167) следует, что

$$p^2 = m^2$$

или $p_0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. На трехмерный вектор $\vec{p}$ никаких ограничений не возникает. Поэтому каждый базисный вектор $|m^2, l, p, \sigma\rangle$ неприводимого представления нумеруется вектором $\vec{p}$. Следовательно рассматриваемое пространство неприводимого представления бесконечномерно (как это и должно быть для унитарного представления некомпактной группы Ли). Неприводимое представление группы Пуанкаре принято называть элементарной системой или элементарной частицей, четыре-вектор p^μ принято

называть вектором энергии-импульса этой системы, а параметр m^2 - квадратом массы этой системы. Соотношение (168) представляет собой известную связь между энергией и импульсом релятивистской системы.

Итак, базис неприводимого представления задается векторами $|m^2, l, p, \sigma\rangle$, нумеруемыми величинами $\vec{p}$ и σ . Параметры m^2, l в каждом неприводимом представлении зафиксированы, переменными являются $\vec{p}$ и σ . Заметим, что значения параметра m^2 , в частности знак, не определяются уравнением (167). Кроме того знак p_0 также не определяется этими уравнениями. Отсюда вытекает, что неприводимые представления группы Пуанкаре, с формальной точки зрения, разбиваются на шесть классов:

$$\begin{aligned} \text{класс } (m_+) : \quad & m^2 > 0, \quad p_0 > 0 \\ \text{класс } (m_-) : \quad & m^2 > 0, \quad p_0 < 0 \\ \text{класс } (0_+) : \quad & m^2 = 0, \quad p_0 > 0 \\ \text{класс } (0_-) : \quad & m^2 = 0, \quad p_0 < 0 \\ \text{класс } (M) : \quad & p^2 = -M^2, \quad M^2 > 0 \\ \text{класс } (0_0) : \quad & m^2 = 0, \quad p_\mu = 0 \end{aligned}$$

Из этих шести классов, физический интерес представляют собой только классы (m_+) и (0_+) , отвечающие соответственно массивным и безмассовым элементарным системам с положительной энергией. Классы (m_-) и (0_-) соответствуют системам с отрицательной энергией. Такие системы не имеют наименьшей энергии и не могут быть стабильными, их обычно называют духами, чтобы подчеркнуть, что им не отвечают никакие реально существующие объекты природы. Класс (M) соответствует системам с мнимой массой, такие системы называют тахионами, объекты такого типа в природе не наблюдаются. Класс (0_0) отвечает системе с нулевой энергией и нулевым трехмерным импульсом. Такая система полностью статична и не представляет интереса. Далее мы будем рассматривать представления, отвечающие классу (m_+) и называемые массивными и представления, отвечающие классу (0_+) и называемые безмассовыми.

Рассмотрим действие операторов представления $U(\Lambda, a) = U(a)U(\Lambda)$ на базисные векторы. Действие оператора трансляций легко находится:

$$U(a) |m^2, l, p, \sigma\rangle = e^{ia^\mu P_\mu} |m^2, l, p, \sigma\rangle = e^{ia^\mu p_\mu} |m^2, l, p, \sigma\rangle$$

Действие этих операторов сводится к умножению на фазовый множитель $e^{ia^\mu p_\mu}$, который при переменной a^μ и фиксированном p_μ имеет смысл плоской волны с импульсом p_μ . Это еще раз подчеркивает физический смысл p_μ как вектора энергии-импульса.

Исследуем действие оператора $U(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}}$ на базисные вектора. Рассмотрим

$$P_\mu U(\Lambda) |m^2, l, p, \sigma\rangle = U(\Lambda) U^+(\Lambda) P_\mu U(\Lambda) |m^2, l, p, \sigma\rangle.$$

Здесь использовано, что $U(\Lambda) U^+(\Lambda) = 1$. Поскольку оператор $U(\Lambda)$ генерирует преобразования Лоренца, то

$$U^+(\Lambda) P_\mu U(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu P_\nu$$

(см. (44)). Тогда из (170) следует

$$P_\mu U(\Lambda) |m^2, l, p, \sigma\rangle = \Lambda^\nu{}_\mu P_\nu |m^2, l, p, \sigma\rangle$$

Кроме того, очевидно

$$\begin{aligned} P^2 U(\Lambda) |m^2, l, p, \sigma\rangle &= m^2 U(\Lambda) |m^2, l, p, \sigma\rangle \\ W^2 U(\Lambda) |m^2, l, p, \sigma\rangle &= l U(\Lambda) |m^2, l, p, \sigma\rangle. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что операторы Казимира P^2, W^2 коммутируют с генераторами $J_{\mu\nu}$ и, следовательно с любой функцией от них. Соотношение (172) показывает, что векторы $U(\Lambda)|m^2, l, p, \sigma\rangle$ при любых матрицах Λ принадлежат пространству неприводимого представления с фиксированными значениями m^2, l . Соотношение (171) означает, что вектор $U(\Lambda)|m^2, l, p, \sigma\rangle$ характеризуется лоренц-преобразованным импульсом.

$$\bar{p}_\mu = \Lambda_\mu^\nu p_\nu$$

причем $\bar{p}^2 = p^2 = m^2$. Следовательно базис неприводимого представления включает все векторы вида $|m^2, l, \Lambda p, \sigma\rangle$, где $p_\mu \equiv (\varepsilon(\vec{p}), \vec{p})$, $\varepsilon(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ и матрица Λ пробегает всю собственную группу Лоренца. Если один из множества векторов $|m^2, l, \Lambda p, \sigma\rangle$ удовлетворяет уравнению $W^2 |m^2, l, \Lambda p, \sigma\rangle = l |m^2, l, \Lambda p, \sigma\rangle$, то и любой другой вектор данного вида удовлетворяет рассматриваемому уравнению. Отсюда вытекает идея решения уравнения $W^2 |m^2, l, p, \sigma\rangle = l |m^2, l, p, \sigma\rangle$ и нахождения возможных значений l . Надо из множества импульсов вида (173) выбрать один импульс q_μ такой, чтобы рассматриваемое уравнение имело наиболее простой вид. При этом значение l не зависит от того, какой представитель из q_μ из множества импульсов (173) был выбран.

Однако если на вектор $|m^2, l, q, \sigma\rangle$ подействовать произвольным оператором $U(\Lambda)$, то получим вектор $|m^2, l, \Lambda q, \sigma\rangle$, зависящий от импульсов $\Lambda_\mu^\nu q_\nu \neq q_\mu$. Тогда возникает еще одна идея, а именно сузить множество операторов $U(\Lambda)$, ограничив его только теми операторами $U(\Lambda^{(q)})$, которые содержат подкласс матриц $\Lambda^{(q)}$, не изменяющих вектор q_μ . То есть

$$\Lambda^{(q)\nu}{}_\mu q_\nu = q_\mu$$

Не трудно показать, что множество преобразований Лоренца, удовлетворяющих условию (174) образует группу, называемую группой стабильности вектора q_μ . Обозначим V_q , подпространство векторов $|m^2, l, q, \sigma\rangle$, с фиксированными m, l, q , но с различными σ . При действиями операторами $U(\Lambda^{(q)})$ на векторы из пространства V_q , мы получим векторы, принадлежащие V_q . Не трудно показать, что множество операторов $U(\Lambda^{(q)})$ образуют группу называемую группой стабильности подпространства V_q . Обозначим эту группу H_q .

Выясним структуру группы H_q . Произвольный оператор $U(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}}$ зависит от параметров $\omega^{\mu\nu}$ преобразования Лоренца $\Lambda^\mu{}_\nu$. Найдем параметры $\omega_{\mu\nu}^{(q)}$, отвечающие матрицам $\Lambda^{(q)\mu}{}_\nu$. Запишем $\Lambda^{(q)\mu}{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$. Тогда уравнение (174) примет вид

$$\omega^{(q)\mu\nu} q_\nu = 0$$

Решение этого уравнения есть

$$\omega^{(q)\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} q_\lambda n_\rho = 0,$$

где n_ρ - произвольный вектор. Следовательно операторы $U(\Lambda^{(q)})$ записываются в форме

$$U(\Lambda^{(q)}) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} q_\lambda n_\rho J_{\mu\nu}}$$

и параметризуются компонентами вектора n_ρ . В подпространстве V_q мы можем заменить вектор q_λ оператором P_λ , собственным значением которого он является. Тогда

$$U(\Lambda^{(q)}) = e^{\frac{i}{2}n_\rho \varepsilon^{\rho\lambda\mu\nu} P_\lambda J_{\mu\nu}} = e^{-in_\rho W^\rho}$$

где мы ввели вектор Паули-Любаньского W^ρ (176). Таким образом, группа H_q состоит из операторов вида (178). Генераторами этой группы являются W^ρ , а параметрами n_ρ . В литературе группу H_q принято называть малой группой. Заметим, что в отличие от операторов $U(\Lambda)$ общего вида, нумеруемых шестью параметрами $\omega^{\mu\nu}$, операторы $U(\Lambda^{(q)})$ (178) нумеруются четырьмя параметрами n_ρ .

Таким образом, задача о нахождении возможных значений $l\sigma$ сводится к описанию неприводимых представлений малой группы H_q . Дальнейшее рассмотрение связано с удобным выбором вектора q_μ , этот выбор делается по разному для массивных и безмассовых представлений.

О природе источника в уравнениях Максвелла (!!!!!)

Почему вообще источником может быть само пространство представления?

(???? не знаю)

Потому что есть какая-то конструкция, которая объединяет все представления. я не знаю, какая.

(напишу лучше этот вопрос)

О волновой функции у поля (!!!!!)

(мб крч сторим волновые функции, вот что мы делаем)

Существование всех представлений в одном пространстве (!!!!!)

(пока верю в этом, очень важно понимать, что такое есть.)

Как это, что взаимодействуют разные представления? (!!!!!)

Ну вот нужно понимать их верно, что у нас одно и то же пространство, и просто на нем разное число функций.

(пропишу потом подробнее!)

О фоковском пространстве

О сложении спина и углового момента

О сложении многих спинов многих частиц в атомах

7.1.2 Representations as Action on a Scalar Field

Теория

Let us consider a scalar field $\phi(x^\mu)$, which represents a tensor field of rank $n = 0$ as it is invariant with respect to any Lorentz transformation Λ . Within a passive interpretation of the Lorentz transformation

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \iff x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x'^\nu$$

the four-vectors x^μ and x'^μ denote one and the same space-time point at the original and the transformed coordinate system S and S' , respectively. Due to the invariance of the scalar field the original scalar field $\phi(x^\mu)$ in S must coincide with the transformed scalar field $\phi'(x'^\mu)$ in S' :

$$\phi'(x'^\mu) = \phi(x^\mu).$$

Expressing the original scalar field ϕ via the transformed coordinate system S' we obtain from (6.89) and (6.90):

$$\phi'(x'^\mu) = \phi((\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x'^\nu).$$

In order to simplify our notation in view of the following considerations, we omit from now on the prime' at the respective four-vectors:

$$\phi'(x^\mu) = \phi((\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu).$$

Specializing (6.92) with the help of (6.39) and (6.42) to infinitesimal Lorentz transformations, we obtain up to first order in the expansion coefficients $\omega_{\alpha\beta}$:

$$\phi'(x^\mu) = \phi\left(x^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(L^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu x^\nu\right) = \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\hat{L}^{\alpha\beta}\right)\phi(x^\mu),$$

where the differential operators $\hat{L}^{\alpha\beta}$ are given by

$$\hat{L}^{\alpha\beta} = - (L^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu.$$

Due to the representation matrices (6.44) the differential operators turn out to be of the form

$$\hat{L}^{\alpha\beta} = i(x^\alpha \partial^\beta - x^\beta \partial^\alpha).$$

Taking into account the definition of the four-momentum operator in quantum mechanics

$$\hat{p}^\alpha = i\hbar\partial^\alpha$$

Eq. (6.95) reduces to dimensionless angular momentum operators

$$\hat{L}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\hbar}(x^\alpha \hat{p}^\beta - x^\beta \hat{p}^\alpha).$$

Note that the components of the space-time four-vector and the momentum four-vector operator fulfill

$$[\hat{p}^\alpha, x^\beta]_- = i\hbar g^{\alpha\gamma} [\partial_\gamma, x^\beta]_- = i\hbar g^{\alpha\beta}.$$

Here we have taken into account that differentiating with respect to the components of a contravariant four-vector yields the components of a covariant four-vector:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

From (3.10) and (6.98) we get the following set of commutation relations:

$$\begin{aligned} [\hat{L}^{\alpha\beta}, x^\gamma]_- &= - (L^{\alpha\beta})^\gamma{}_\delta x^\delta \\ [\hat{L}^{\alpha\beta}, \hat{p}^\gamma]_- &= - (L^{\alpha\beta})^\gamma{}_\delta \hat{p}^\delta \end{aligned}$$

Due to the commutation relations (6.100) and (6.101) one denotes the space-time four-vector x^λ and the momentum four-vector operator $\hat{p}^\lambda$ as vector operators. Correspondingly

one considers an operator $\hat{O}^{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ as a tensor operator of rank n if it transforms in each index $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ as a vector:

$$\left[\hat{L}^{\mu\nu}, \hat{O}^{\lambda_1 \dots \lambda_n} \right]_- = - \sum_{k=1}^n (L^{\mu\nu})^{\lambda_k}{}_{\kappa} \hat{O}^{\lambda_1 \dots \lambda_{k-1} \kappa \lambda_{k+1} \dots \lambda_n}$$

The commutation relations (6.100) and (6.101) now allow to determine the commutation relations between the angular momentum operators (6.97) by taking into account (3.43):

$$\left[\hat{L}^{\alpha\beta}, \hat{L}^{\gamma\delta} \right]_- = i \left(g^{\alpha\delta} \hat{L}^{\beta\gamma} + g^{\beta\gamma} \hat{L}^{\alpha\delta} - g^{\alpha\gamma} \hat{L}^{\beta\delta} - g^{\beta\delta} \hat{L}^{\alpha\gamma} \right).$$

Comparing (6.47) with (6.103) we conclude that also the angular momentum operators $\hat{L}^{\alpha\beta}$ fulfill the commutation relations of the Lorentz algebra. Therefore, the angular momentum operators $\hat{L}^{\alpha\beta}$ are considered as a representation of the Lorentz algebra in the Hilbert space of scalar fields. Furthermore, with the help of the representation matrices (6.43) we can rewrite (6.103) according to

$$\left[\hat{L}^{\alpha\beta}, \hat{L}^{\gamma\delta} \right]_- = - (L^{\alpha\beta})^{\gamma}{}_{\sigma} \hat{L}^{\sigma\delta} - (L^{\alpha\beta})^{\delta}{}_{\sigma} \hat{L}^{\gamma\sigma}.$$

Thus, the angular momentum operators $\hat{L}^{\alpha\beta}$ represent in the sense of (6.102) tensor operators of rank 2.

7.1.3 Representations as Action on a Vector/Spinor Field

Теория

Now we consider a tensor or a spinor field $\psi^{\sigma}(x^{\mu})$, where the index σ stands for the respective tensor or spinor indices. Performing a Lorentz transformation one has to take into account that this affects both the space-time four-vector x^{μ} and the tensor or spinor components ψ^{σ} . Let us consider at first the concrete example of a four-vector $A^{\sigma}(x^{\mu})$, which represents a tensor field of rank $n = 1$ as one Lorentz matrix Λ is involved in transforming the tensor or spinor components ψ^{σ} :

$$A'^{\sigma}(x'^{\mu}) = \Lambda^{\sigma}{}_{\tau} A^{\tau}(x^{\mu}).$$

Reexpressing the space-time components of the original four-vector A^{τ} in S via the transformed coordinate system S' , one yields

$$A^{\sigma\sigma}(x^{\mu}) = \Lambda^{\sigma}{}_{\tau} A^{\tau}((\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}),$$

where again the prime ' at the space-time four-vector has been omitted in order to simplify the notation. Afterwards we specialize (6.106) with the help of (6.39) and (6.42) to infinitesimal Lorentz transformations and obtain up to first order in the expansion coefficients $\omega_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} A'^{\sigma}(x^{\mu}) &= \left\{ g^{\sigma}{}_{\tau} - \frac{i}{2} (L^{\alpha\beta})^{\sigma}{}_{\tau} \omega_{\alpha\beta} \right\} \left\{ A^{\tau}(x^{\mu}) + \frac{i}{2} (L^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} \omega_{\alpha\beta} x^{\nu} \partial_{\mu} A^{\tau}(x^{\mu}) \right\} \\ \implies A'^{\sigma}(x^{\mu}) &= \left\{ g^{\sigma}{}_{\tau} - \frac{i}{2} (\hat{M}^{\alpha\beta})^{\sigma}{}_{\tau} \omega_{\alpha\beta} \right\} A^{\tau}(x^{\mu}) \end{aligned}$$

Here the operator $\hat{M}^{\alpha\beta}$ turns out to be additive in the representation matrices (6.43) and the angular momentum operator (6.97):

$$\hat{M}^{\alpha\beta} = \hat{L}^{\alpha\beta} + L^{\alpha\beta}.$$

Thus, from (6.45) and (6.97) we read off the anti-symmetry

$$\hat{M}^{\alpha\beta} = -\hat{M}^{\beta\alpha}.$$

As both the representation matrices $L^{\alpha\beta}$ and the angular momentum operators $\hat{L}^{\alpha\beta}$ fulfill according to (6.47) and (6.103) the Lorentz algebra as well as they commute with each other

$$\left[L^{\alpha\beta}, \hat{L}^{\gamma\delta} \right]_- = 0,$$

we conclude that also the operators $\hat{M}^{\alpha\beta}$ fulfill the Lorentz algebra:

$$\left[\hat{M}^{\alpha\beta}, \hat{M}^{\gamma\delta} \right]_- = i \left(g^{\alpha\delta} \hat{M}^{\beta\gamma} + g^{\beta\gamma} \hat{M}^{\alpha\delta} - g^{\alpha\gamma} \hat{M}^{\beta\delta} - g^{\beta\delta} \hat{M}^{\alpha\gamma} \right).$$

Now we return back to the general case of a tensor or spinor field $\psi^\sigma(x^\mu)$. Performing an infinitesimal Lorentz transformation we have then in analogy to (6.107)

$$\psi'^\sigma(x^\mu) = \left\{ g^\sigma{}_\tau - \frac{i}{2} \left(\hat{M}^{\alpha\beta} \right)_\tau^\sigma \omega_{\alpha\beta} \right\} \psi^\tau(x^\mu),$$

where the operator $\hat{M}^{\alpha\beta}$ has a decomposition similar to (6.108):

$$\hat{M}^{\alpha\beta} = \hat{L}^{\alpha\beta} + N^{\alpha\beta}.$$

Here the matrices $N^{\alpha\beta}$ are a tensor or spinor representation of the Lorentz algebra and, therefore, they must fulfill the commutator relation

$$\left[N^{\alpha\beta}, N^{\gamma\delta} \right]_- = i \left(g^{\alpha\delta} N^{\beta\gamma} + g^{\beta\gamma} N^{\alpha\delta} - g^{\alpha\gamma} N^{\beta\delta} - g^{\beta\delta} N^{\alpha\gamma} \right).$$

Furthermore, both representations $\hat{L}^{\alpha\beta}$ and $N^{\alpha\beta}$ of the Lorentz algebra in Minkowski space and in the space of the tensor or spinor components are independent from each other, implying

$$\left[N^{\alpha\beta}, \hat{L}^{\gamma\delta} \right]_- = 0.$$

From this we then read off that also the operators $\hat{M}^{\alpha\beta}$ defined in (6.113) fulfill the commutation relation (6.111) of the Lorentz algebra. They are a representation of the Lorentz algebra in the Hilbert space of tensor or spinor fields. In addition, as $\hat{L}^{\alpha\beta}$ coincides with the orbital angular momentum (6.97), one can identify the representation $N^{\alpha\beta}$ of the Lorentz algebra in the space of the tensor or spinor components with the spin angular momentum and, thus, $\hat{M}^{\alpha\beta}$ with the total angular momentum.

Также

With this as well as (6.44), (6.101), and (6.113) we then obtain

$$\left[\hat{M}^{\alpha\beta}, \hat{p}^\gamma \right]_- = i \left(g^{\beta\gamma} \hat{p}^\alpha - g^{\alpha\gamma} \hat{p}^\beta \right).$$

And we remark that the commutator relations between the total momentum (6.113) were already obtained in (6.111) and are characteristic of the Lorentz algebra. From (6.113) we read off due to the Lie theorem that the Lorentz algebra is a non-abelian subgroup of the Poincaré group.

Finally, the definition (6.102) of a tensor operators $\hat{O}^{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ of rank n for the Lorentz algebra is straight-forwardly extended to the Poincaré algebra according to

$$\left[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{O}^{\lambda_1 \dots \lambda_n} \right]_- = - \sum_{k=1}^n (L^{\mu\nu})^{\lambda_k}{}_{\kappa} \hat{O}^{\lambda_1 \dots \lambda_{k-1} \kappa \lambda_{k+1} \dots \lambda_n}$$

With the help of the representation matrices (6.44) the commutator relations (6.113) and (6.133) can then be rewritten as

$$\begin{aligned} \left[\hat{M}^{\alpha\beta}, \hat{p}^\gamma \right]_- &= - (L^{\alpha\beta})^\gamma{}_\delta \hat{p}^\delta, \\ \left[\hat{M}^{\alpha\beta}, \hat{M}^{\gamma\delta} \right]_- &= - (L^{\alpha\beta})^\gamma{}_\sigma \hat{M}^{\sigma\delta} - (L^{\alpha\beta})^\delta{}_\sigma \hat{M}^{\gamma\sigma}. \end{aligned}$$

Thus, according to (6.134), $\hat{p}^\alpha$ and $\hat{M}^{\alpha\beta}$ represent tensor operators of rank $n = 1$ and $n = 2$, respectively.

7.1.4 Generators of the $SL(2|\mathbb{C})$ Group

Генераторы группы $SL(2|\mathbb{C})$ в фундаментальном и сопряженном представлениях

Теория

В фундаментальном представлении группа $SL(2|\mathbb{C})$ задается комплексными 2×2 матрицами N с определителем равным единице. Матрицы N действуют линейным пространством левых вейлевских спиноров по правилу.

$$\psi'_a = N_a^b \psi_b$$

В окрестности единицы $N = E + T$ или $N_a^b = \delta_a^b + T_a^b$, где E - единичная 2×2 матрица, а T_a^b 2×2 матрица с бесконечно малыми элементами. В низшем порядке по T имеет место равенство $\det N = 1 + \text{tr} T$. Поскольку $\det N = 1$, то $\text{tr} T = 0$. Разложим матрицу T по базису σ_μ . Так как $\text{tr} \sigma_0 = 2, \text{tr} \sigma_i = 0$, то $T = z_i \sigma_i$, где z_i - произвольные комплексные числа. Мы видим, что в окрестности единицы каждая матрица N задается шестью вещественными параметрами $\text{Re } z_i, \text{Im } z_i; i = 1, 2, 3$.

Известно, что в окрестности единичного элемента, каждый элемент представления группы Лоренца записывается в виде $e^{\frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}}$ где $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$ - шесть вещественных параметров, а $J_{\alpha\beta}$ - генераторы группы Лоренца в рассматриваемом представлении. Наша цель найти генераторы $J_{\alpha\beta}$ в фундаментальном и сопряженном представлениях.

В окрестностях единичного элемента $e^{\frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}} = 1 + T$. В фундаментальном представлении $T = z_i \sigma_i$. Покажем, что выражение $z_i \sigma_i$ можно тождественно переписать как $\frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}$, где $\omega^{\alpha\beta}$ вещественные параметры.

Рассмотрим

$$\frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} = \omega^{0i} \sigma_{0i} + \frac{1}{2} \omega^{ij} \sigma_{ij}$$

Из определения $\sigma_{\mu\nu}$ имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{0i} &= -\frac{1}{4} (\sigma_0 \tilde{\sigma}_i - \sigma_i \tilde{\sigma}_0) = -\frac{1}{4} (-\sigma_i - \sigma_i) = \frac{1}{2} \sigma_i \\ \sigma_{ij} &= -\frac{1}{4} (\sigma_i \tilde{\sigma}_j - \sigma_j \tilde{\sigma}_i) = \frac{1}{4} (\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i) = \frac{1}{4} [\sigma_i, \sigma_j] = \frac{i}{4} \varepsilon_{ijk} \sigma_k \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\omega^{0i}\sigma_i + \frac{i}{4}\omega^{ij}\varepsilon_{ijk}\sigma_k = \\
&= \frac{1}{2}\omega^{01}\sigma_1 + \frac{1}{2}\omega^{02}\sigma_2 + \frac{1}{2}\omega^{03}\sigma_3 + \\
&+ \frac{i}{2}\omega^{12}\sigma_3 + \frac{i}{2}\omega^{23}\sigma_1 + \frac{i}{2}\omega^{31}\sigma_2 = \\
&= \frac{1}{2}(\omega^{01} + i\omega^{23})\sigma_1 + \frac{1}{2}(\omega^{02} + i\omega^{31})\sigma_2 + \frac{1}{2}(\omega^{03} + i\omega^{12})\sigma_3
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что комплексные параметры z_i есть

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{2}(\omega^{01} + i\omega^{23})\sigma_1 \\
z_2 &= \frac{1}{2}(\omega^{02} + i\omega^{31})\sigma_2 \\
z_3 &= \frac{1}{2}(\omega^{03} + i\omega^{12})\sigma_3
\end{aligned}$$

Таким образом, в окрестности единичного элемента

$$N = E + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = E + \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(-i\sigma_{\alpha\beta})$$

Следовательно генераторы группы Лоренца в фундаментальном представлении имеют вид:

$$(J_{\alpha\beta})^F = -i\sigma_{\alpha\beta}$$

Значок F указывает на фундаментальное представление. Используя (148) можно записать бесконечно малую форму преобразования левого вейлевского спинора при преобразованиях Лоренца. Имеем

$$\psi'_a = N_a{}^b\psi_b = \left(\delta_a{}^b + \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(-i\sigma_{\alpha\beta})_a{}^b\right)\psi_b = \psi_a + \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(-i\sigma_{\alpha\beta})_a{}^b\psi_b$$

Отсюда

$$\delta\psi_a = \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(-i\sigma_{\alpha\beta})_a{}^b\psi_b$$

Перейдем к нахождению генераторов группы Лоренца в сопряженном представлении. Совершим комплексное сопряжение в соотношении (149), получим

$$\delta\bar{\psi}_{\dot{a}} = -\frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(i\sigma_{\alpha\beta})_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}\bar{\psi}_{\dot{b}}$$

или

$$\delta\bar{\psi}^{\dot{a}} = \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot{a}\dot{c}}(-i\sigma_{\alpha\beta})_{\dot{c}}{}^{\dot{d}}\varepsilon_{\dot{d}\dot{b}}\bar{\psi}^{\dot{b}}$$

Прямым вычислением компонент можно показать, что

$$\varepsilon^{\dot{a}\dot{c}}(\sigma_{\alpha\beta}^*)_{\dot{c}}{}^{\dot{d}}\varepsilon_{\dot{d}\dot{b}} = (\tilde{\sigma}_{\alpha\beta})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}$$

Поэтому

$$\delta\bar{\psi}^{\dot{a}} = \frac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}(-i\tilde{\sigma}_{\alpha\beta})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\bar{\psi}^{\dot{b}}$$

Отсюда следует, что генераторы группы Лоренца в сопряженном представлении имеют вид

$$(J_{\alpha\beta})^{\bar{F}} = -i\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$$

Значок $\bar{F}$ указывает на сопряженное представление.

7.1.5 Irreducible Representation of the Proper Lorentz Group

Тензорное представление

Начнем с хорошо известных понятий. Рассмотрим множество системы координат, связанных друг с другом преобразованиями Лоренца

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

где матрица Λ удовлетворяет условию $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$. Будем называть такие системы координат допустимыми.

Пусть в некоторой допустимой системе координат (x^{μ}) задан набор 4^{m+n} чисел $t^{\mu_1 \dots \mu_m} \nu_1 \dots \nu_n$ и пусть в любой другой допустимой системе координат (x'^{μ}) задан набор 4^{m+n} чисел $t'^{\mu_1 \dots \mu_m} \nu_1 \dots \nu_n$. Если эти наборы связаны друг с другом следующим образом

$$t'^{\mu_1 \dots \mu_m} \nu_1 \dots \nu_n (x') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x'^{\alpha_m}} \frac{\partial x'^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\beta_n}}{\partial x'^{\nu_n}} t^{\alpha_1 \dots \alpha_m} \beta_1 \dots \beta_n,$$

то говорят, что задан тензор ранга $m + n$. Числа $t^{\mu_1 \dots \mu_m} \nu_1 \dots \nu_n$ называются компонентами тензора в системе координат (x^{μ}) . Верхние индексы называются контравариантными, нижние ковариантными.

Соотношение (67) определяет тензор в фиксированной точке пространства Минковского. Тензор, заданный в каждой точке пространства Минковского или в какой-нибудь его области называется тензорным полем.

Поскольку в пространстве Минковского задана метрика $\eta_{\mu\nu}$, позволяющая поднимать и опускать индексы, то в принципе можно не различать контравариантные и ковариантные индексы и говорить просто о тензоре ранга $m + n$. Однако, конечно при проведении конкретных вычислений необходимо следить за положением индексов.

Тензор нулевого ранга называется скаляром. В этом случае определяющее соотношение (67) выглядит так:

$$\varphi'(\Lambda x) = \varphi(x)$$

Тензор с компонентами $t^{\mu}(x)$ называется контравариантным вектором. Определяющее соотношение (67) имеет в этом случае вид

$$t'^{\mu}(\Lambda x) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} t^{\nu}(x).$$

Но $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda^{\mu}_{\nu}$. Поэтому получаем

$$t'^{\mu}(\Lambda x) = \Lambda^{\mu}_{\nu} t^{\nu}(x).$$

Тензор с компонентами t_{μ} называется ковариантным вектором. Определяющее соотношение (67) в этом случае есть

$$t'_{\mu}(\Lambda x) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} t_{\nu}(x).$$

Найдем $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$. Рассмотрим тождество

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\nu} = \delta^\alpha_\nu,$$

Отсюда

$$\Lambda^\alpha_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \delta^\alpha_\nu.$$

Или

$$\underbrace{(\Lambda^{-1})^\rho_\alpha \Lambda^\alpha_\mu}_{\delta^\rho_\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = (\Lambda^{-1})^\rho_\alpha \delta^\alpha_\nu$$

Поэтому

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = (\Lambda^{-1})^\rho_\nu = (\Lambda^{-1})^T{}^\rho_\nu$$

Следовательно закон преобразования компонент ковариантного вектора записывается в виде

$$t'_\mu(\Lambda x) = (\Lambda^{-1})^T{}^\nu_\mu t_\nu(x)$$

Как мы уже отмечали, метрика $\eta_{\mu\nu}$ позволяет поднимать и опускать индексы. То есть если заданы контравариантные компоненты t^μ , то им можно сопоставить ковариантные компоненты $t_\mu = \eta_{\mu\nu} t^\nu$ и наоборот, если заданы ковариантные компоненты t_μ , то им можно сопоставить ковариантные компоненты $t^\mu = \eta^{\mu\nu} t_\nu$.

В общем случае тензора ранга $m + n$ соотношения (67) принимает вид

$$\begin{aligned} t'^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}(\Lambda x) &= \\ &= \Lambda^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_m}_{\alpha_m} (\Lambda^{-1})^T{}^{\beta_1}_{\nu_1} \dots (\Lambda^{-1})^T{}^{\beta_n}_{\nu_n} t^{\alpha_1 \dots \alpha_m}{}_{\beta_1 \dots \beta_n}(x) \end{aligned}$$

Соотношение (71) можно интерпретировать следующим образом. Каждому допустимому преобразованию координат $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, то есть каждой матрице Λ , осуществляющей преобразование Лоренца, однозначно сопоставляется матрица

$$R^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}(\Lambda) = \Lambda^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_m}_{\alpha_m} (\Lambda^{-1})^T{}^{\beta_1}_{\nu_1} \dots (\Lambda^{-1})^T{}^{\beta_n}_{\nu_n},$$

действующая в линейном пространстве тензорных полей ранга $m + n$. Это означает, что определено отображение

$$\Lambda \longrightarrow \underbrace{\Lambda \otimes \Lambda \otimes \dots \otimes \Lambda}_m \otimes \underbrace{(\Lambda^{-1})^T \otimes \dots \otimes (\Lambda^{-1})^T}_n$$

Символ $\otimes$ означает прямое произведение матриц. То есть, если матрица Λ действует в линейном пространстве векторов по правилу $t'^\mu = \Lambda^\mu_\nu t^\nu$, то матрица $\Lambda \otimes \Lambda$ действует в линейном пространстве тензоров второго ранга с компонентами $t^{\mu_1 \mu_2}$ по правилу $t'^{\mu_1 \mu_2} = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}_{\nu_2} t^{\nu_1 \nu_2}$. Матрица $(\Lambda^{-1})^T \otimes (\Lambda^{-1})^T$ действует в линейном пространстве тензоров второго ранга с компонентами $t_{\mu\nu}$ по правилу $t'_{\mu_1 \mu_2} = (\Lambda^{-1})^T{}^{\nu_1}_{\mu_1} (\Lambda^{-1})^T{}^{\nu_2}_{\mu_2} t_{\nu_1 \nu_2}$.

Не трудно проверить, что соотношение (71) или, что тоже самое, соотношение (73), задает гомоморфизм группы Лоренца в группу операторов в линейном пространстве тензоров ранга $m + n$ с компонентами $t^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}$. Другими словами, соотношение (71) задает представление группы Лоренца, которое называется тензорным представлением.

Построенное тензорное представление в общем случае приводимо. Пространство неприводимого представления строится с помощью операций симметризации, антисимметризации и взятия следа. Мы позднее рассмотрим явную конструкцию, а пока разберем один пример.

Пусть $t^{\mu_1\mu_2}$ компоненты тензора второго ранга. Тогда

$$t^{\mu_1\mu_2} = t^{(\mu_1\mu_2)} + t^{[\mu_1\mu_2]},$$

где

$$\begin{aligned} t^{(\mu_1\mu_2)} &:= \frac{1}{2} (t^{\mu_1\mu_2} + t^{\mu_2\mu_1}) \\ t^{[\mu_1\mu_2]} &:= \frac{1}{2} (t^{\mu_1\mu_2} - t^{\mu_2\mu_1}) \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} t^{(\mu_1\mu_2)} &= t^{(\mu_1\mu_2)} \\ t^{[\mu_1\mu_2]} &= -t^{[\mu_1\mu_2]} \end{aligned}$$

Компоненты $t^{(\mu_1\mu_2)}$ определяют симметричный тензор второго ранга, а компоненты $t^{[\mu_1\mu_2]}$ определяют антисимметричный.

Обозначим след рассматриваемого тензора как

$$t = \eta_{\mu_1\mu_2} t^{\mu_1\mu_2}$$

тогда

$$t^{\mu_1\mu_2} = \tilde{t}^{\mu_1\mu_2} + \frac{1}{4} \eta^{\mu_1\mu_2} t$$

где $\tilde{t}^{\mu_1\mu_2}$ - компоненты бесследового тензора, $\eta_{\mu_1\mu_2} \tilde{t}^{\mu_1\mu_2} = 0$. Ясно, что

$$\tilde{t}^{\mu_1\mu_2} = t^{\mu_1\mu_2} - \frac{1}{4} \eta^{\mu_1\mu_2} t$$

Поскольку $\eta_{\mu_1\mu_2} t^{[\mu_1\mu_2]} = 0$, то $t = \eta_{\mu_1\mu_2} t^{\mu_1\mu_2} = \eta_{\mu_1\mu_2} t^{(\mu_1\mu_2)}$. Таким образом для произвольного тензора второго ранга имеем разложение

$$t^{\mu_1\mu_2} = \tilde{t}^{\mu_1\mu_2} + t^{[\mu_1\mu_2]} + \frac{1}{4} \eta^{\mu_1\mu_2} t.$$

При этом компоненты $\tilde{t}^{(\mu_1\mu_2)}, \tilde{t}^{[\mu_1\mu_2]}, t$ преобразуются относительно преобразований Лоренца независимо друг от друга и определяют три подпространства неприводимого представления: симметричное бесследовое представление, антисимметричное представление и скалярное представление.

Очевидно, что подобное рассмотрение можно проверить для тензора произвольного ранга, однако более удобно это делать в других терминах.

Найдем явный вид генераторов группы Лоренца в скалярном и векторном представлениях. Рассмотрим бесконечно малую форму преобразований Лоренца

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= x^{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \\ \omega_{\mu\nu} &= -\omega_{\nu\mu} \end{aligned}$$

Из соотношения (68) имеем

$$\varphi'(x + \omega x) = \varphi(x)$$

или

$$\varphi'(x) + \partial_\mu \varphi(x) \omega^\mu_\nu x^\nu = \varphi(x)$$

Обозначим $\delta\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta\varphi(x) &= -\partial_\mu \varphi \omega^\mu_\nu x^\nu = \\ &= -\omega^{\alpha\beta} (\eta_{\beta\nu} x^\nu \partial_\alpha \varphi) = \\ &= -\frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} (\eta_{\beta\nu} x^\nu \partial_\alpha \varphi - \eta_{\alpha\nu} x^\nu \partial_\beta \varphi) = \\ &= \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta} \varphi \end{aligned}$$

где

$$J_{\alpha\beta} = i (\eta_{\beta\nu} x^\nu \partial_\alpha - \eta_{\alpha\nu} x^\nu \partial_\beta)$$

Оператор $J_{\alpha\beta}$ (79) называется генератором преобразований Лоренца в скалярном представлении. Непосредственными вычислениями можно показать, что оператор $J_{\alpha\beta}$ (79) удовлетворяет коммутационным соотношениям (51).

Обратимся теперь к соотношению (69). Имеем

$$t'^\mu(x + \omega x) = (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) t^\nu(x)$$

или

$$t'^\mu(x) + \partial_\nu t^\mu \omega^\nu_\rho x^\rho = t^\mu(x) + \omega^\mu_\nu t^\nu(x)$$

Обозначим $\delta t^\mu(x) = t'^\mu(x) - t^\mu(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta t^\mu(x) &= -\partial_\nu t^\mu \omega^\mu_\rho x^\rho + \omega^\mu_\nu t^\nu = \\ &= \omega^{\alpha\beta} \delta^\mu_\alpha \eta_{\beta\nu} t^\nu - \omega^{\alpha\beta} \partial_\alpha t^\mu \eta_{\beta\nu} x^\nu = \\ &= \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} [i (\eta_{\beta\lambda} x^\lambda \partial_\alpha - \eta_{\alpha\lambda} x^\lambda \partial_\beta) \delta^\mu_\nu t^\nu - \\ &\quad - i (\delta^\mu_\alpha \eta_{\beta\nu} - \delta^\mu_\beta \eta_{\alpha\nu}) t^\nu] = \\ &= \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} (J_{\alpha\beta})^\mu_\nu t^\nu \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (J_{\alpha\beta})^\mu_\nu &= (L_{\alpha\beta})^\mu_\nu + (S_{\alpha\beta})^\mu_\nu \\ (L_{\alpha\beta})^\mu_\nu &= i \delta^\mu_\nu (\eta_{\beta\lambda} x^\lambda \partial_\alpha - \eta_{\alpha\lambda} x^\lambda \partial_\beta) \\ (S_{\alpha\beta})^\mu_\nu &= i (\delta^\mu_\beta \eta_{\alpha\nu} - \delta^\mu_\alpha \eta_{\beta\nu}) \end{aligned}$$

Оператор $(J_{\alpha\beta})^\mu_\nu$ (81) называется генератором преобразований Лоренца в контравариантном векторном представлении. Непосредственным вычислением можно проверить, что оператор $(J_{\alpha\beta})^\mu_\nu$ (81) удовлетворяет коммутационным соотношениям (51).

Аналогичные рассуждения позволяют найти в явном виде генераторы преобразований Лоренца в любом тензорном представлении. Далее мы покажем, что по мимо тензорного представления группа Лоренца обладает и другими представлениями более общего вида.

7.1.6 Proper Lorentz Group and the $SL(2|\mathbb{C})$ Group

Теория

Рассмотрим группу 2×2 матриц N с комплексными элементами и определителем равным единице. Эта группа обозначается $SL(2|\mathbb{C})$. Мы покажем, что эта группа тесно связана с собственной группой Лоренца $L_+^\uparrow$. Более точно, мы покажем, что каждой матрице $N \in SL(2|\mathbb{C})$ соответствует единственная матрица $\Lambda \in L_+^\uparrow$ причем

$$\Lambda(N_1 N_2) = \Lambda(N_1) \Lambda(N_2) \\ \Lambda(E) = I$$

Здесь E - единичная матрица 2×2 . Соотношение (82) означает, что группа $L_+^\uparrow$ есть представление группы $SL(2|\mathbb{C})$. Кроме того оказывается, что если $\Lambda(N_1) = \Lambda(N_2)$, то $N_1 = \pm N_2$, то есть рассматриваемое представление является двузначным. Конструкция матриц Λ с указанными выше свойствами состоит из нескольких шагов:

а. Рассмотрим линейное пространство эрмитовых 2×2 матриц X , $X^\dagger = X$ ($X^\dagger = (X^*)^T$). В этом пространстве можно выбрать базис вида $\sigma_\mu = (\sigma_0, \sigma_i)$ где

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрицы σ_i , $i = 1, 2, 3$ называются матрицами Паули. Очевидно, что все матрицы σ_μ эрмитовы.

Матрицы (83) обладают полезными свойствами, которые устанавливаются прямой проверкой.

$$\sigma_\mu^2 = \sigma_0 \\ \sigma_0 \sigma_\mu = \sigma_\mu \sigma_0 = \sigma_\mu \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_0 \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \\ \text{tr} \sigma_0 = 2 \\ \text{tr} \sigma_i = 0 \\ \text{tr} \sigma_\mu \sigma_\nu = 2 \delta_{\mu\nu}$$

Здесь ε_{ijk} - полностью антисимметричный единичный тензор третьего ранга. Введем такие матрицы

$$\tilde{\sigma}_\mu = (\sigma_0, -\sigma_i)$$

тогда

$$\text{tr} \tilde{\sigma}_\mu \sigma_\nu = 2 \eta_{\mu\nu}$$

Пусть X - произвольная эрмитова 2×2 матрица, которая в базисе (83) записывается в виде

$$X = x^\mu \sigma_\mu$$

где x^μ - вещественные числа (в силу эрмитовости X и σ_μ), которые можно ассоциировать с координатами событий в пространстве Минковского. Из соотношений (86), (87) следует, что

$$x^\mu = \frac{1}{2} \text{tr} \tilde{\sigma}^\mu X$$

b. Пусть $N \in SL(2|\mathbb{C})$, рассмотрим преобразование матриц X вида

$$X' = NXN^+$$

Отсюда $X'^+ = NX^+N^+ = NXN^+ = X'$. То есть X' (89) - эрмитова матрица. При этом

$$\det X' = \det NXN^+ = \det N \det X \det N^+ = \det X$$

Матрицы X и X' можно разложить по базису (83)

$$X = x^\nu \sigma_\nu, \quad X' = x'^\mu \sigma_\mu$$

Тогда

$$x'^\mu = \frac{1}{2} \text{tr} \tilde{\sigma}^\mu X' = \frac{1}{2} \text{tr} \tilde{\sigma}^\mu N x^\nu \sigma_\nu N^+ = \frac{1}{2} \text{tr} \tilde{\sigma}^\mu N \sigma_\nu N^+ x^\nu$$

Обозначим

$$\Lambda^\mu_\nu(N) = \frac{1}{2} \text{tr} (\tilde{\sigma}^\mu N \sigma_\nu N^+)$$

Тогда

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu(N) x^\nu$$

Это соотношение выглядит как преобразование Лоренца, но чтобы сделать это заключение надо проверить, что матрицы (92) удовлетворяют базовому соотношению $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$.

с. Запишем элементы матриц (91) в явном виде. Используя выражения для матриц σ_μ (83) получим

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\det X = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

Матрица X' получается из матрицы X (94) заменой x^μ на x'^μ . Поэтому

$$\det X' = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu$$

Но согласно (90) $\det X' = \det X$ и значит

$$\eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$$

d. Подставляя соотношение (93) в (97), получим

$$\Lambda^T(N) \eta \Lambda(N) = \eta$$

Это значит, что матрица $\Lambda(N)$, определенная соотношением (92), осуществляет преобразование Лоренца и значит принадлежит группе Лоренца. Это согласуется с тем, что коэффициенты разложения матрицы X по базису σ_μ имеют смысл координат в пространстве Минковского. Можно показать, что $\det \Lambda(N) = 1$. Кроме того, $\Lambda^0_0(N) = \frac{1}{2} \text{tr} \tilde{\sigma}^0 N \sigma_0 N^+ = \frac{1}{2} \text{tr} N_0 N^+ > 0$ Следовательно матрицы $\Lambda^\mu_\nu(N)$ (92) принадлежат собственной группе Лоренца, $\Lambda(N) \in L_+^\dagger$.

e. Рассмотрим соотношение $\Lambda(N_1) = \Lambda(N_2)$. Или, согласно (92)

$$\text{tr} \tilde{\sigma}^\mu N_1 \sigma_\nu N_1^+ = \text{tr} \tilde{\sigma}^\mu N_2 \sigma_\nu N_1^+$$

Отсюда $N_1 = \pm N_2$. Данной матрице $\Lambda(N)$ соответствуют две матрицы $N \in SL(2|\mathbb{C})$. Рассмотрим два последних преобразования (89)

$$\begin{aligned} X' &= N_1 X N_1^+ \\ X'' &= N_2 X' N_2^+ \end{aligned}$$

Им соответствует преобразование

$$X'' = (N_2 N_1) X' (N_2 N_1)^+$$

С другой стороны, пусть $X = x^\mu \sigma_\mu$, $X' = x'^\mu \sigma_\mu$ и $X'' = x''^\mu \sigma_\mu$. Тогда из (99) получим

$$\begin{aligned} x'^\alpha &= \Lambda^\alpha{}_\nu(N_1) x^\nu \\ x''^\alpha &= \Lambda^\alpha{}_\nu(N_2) x'^\nu \end{aligned}$$

и значит

$$x''^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha(N_2) \Lambda^\alpha{}_\nu(N_1) x^\nu$$

Но из (100)

$$x''^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(N_2 N_1) x^\nu$$

Поэтому

$$\Lambda^\mu{}_\nu(N_2 N_1) = \Lambda^\mu{}_\alpha(N_2) \Lambda^\alpha{}_\nu(N_1)$$

Таким образом произведению матриц N соответствует произведение матриц $\Lambda(N)$

Пусть E - единичная 2×2 матрица. Тогда $\Lambda^\mu{}_\nu(E) = \frac{1}{2} \text{tr} \tilde{\sigma}^\mu E \sigma_\nu E = \frac{1}{2} \text{tr} \tilde{\sigma}^\mu \sigma_\nu = \delta^\mu{}_\nu$. То есть единичной матрице из $SL(2|\mathbb{C})$ отвечает единичный элемент собственной группы Лоренца. В итоге мы видим, что множество матриц $\Lambda^\mu{}_\nu(N)$ (92) есть подгруппа собственной группы Лоренца. Покажем, что эта группа совпадает с $L_+^\uparrow$. Для этого надо посчитать число независимых параметров в группе матриц $\Lambda^\mu{}_\nu(N)$. Каждая комплексная 2×2 матрица N имеет четыре комплексных элемента, то есть задается восемью действительными параметрами. Условие $\det N = 1$ означает два действительных условия $\text{Re} \det N = 1$, $\text{Im} \det N = 0$. Поэтому матрица N задается шестью действительными числами и значит соответствующая матрица $\Lambda^\mu{}_\nu(N)$ (92) зависит от шести действительных параметров. Ранее мы показали, что каждая матрица из группы $L_+^\uparrow$ параметризуется шестью действительными параметрами. Поэтому группа матриц $\Lambda^\mu{}_\nu(N)$ (92) совпадает с $L_+^\uparrow$. В результате мы построили гомоморфизм

$$\begin{aligned} \Lambda : SL(2|\mathbb{C}) &\longrightarrow L_+^\uparrow \\ N \in L_+^\uparrow &\longrightarrow \Lambda^\mu{}_\nu \in L_+^\uparrow \\ N_1 N_2 \in SL(2|\mathbb{C}) &\longrightarrow \Lambda^\mu{}_\nu(N_1 N_2) = \Lambda^\mu{}_\alpha(N_1) \Lambda^\alpha{}_\nu(N_2) \in L_+^\uparrow \end{aligned}$$

Мы видим, что собственная группа Лоренца непосредственно связана с группой $SL(2|\mathbb{C})$ и поэтому изучение группы $SL(2|\mathbb{C})$ позволяет более глубоко понять свойства группы Лоренца.

7.1.7 Spinors: from SO(3,1) to SL(2|C)

Теория

Наличие полуцелых значений $s_{u,d}$ указывает на важнейший факт: подобно тому, как группа поворотов 3-мерного евклидова пространства SO(3) при введении спиноров обобщалась до группы поворотов спиноров SU(2), так и группа Лоренца пространств времени Минковского обобщается до группы преобразований релятивистских спиноров SL(2, C). Действительно, поскольку алгебры генераторов $\mathfrak{so}(3)$ и $\mathfrak{su}(2)$ изоморфны, поля в представлениях $\mathfrak{su}(2)$ обобщают поля в представлении, которые разрешены в группе SU(2) и запрещены в группе SO(3). Точно также для изоморфных алгебр генераторов $\mathfrak{so}(3,1) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ представления $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ с полуцелыми спинами расширяют рассмотрение с SO(3,1) до SL(2, C).

Рассмотрим поля - релятивистские спиноры, которые характеризуются парами (s_u, s_d) с определенными значениями $s_{u,d}$, а именно,

$$\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \leftarrow (s_u, s_d)$$

и

$$\theta_{\alpha} \leftrightarrow \left(0, \frac{1}{2} \right) \leftarrow (s_u, s_d)$$

где контрвариантные индексы $\dot{\alpha}, \alpha$ принимают только 2 значения 1, 1, 2, так как размерность представления (s_u, s_d) в общем случае согласно 17.95, 17.96 равна $(2s_u + 1)(2s_d + 1)$, так что для выбранных нами представлений эта размерность равна двум. Двумерные представления принято называть спинорными. Матрицы спинорного представления хорошо известны в квантовой механике из описания спина $\frac{1}{2}$. Для спинора $\bar{\chi}$ в представлении $(\frac{1}{2}, 0)$

$$s^{\uparrow} = \frac{1}{2}\sigma, \quad s^{\downarrow} = 0,$$

где σ - матрицы Паули ¹ для двумерного представления $\bar{\chi}$, а стало быть, это матрицы 2×2 с верхним контрвариантным индексом $\dot{\beta}$ и нижним ковариантным индексом $\dot{\alpha}$, т.е. $(\sigma)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, так что согласно 17.97

$$s = \frac{1}{2}\sigma, \quad \tilde{s} = -\frac{i}{2}\sigma.$$

Совершенно аналогично для спинора θ в представлении $(0, \frac{1}{2})$

$$s^{\uparrow} = 0, \quad s^{\downarrow} = \frac{1}{2}\sigma$$

и получаем выражения

$$s = \frac{1}{2}\sigma, \quad \tilde{s} = \frac{i}{2}\sigma,$$

где матрицы Паули действуют в представлении θ , а стало быть, это матрицы 2×2 с верхним ковариантным индексом β и нижним контрвариантным индексом α , т.е. $(\sigma)_{\alpha\beta}$. После того, как матрицы генераторов спина s и бустов $\tilde{s}$ записаны через матрицы Паули, матрица преобразований для спинора θ задается в стандартном экспоненциальном виде

$$\Lambda_- = \exp\{-i(s \cdot \phi + \tilde{s} \cdot \vartheta)\} = \exp\left\{-\frac{i}{2}\sigma \cdot \phi + \frac{1}{2}\sigma \cdot \vartheta\right\}$$

как решение дифференциального уравнения, связанного с определением бесконечно малого преобразования для представления группы SL(2, C). В (17.101) тензорные индексы матрицы Λ_- в точности повторяют тензорные индексы матриц Паули в этом представлении: $(\Lambda_-)_{\alpha}^{\dot{\beta}}$.

7.1.8 Spinors and Lorentz Transformations by Stepanyants

Теория

Действие для спинорного поля, как и действие любой другой модели теории поля, должно быть инвариантно относительно группы Лоренца. Для существования такой инвариантности необходимо, чтобы спинор некоторым специальным образом менялся бы под действием преобразований группы Лоренца $O(1,3)$. (Необходимые сведения о группе Лоренца и соответствующей алгебре Ли приведены в Приложении, Части А.1 и А.2.)

Для нахождения закона преобразования спинорного поля мы заметим, что матрицы $\gamma^{\mu\nu}$, определенные в предыдущей части, удовлетворяют следующему коммутационному соотношению

$$[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\alpha\beta}] = 2\gamma^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - 2\gamma^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - 2\gamma^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha} + 2\gamma^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta},$$

которое доказано в Задаче 1. Это коммутационное соотношение очень похоже на коммутационное соотношение для генераторов группы Лоренца (А.69), полученное в Приложении (Часть А.2). Сходство между указанными коммутационными соотношениями позволяет отождествить величины

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}$$

с генераторами алгебры Ли группы Лоренца в некотором представлении, которое, очевидно, имеет размерность 4. В нации обозначениях элемент алгебры Ли раскладывается по генераторам как $\alpha = -i\alpha_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}/2$. Учитывая, что (см. Приложение А.2) вблизи единицы элемент соответствующей группы Ли можно представить в виде e^α , разумно предположить, что под действием преобразований группы Лоренца дираковский спинор будет изменяться по закону

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x), \quad \text{причем} \quad \psi'(x') = \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)\psi(x)$$

где $x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta$, а через $\Lambda \in O(1,3)$ обозначен соответствующий элемент фундаментального представления группы Лоренца. Тогда параметры группы Лоренца $\alpha_{\alpha\beta} = -\alpha_{\beta\alpha}$ могут быть найдены из равенства

$$\Lambda^\mu_\nu = (\exp \alpha)^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \alpha^\mu_\nu + \frac{1}{2}\alpha^\mu_\beta \alpha^\beta_\nu +$$

84 Гл. 3. Спинорные поля В случае бесконечно малых преобразований Лоренца с параметрами $\alpha_{\alpha\beta} \rightarrow 0$ изменение спинорного поля (без учета изменения координат) запишется в виде

$$\delta\psi = \frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\psi.$$

Заметим, что из формулы (3.87) следует (Задача 2), что при пространственных вращениях на угол 2π спинорное поле преобразуется по закону $\psi \rightarrow -\psi$. Однако дополнительный знак « $\rightarrow$ » никак не влияет на физические величины, которые всегда пропорциональны четным степеням спинорного поля.

В Задаче 3 показано, что дираковски сопряженный спинор преобразуется по закону

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x), \quad \text{причем} \quad \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) \exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right).$$

Используя Утверждение. Если $[A, B_i] = c_i^j B_j$, где A, B_i - некоторые матрицы, а c_i^j - (комплексные) числа, то

$$e^{-A} B_i e^A = (e^{-cc})_i^j B_j$$

(доказательство дано в Задаче 4), можно доказать (Задача 5), что при преобразованиях Лоренца квадратичные комбинации, составленные из спинорных полей, преобразуются по законам

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\chi(x') &\rightarrow \bar{\psi}\chi(x); & \bar{\psi}\gamma_5\chi(x') &\rightarrow \bar{\psi}\gamma_5\chi(x) \\ \bar{\psi}\gamma^\alpha\chi(x') &\rightarrow \Lambda^\alpha_\beta\bar{\psi}\gamma^\beta\chi(x); & \bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma_5\psi(x') &\rightarrow \Lambda^\alpha_\beta\bar{\psi}\gamma^\beta\gamma_5\psi(x) \\ \bar{\psi}\gamma^{\alpha\beta}\chi(x') &\rightarrow \Lambda^\alpha_\mu\Lambda^\beta_\nu\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\chi(x)\end{aligned}$$

Таким образом, выражения $\bar{\psi}\chi$ и $\bar{\psi}\gamma_5\chi$ преобразуются как скаляры, $\bar{\psi}\gamma^\mu\chi$ и $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\chi$ - как векторы, а $\bar{\psi}\gamma^{\alpha\beta}\chi$ - как тензор второго ранга. Как следствие, функция Лагранжа для спинорного поля (3.14) будет являться скаляром относительно преобразований Лоренца. Это в частности означает, что соответствующее действие будет инвариантным относительно этих преобразований.

При этом важно отметить, что, несмотря на наличие лоренцева индекса, γ -матрицы никак не меняются при лоренцевых преобразованиях и просто являются некоторыми постоянными матрицами. Более аккуратно это можно сформулировать следующим образом: γ -матрицы представляют собой инвариантный тензор, у которого есть один лоренцев индекс, один верхний и один нижний спинорные индексы. (Верхний индекс преобразуется так же как $\bar{\psi}$, а нижний - так же как ψ .) В Задаче 6 показано, что в этом случае соответствующие преобразования группы Лоренца оставляют γ -матрицы неизменными:

$$(\gamma^\mu)_a{}^b = \Lambda^\mu_\nu \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)_a{}^c (\gamma^\nu)_c{}^d \exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)_d{}^b.$$

Заметим теперь, что преобразования (3.87) соответствуют только преобразованиям из связной компоненты группы Лоренца, поскольку параметры α можно плавно уменьшить до нулевого значения. Но, как показано в Приложении А.1, группа Лоренца состоит из четырех компонент связности. При этом все преобразования группы Лоренца можно получить, если к связной компоненте добавить преобразования, которые получаются с помощью пространственной инверсии $P: (t, \mathbf{r}) \rightarrow (t, -\mathbf{r})$ и обращения времени $T: (t, \mathbf{r}) \rightarrow (-t, \mathbf{r})$. Поэтому необходимо выяснить, как спиноры меняются при этих преобразованиях.

Мы будем требовать, чтобы уравнение Дирака и дираковский лагранжиан были инвариантными относительно таких преобразований, т.е. чтобы выполнялось уравнение

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m\right) \psi'(x') = 0.$$

В Задаче 7 показано, что это условие будет выполняться, если положить

$$\begin{aligned}P: \psi(x') &\rightarrow \psi'(x') = \psi'(t, -\mathbf{x}) = i\gamma^0\psi(t, \mathbf{x}) = i\gamma^0\psi(x) \\ T: \psi(x') &\rightarrow \psi'(x') = \psi'(-t, \mathbf{x}) = \gamma^1\gamma^3\psi^*(t, \mathbf{x}) = \gamma^1\gamma^3\psi^*(x).\end{aligned}\quad (3.95)$$

Равенства (3.95) можно эквивалентно переписать в виде

$$P: \psi'(t, \mathbf{x}) = i\gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}); \quad T: \psi'(t, \mathbf{x}) = \gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, \mathbf{x})$$

Законы преобразования билинейных комбинаций спиноров при таких преобразованиях получены в Задачах 8 и 9. Они собраны в таблице 3.1. При этом видно, что по сравнению с преобразованиями группы Лоренца, которые могут быть с помощью гладкой деформации перевелены в единичный элемент, при P - и T -преобразованиях в ряде случаев появляется дополнительный множитель (-1) . Эти дополнительные множители можно найти в таблице 3.2. В частности, «лишний» множитель (-1) при P -преобразованиях приобретают величины $\bar{\psi}\gamma_5\chi$ и $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\chi$. Поэтому они, строго говоря,

не являются скаляром и вектором. Их называют, соответственно, псевдоскаляром и псевдовектором.

Помимо преобразований P и T также можно построить еще одно дискретное преобразование C , которое называется зарядовым сопряжением. Более подробно оно будет рассмотрено в следующей части.

Величина	P	T	C
$\Lambda^\alpha{}_\beta$	$\text{diag}(1, -1, -1, -1)$	$\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$	$\text{diag}(1, 1, 1, 1)$
x'	$(t, -\mathbf{x})$	$(-t, \mathbf{x})$	$(t, \mathbf{x})$
$\bar{\psi}\chi$	$\bar{\psi}\chi$	$\bar{\chi}\psi$	$\bar{\chi}\psi$
$\bar{\psi}\gamma_5\chi$	$-\bar{\psi}\gamma_5\chi$	$-\bar{\chi}\gamma_5\psi$	$\bar{\chi}\gamma_5\psi$
$\bar{\psi}\gamma^\alpha\chi$	$\Lambda^\alpha{}_\beta\bar{\psi}\gamma^\beta\chi$	$-\Lambda^\alpha{}_\beta\bar{\chi}\gamma^\beta\psi$	$-\Lambda^\alpha{}_\beta\bar{\chi}\gamma^\beta\psi$
$\bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma_5\chi$	$-\Lambda^\alpha{}_\beta\bar{\psi}\gamma^\beta\gamma_5\chi$	$-\Lambda^\alpha{}_\beta\bar{\chi}\gamma^\beta\gamma_5\psi$	$\Lambda^\alpha{}_\beta\bar{\chi}\gamma^\beta\gamma_5\psi$
$\bar{\psi}\gamma^{\alpha\beta}\chi$	$\Lambda^\alpha{}_\gamma\Lambda^\beta{}_\delta\bar{\psi}\gamma^\gamma\chi$	$-\Lambda^\alpha{}_\gamma\Lambda^\beta{}_\delta\bar{\chi}\gamma^\gamma\psi$	$-\Lambda^\alpha{}_\gamma\Lambda^\beta{}_\delta\bar{\chi}\gamma^\gamma\psi$

Преобр.	P	T	C	CPT
$\bar{\psi}\chi$	+	+	+	+
$\bar{\psi}\gamma_5\chi$	−	−	+	+
$\bar{\psi}\gamma^\mu\chi$	+	−	−	+
$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\chi$	−	−	+	+
$\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\chi$	+	−	−	+
Прим.		$\psi \leftrightarrow \chi$	$\psi \leftrightarrow \chi$	
$\Lambda^\alpha{}_\beta$	$(+, -, -, -)$	$(-, +, +, +)$	$(+, +, +, +)$	$(-, -, -, -)$

1. Доказать коммутационное соотношение (3.85). Удобно использовать равенство

$$\gamma^{\mu\nu} = \gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu$$

и учесть, что единичная матрица коммутирует со всеми матрицами. Тогда с использованием тождеств

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$$

рассматриваемый коммутатор может быть переписан следующим образом:

$$\begin{aligned} [\gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\alpha\beta}] &= [\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\alpha\gamma^\beta] = \gamma^\alpha[\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\beta] + [\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\alpha]\gamma^\beta = \\ &= \gamma^\alpha\gamma^\mu\{\gamma^\nu, \gamma^\beta\} - \gamma^\alpha\{\gamma^\mu, \gamma^\beta\}\gamma^\nu + \gamma^\mu\{\gamma^\nu, \gamma^\alpha\}\gamma^\beta - \{\gamma^\mu, \gamma^\alpha\}\gamma^\nu\gamma^\beta = \\ &= 2\gamma^\alpha\gamma^\mu\eta^{\nu\beta} - 2\gamma^\alpha\eta^{\mu\beta}\gamma^\nu - 2\gamma^\mu\eta^{\nu\alpha}\gamma^\beta - 2\eta^{\mu\alpha}\gamma^\nu\gamma^\beta. \end{aligned}$$

Вновь используя равенство (3.97), окончательно получаем, что

$$[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\alpha\beta}] = -2\eta^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta} + 2\eta^{\nu\alpha}\gamma^{\mu\beta} + 2\eta^{\mu\beta}\gamma^{\nu\alpha} - 2\eta^{\nu\beta}\gamma^{\mu\alpha}.$$

2. Доказать, что при пространственных вращениях на угол 2π спинорное поле изменяется по закону $\psi \rightarrow -\psi$. Поскольку эти бесконечно малых преобразованиях Лоренца

$$\delta x^{\mu t} = \alpha_{\nu}^{\mu t} x^{\nu},$$

пространственные вращения соответствуют $\alpha_{0i} = 0, \alpha_{ij} = \varepsilon_{ijk}\alpha_k$, где α - вектор, направление которого совпадает с осью вращения, а модуль равен углу поворота. При таких преобразованиях спинорное поле будет меняться по закону

$$\psi \rightarrow \exp\left(\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\gamma^{ij}\alpha^k\right)\psi$$

Используя явные выражения для γ -матриц, несложно убедиться, что

$$\frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\gamma^{ij}\alpha^k = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma\alpha & 0 \\ 0 & \sigma\alpha \end{pmatrix}.$$

В Приложении показано, что в случае, если $\alpha = \alpha\mathbf{n}$, причем $\alpha = 2\pi$, справедливо равенство

$$\exp(-i\alpha\sigma/2) = -1,$$

из которого и следует требуемое утверждение.

3. Найти закон преобразования дираковски сопряженного спинора при преобразованиях Лоренца. Вначале мы заметим, что

$$\begin{aligned} \gamma^0(\gamma^{\alpha\beta}) \cdot \gamma^0 &= \frac{1}{2}\gamma^0(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} - \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha})' \gamma^0 = \frac{1}{2}\left(\gamma^0(\gamma^{\beta})^+ \gamma^0 \gamma^0 (\gamma^{\alpha})^+ \gamma^0 - \right. \\ &\quad \left. - \gamma^0(\gamma^{\alpha})^- \gamma^0 \gamma^0 (\gamma^{\beta})^+ \gamma^0\right) = \frac{1}{2}(\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha} - \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}) = -\gamma^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \psi^+ \gamma^0 \rightarrow \psi^+ \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}(\gamma^{\alpha\beta})^+\right) \gamma^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}(\gamma^{\alpha\beta})^+\right) \gamma^0 = \\ &= \eta_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\gamma^0 \frac{1}{4}(\alpha_{\alpha\beta}(\gamma^{\alpha\beta})^- \gamma^0)^n\right) = \bar{\psi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)^n = \\ &= \bar{\psi} \exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right). \end{aligned}$$

4. Доказать, что если $[A, B_i] = c_i^j B_j$, где A, B_i - некоторые матрицы, а c_i^j - (комплексные) числа, то

$$e^{-A} B_i e^A = (e^{-c})_i^j B_j$$

Рассмотрим функции $F_i(\lambda) \equiv e^{-\lambda A} B_i e^{\lambda A}$, где λ - некоторое число. Тогда

$$\frac{d}{d\lambda} F_i(\lambda) = -A e^{-\lambda A} B_i e^{\lambda A} + e^{\lambda A} B_i e^{-\lambda A} A = -e^{\lambda A} [A, B_i] e^{\lambda A} = -c_i^j F_j(\lambda)$$

Легко проверить, что решениями этого уравнения с граничными условиями $F_i(0) = B_i$ являются функции $F_i(\lambda) = (e^{-\lambda c})_i^j B_j$. Поэтому в силу теоремы единственности мы заключаем, что

$$e^{-\lambda A} B_i e^{\lambda A} = (e^{-\lambda c})_i^j B_j.$$

Полагая в этом равенстве $\lambda = 1$, получаем требуемое тождество. 5. Найти законы преобразования величин $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\gamma_5\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma_5\psi$ и $\bar{\psi}\gamma^{\alpha\beta}\psi$ при преобразованиях связной компоненты группы Лоренца.

Из закона преобразования дираковски сопряженного спинора, который был построен в Задаче 2, следует, что $\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}\psi$. Также очевидно, что, поскольку при разложении $\exp(\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}/4)$ в ряд Тейлора получаются только члены с четным числом γ -матриц, которые коммутируют с γ_5 , то мы также заключаем, что $\bar{\psi}\gamma_5\psi \rightarrow \bar{\psi}\gamma_5\psi$.

Для нахождения закона преобразования величины $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ удобно воспользоваться тождеством

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu \right] &= \frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta} [\gamma^\alpha\gamma^\beta, \gamma^\mu] = \frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta} (\gamma^\alpha \{\gamma^\beta, \gamma^\mu\} - \\ &- \{\gamma^\alpha, \gamma^\mu\} \gamma^\beta) = \frac{1}{2}\alpha_{\alpha\beta} (\eta^{\mu\beta}\gamma^\alpha - \eta^{\mu\alpha}\gamma^\beta) = \dots \gamma^\mu{}_\nu\gamma^\nu \end{aligned}$$

Действительно, поскольку $\alpha^\mu{}_\nu$ представляют собой некоторые числа, коммутирующие с γ -матрицами, то, используя утверждение предыдущей задачи, мы получаем, что

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi,$$

где $\Lambda^\mu{}_\nu = \exp(\alpha)^\mu{}_\nu$. Аналогичным образом

$$\left[\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu\gamma_5 \right] = \alpha^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma_5; \quad \left[\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}, \gamma^{\mu\nu} \right] = (\alpha^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta + \delta^\mu{}_\alpha\alpha^\nu{}_\beta)\gamma^{\alpha\beta},$$

откуда следует, что

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}\gamma^\nu\gamma_5\psi; \quad \bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\psi \rightarrow \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\bar{\psi}\gamma^{\alpha\beta}\psi.$$

(Последняя формула становится очевидной, если заметить, что величина $\alpha^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta + \delta^\mu{}_\alpha\alpha^\nu{}_\beta$ является элементом представления алгебры Ли группы Лоренца, пространство которого образуют тензоры второго ранга, см. Приложение А.4. Но можно и просто вычислить экспоненту от этой матрицы, поскольку 2 слагаемые, которые ее составляют, очевидно, коммутируют друг с другом.) 6. Доказать, что γ -матрицы являются инвариантным тензором при преобразованиях группы Лоренца.

Из утверждения, доказанного в Задаче 4, а также равенства $[\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}/4, \gamma^{\mu 1}] = -\alpha^\mu{}_\nu\gamma^\nu$, следует тождество

$$\exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)\gamma^\nu\exp\left(-\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right) = \exp(-\alpha)^\nu{}_\alpha\gamma^\alpha = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\alpha\gamma^\alpha$$

Умножая его на $\Lambda^\mu{}_\nu$, получаем требуемое утверждение. 7. Убедиться, что если при пространственной инверсии и обращении времени дираковский спинор ψ преобразуется в соответствии с формулами (3.95), то уравнение Дирака остается неизменным. Умножая уравнение Дирака на $i\gamma^0$, находим, что

$$\left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} - i\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i} - m\right)i\gamma^0\psi(t, \mathbf{x}) = 0$$

После этого выполним замену $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$. В результате получается, что спинор $i\gamma^0\psi(t, -\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Дирака:

$$\left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i} - m\right)i\gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}) = 0$$

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - m \right) i\gamma^0 \dot{\psi}(t, -\mathbf{x}) = 0$$

Для того, чтобы убедиться в инвариантности уравнения Дирака относительно преобразования обращения времени, заметим, что определенные формулой (3.5) γ -матрицы обладают следующим свойством:

$$(\gamma^0)^* = \gamma^0; \quad (\gamma^1)^* = \gamma^1; \quad (\gamma^2)^* = -\gamma^2; \quad (\gamma^3)^* = \gamma^3.$$

Как следствие, в силу антикоммутации различных γ -матрицы будут справедливы равенства

$$\begin{aligned} \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 &= \gamma^0 = (\gamma^0)^*; & \gamma^1 \gamma^3 \gamma^1 \gamma^3 \gamma^1 &= -\gamma^1 = -(\gamma^1)^*; \\ \gamma^1 \gamma^3 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^1 &= \gamma^2 = -(\gamma^2)^*; & \gamma^1 \gamma^3 \gamma^3 \gamma^3 \gamma^1 &= -\gamma^3 = -(\gamma^3)^*. \end{aligned}$$

Поэтому, если провести комплексное сопряжение уравнения Дирака, а затем умножить его на матрицу $\gamma^1 \gamma^3$, то получится уравнение

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma^1 \gamma^3 (-i(\gamma^\mu)^* \partial_\mu - m) \gamma^3 \gamma^1 \gamma^1 \gamma^3 \psi^*(t, \mathbf{x}) = \\ &= \left(-i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - m \right) \gamma^1 \gamma^3 \psi^*(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

которое после замены $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (-t, \mathbf{x})$ переписывается в виде

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \gamma^1 \gamma^3 \psi^*(-t, \mathbf{x}) = 0$$

Это и означает, что уравнение Дирака остается инвариантным относительно преобразования обращения времени.

8. Найти, как квадратичные комбинации спинорных полей меняются при пространственной инверсии.

При преобразованиях пространственной инверсии спинорное поле меняется по закону

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow i\gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}); \quad \bar{\psi}(t, \mathbf{x}) \rightarrow -i\bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma^0$$

Поскольку $(\gamma^0)^2 = 1$, а матрица γ_5 антикоммутирует со всеми η матрицами, то

$$\bar{\psi}\chi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \bar{\psi}\chi(t, -\mathbf{x}); \quad \bar{\psi}\gamma_5\chi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\gamma^0\chi(t, -\mathbf{x}) = -\bar{\psi}\gamma_5\chi(t, -\mathbf{x})$$

Принимая во внимание, что матрица γ^0 коммутирует сама с собой и антикоммутирует со всеми остальными γ -матрицами, получаем, что

$$\bar{\psi}\gamma^0\chi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \bar{\psi}\gamma^0\chi(t, -\mathbf{x}); \quad \bar{\psi}\gamma^i\chi(t, \mathbf{x}) \rightarrow -\bar{\psi}\gamma^i\chi(t, -\mathbf{x}).$$

Эти два равенства можно единым образом записать в виде

$$\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\chi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \Lambda_\nu^\mu \bar{\psi}\gamma^\nu\chi(t, -\mathbf{x})$$

где $\Lambda^\mu_\nu = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ - элемент группы Лоренца, который осуществляет преобразование пространственной инверсии. Аналогичным образом доказывается, что

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\chi(t, \mathbf{x}) &\rightarrow -\Lambda_\nu^\mu \bar{\psi}\gamma^\nu\gamma_5\chi(t, -\mathbf{x}) \\ \bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\chi(t, \mathbf{x}) &\rightarrow \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma^\beta\chi(t, -\mathbf{x}). \end{aligned}$$

9. Найти, как квадратичные комбинации спинорных полей меняются при обращении времени. При преобразованиях обращения времени

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \gamma^0 \gamma^3 \psi^*(-t, \mathbf{x})$$

Поэтому соответствующий дираковски сопряженный спинор будет преобразовываться по закону

$$\bar{\psi}(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi^T(-t, \mathbf{x}) \gamma^0 \gamma^0 (\gamma^3)^- \gamma^0 \gamma^0 (\gamma^1)^+ \gamma^0 = \psi^T(-t, \mathbf{x}) \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1$$

При нахождении закона преобразования произведения двух спиноров мы будем по определению полагать, что

$$T : \psi'_a \chi'_b(t, \mathbf{x}) = (\gamma^0 \gamma^3)_a^c (\gamma^1 \gamma^3)_b^d \left(\psi_c \chi_d \right)^*(-t, \mathbf{x}) = (\gamma^1 \gamma^3)_a^c (\gamma^1 \gamma^3)_b^d \times \\ \times \chi_d^* \psi_c^*(-t, \mathbf{x}) = -(\gamma^1 \gamma^3)_a^c (\gamma^0 \gamma^3)_b^d \psi_c^* \chi_d^*(-t, \mathbf{x}),$$

где были использованы антикоммутация спинорных полей, а также определение операции комплексного сопряжения для произведения двух спинорных полей. Тогда

$$\bar{\psi} \chi(t, \mathbf{x}) \rightarrow -\psi^T \gamma^0 \gamma^3 \gamma^1 \gamma^1 \gamma^3 \chi^*(-t, \mathbf{x}) = -\psi^T \gamma^0 \chi^*(-t, \mathbf{x}).$$

Эта величина, очевидно, не будет меняться при транспонировании. Совершая эту операцию, необходимо помнить о том, что спиноры являются антикоммутирующими величинами. Поэтому

$$\bar{\psi} \chi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \chi^+ \gamma^0 \psi(-t, \mathbf{x}) = \bar{\chi} \psi(-t, \mathbf{x})$$

Аналогичным образом получаем, что (аргументы для краткости мы выписывать не будем)

$$\bar{\psi} \gamma_5 \chi \rightarrow -\psi^T \gamma^0 \gamma_5 \chi^* = \chi^+ \gamma_5 \gamma^0 \psi = -\bar{\chi} \gamma_5 \psi.$$

Для нахождения закона преобразования величины $\bar{\psi} \gamma^\mu \chi$ удобно по отдельности рассмотреть случаи $\mu = 0$ и $\mu = i \neq 0$:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^0 \chi &\rightarrow -\psi^T (\gamma^0)^2 \chi^* = \chi^- \psi = \bar{\chi} \gamma^0 \psi \\ \bar{\psi} \gamma^i \chi &\rightarrow \psi^T \gamma^0 (\gamma^i)^* \chi^* = -\chi^1 \gamma^0 \gamma^0 (\gamma^i)^1 \gamma^0 \psi = -\bar{\chi} \gamma^i \psi \end{aligned}$$

Эти равенства можно единым образом записать как

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \chi \rightarrow -\Lambda^\mu_\nu \bar{\chi} \gamma^\nu \psi,$$

где $\Lambda^\mu_\nu = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ - элемент группы Лоренца, который осуществляет преобразование обращения времени. Аналогичные вычисления приводят к равенствам

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \chi \rightarrow -\Lambda^\mu_\nu \bar{\chi} \gamma^\nu \gamma_5 \psi; \quad \bar{\psi} \gamma^{\mu\nu} \chi \rightarrow -\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \bar{\chi} \gamma^{\alpha\beta} \psi$$

7.1.9 Massive Particles

Суть (?)

Массивные неприводимые представления группы Пуанкаре

Если $q^2 = m^2$ и $m^2 \neq 0$, то вектор q_μ всегда можно выбрать в виде $q_\mu = (m, 0, 0, 0)$. Найдем соответствующие компоненты вектора W^ρ , имеем

$$W^\rho = \frac{1}{2} \varepsilon^{\rho\lambda\mu\nu} q_\lambda J_{\mu\nu} = -\frac{m}{2} \varepsilon^{0\rho\mu\nu} J_{\mu\nu}$$

Отсюда

$$W^0 = 0 \quad W_i = -\frac{m}{2}\varepsilon_{ijk}J_{jk}$$

Обозначим

$$S_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J_{jk}$$

Тогда

$$W_i = mS_i$$

Установим коммутационные соотношения для операторов S_i (182). Рассмотрим

$$\begin{aligned} [S_i, S_j] &= \frac{1}{m^2} [W_i, W_j] = -\frac{i}{m^2}\varepsilon_{ij\lambda\rho}P^\rho W^\rho = \\ &= -\frac{i}{m}\varepsilon_{ij0\rho}W^\rho = \frac{i}{m}\varepsilon_{ijk}W_k = i\varepsilon_{ijk}S_k \end{aligned}$$

То есть

$$[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk}S_k$$

Мы получили коммутационные соотношения для генераторов групп трехмерных вращений $SO(3)$. Заметим, что соотношения (183) - это известные из нерелятивистской квантовой механики коммутационные соотношения для оператора углового момента.

Рассмотрим оператор Казимира C_2 . В данном случае

$$C_2 = W^\mu W_\mu = -W_i W_i = -m^2 S_i S_i = -m^2 S^2$$

Таким образом оператор S^2 есть оператор Казимира малой группы H_q . Как известно, он является единственным оператором Казимира группы $SO(3)$.

Исследуем задачу на собственные значения для оператора S^2 . Согласно (184), собственные векторы оператора S^2 будут собственными векторами оператора C_2 . Не трудно проверить, что оператор S_3 коммутирует с оператором S^2 , поэтому эти операторы имеют общие собственные векторы. Собственные значения операторов S_3 и S^2 хорошо известны (например из теории углового момента в нерелятивистской квантовой механике). Они равны соответственно σ и $s(s+1)$. При этом параметр s принимает следующие значения:

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

При каждом фиксированном значении s величина σ изменяется так

$$\sigma = -s, -s+1, \dots, s-1, s$$

то есть принимает $2s+1$ значений.

В результате мы видим, что векторы $|m^2, l, q, \sigma\rangle$ являются собственными векторами операторов W^2 и S_3

$$\begin{aligned} W^2 |m^2, l, q, \sigma\rangle &= -m^2 S^2 |m^2, l, q, \sigma\rangle = -m^2 s(s+1) |m^2, l, q, \sigma\rangle \\ S_3 |m^2, l, q, \sigma\rangle &= \sigma |m^2, l, q, \sigma\rangle \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $l = -m^2 s(s+1)$. Далее мы будем обозначать $|m^2, l, q, \sigma\rangle|_{l=-m^2 s(s+1)} = |m^2, s, q, \sigma\rangle$. Мы видим, что неприводимые представления

малой группы нумеруются параметром s , принимающим значения (185). При каждом фиксированном s представление конечномерно, его размерность равна $2s + 1$. Таким образом, уравнение $W^2 |m^2, l, q, \sigma\rangle = l |m^2, l, q, \sigma\rangle$ решено в подпространстве V_q , где $p_\mu = q_\mu = (m, 0, 0, 0)$ и собственное значение l найдено. Обратим внимание, что данный вектор q_μ соответствует вектору энергии-импульса частицы с массой m в системе отчета, относительно которой частица покоится. Базис неприводимого представления, отвечающего произвольному вектору $p_\mu, p^2 = m^2$ получается из векторов $|m^2, s, q, \sigma\rangle$ действием операторов $U(\Lambda)$.

Итак, базис массивного неприводимого представления группы Пуанкаре составляют векторы $|m^2, s, q, \sigma\rangle$, где $p_0 = \varepsilon(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Неприводимое представление задается двумя параметрами m^2 и s . Первый из них есть квадрат массы элементарной системы. Параметр s называется спином элементарной системы. Возможные значения спина даются (185). Оператор S^2 , собственное значение которого есть $s(s + 1)$ называется оператором квадрата спина, а операторы S_i - операторами спина. Переменная σ , принимающая в неприводимом представлении с данными m^2 и s значения $-s, -s + 1, \dots, s - 1, s$ называется проекцией спина на какое-либо одно фиксированное направление в трехмерном пространстве.

Теория

При $p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 > 0$ квадрат 4-вектора W^2 , являющийся релятивистским инвариантом, удобно вычислить в системе покоя частицы. Тогда, как говорят, можно выбрать стандартный вектор 4-импульса в виде $p_\mu = (mc, \mathbf{0})$, и

$$W^2 = -\frac{1}{2} m^2 c^2 \{S_{\lambda\rho} S^{\lambda\rho} - 2S_{0\alpha} S^{0\alpha}\} = -\frac{1}{2} m^2 c^2 S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = -m^2 c^2 \hbar^2 s^2 = -m^2 c^2 \hbar^2 s(s + 1)$$

Значит, при заданной массе собственное значение W^2 определяется квадратом спина. В итоге все состояния свободной частицы заданного типа отвечают одинаковым значениям релятивистских инвариантов: массы и квадрата спина, - отличаются же они значениями импульса и проекции спина на выделенное направление. Таким образом, состояние свободной массивной частицы ¹ можно характеризовать полным набором попарно коммутирующих наблюдаемых: масса, импульс, квадрат спина и проекция спина на выделенное направление, - и описать квантовыми числами: $\{m, \mathbf{p}, s, s_z\}$.

Обсуждение и детали массивных представлений

Насколько вообще разумно определять массу как величину оператора Казимира? (?????)

(пока просто так делаем, да и все, потом подумаю, важный фундаментальный вопрос)

7.1.10 Massless Particles (!!?)

Обсудим подробно свойства безмассовых представлений.

(??? там выше должны быть указания про это!!!)

Суть (?)

Теория

При $p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = 0$ распишем W^2 в компонентах

$$\begin{aligned} W^2 &= p_\nu p^\lambda S_{\lambda\rho} S^{\nu\rho} = p_\nu p^\lambda S_{\lambda 0} S^{\nu 0} + p_\nu p^\lambda S_{\lambda\alpha} S^{\nu\alpha} = \\ &= -p^\alpha p^\beta S_{0\alpha} S^{0\beta} + p_0^2 S^{0\alpha} S_{0\alpha} - p^\gamma p^\beta S^{\gamma\alpha} S_{\beta\alpha} + p_0 p^\beta (S_{\beta\alpha} S^{0\alpha} - S_{0\alpha} S^{\beta\alpha}) = \\ &= \hbar^2 \{ (\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{s}})^2 - p_0^2 \tilde{\mathbf{s}}^2 - (\mathbf{p} \times \mathbf{s})^2 + p_0 \mathbf{p} \cdot \{ (\mathbf{s} \times \tilde{\mathbf{s}}) - (\tilde{\mathbf{s}} \times \mathbf{s}) \} \}. \end{aligned}$$

(??? какие свойства тут мы использовали???)

Раскрывая квадрат векторного произведения $(\mathbf{p} \times \mathbf{s})^2 = \mathbf{p}^2 \mathbf{s}^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{s})^2$, находим

$$\frac{1}{\hbar^2} W^2 = -p_0^2 (\mathbf{s}^2 + \tilde{\mathbf{s}}^2) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{s})^2 + (\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{s}})^2 + p_0 \mathbf{p} \cdot \{ (\mathbf{s} \times \tilde{\mathbf{s}}) - (\tilde{\mathbf{s}} \times \mathbf{s}) \}.$$

Выражая генераторы спина и бустов через эрмитовы векторы $\mathbf{s}^\uparrow$ и $\mathbf{s}^\downarrow$, получаем

$$W^2 = -4p_0^2 \hbar^2 \left\{ \mathbf{s}^\uparrow \cdot \mathbf{s}^\downarrow - \frac{1}{p_0^2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}^\uparrow) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}^\downarrow) - \frac{i}{p_0} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{s}^\uparrow \times \mathbf{s}^\downarrow) \right\}.$$

(!!?? проделаю это!!!)

Выберем ось проецирования спина вдоль пространственной компоненты импульса: $\mathbf{p} = (0, 0, p_0)^T$, откуда $\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}^{\uparrow\downarrow} = p_0 \mathbf{s}_3^{\uparrow\downarrow}$, тогда

$$\begin{aligned} W^2 &= -4p_0^2 \hbar^2 \left\{ s_1^\uparrow s_1^\downarrow + s_2^\uparrow s_2^\downarrow - i (s_1^\uparrow s_2^\downarrow - s_2^\uparrow s_1^\downarrow) \right\} = \\ &= -4p_0^2 \hbar^2 \left\{ s_1^\uparrow + i s_2^\uparrow \right\} \left\{ s_1^\downarrow - i s_2^\downarrow \right\} = \\ &= -4p_0^2 \hbar^2 s_+^\uparrow s_-^\downarrow \end{aligned}$$

Поскольку мы включаем инвариантный оператор W^2 в полный набор наблюдаемых для построения базиса полей из решений уравнений на собственные значения операторов из этого полного набора, в искомом базисе поля удовлетворяют уравнению на собственные значения оператора W^2 . Но у повышающего оператора в группе $SU(2)$ существуют только два собственных вектора: во-первых, это «вакуум» $|0\rangle$ с нулевыми значениями $s_u = m_u = 0$

$$\mathbf{s}^\uparrow |0\rangle = 0$$

а во-вторых, это старший вектор с нулевым собственным значением (при $m_u = s_u$)

$$s_+^\uparrow |s_u, s_u\rangle = 0.$$

Точно так же для понижающего оператора есть два собственных вектора: вакуум $|0\rangle$ с нулевыми значениями $s_d = m_d = 0$

$$\mathbf{s}^\downarrow |0\rangle = 0,$$

и младший вектор с нулевым собственным значением (при $m_d = -s_d$)

$$s_-^\downarrow |s_d, -s_d\rangle = 0.$$

При этом из (2.12) и (2.14), конечно, следует, что, во-первых, на физических полях $W^2 = 0$, а во-вторых, на этих полях (т. е. при действии операторов на поля) проекция спина на ось импульса или, как говорят, спиральность проекция спина на импульс

$$\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}^{\uparrow\downarrow}}{p_0} = s_3^{\uparrow\downarrow}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}^\uparrow + \mathbf{s}^\downarrow,$$

имеет строго фиксированные значения

$$s_3^\uparrow = s_u, \quad s_3^\downarrow = -s_d.$$

Таким образом, среди безмассовых полей со спином базис составляют так называемые правые и левые поля: киральные поля полуцелого спина и поляризованные поля целого спина, такие что правые поля по определению имеют положительную киральность и спиральность $\mathfrak{s} = s_u$:

$$\mathbf{s}^\downarrow \equiv 0 \Rightarrow \tilde{\mathbf{s}} = -i\mathbf{s}, \quad \mathbf{s}^\uparrow = \mathbf{s}$$

левые поля по определению имеют отрицательную киральность и спиральность $\mathfrak{s} = -s_d$:

$$\mathbf{s}^\uparrow \equiv 0 \Rightarrow \tilde{\mathbf{s}} = i\mathbf{s}, \quad \mathbf{s}^\downarrow = \mathbf{s},$$

а также их произведения и вакуум. При этом произведения полей, т.е. составные или композитные поля, конечно, могут реализовывать приводимые представления группы Пуанкаре.

Основное уравнение безмассовых полей (!!!!!)

Вычисление компонент W^μ для киральных и поляризованных полей в представлениях $(s_u, 0)$ и $(0, s_d)$

Рассмотрим компоненты псевдовектора Паули-Любанского для киральных и поляризованных полей в представлениях, отвечающим полям группы Лоренца $(s_u, 0)$ и $(0, s_d)$, в которых генераторы $\mathbf{s}^{\uparrow\downarrow}$, отличные от нуля, совпадают со спином $\mathbf{s}$. С учетом

$$S_{\beta\gamma} = \hbar \epsilon_{\mathbb{E}}^{\beta\gamma\rho} \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^\rho$$

нулевая компонента

$$W_0 = -\frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{0\alpha\beta\gamma} p_\alpha S_{\beta\gamma} = \hbar \mathbf{p} \cdot \mathbf{s} = \pm p_0 \hbar s_{u,d},$$

где верхний знак относится к операторам «s-up», а нижний - к «-down».

(????? хз, почему так это????)

При вычислении пространственной компоненты необходимо использовать то, что

$$\frac{1}{\hbar} S_{0\gamma} = \tilde{s}_{\mathbb{E}}^\gamma = \mp i \mathbf{s}_{\mathbb{E}}^\gamma,$$

откуда

$$W^\alpha = -\frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{\alpha 0 \beta \gamma} p_0 S_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} 2 \hat{\epsilon}^{\alpha \beta 0 \gamma} p_\beta S_{0\gamma} = \hbar \{ p_0 \mathbf{s}^\alpha \mp i (\mathbf{p} \times \mathbf{s})^\alpha \}.$$

Поэтому при $\mathbf{p} \uparrow z$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} W^{(3)} &= p_0 s_3^{\uparrow\downarrow} = \pm s_{u,d} p_0, \\ \frac{1}{\hbar} W^{(2)} &= p_0 s_2^{\uparrow\downarrow} \mp i p_0 s_1^{\uparrow\downarrow} = \mp i p_0 s_\pm^{\uparrow\downarrow} = 0, \\ \frac{1}{\hbar} W^{(1)} &= p_0 s_1^{\uparrow\downarrow} \pm i p_0 s_2^{\uparrow\downarrow} = p_0 s_\pm^{\uparrow\downarrow} = 0, \end{aligned}$$

где равенства понимаются в слабом смысле, т. е. они имеют место при действии операторов на поля.

Основное уравнение безмассовых полей (!!???)

Эти результаты представимы в простой ковариантной форме в виде пропорциональности 4-векторов

$$\frac{1}{\hbar} W^\mu = \mathfrak{s} p^\mu, \quad \mathfrak{s} = +s_u \cup \mathfrak{s} = -s_d.$$

Это согласуется с установленными нами условиями для ненулевых 4-векторов:

$$p^2 = 0, \quad W^2 = 0, \quad p \cdot W = 0$$

В самом деле, для 4-векторов $p_\mu = (p_0, -\mathbf{p})$ и $W_\mu = (W_0, -\mathbf{W})$ на световом конусе $p^2 = W^2 = 0$ имеют место связи $|\mathbf{p}| = p_0$ и $|\mathbf{W}| = W_0$, так что

$$p \cdot W = p_0 W_0 (1 - \cos \theta_{\mathbf{p}, \mathbf{W}}) = 0,$$

и $\cos \theta_{\mathbf{p}, \mathbf{W}} = 1$, т. е. 3-мерные пространственные компоненты этих 4-векторов сонаправлены, а сами 4-векторы на световом конусе пропорциональны друг другу.

Уравнение (2.18) представляет собой основное уравнение для определения базиса безмассовых полей. Его следует понимать в том смысле, что действие оператора W^μ на базисное поле с заданным значением спиральности $\mathfrak{s}$ эквивалентно действию 4-импульса на это базисное поле. Подобная связь задает уравнение движения базисного поля, поскольку оно включает в себя и производные поля по времени, а связь (2.18) в слабом смысле является уравнением на коэффициент пропорциональности собственных значений W^μ собственным значениям 4-импульса. Напомним, что это возможно, так как $[p^\mu, W^\nu] = 0$. Поскольку инварианты группы Пуанкаре равны нулю, $W^2 = 0$ и $p^2 = 0$, то безмассовые поля классифицируются значением 4-импульса и спиральности при условии (2.18).

Теория по Бухбиндеру (??)

(пока отложил, потом посмотрю.)

Перейдем к рассмотрению безмассовых неприводимых представлений. Прежде всего надо выбрать подходящий вектор q_μ . Поскольку теперь $q^2 = 0$, то выбор, использованный в разделе 1.7.2 невозможен. Мы выберем вектор q_μ в виде $q_\mu = (E, 0, 0, E)$, где E - произвольная не равная нулю константа. Очевидно, что условие $q^2 = 0$ выполняется автоматически.

Исследуем структуру малой группы H_q . Для этого надо сначала найти компоненты вектора W_μ . Воспользуемся тождеством $W^\mu P_\mu = 0$, которое в подпространстве H_q принимает вид $W_0 q_0 - W_3 q_3 = E (W_0 - W_3) = 0$. Отсюда

$$W_0 = W_3$$

Тогда

Итак

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{1\rho\mu\nu} P^\rho J^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{10\mu\nu} J^{\mu\nu} E - \frac{1}{2} \varepsilon_{13\mu\nu} J^{\mu\nu} E = \\ &= -\varepsilon_{0123} J_{23} E + \varepsilon_{1302} J_{02} E = -E (J_{23} + J_{02}) = -E \mathcal{R}_1 \\ W_2 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{2\rho\mu\nu} P^\rho J^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{20\mu\nu} J^{\mu\nu} E - \frac{1}{2} \varepsilon_{23\mu\nu} J^{\mu\nu} E = \\ &= -\varepsilon_{2013} J_{13} E + \varepsilon_{2301} J_{01} E = E (J_{13} + J_{01}) = E \mathcal{R}_2 \\ W_3 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{3\rho\mu\nu} P^\rho J^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{30\mu\nu} J^{\mu\nu} E = \varepsilon_{3012} J^{12} E = -E J_{12} \end{aligned}$$

$$W_1 = -E\mathcal{R}_1, \quad W_2 = -E\mathcal{R}_2, \quad W_3 = -EJ_{12}$$

где

$$\mathcal{R}_1 = J_{23} + J_{02}, \quad \mathcal{R}_2 = J_{13} + J_{01}$$

Установим коммутационные соотношения между операторами $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, J_{12}$. Имеем

$$\begin{aligned} [\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2] &= -\frac{1}{E^2} [W_1, W_2] = \frac{i}{E^2} \varepsilon_{12\mu\nu} W^\mu P^\nu = \frac{i}{E} (\varepsilon_{12\mu 0} W^\mu - \varepsilon_{12\mu 3} W^\mu) = \\ &= \frac{i}{E} (-\varepsilon_{1230} W_3 - \varepsilon_{1203} W_0) = \frac{i}{E} (\varepsilon_{0123} W_3 - \varepsilon_{0123} W_0) = \frac{i}{E} (W_3 - W_0) = 0 \end{aligned}$$

Здесь мы использовали соотношение (188).

$$\begin{aligned} [J_{12}, \mathcal{R}_1] &= -\frac{1}{E^2} [W_1, W_3] = \frac{i}{E^2} \varepsilon_{13\mu\nu} W^\mu P^\nu = \frac{i}{E} \varepsilon_{13\mu 0} W^\mu = \\ &= -\frac{i}{E} \varepsilon_{1320} W_2 = -\frac{i}{E} \varepsilon_{0123} W_2 = -\frac{i}{E} W_2 = -i\mathcal{R}_2 \\ [J_{12}, \mathcal{R}_2] &= \frac{1}{E^2} [W_2, W_3] = -\frac{i}{E^2} \varepsilon_{23\mu\nu} W^\mu P^\nu = -\frac{i}{E} \varepsilon_{23\mu 0} W^\mu = \\ &= -\frac{i}{E} \varepsilon_{2310} W_1 = -\frac{i}{E} W_1 = i\mathcal{R}_1 \end{aligned}$$

Итак

$$\begin{aligned} [\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2] &= 0 \\ [J_{12}, \mathcal{R}_1] &= -i\mathcal{R}_2 \\ [J_{12}, \mathcal{R}_2] &= i\mathcal{R}_1 \end{aligned}$$

Известно, что коммутационные соотношения (191) задают алгебру Ли группы E_2 изометрий или движений двумерной плоскости. Эта алгебра содержит трансляции, генерируемые операторами $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$, и вращение, генерируемое оператором J_{12} .

Запишем оператор Казимира C_2 в пространстве V_q . Имеем

$$C_2 = W^\mu W_\mu = W_0^2 - W_1^2 - W_2^2 - W_3^2 = -(W_1^2 + W_2^2) = -\frac{i}{E} (\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2) \quad (192)$$

Здесь учтено, что $W_0 = W_3$. Равенство (192) очевидно согласуется с тем, что единственным оператором Казимира группы E_2 является $\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2$. Таким образом, нахождение неприводимого представления малой группы сводится к задаче на собственные значения для оператора $\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2$.

В любом неприводимом представлении оператор $\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2$ действует как оператор умножения на константу, которую мы обозначим ρ^2 . Поскольку операторы $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ коммутируют с $\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_2^2$, то базис неприводимого представления можно выбрать в виде собственных векторов $|\rho_1, \rho_2\rangle$ для операторов $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$. То есть

$$\mathcal{R}_1 |\rho_1, \rho_2\rangle = \rho_1 |\rho_1, \rho_2\rangle$$

$$\mathcal{R}_2 |\rho_1, \rho_2\rangle = \rho_2 |\rho_1, \rho_2\rangle$$

При этом $\rho_1^2 + \rho_2^2 = \rho^2 = \text{const.}$ Числа ρ_1, ρ_2 ограничены только последним соотношением, поэтому при $\rho^2 > 0$ операторы $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ имеют непрерывный спектр и представление малой группы является бесконечномерным. При рассмотрении массивных представлений в разделе 1.7.2 мы видели, что представление малой группы было

конечномерным и связано с понятием спина элементарной системы. Поэтому предположим, что и в безмассовом случае физически приемлемые представления малой группы должны быть также конечномерными. В качестве обоснования отметим, что бесконечномерным представлением малой группы не соответствует ни одна наблюдаемая физическая система.

Итак, мы требуем, чтобы подпространство V_q было конечномерным. Единственная возможность, отвечающая этому требованию получается при $\rho = 0$. Тогда и $\rho_1 = 0, \rho_2 = 0$ и в рассматриваемом подпространстве операторы $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ обращаются в ноль вместе с W_1, W_2 (см. (189)). При этом $W^2 = 0$. В результате малая группа H_q генерируется единственным оператором J_{12} и значит является абелевой и представляет собой группу вращений плоскости $SO(2) \sim U(1)$. Представления этой группы хорошо известны, мы далее рассмотрим только качественные соображения.

Поскольку малая группа является абелевой группой Ли, все ее неприводимые представления одномерны и характеризуются одним вещественным параметром. Пусть $|\lambda\rangle$ - собственный вектор оператора J_{12} ,

$$J_{12}|\lambda\rangle = -\lambda|\lambda\rangle$$

В каждом неприводимом представлении параметр λ принимает фиксированное значение. Выясним какие конкретно значения λ возможны. Оператор J_{12} является генератором вращения по окружности, тогда соответствующий элемент группы вращений $SO(2)$, отвечающий повороту на угол φ , есть $e^{i\varphi J_{12}}$. Тогда

$$e^{i\varphi J_{12}}|\lambda\rangle = e^{i\lambda\varphi}|\lambda\rangle$$

Совершим полный оборот на угол 2π . В правой части соотношения (194) Получим $e^{2\pi i\lambda}|\lambda\rangle$. Вращение на угол 2π отвечает тождественному преобразованию в группе Лоренца. Мы будем реализовывать группу Пуанкаре в пространстве спин-тензорных полей, связанных с группой $SL(2|\mathbb{C})$. При этом как отмечалось ранее каждой матрице $\Lambda \in L_+^\uparrow$ соответствуют две матрицы $\pm N \in SL(2|\mathbb{C})$. В частности, тождественному преобразованию в группе Лоренца отвечают две матрицы E и $-E$ в группе $SL(2|\mathbb{C})$, где E -единичная 2×2 матрица. Это значит, что тождественному преобразованию Лоренца отвечает условие $e^{2\pi i\lambda} = \pm 1$. Отсюда $\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ и $\lambda = 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, \dots$ или

$$\lambda = |\lambda|\sigma$$

где

$$|\lambda| = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$$\sigma = \pm 1$$

Параметр λ спиральностью элементарной системы.

Таким образом, неприводимое представление малой группы для безмассовых элементарных систем характеризуются параметром λ . Все такие представления одномерны. При этом если $\lambda \neq 0$, то неприводимые представления существуют всегда парами, то есть, если есть представление с параметром λ , то есть и представление с параметром $-\lambda$.

В результате мы построили неприводимые представления с базисными векторами $|0, \pm\lambda, q\rangle$. Здесь первый аргумент 0 означает нулевую массу. Импульс $q_\mu = (E, 0, 0, E)$. Базис неприводимого представления, отвечающий произвольному импульсу $p_\mu, p^2 = 0$ получается из векторов $|0, \pm\lambda, q\rangle$ действием операторов $U(\Lambda)$. Поэтому в общем случае базис неприводимого унитарного представления группы Пуанкаре класса (0_+)

составляют векторы $|0, \pm\lambda, q\rangle$, где $p^2 = 0$. Неприводимое представление характеризуется спиральностью λ , принимающей целые и полуцелые, положительные и отрицательные значения. Иногда параметр $|\lambda|$ называют спином безмассовой элементарной системы. Обратим внимание на отличие понятий спина массивной системы и спиральности безмассовой. В массивном случае при фиксированном значении импульса p_μ и спина s размерность неприводимого представления есть $2s + 1$. В безмассовом случае при фиксированном импульсе p_μ ($p^2 = 0$) неприводимое представление одномерно и задается параметром λ . Если $\lambda \neq 0$, то здесь всегда имеется два разных неприводимых представления, отвечающих спиральностям λ и $-\lambda$.

Пусть физическая система инвариантна относительно пространственного отражения, которое является одним из элементов группы Лоренца. При преобразовании $x^i \rightarrow -x^i$, оператор J_{12} меняет знак, что соответствует преобразованию $\lambda \rightarrow -\lambda$. Если потребовать, чтобы рассматриваемые представления были неприводимы относительно пространственных отражений, то надо два представления со спиральностями λ и $-\lambda$ объединить в одно двумерное представление. Обычно это обстоятельство всегда подразумевается (хотя если исключения, связанные с нарушением четности в слабых взаимодействиях). Поэтому говорят, что безмассовые элементарные системы имеют два состояния поляризации, отвечающие спиральностям $|\lambda|$ и $-|\lambda|$.

7.1.11 Helicity Operator

Теория

Рассмотрим безмассовое неприводимое представление. Мы покажем, что в этом случае существует особый оператор, коммутирующий со всеми генераторами группы Пуанкаре.

В безмассовом представлении $p^2 = 0$. Кроме того, согласно результатам раздела 1.7.2 $W^2 = 0$. Ранее мы установили тождество $W^\mu P_\mu = 0$ (56). Три соотношения $W^2 = 0$, $P^2 = 0$, $W^\mu P_\mu = 0$ означают, что

$$W_\mu = h P_\mu$$

где h некоторый оператор. Действительно, пусть векторы $X_\mu Y_\mu$ удовлетворяет условиям $X^2 = 0$, $Y^2 = 0$, $X^\mu Y_\mu = 0$. Выберем систему отсчета, где $X_\mu = a(1, 0, 0, 1)$, $a \neq 0$. Тогда условие $X^2 = 0$ автоматически выполняется. Рассмотрим $Y^\mu X_\mu = a(Y_0 - Y_3) = 0$, отсюда $Y_0 = Y_3$. Условие $W^2 = 0$ записывается в виде $Y_0^2 - Y_1^2 - Y_2^2 - Y_3^2 = -(Y_1^2 + Y_2^2) = 0$. Отсюда $Y_1 = Y_2 = 0$. Тогда $Y_\mu = Y_0(1, 0, 0, 1) = \frac{Y_0 a}{a}(1, 0, 0, 1)$. Поэтому X_μ и Y_μ пропорциональны, $X_\mu = k Y_\mu$. Поскольку последнее соотношение векторное, то оно выполняется в любой системе отсчета. В результате мы приходим к равенству (197).

Из (197) имеем

$$h = W_0 P_0^{-1} = \frac{1}{2} \varepsilon_{0ijk} P^i J^{jk} P_0^{-1} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{0ijk} J_{jk} P_i P_0^{-1}$$

Обозначим

$$J_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{0ijk} J_{jk}$$

тогда

$$h = \frac{\vec{P} \vec{J}}{P_0}$$

Заметим, что согласно (57) $[W_\mu, P_\nu] = 0$. Поэтому P_0 коммутирует W_0 и значит $[P_0, \vec{J}] = 0$. Следовательно оператор P_0 коммутирует с оператором $\vec{P}\vec{J}$ и значит оператор P_0^{-1} может быть расположен с любой стороны в соотношении (199).

Покажем, что оператор h коммутирует с P_μ и $J_{\mu\nu}$. Соотношение $[h, P_\mu] = 0$ следует из тождеств $[W_0, P_\mu] = 0$ и $P_0 = |\vec{P}|$ для безмассового случая. Рассмотрим вычисление $[h, P_\mu]$. Запишем очевидное тождество

$$0 = [P_0 P_0^{-1}, J_{\mu\nu}] = [P_0, J_{\mu\nu}] P_0^{-1} + P_0 [P_0^{-1}, J_{\mu\nu}]$$

Отсюда

$$\begin{aligned} [P_0^{-1}, J_{\mu\nu}] &= -P_0^{-1} [P_0, J_{\mu\nu}] P_0^{-1} = \\ &= iP_0^{-1} (\eta_{0\nu} P_\mu - \eta_{0\mu} P_\nu) P_0^{-1} = i (\eta_{0\nu} P_\mu - \eta_{0\mu} P_\nu) P_0^{-2} \end{aligned}$$

Значит

$$\begin{aligned} [h, J_{\mu\nu}] &= [W_0 P_0^{-1}, J_{\mu\nu}] = [W_0, J_{\mu\nu}] P_0^{-1} + W_0 [P_0^{-1}, J_{\mu\nu}] = \\ &= i (\eta_{0\mu} W_\nu - \eta_{0\nu} W_\mu) P_0^{-1} + i W_0 (\eta_{0\nu} P_\mu - \eta_{0\mu} P_\nu) P_0^{-2} = \\ &= \frac{i}{P_0} \left[\eta_{0\mu} \left(W_\nu - W_0 \frac{P_\nu}{P_0} \right) - \eta_{0\nu} \left(W_\mu - W_0 \frac{P_\mu}{P_0} \right) \right] \end{aligned}$$

Но $W_\mu = h P_\mu$ Тогда

$$[h, J_{\mu\nu}] = \frac{i}{P_0} [\eta_{0\mu} (h P_\nu - h P_\mu) - \eta_{0\nu} (h P_\mu - h P_\nu)] = 0$$

Итак

$$[h, J_{\mu\nu}] = 0$$

Таким образом, оператор h , построенный по правилу (199) в неприводимом безмассовом представлении коммутирует со всеми генераторами $P_\mu, J_{\mu\nu}$. Следовательно в этом представлении он действует как оператор умножения на константу

$$h|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

Установим какие значения принимает параметр λ . Согласно определению (199) оператор h инвариантен относительно трехмерных вращений и значит его собственные значения не зависят от выбора направления в трехмерном пространстве. Повернем систему координат так, чтобы ось z , была направлена вдоль вектора $\vec{P}$. В этой системе координат $\vec{P} = (0, 0, |\vec{P}|)$ и значит

$$h = J_3 = -J_{12}$$

Как мы уже отмечали, оператор J_{12} это генератор одномерных вращений и его собственные значения есть $-\lambda$, где λ представляет собой спиральность. Поскольку собственными значениями оператора h является спиральность, то естественно называть этот оператор - оператором спиральности.

Заметим, что в общем случае $P_0 = |\vec{P}|$. Тогда оператор спиральности можно переписать так

$$h = \vec{J} \frac{\vec{P}}{|\vec{P}|} = \vec{J} \vec{n}$$

В физических приложениях $\vec{P}$ есть трехмерный импульс системы, а $\vec{J}$ ее момент импульса (угловой момент). Вектор $\vec{n}$ - это единичный вектор вдоль направления трехмерного импульса, то есть вдоль направления движения. Поэтому спиральность представляет собой проекцию углового момента на направление движения. Поскольку спиральность λ принимает всегда два значения $|\lambda| = |\lambda|$, то в безмассовых элементарных системах угловой момент всегда направлен либо по направлению движения либо противоположно направлению движения. Исключением является случай нулевой спиральности.

7.1.12 Boosts of Fields (???)

Упрощенные бусты векторного поля (??)

In simple terms radiation moving to the right in an inertial reference frame F can be modeled by the function

$$A \cos(k(x - ct) + \theta)$$

for some amplitude A and phase shift θ . If we move to the coordinates $(t', x') = L_v(t, x)$ provided by an inertial reference frame F' , a computation then shows that the function becomes

$$A \cos(k_+(x' - ct') + \theta)$$

where $k_+ = (1 - v/c + v^2/2c^2 + O(v^3))k$. Actually, if the radiation is tensor-valued, the amplitude A might also transform. How?

(???????)

7.1.13 Representations of the Poincaré Group in the Space of Spin-Tensor Fields

Теория

Пусть спин-тензор определен в каждой точке пространства Минковского. В этом случае говорим, что задано спин-тензорное поле.

Рассмотрим неоднородное представление Лоренца $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$ и пусть $\varphi_{a_1 \dots a_n \dot{a}_1 \dots \dot{a}_m}(x)$ спин-тензорное поле. Компоненты спин-тензорного преобразуются относительно неоднородных преобразований Лоренца в виде

$$\varphi'_{a_1 \dots a_n \dot{a}_1 \dots \dot{a}_m}(x') = N_{a_1}^{b_1} \dots N_{a_n}^{b_n} N_{\dot{a}_1}^* \dot{b}_1 \dots N_{\dot{a}_m}^* \dot{b}_m \varphi_{b_1 \dots b_n \dot{b}_1 \dots \dot{b}_m}(x)$$

Неприводимое представление группы Лоренца задается в пространстве полностью симметричных по неточечным и точечным индексам спинтензорных полей вида $\varphi_{(a_1 \dots a_n)(\dot{a}_1 \dots \dot{a}_m)}(x)$, которые для краткости будем обозначать $\varphi_{a(n)\dot{a}(m)}(x)$. Закон преобразования запишем в форме:

$$\varphi'_{a(n)\dot{a}(m)}(x') = R_{a(n)\dot{a}(m)b(n)\dot{b}(m)} \varphi_{b(n)\dot{b}(m)}(x)$$

где обозначено

$$R_{a(n)\dot{a}(m)b(n)\dot{b}(m)} = N_{(a_1}^{(b_1} \dots N_{a_n)}^{b_n)} N_{(\dot{a}_1}^* (\dot{b}_1 \dots N_{\dot{a}_m)}^* \dot{b}_m)$$

Из соотношения $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$ следует, что $x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu (x'^\nu - a^\mu)$. В соотношении (205) выразим x^μ через x'^μ согласно последнему соотношению, а потом переобозначим x'^μ на x^μ . Получим

$$\varphi'_{a(n)\dot{a}(m)}(x) = R_{a(n)\dot{a}(m)b(n)\dot{b}(m)} (\Lambda^{-1}) (x - a)$$

Найдем бесконечно малую форму соотношения (207). Запишем $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ и $R_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} = \mathbf{1}_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(S_{\mu\nu})_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)}$. Здесь $S_{\mu\nu}$ - генераторы группы Лоренца в спин-тензорном представлении. Тогда из соотношения (207) в первом порядке по бесконечно малым параметрам $\omega^{\mu\nu}$ и a^μ получим

$$\begin{aligned}\varphi'_{a(n)\dot{a}(m)}(x) &= \left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu} \right)_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} \left(\varphi_{b(n)\dot{b}(m)}(x) - a^\mu \partial_\mu \varphi_{b(n)\dot{b}(m)}(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \varphi_{a(n)\dot{a}(m)}(x) \right) = \\ &= \varphi_{a(n)\dot{a}(m)}(x) + ia^\mu P_\mu \varphi_{a(n)\dot{a}(m)}(x) + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} (J_{\mu\nu})_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} \varphi_{b(n)\dot{b}(m)}(x)\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}(P_\mu)_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} &= \mathbf{1}_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} i\partial_\mu \\ (J_{\mu\nu})_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} &= \mathbf{1}_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} (\eta_{\nu\lambda} x^\lambda i\partial_\mu - \eta_{\mu\lambda} x^\lambda i\partial_\nu) + (S_{\mu\nu})_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)}\end{aligned}$$

Соотношение (208) задает преобразование спин-тензорного поля при бесконечно малых неоднородных преобразованиях Лоренца. Оператор P_μ (209) есть генератор трансляций, а оператор $J_{\mu\nu}$ (210) есть генератор лоренцевских вращений в спин-тензорном представлении. При этом

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$$

где

$$L_{\mu\nu} = \mathbf{1} (\eta_{\nu\lambda} x^\lambda P_\mu - \eta_{\mu\lambda} x^\lambda P_\nu)$$

Из (208) видно, что $S_{\mu\nu}$ - Это вклад в оператор $J_{\mu\nu}$, обусловленный преобразованием компонент спин-тензора при фиксированных координатах x^μ .

Наша цель состоит в нахождении условий при которых спинтензорное поле соответствует неприводимому представлению группы Пуанкаре. Мы не будем изучать подробно общий случай, а рассмотрим только основные частные случаи: а Пусть число точечных и неточечных индексов спин тензора совпадали. В этом случае спин-тензор можно конвертировать в тензор вида $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}$. Условие того, что этот тензор соответствует неприводимому представлению группы Лоренца есть $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n} = \varphi_{(\mu_1 \dots \mu_n)}$ и $\eta^{\mu_1 \mu_n} \varphi_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n} = 0$. То есть рассматриваемый тензор должен быть полностью симметричным и бесследовым.

Пусть $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$ полностью симметричное бесследовое тензорное поле. При неоднородных преобразованиях Лоренца оно преобразуется в соответствии с общим выражением (208) в виде

$$\begin{aligned}\delta \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x) &= ia^\mu (P_\mu)_{\mu_1 \dots \mu_n}{}^{\nu_1 \dots \nu_n} \varphi_{\nu_1 \dots \nu_n}(x) + \\ &+ \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} (J_{\mu\nu})_{\mu_1 \dots \mu_n}{}^{\nu_1 \dots \nu_n} \varphi_{\nu_1 \dots \nu_n}(x)\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}(P_\mu)_{a(n)\dot{a}(m)}{}^{b(n)\dot{b}(m)} &= \delta_{(\mu_1}{}^{\nu_1} \dots \delta_{\mu_n)}{}^{\nu_n} i\partial_\mu \\ J_{\mu\nu} &= L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}\end{aligned}$$

где $L_{\mu\nu}$ имеет вид (211), а явный вид генератора $S_{\mu\nu}$ зависит от ранга тензорного поля $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$.

Дальнейшее рассмотрение проводится следующим образом. Используя выражения P_μ (213) и $J_{\mu\nu}$ (214) построим оператор Казимира W^2 и подействуем им на тензорное поле $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$. Согласно рассмотренной выше общей теории, в неприводимом массивном представлении результат действия оператора Казимира есть $-m^2 s(s+1)$, где s - спин, отвечающий данному неприводимому представлению. Мы не будем проводить общий анализ, а ограничимся только векторным полем $\varphi^\mu(x)$. Обобщение на произвольное тензорное поле будет очевидным.

В случае векторного поля $\varphi^\mu(x)$ явный вид генератора $J_{\mu\nu}$ был получен в разделе 1.6:

$$\begin{aligned} (J_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu &= (L_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu + (S_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \\ (L_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu &= \delta^\mu{}_\nu (\eta_{\beta\lambda} x^\lambda P_\alpha - \eta_{\alpha\lambda} x^\lambda P_\beta) \\ (S_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu &= i (\delta_\beta{}^\mu \eta_{\alpha\nu} - \delta_\alpha{}^\mu \eta_{\beta\nu}) \end{aligned}$$

и согласно (213)

$$(P_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu i \partial_\alpha$$

Введем вектор Паули-Любаньского

$$\begin{aligned} W_\mu &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} P^\alpha J^{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} P^\alpha (L^{\beta\gamma} + S^{\beta\gamma}) = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} P^\alpha (x^\gamma P^\beta - x^\beta P^\gamma + S^{\beta\gamma}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} P^\alpha S^{\beta\gamma} \end{aligned}$$

Поэтому оператор Казимира имеет вид

$$W^2 = W^\mu W_\mu = \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} P_\alpha S_{\beta\gamma} \varepsilon_{\mu\lambda\rho\sigma} P^\lambda S^{\rho\sigma} = \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\mu\lambda\rho\sigma} P_\alpha P^\lambda S_{\beta\gamma} S^{\rho\sigma}$$

Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\mu\lambda\rho\sigma} &= -\det \begin{pmatrix} \delta^\alpha{}_\lambda & \delta^\alpha{}_\rho & \delta^\alpha{}_\sigma \\ \delta^\beta{}_\lambda & \delta^\beta{}_\rho & \delta^\beta{}_\sigma \\ \delta^\gamma{}_\lambda & \delta^\gamma{}_\rho & \delta^\gamma{}_\sigma \end{pmatrix} = \\ &= -\left(\delta_{\lambda\lambda} \delta^\beta{}_\rho \delta^\gamma{}_\sigma - \delta^\alpha{}_\lambda \delta^\beta{}_\sigma \delta^\gamma{}_\rho - \delta^\alpha{}_\rho \delta^\beta{}_\lambda \delta^\gamma{}_\sigma + \delta^\alpha{}_\rho \delta^\beta{}_\sigma \delta_{\lambda\lambda} + \delta^\alpha{}_\sigma \delta^\beta{}_\lambda \delta^\gamma{}_\rho - \delta^\alpha{}_\sigma \delta^\beta{}_\rho \delta_{\lambda\lambda} \right) \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} W^2 &= -\frac{1}{4} \left(\delta^\alpha{}_\lambda \delta^\beta{}_\rho \delta^\gamma{}_\sigma - \delta_{\lambda\lambda} \delta^\beta{}_\sigma \delta^\gamma{}_\rho - \delta^\alpha{}_\rho \delta_{\lambda\lambda} \delta^\gamma{}_\sigma + \delta^\alpha{}_\rho \delta^\beta{}_\sigma \delta^\gamma{}_\lambda + \delta^\alpha{}_\sigma \delta^\beta{}_\lambda \delta^\gamma{}_\rho - \delta^\alpha{}_\sigma \delta^\beta{}_\rho \delta_{\lambda\lambda} \right) S_{\beta\gamma} S^{\rho\sigma} P_\alpha P^\lambda = \\ &= -\frac{1}{4} \left(S_{\beta\gamma} S^{\beta\gamma} P_\alpha P^\alpha - S_{\beta\gamma} S^{\gamma\beta} P_\alpha P^\alpha - S_{\beta\gamma} S^{\alpha\gamma} P_\alpha P^\beta + \right. \\ &\quad \left. + S_{\beta\gamma} S^{\alpha\beta} P_\alpha P^\gamma + S_{\beta\gamma} S^{\gamma\alpha} P_\alpha P^\beta - S_{\beta\gamma} S^{\beta\alpha} P_\alpha P^\gamma \right) = \\ &= -\frac{1}{2} (S_{\beta\gamma} S^{\beta\gamma} P^2 + S_{\beta\gamma} S^{\alpha\beta} P_\alpha P^\gamma + S_{\beta\gamma} S^{\gamma\alpha} P_\alpha P^\beta) \end{aligned}$$

Теперь подействуем этим оператором на векторное поле $\varphi^\mu(x)$. Имеем

$$\begin{aligned}
 (S_{\beta\gamma} S^{\beta\gamma}) \varphi^\mu &= \\
 &= (S_{\beta\gamma})^\mu{}_\lambda (S^{\beta\gamma})^\lambda{}_\nu \varphi^\nu = -(\delta_\gamma^\mu \eta_{\beta\lambda} - \delta_\beta^\mu \eta_{\gamma\lambda}) (\eta^{\gamma\lambda} \delta^\beta{}_\nu - \eta^{\beta\lambda} \delta^\gamma{}_\nu) \varphi^\nu = \\
 &= -(\delta^\mu{}_\nu - 4\delta^\mu{}_\nu - 4\delta^\mu{}_\nu + \delta^\mu{}_\nu) \varphi^\nu = 6\delta^\mu{}_\nu \varphi^\nu = 6\varphi^\mu \\
 (S_{\beta\gamma} S^{\alpha\beta}) \varphi^\mu &= \\
 &= (S_{\beta\gamma})^\mu{}_\lambda (S^{\alpha\beta})^\lambda{}_\nu \varphi^\nu = -(\delta_\gamma^\mu \eta_{\beta\lambda} - \delta_\beta^\mu \eta_{\gamma\lambda}) (\eta^{\beta\lambda} \delta^\alpha{}_\nu - \eta^{\alpha\lambda} \delta^\beta{}_\nu) \varphi^\nu = \\
 &= -(4\delta^\mu{}_\gamma \delta^\alpha{}_\nu - \delta^\mu{}_\gamma \delta^\alpha{}_\nu - \delta^\mu{}_\gamma \delta^\alpha{}_\nu + \delta^\mu{}_\nu \delta^\alpha{}_\gamma) \varphi^\nu = \\
 &= -(2\delta^\mu{}_\gamma \delta^\alpha{}_\nu + \delta^\mu{}_\nu \delta^\alpha{}_\gamma) \varphi^\nu \\
 (S_{\beta\gamma} S^{\gamma\alpha}) \varphi^\mu &= {}^2 = (S_{\beta\gamma})^\mu{}_\lambda (S^{\gamma\alpha})^\lambda{}_\nu \varphi^\nu = -(\delta_\gamma^\mu \eta_{\beta\lambda} - \delta_\beta^\mu \eta_{\gamma\lambda}) (\eta^{\alpha\lambda} \delta^\gamma{}_\nu - \eta^{\gamma\lambda} \delta^\alpha{}_\nu) \varphi^\nu = \\
 &= -(\delta^\mu{}_\nu \delta^\alpha{}_\beta - \delta^\mu{}_\beta \delta^\alpha{}_\nu - \delta^\mu{}_\beta \delta^\alpha{}_\nu + 4\delta_\beta^\mu \delta^\alpha{}_\nu) \varphi^\nu = \\
 &= -(2\delta^\mu{}_\beta \delta^\alpha{}_\nu + \delta^\mu{}_\nu \delta^\alpha{}_\beta) \varphi^\nu
 \end{aligned}$$

С учетом этих равенств

$$\begin{aligned}
 W^2 \varphi^\mu &= -\frac{1}{2} (6P^2 \varphi^\mu - 2P^\mu P_\alpha \varphi^\alpha - P^2 \varphi^\mu - 2P^\mu P_\alpha \varphi^\alpha - P^2 \varphi^\mu) = \\
 &= -2P^2 \varphi^\mu + 2P^\mu P_\alpha \varphi^\alpha
 \end{aligned}$$

В пространстве неприводимого представления должно выполняться

$$W^2 \varphi^\mu = -m^2 s(s+1) \varphi^\mu$$

где s - спин, соответствующий векторному полю. В рассматриваемом представлении $P_\mu = i\partial_\mu$. Поэтому $P^2 = -\partial^\mu \partial_\mu = -\square$. Соотношение (219) переписывается так

$$W^2 \varphi^\mu = -2(-\square \varphi^\mu) - 2\partial^\mu \partial_\nu \varphi^\nu$$

Потребуем выполнение соотношений

$$\begin{aligned}
 \square \varphi^\mu - m^2 \varphi^\mu &= 0 \\
 \partial_\nu \varphi^\nu &= 0
 \end{aligned}$$

Тогда

$$W^2 \varphi^\mu = -m^2 1(1+1) \varphi^\mu$$

Сравнивая (222) с (220) заключаем, что $s = 1$. Условие $P^2 \varphi^\mu = m^2 \varphi^\mu$, это одно из условий массивного неприводимого представления. Таким образом, векторное поле соответствует неприводимому массивному представлению группы Пуанкаре при выполнении дополнительного условия (221). Первое из этих условий означает, что каждая компонента векторного поля удовлетворяет уравнению Клейна -Гордона. Второе условие, означает, что дивергенция векторного поля обращается в ноль.

Анализ для произвольного тензорного поля $\varphi^{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$ проводится аналогично. Поскольку рассматривается только полностью симметричный тензор, то часть вычислений достаточно провести только для одного индекса, зафиксировав все остальные. Тогда задача по существу сводится к рассмотренному выше векторному полю и дает $(\square + m^2) \varphi^{\mu_1 \dots \mu_n}(x) = 0$, $\partial_{\mu_1} \varphi^{\mu_1 \dots \mu_n}(x) = 0$. Первое из этих условий - это условие, определяющее неприводимое массивное представление. Учет остальных индексов в соотношении для $W^2 \varphi^{\mu_1 \dots \mu_n}$ приводит к результату

$$W^2 \varphi^{\mu_1 \dots \mu_n} = -m^2 n(n+1) \varphi^{\mu_1 \dots \mu_n}$$

Причем имеет место условия

$$\begin{aligned}\varphi^{\mu_1 \dots \mu_n}(x) &= \varphi^{(\mu_1 \dots \mu_n)}(x) \\ (\square + m^2) \varphi^{\mu_1 \dots \mu_n}(x) &= 0 \\ \eta^{\mu_1 \mu_2} \varphi_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n}(x) &= 0 \\ \partial_{\mu_1} \varphi^{\mu_1 \dots \mu_n}(x) &= 0\end{aligned}$$

Соотношение (223) показывает, что при выполнении дополнительных условий (224) тензорное поле n -го ранга описывает неприводимое массивное представление группы Пуанкаре.

Спин-тензорные поля вида $\varphi_{(a_1 \dots a_n a)(\dot{a}_1 \dots \dot{a}_n)}(x)$ и $\chi_{(a_1 \dots a_n)(\dot{a}_1 \dots \dot{a}_n \dot{a})}(x)$

Перейдем теперь к рассмотрению спин-тензорных полей вида $\varphi_{(a_1 \dots a_n a)(\dot{a}_1 \dots \dot{a}_n)}(x)$ и $\chi_{(a_1 \dots a_n)(\dot{a}_1 \dots \dot{a}_n \dot{a})}(x)$.

Эти поля соответствуют неприводимым представлениям группы Лоренца $(\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2})$ и $(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2})$ соответственно. В двух этих случаях число неточечных и точечных индексов отличается на единицу. В соответствии с правилом (133), каждой паре спинорных индексов - неточечному и точечному соответствует векторный индекс. Проведя конверсию спинорных индексов в векторные полу-чим $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_n} a(x)$ и $\chi_{\mu_1 \dots \mu_n} \dot{a}(x)$. Эти выражения называются тензорными спинорами.

Выясним при каких условиях тензорные спиноры реализуют неприводимое массивное представление группы Пуанкаре. Начнем с простого случая, когда $n = 0$, то есть изучим $\varphi_a(x)$ и $\chi_{\dot{a}}(x)$. Для Этого надо подействовать на данные поля операторами Казимира и найти их собственные значения. Во-первых заметим, что одним из операторов Казимира является P^2 . В спин-тензорном представлении $P_\mu = i\partial_\mu$. Поэтому условие $P^2 \varphi_a = m^2 \varphi_a$ принимает вид

$$(\square + m^2) \varphi_a(x) = 0$$

Аналогично

$$(\square + m^2) \chi_{\dot{a}}(x) = 0$$

То есть каждая из компонент $\varphi_a(x)$, $\chi_{\dot{a}}(x)$ должна удовлетворять уравнению Клейна-Гордона.

Обратимся ко второму оператору Казимира $W^2 = W^\mu W_\mu$, где вектор Паули-Любаньского имеет вид $W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} P^\alpha J^{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} P^\alpha S^{\beta\gamma}$. Все вычисления для простоты проводим в системе отсчета, где $P_\alpha = (m, 0, 0, 0)$. Тогда

$$W_\mu = \frac{m}{2} \varepsilon_{\mu 0ij} S^{ij} = \frac{m}{2} \varepsilon_{\mu 0ij} S_{ij}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}W_0 &= 0 \\ W_i &= \frac{m}{2} \varepsilon_{i0jk} S_{jk} = -\frac{m}{2} \varepsilon_{ijk} S_{jk}\end{aligned}$$

Поэтому

$$W^2 = -W_1^2 - W_2^2 - W_3^2 = -\frac{m^2}{4} \varepsilon_{ijk} S_{jk} \varepsilon_{imn} S_{mn}$$

Займемся преобразованием этого выражения. Используем тождество $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$, Тогда

$$W^2 = -\frac{m^2}{4} (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) S_{jk}S_{mn} = -\frac{m^2}{4} (S_{jk}S_{jk} - S_{jk}S_{kj}) = -\frac{m^2}{2} S_{jk}S_{jk}$$

Ранее было показано, что генераторы группы Лоренца в фундаментальном представлении есть $S_{\mu\nu} = -\sigma_{\mu\nu}$. Тогда

$$W^2\varphi_a = \frac{m^2}{2} (\sigma_{jk})_a^b (\sigma_{jk})_b^c \varphi_c$$

Рассмотрим

$$\sigma_{jk}\sigma_{jk} = \frac{1}{16} (\sigma_j\tilde{\sigma}_k - \sigma_k\tilde{\sigma}_j) (\sigma_j\tilde{\sigma}_k - \sigma_k\tilde{\sigma}_j) = \frac{1}{8} (\sigma_j\tilde{\sigma}_k\sigma_j\tilde{\sigma}_k - \sigma_k\tilde{\sigma}_j\sigma_j\tilde{\sigma}_k)$$

Выражение $\sigma_j\tilde{\sigma}_k\sigma_j\tilde{\sigma}_k$ преобразуем так

$$\sigma_j\tilde{\sigma}_k\sigma_j\tilde{\sigma}_k = \sigma_j \underbrace{(\tilde{\sigma}_k\sigma_j + \tilde{\sigma}_j\sigma_k)}_{-2\delta_{jk}} \tilde{\sigma}_k - \sigma_j\tilde{\sigma}_j\tilde{\sigma}_k\sigma_k\tilde{\sigma}_k = -2\sigma_j\tilde{\sigma}_j - \sigma_j\tilde{\sigma}_j\tilde{\sigma}_k\sigma_k\tilde{\sigma}_k$$

Из тождества $\sigma_i\tilde{\sigma}_j + \sigma_j\tilde{\sigma}_i = -2\delta_{ij}\sigma_0$ следует, что $\sigma_j\tilde{\sigma}_j + \sigma_j\tilde{\sigma}_j = -2\delta_{jj}\sigma_0$ или $\sigma_j\tilde{\sigma}_j = -3\sigma_0$. Тогда $\sigma_j\tilde{\sigma}_k\sigma_j\tilde{\sigma}_k = 6\sigma_0 - 9\sigma_0 = -3\sigma_0$. Далее $\sigma_k\tilde{\sigma}_j\sigma_j\tilde{\sigma}_k = \sigma_k(\tilde{\sigma}_j\sigma_j)\tilde{\sigma}_k = -3\sigma_k\tilde{\sigma}_k = 9\sigma_0$. В результате

$$\sigma_{jk}\sigma_{jk} = \frac{1}{8} (-3\sigma_0 - 9\sigma_0) = -\frac{3}{2}\sigma_0$$

Поэтому

$$W^2\varphi_a = -\frac{3m^2}{4}\varphi_a = -m^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) \varphi_a$$

Отсюда следует, что полю $\varphi_a(x)$ соответствует спин $s = \frac{1}{2}$. Аналогичным образом показывается, что полю $\chi_{\dot{a}}(x)$ также соответствует спин $s = \frac{1}{2}$.

Таким образом, при выполнении условий (225), (226) поля $\varphi_a(x)$, $\chi_{\dot{a}}(x)$ соответствуют неприводимым массивным представлениям группы Пуанкаре.

Об общем случае (???)

Анализ общего случая является достаточно трудоемким и мы приведем только окончательные результаты.

Тензорные спиноры описывают неприводимое массивное представление группы Пуанкаре со спином $s = n + \frac{1}{2}$ при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} (\square + m^2) \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n a}(x) &= 0 \\ \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n a}(x) &= \varphi_{(\mu_1 \dots \mu_n) a}(x) \\ \eta^{\mu_1 \mu_2} \varphi_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n a}(x) &= 0 \\ \partial^{\mu_1} \varphi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n a}(x) &= 0 \\ (\tilde{\sigma}^{\mu_1})^{\dot{a} a} \varphi_{\mu_1 \dots \mu_n a}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Условия на $\chi_{\dot{a}}(x)$ получаются из (230) заменой $\varphi_a(x)$ на $\chi_{\dot{a}}(x)$ и заменой $(\tilde{\sigma}^{\mu_1})^{\dot{a} a}$ на $(\sigma^{\mu_1})^{a \dot{a}}$ в последнем из соотношений (230). Это последнее соотношение называется условием сигма-бесследовости.

Безмассовые представления

Мы не будем проводить общий анализ, а ограничимся только векторным полем $A_\mu(x)$ и спинорами $\varphi_a(x), \chi_{\dot{a}}(x)$. Условие $P^2 = 0$ дает $\square\varphi_a(x) = 0, \square\chi_{\dot{a}}(x) = 0, \square A_\mu(x) = 0$. Наша цель состоит в том, чтобы выяснить какие спиральности соответствуют этим полям. Вычисления будем проводить в системе отсчета где импульс $P_\mu = (E, 0, 0, E)$.

Как было показано в разделе 1.7.3 в этой системе отсчета $W_1 = -E\mathcal{R}_1, W_2 = E\mathcal{R}_2, W_3 = -EJ_{12}$. При этом рассматриваются представления, в котором $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = 0$. Заметим, что ранее мы писали $W_3 = -EJ_{12}$, но поскольку $J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$ и $L_{\mu\nu}$ выпадает из выражения для W_μ , то реально $W_3 = -ES_{12}$. Спиральность λ определяется как собственное значение оператора спиральности h , который в выбранной системе отсчета есть $-S_{12}$. Запишем $-S_{12}$ в явном виде, имеем $-S_{12} = i\sigma_{12} = -\frac{i}{4}(\sigma_1\tilde{\sigma}_2 - \sigma_2\tilde{\sigma}_1) = \frac{i}{4}(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1) = -\frac{i}{2}\sigma_3$. Отсюда

$$-S_{12} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Мы видим, что матрица $-S_{12}$ имеет два собственных значения $\pm\frac{1}{2}$. То есть полю $\varphi_a(x)$ соответствуют спиральности $\lambda = \frac{1}{2}, \lambda = -\frac{1}{2}$. Аналогично показывается, что полю $\chi_{\dot{a}}(x)$ также соответствуют спиральности $\lambda = \frac{1}{2}, \lambda = -\frac{1}{2}$. Таким образом, поля $\varphi_a(x), \chi_{\dot{a}}(x)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\square\varphi_a(x) = 0, \quad \square\chi_{\dot{a}}(x) = 0$$

описывают безмассовое представление со спиральностями $\pm\frac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь векторное поле. Условия $W^2 A_\mu = 0$ в (221) при $m^2 = 0$, дает

$$\begin{aligned} \square A_\mu(x) &= 0 \\ \partial^\mu A_\mu(x) &= 0 \end{aligned}$$

Выясним какие спиральности отвечают полю $A_\mu(x)$. Оператор $(S_{\alpha\beta})_\mu{}^\nu$ в векторном представлении есть $i(\eta_{\beta\mu}\delta_\alpha{}^\nu - \eta_{\alpha\mu}\delta_\beta{}^\nu)$. Тогда оператор спиральности в выбранной системе отсчета имеет вид:

$$-(S_{12})_\mu{}^\nu = -i(\delta_1^\nu\eta_{2\mu} - \delta_2^\nu\eta_{1\mu})$$

Выпишем здесь явно матричные элементы. Ясно, что все диагональные матричные элементы обращаются в ноль. $(-S_{12})_i{}^1 = -i\eta_{2i} = i\delta_{2i}, (-S_{12})_i{}^2 = i\eta_{1i} = -i\delta_{1i}, (-S_{12})_0{}^\nu = 0, (-S_{12})_3{}^\nu = 0$. Таким образом

$$-S_{12} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим задачу на собственные значения $(-S_{12})_\mu{}^\nu A_\nu = \lambda A_\mu$. Имеем

$$i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -A_2 \\ A_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i\lambda \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Отсюда $A_0 = 0, A_3 = 0, A_2 = +i\lambda A_1, A_1 = -i\lambda A_2$. Из последних двух уравнений находим $A_2 = (-i\lambda)i\lambda A_2$ или $\lambda^2 = 1, \lambda = \pm 1$. Таким образом, безмассовому векторному полю соответствуют две спиральности $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$. В результате, при выполнении условий (232) векторное поле описывает два безмассовых неприводимых представления группы Пуанкаре со спиральностями $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$.

Общий анализ показывает, что условия на поля, определяющие неприводимые безмассовые представления получаются из условий, определяющих массивные представления, если в последних положить $m = 0$.

7.2 Fields as Representations of Poincare Group

7.2.1 Klein–Gordon Equation as Representation $(0, 0)$

Суть (?)

Теория

Рассмотрим вещественное скалярное поле $\varphi(x)$. Оно отвечает представлению $(0, 0)$ группы Лоренца. Соответствующий генератор группы Лоренца в этом случае $J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} = (x_\nu p_\mu - x_\mu p_\nu)$. Поэтому вектор Паули–Любаньского в скалярном представлении есть $W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\nu J^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\nu (x^\beta P^\alpha - x^\alpha P^\beta) = 0$. По определению спин скалярного поля равен нулю. Условия определяющие массивное неприводимое представление $P^2 = m^2$ с учетом того, что в скалярном представлении $P_\mu = i\partial_\mu$ ведет к уравнению

$$(\square + m^2)\varphi(x) = 0$$

Это уравнение называется уравнением Клейна–Гордона. При нулевой массе из него следует волновое уравнение.

7.2.2 Weyl Spinors or Representations $(0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0)$

Суть (?)

Теория

Рассмотрим спинорные поля $\varphi_a(x), \chi_{\dot{a}}(x)$, преобразующихся по представлениям $(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})$ группы Лоренца соответственно. Эти поля отвечают неприводимым безмассовым представлениям групп Пуанкаре со спиральностями $\pm\frac{1}{2}$ при выполнении условий

$$\square\varphi_a(x) = 0$$

$$\square\chi_{\dot{a}}(x) = 0$$

Очевидно, что для лоренц-ковариантные уравнения для $\varphi_a(x), \chi_{\dot{a}}(x)$ могут быть построены только из $\partial_\mu\varphi_a(x), \partial_\mu\chi_{\dot{a}}(x)$ и инвариантных величин группы Лоренца $\sigma_\mu, \tilde{\sigma}_\mu, \eta_{\mu\nu}$ и т.д. Простейшие уравнения которые формулируются в этих терминах есть

$$i(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a}\partial_\mu\varphi_a = 0$$

$$i(\sigma^\mu)_{a\dot{a}}\partial_\mu\chi^{\dot{a}} = 0$$

Покажем, что эти уравнения ведут к уравнениям Клейна-Гордона для каждой компоненты $\varphi_a(x), \chi_{\dot{a}}(x)$. Подействуем на первое уравнение оператором $-i(\sigma^\nu)_{b\dot{a}} \partial_\nu$, имеем

$$(\sigma^\nu \tilde{\sigma}^\mu)_b^a \partial_\nu \partial_\mu \varphi_a = 0$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} (\sigma^\nu \tilde{\sigma}^\mu + \sigma^\mu \tilde{\sigma}^\nu)_b^a \partial_\mu \partial_\nu \varphi_a = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi_b = \square \varphi_b = 0$$

Аналогично, действуя оператором $-i(\tilde{\sigma}^\nu)_{ba} \partial_\nu$ на второе из уравнений (234), получим $\square \chi_{\dot{a}} = 0$. Таким образом, уравнения (234) согласованы с условиями неприводимости $P^2 = 0$ для безмассовых элементарных систем. Эти уравнения называются уравнениями Вейля.

Ранее было показано, что вообще говоря безмассовые поля $\varphi_a(x), \chi_{\dot{a}}(x)$ содержат две спиральности. Однако математический факт, что эти поля удовлетворяют уравнениям первого порядка, накладывает дополнительные условия на отвечающие им спиральности. Рассмотрим уравнения Вейля для поля $\varphi_a(x)$ и совершим в нем преобразования Фурье

$$\varphi_a(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \tilde{\varphi}_a(p)$$

Тогда получим

$$(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a} p_\mu \tilde{\varphi}_a(p)$$

Или

$$\left[(\tilde{\sigma}^0)^{\dot{a}a} p_0 + (\tilde{\sigma}^i)^{\dot{a}a} p_i \right] \tilde{\varphi}_a(p)$$

или

$$\left(\sigma^0 p_0 + (\tilde{\sigma}^i) p_i \right) \tilde{\varphi}_a(p) = 0$$

Отсюда

$$\frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{|\vec{p}|} \tilde{\varphi}_a(p) = -\tilde{\varphi}_a(p)$$

Здесь учтено, что $\tilde{\sigma}^i = -\tilde{\sigma}_i = \sigma_i$ и что для безмассовых систем $p_0 = |\vec{p}|$. Покажем, что выражение $\frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{|\vec{p}|}$ связано с оператором спиральности в фундаментальном спинорном представлении. Согласно определению (199) оператор спиральности есть

$$h = \frac{\vec{J} \vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\vec{S} \vec{p}}{|\vec{p}|}$$

Оператор $\vec{S}$ с компонентами S_i определен как

$$S_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} S_{jk}$$

где $S_{jk} = -i(\sigma_{jk})$ - пространственные компоненты генератора лоренцовских вращений в спинорном представлении. Тогда

$$\begin{aligned} S_i &= -\frac{i}{8} \varepsilon_{ijk} (\sigma_j \tilde{\sigma}_k - \sigma_k \tilde{\sigma}_j) = +\frac{i}{8} \varepsilon_{ijk} [\sigma_j, \sigma_k] = \\ &= -\frac{1}{4} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jkl} \sigma_l = -\frac{1}{4} \varepsilon_{jki} \varepsilon_{jkl} \sigma_l \end{aligned}$$

Но $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkl} = \delta_{kk}\delta_{il} - \delta_{kl}\delta_{ik} = 3\delta_{ie} - \delta_{ie} = 2\delta_{ie}$. Отсюда $S_i = -\frac{1}{2}\sigma_i$. Поэтому

$$\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}_0|} = -2\frac{\vec{S}\vec{p}}{|\vec{p}|} = -2h$$

С учетом этого соотношения, уравнение (235) принимает вид

$$h\varphi_a(x) = \frac{1}{2}\varphi_a(x)$$

Таким образом, поле $\varphi_a(x)$, удовлетворяющее уравнению Вейля, содержит только одну спиральность $\lambda = \frac{1}{2}$. Другими словами уравнение Вейля описывает распространение неприводимого безмассового представления группы Пуанкаре со спиральностью $\lambda = \frac{1}{2}$.

Аналогичным образом можно показать, что уравнение Вейля для $\chi_{\dot{a}}(x)$ описывает распространение неприводимого безмассового представления группы Пуанкаре со спиральностью $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Заметим, что преобразование четности переводит представление $(\frac{1}{2}, 0)$ в представление $(0, \frac{1}{2})$ и наоборот. Поэтому каждое из уравнений Вейля не инвариантно относительно пространственных отражений.

7.2.3 Derivation of the Dirac Equation from the Poincaré Group

Теория

Перейдем к построению релятивистского волнового уравнения для массивных представлений со спином $s = \frac{1}{2}$. Будем предполагать с самого начала, что искомое уравнение должно быть инвариантным относительно преобразования четности и поэтому включать два представления $(\frac{1}{2}, 0)$ и $(0, \frac{1}{2})$. Таким образом, искомое уравнение может быть построено из спиноров $\varphi_a, \chi_{\dot{a}}$ производных ∂_μ , инвариантных объектов группы Лоренца $\sigma, \tilde{\sigma}, \eta_{\mu\nu}$ и содержать массу m . Единственно возможный член с производной поля $\varphi(x)$ имеет тот же вид, что и в уравнении Вейля, $i(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a}\partial_\mu\varphi_a(x)$. Ясно, что добавить к нему слагаемое линейное по полю $\varphi_a(x)$ и линейное по массе не возможно, поскольку нет соответствующих инвариантных объектов группы Лоренца. Это значит, что для построения необходимого уравнения следует помимо поля $\varphi_a(x)$ использовать поле $\chi_{\dot{a}}(x)$. Аналогично, в уравнении для $\chi_{\dot{a}}(x)$ следует использовать поле $\varphi_a(x)$. В результате мы приходим к системе двух уравнений

$$\begin{aligned} i(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a}\partial_\mu\varphi_a(x) - m\chi^{\dot{a}}(x) &= 0 \\ i(\sigma^\mu)_{a\dot{a}}\partial_\mu\chi^{\dot{a}}(x) - m\varphi_a(x) &= 0 \end{aligned}$$

Докажем, что уравнения (239) приводят к правильным условиям массовой неприводимости $(\square + m^2)\varphi_a = 0, (\square + m^2)\chi_{\dot{a}} = 0$. Подействуем на первое из уравнений (239) оператором $-i(\sigma^\nu)_{b\dot{a}}\partial_\nu$, получим

$$(\sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu)_b^{\dot{a}}\partial_\nu\partial_\mu\varphi_a + im(\sigma^\nu)_{b\dot{a}}\partial_\nu\chi^{\dot{a}} = 0$$

Выражение $i(\sigma^\nu)_{b\dot{a}}\partial_\nu\chi^{\dot{a}}$ выразим из второго из уравнений (239) в виде

$$i(\sigma^\nu)_{b\dot{a}}\partial_\nu\chi^{\dot{a}} = m\varphi_b$$

и поставим в (239). Тогда получим

$$\frac{1}{2}\underbrace{(\sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu + \sigma^\mu\tilde{\sigma}^\nu)_b^{\dot{a}}}_{2\eta^{\mu\nu}\sigma_0}\partial_\nu\partial_\mu\varphi_a + m^2\varphi_b = 0$$

Отсюда $(\square + m^2) \varphi_a(x) = 0$. Условие массовой неприводимости выполнено. Аналогичным образом можно показать, что из уравнений (239) следует $(\square + m^2) \chi^{\dot{a}}(x) = 0$, то есть условие массовой неприводимости.

Таким образом, система уравнений (239) формирует релятивистское волновое уравнение для массивного поля со спином $s = \frac{1}{2}$. Обратим внимание, что в отличие от безмассового случая, уравнения (239) включают два неприводимых представления $(\frac{1}{2}, 0)$ и $(0, \frac{1}{2})$ группы Лоренца.

Систему уравнений (239) можно переписать в виде одного матричного уравнения

$$\left[i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu - m \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0$$

Введем четырехкомпонентный столбец

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \chi^{\dot{a}} \end{pmatrix}$$

и матрицы размерности 4×4

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда уравнение (240) примет вид

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi = 0$$

Уравнение (243) представляет собой основную форму записи релятивистского волнового уравнения для массивного поля со спином $s = \frac{1}{2}$. Оно называется уравнением Дирака. Матрица γ^μ (242) называется матрицами Дирака. Столбец ψ (241) называется дираковским спинором или биспинором

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= \begin{pmatrix} \sigma^\mu \tilde{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \tilde{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \tilde{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2\eta^{\mu\nu} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 2\eta^{\mu\nu} \tilde{\sigma}_0 \end{pmatrix} = 2\eta^{\mu\nu} I \end{aligned}$$

где I - единичная 4×4 матрица, Итак

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I.$$

Соотношение (244) выражает основное свойство матриц Дирака.

Выясним закон преобразования дираковского спинора при преобразованиях Лоренца. Известно, что

$$\begin{aligned} \delta \varphi_a &= \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} (-i \sigma_{\mu\nu})^b_a \varphi_b \\ \delta \chi^{\dot{a}} &= \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} (-i \tilde{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{a}}_{\dot{b}} \chi^{\dot{b}} \end{aligned}$$

Поэтому

$$\delta \psi = \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} \begin{pmatrix} -i \sigma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & -i \tilde{\sigma}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} \psi$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mu\nu} &= -i \begin{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_{\mu\nu} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \frac{i}{4}(\sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \tilde{\sigma}_\mu) & 0 \\ 0 & \frac{i}{4}(\tilde{\sigma}_\mu \sigma_\nu - \tilde{\sigma}_\nu \sigma_\mu) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{i}{4}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)\end{aligned}$$

Матрица $\Sigma_{\mu\nu}$ (246) представляет собой генератор преобразований Лоренца дираковских спиноров.

Пусть ψ -дираковский спинор. Введем четырехкомпонентную строку $\bar{\psi}$ по правилу

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

Выражение $\bar{\psi}$ (246) называется дираковски сопряженным спинором. Выразим компоненты $\bar{\psi}$ через компоненты биспинора ψ . Запишем

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \chi^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \tilde{\sigma}_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\bar{\psi} = ((\varphi_a)^*, (\chi^{\dot{a}})^*) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \tilde{\sigma}_0 & 0 \end{pmatrix} = ((\chi^{\dot{a}})^*, (\varphi_a)^*)$$

Обозначим

$$\bar{\chi}^a = (\chi^{\dot{a}})^*, \quad \bar{\varphi}_{\dot{a}} = (\varphi_a)^*$$

Тогда

$$\bar{\psi} = (\bar{\chi}^a, \bar{\varphi}_{\dot{a}})$$

При этом

$$\bar{\psi}\psi = (\bar{\chi}^a, \bar{\varphi}_{\dot{a}}) \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \chi^{\dot{a}} \end{pmatrix} = \bar{\chi}^a \varphi_a + \bar{\varphi}_{\dot{a}} \chi^{\dot{a}}$$

Ранее было показано, что каждое из слагаемых в правой части (246) является лоренц-инвариантом. Поэтому и выражение $\bar{\psi}\psi$ есть лоренцинвариант.

Найдем уравнение для дираковски сопряженного спинора. Совершим эрмитово сопряжение уравнения (246), получим

$$-i\partial_\mu \psi^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger = 0.$$

Умножим это уравнение справа на матрицу γ^0 и учтем, что $(\gamma^0)^2 = I$. Тогда $\psi^\dagger = \bar{\psi}\gamma^0$. В итоге уравнение примет вид

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 + m\bar{\psi} = 0$$

Найдем $\gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0$. Имеем $(\gamma^0)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \tilde{\sigma}_0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma^0$, поскольку $\sigma_0 = \tilde{\sigma}_0$ единичная 2×2 матрица. Поэтому $\gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\mu = \gamma^\mu$.

$$(\gamma^i)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & (\tilde{\sigma}^i)^\dagger \\ (\sigma^i)^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь учтено, что все матрицы Паули эрмитовы.

Тогда

$$\begin{aligned}\gamma^0 (\gamma^i)^+ \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \tilde{\sigma}_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \tilde{\sigma}_0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \tilde{\sigma}_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \tilde{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} = \gamma^i\end{aligned}$$

Поэтому

$$\gamma^0 (\gamma^\mu)^+ \gamma^0 = \gamma^\mu.$$

В результате получаем уравнение

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0.$$

Это и есть искомое релятивистское волновое уравнение для дираковски сопряженного спинора.

7.2.4 Derivation of the Maxwell Equations from the Poincaré Group

Еще раз, подготовка для вывода уравнений Максвелла

Мы рассматриваем безмассовое векторное поле в 3+1 мерном пространстве. Спиновый оператор векторного поля $\mathcal{A}^\beta$ - матрица

$$(s^\alpha)_\gamma^\beta = -i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}.$$

Он не имеет временных компонент, т. е. не приводит к смешиванию 3-мерного поля $\mathcal{A}^\beta$ с $\mathcal{A}_0$. Поэтому общие операторные уравнения

$$\frac{1}{\hbar} W^\nu = \mathfrak{s} p^\nu,$$

где

$$\frac{1}{\hbar} W_0 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{s}, \quad \frac{1}{\hbar} \mathbf{W} = p_0 \mathbf{s} - \text{sign}(\mathfrak{s}) i(\mathbf{p} \times \mathbf{s}),$$

Вывод уравнений Максвелла

в случае безмассового векторного поля, во-первых, не содержат компоненты $\mathcal{A}_0$, которая тем самым не имеет отношения к динамике свободного векторного поля, а во-вторых, в силу $\mathfrak{s} = \lambda = \pm 1$ принимают простой вид

$$p_0 \mathcal{A}^\beta = \lambda (\mathbf{p} \cdot \mathbf{s})_\gamma^\beta \mathcal{A}^\gamma, \quad \lambda p^\alpha \mathcal{A}^\beta = p_0 (s^\alpha)_\gamma^\beta \mathcal{A}^\gamma - \lambda i \epsilon_{\alpha\beta'\gamma'} p^{\beta'} (s^{\gamma'})_\gamma^\beta \mathcal{A}^\gamma.$$

Подставляя операторы 4-импульса $(p_0, \mathbf{p}) = i\hbar (\partial_0, -\nabla)$ и выражение для оператора спина, находим из первого уравнения

$$i\partial_0 \mathcal{A} = \lambda \text{rot } \mathcal{A}.$$

Второе уравнение

$$-i\lambda \partial_\alpha \mathcal{A}^\beta = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_0 \mathcal{A}^\gamma + i\lambda (\delta_\alpha^\beta \partial_\gamma \mathcal{A}^\gamma - \partial_\beta \mathcal{A}^\alpha)$$

содержит симметричную и антисимметричную относительно перестановок индексов части тензора, которые соответственно дают

$$\partial_\gamma \mathcal{A}^\gamma = \text{div } \mathcal{A} = 0, \quad -i\lambda \text{rot } \mathcal{A} = \partial_0 \mathcal{A}.$$

Последнее соотношение повторяет полученное выше (20.1), так что, суммируя все связи для безмассового векторного поля, получаем систему

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = i\lambda \operatorname{rot} \mathcal{A}, \quad \operatorname{div} \mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{A}_0 \equiv 0,$$

где первое уравнение динамическое, так как оно содержит производную по времени, а два последних - условия, исключают компоненты 4-векторного поля, не имеющие отношения к безмассовому векторному полю. Из (20.2), конечно, следует уравнение массовой поверхности

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} \Rightarrow \square \cdot \mathbf{A} = 0$$

Основные уравнения (20.2) имеют нековариантный вид: два последних из них, очевидно, не могут выполняться в произвольной системе отсчета. Однако можно, во-первых, записать их ковариантно, если перейти в импульсное представление, так что

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \mapsto \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}) = 0,$$

т. е. поле является поперечным. Уравнение массовой поверхности примет вид

$$(k_0^2 - \mathbf{k}^2) \mathbf{A}(\mathbf{k}) = k^2 \mathbf{A}(\mathbf{k}) = 0$$

Поэтому с учетом

$$\mathcal{A}_0 \equiv 0$$

находим ковариантную форму поперечности

$$k_L A^\nu = 0 \Leftrightarrow \partial_\nu \mathcal{A}^\nu = 0$$

и это уравнение уже справедливо в произвольной системе отсчета. Во-вторых, динамическое уравнение также можно записать ковариантно, если ввести антисимметричный тензор напряженности поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$$

откуда

$$F_{0\alpha} = -\partial_0 \mathcal{A}_\alpha - \partial_\alpha \mathcal{A}_0 \mapsto -\partial_0 \mathcal{A}^\alpha,$$

если учесть условие $\mathcal{A}_0 \equiv 0$. Стандартным образом определяют электрическое поле

$$\mathcal{E}^\alpha = F_{0\alpha}$$

и магнитное поле

$$\mathcal{H}^\gamma = -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta}, \quad F_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}^\gamma$$

Подставляя определение тензора напряженности поля, находим

$$\mathcal{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \Rightarrow \operatorname{div} \mathcal{H} = 0.$$

Тогда динамическое уравнение примет вид

$$\mathcal{E} = i\lambda \mathcal{H}$$

Отсюда

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = 0.$$

Кроме того, динамическое уравнение (20.2) устанавливает операторное равенство для линейных уравнений поля

$$\text{rot} \cong i\lambda \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$

Тогда уравнение (20.5) дает

$$\text{rot } \mathcal{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

В итоге мы получили уравнения Максвелла для свободного электромагнитного векторного поля ¹, которые могут быть записаны ковариантно

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0$$

при условии

$$\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0, \quad \mathcal{A}_0 \equiv 0.$$

Эти уравнения, как известно, как раз и описывают две поперечных поляризации безмассового векторного поля.

Заметим, что уравнение (20.2) является равенством между вектором и псевдовектором и содержит псевдоскалярную величину поляризации λ . Поэтому определим псевдотензор, дуальный тензору напряженностей:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\mu'\nu'} F_{\mu'\nu'},$$

у которого компоненты имеют вид

$$\tilde{F}_{0\alpha} = \mathcal{H}^\alpha, \quad \tilde{F}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{E}^\gamma,$$

т. е. имеет место подстановка - преобразование дуальности:

$$\mathcal{E} \mapsto \mathbf{H}, \quad \mathcal{H} \mapsto -\mathcal{E}.$$

Тогда основное уравнение безмассового поля с заданной спиральностью примет ковариантный вид

$$F_{\mu\nu} = i\lambda \tilde{F}_{\mu\nu}.$$

Решение уравнения в виде плоской волны с положительной энергией можно представить в виде

$$\mathcal{A}(x) = e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \boldsymbol{\epsilon}_\perp,$$

так что подстановка дает

$$\frac{\omega}{c} \boldsymbol{\epsilon}_\perp = i\lambda \mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_\perp, \quad \omega = c|\mathbf{k}|.$$

Если $\mathbf{k} \uparrow z$, то ортонормированные базисные векторы, отвечающие положительной и отрицательной киральности, -

$$\boldsymbol{\epsilon}_\perp^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0), \quad \boldsymbol{\epsilon}_\perp^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0).$$

При этом, конечно, для 4-векторов поляризации $\epsilon^\nu = (0, \boldsymbol{\epsilon}, 0)$

$$\epsilon_\nu^* \epsilon^\nu = -\epsilon^* \cdot \epsilon = -1.$$

Вещественное поле, являющееся решением уравнений движения, согласно принципу суперпозиции имеет вид

$$\mathcal{A}^\nu(x) = \int \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} \{ e^{-ik \cdot x} \epsilon_\lambda^\nu(\mathbf{k}) \alpha_\lambda(k) + e^{ik \cdot x} \epsilon_\lambda^{*\nu}(\mathbf{k}) \bar{\alpha}_\lambda(k) \}.$$

Преобразования Лоренца и калибровочная инвариантность

В произвольной системе отсчета у векторного поля появляется ненулевая временная компонента, так как преобразование Лоренца имеет вид

$$\mathcal{A}'_\nu(x') = \Lambda_\nu^\mu \mathcal{A}_\mu(x).$$

В импульсном представлении это преобразование будет иметь тот же вид, но нам необходимо также принять во внимание дополнительное условие $k_\nu \mathcal{A}'^\nu = k_0 \mathcal{A}_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0$, которое в силу своей ковариантности справедливо и в штрихованной системе. Значит,

$$\mathcal{A}'_0 = \frac{\mathbf{k}' \cdot \mathbf{A}'}{k'_0},$$

и вследствие $k'_0 = |\mathbf{k}'|$ поле можно представить в виде

$$\mathcal{A}'_\nu = k'_\nu \frac{\mathbf{k}' \cdot \mathbf{A}'}{(k'_0)^2} + \mathcal{A}'_\nu{}^\perp,$$

где уже

$$\mathcal{A}'_0{}^\perp \equiv 0, \quad \mathbf{k}' \cdot \mathbf{A}'_\perp = 0.$$

В итоге динамическое поле выражается следующим образом:

$$\mathcal{A}'_\nu{}^\perp(x') = \mathcal{A}'_\nu(x') - \partial'_\nu f(x'),$$

где f - подходящая функция, удовлетворяющая условию $\square f = 0$. От этого условия можно избавиться, если помнить, что продольные компоненты поля не являются физическими. Но именно эти компоненты не входят в тензор напряженности, поэтому формулировка уравнений движения векторного безмассового поля в терминах тензора напряженности автоматически исключает нефизические продольные компоненты. Отсюда заключаем, что динамическое безмассовое векторное поле является калибровочным и оно удовлетворяет уравнениям

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0,$$

причем состояния с положительной и отрицательной киральностью $\lambda = \pm 1$ удовлетворяют условию

$$F_{\mu\nu} = i\lambda \tilde{F}_{\mu\nu}.$$

Действие и квантование

(удалю это, если никакого отношения к теории поля это не будет иметь.)

Найденные нами поперечные моды с заданной спиральностью удовлетворяют уравнению массовой поверхности. Поскольку спиральность входит в полный набор наблюдаемых, ее коммутатор с гамильтонианом равен нулю, и, следовательно, она является интегралом движения. Поэтому построение действия для каждой поляризации по сути повторяет процедуру, проведенную для скалярных полей, с той лишь разницей, что квадрат вектора поляризации равен -1 . Тогда уравнение массовой поверхности

$$p^2 \mathcal{A}'_\perp(x) = 0, \quad \mathcal{A}'_\perp(x) = \left(g^{\nu\mu} - \frac{p^\nu p^\mu}{p^2} \right) \mathcal{A}_\mu(x),$$

где симметричный оператор

$$P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}, \quad P^{\mu\nu} P_\nu^\rho = P^{\mu\rho},$$

По Бухбиндеру

Ранее было показано, что безмассовое представление со спиральностями $\lambda = \pm 1$ описываются векторным полем, удовлетворяющим условиям

$$\square A_\mu = 0, \quad \partial_\mu A^\mu = 0.$$

Два этих уравнения можно переписать в виде одного уравнения. Для этого положим в уравнения (253) $m = 0$. Получим следующее уравнение

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

Здесь $F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

Покажем, что уравнение (256) действительно воспроизводит условия неприводимости. Определим преобразования поля A_μ следующего вида

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \xi,$$

где $\xi(x)$ - произвольное скалярное поле. Преобразования (257) называются калибровочными.

Очевидно, что выражение $F_{\mu\nu}$ инвариантно относительно калибровочных преобразований, это означает, что можно изменить поле A_μ без изменения уравнений (256). Тогда на поле A_μ можно наложить одно условие, отвечающее специальному выбору поля $\xi(x)$. Единственное лоренцинвариантное условие на A_μ линейное по производным ∂_μ и по A_μ имеет вид $\partial_\mu A^\mu$. Покажем, что такое условие действительно можно наложить. Пусть поле A_μ не удовлетворяет данному условию. Введем поле A'_μ по правилу (256) и потребуем, чтобы $\partial_\mu A'^\mu = 0$. Отсюда возникает уравнение на поле $\xi(x)$, $\square \xi(x) = -\partial_\mu A^\mu(x)$. Это уравнение имеет решение и значит условие $\partial_\mu A'^\mu = 0$ можно наложить.

Запишем уравнение (256) в виде

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0$$

и учтем, что на поле A_μ можно наложить условие $\partial_\nu A^\nu = 0$. Тогда данное уравнение примет вид $\square A^\mu = 0$. В итоге мы видим, что уравнение (256) имеем в качестве следствий условия, определяющие безмассовые представления со спиральностями $\lambda = \pm 1$.

Таким образом уравнение (256) описывает динамику безмассовых представлений со спиральностями $\lambda = \pm 1$. Оно называется уравнением Максвелла. Соотношение $\partial_\mu A^\mu = 0$ называется лоренцевской калибровкой. Поучительно проследить, как из уравнения (256) следует, что его решение A_μ содержит только две независимые компоненты в каждой точке x^μ . Вектор A_μ имеет четыре компоненты. Наложение лоренцевской калибровки означает одно условие на четыре компоненты вектора, поэтому независимых компонент будет три. Однако уравнения $\square A^\mu = 0$ и $\partial_\mu A^\mu = 0$ инвариантны относительно остаточного калибровочного преобразования $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \eta$, где $\square \eta(x) = 0$. Это позволяет наложить на A_μ еще одно условие. В итоге мы видим, что поле A_μ удовлетворяющее уравнению Максвелла, имеет в каждой точке (x^μ) ровно две независимые компоненты, отвечающие двум возможным спиральностям.

Почему не вывести неоднородное уравнение таким способом? (???)

(на этом мб все и ломается, я не знаю, мы только однородные выводим.)

7.2.5 Derivation of Electromagnetic Field from Lorentz Group (????)

Вывод по В.В. Варламову (???????????????? I AM NOT SURE ABOUT IT. I'LL THINK ABOUT IT IN SPECIAL NOTE)

The massless field of spin 1 is defined on the eight-dimensional configuration space; this space is a direct product of Minkowski space and of a two-dimensional complex sphere. Field equations for the spin-one field are derived from a Dirac-like Lagrangian separately for the translation group and Lorentz group parts. It is shown that a Dirac form of Maxwell equations (so-called Majorana-Oppenheimer formulation of electrodynamics (????? такое гуглится, пока не понял)) follows directly from the field equations of translation group part. The photon field is realized via Biedenharn type functions on the Poincaré group. This allows us to consider both Dirac and Maxwell fields on an equal footing, as the functions on the Poincaré group.

Introduction

Historically, an analysis of the Maxwell equations with respect to Lorentz transformations is one of the first objects of relativity theory. As known, any quantity which transforms linearly under Lorentz transformations is a spinor. For that reason spinor quantities are considered as fundamental in quantum field theory and basic equations for such quantities should be written in a spinor form. The spinor form of Dirac equations was first given by Van der Waerden, he showed that Dirac's theory can be expressed completely in this form (see also Ref. 2). In turn, a spinor formulation of Maxwell equations was studied by Laporte and Uhlenbeck [3]. In 1936, Rumer [7] showed that spinor forms of Dirac and Maxwell equations look very similar¹. Further, Majorana 8 8 and Oppenheimer 9 proposed to consider the Maxwell theory of electromagnetism as the wave mechanics of the photon. They introduced a wave function of the form $\psi = \mathbf{E} - i\mathbf{B}$ satisfying the massless Dirac-like equations². Maxwell equations in the Dirac form considered during long time by many authors [12]-[24]. The

¹ Of course, there is no an equivalence between Dirac and Maxwell equations as it claimed recently by Campolattaro et al. [4] 5] (see also a discussion concerning this question [6]). A principal difference between these equations lies in the fact that Dirac and Maxwell fields have different spintensor dimensionalities. These fields are transformed correspondingly within $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ and $(1, 0) \oplus (0, 1)$ finite dimensional representations of the Lorentz group.

² In contrast to the Gupta-Bleuler method [10, 11], where the nonobservable four-potential A_μ is quantized, the main advantage of the Majorana-Oppenheimer formulation of electrodynamics lies in the fact that it deals directly with observable quantities, such as the electric and magnetic fields. interest to the Majorana-Oppenheimer formulation of electrodynamics has grown in recent years [25]-[33].

It is widely accepted in modern theoretical physics that the majority of "elementary" particles have a very complicated internal structure, that is, elementary particles seem to be spatially extended. For that reason realistic particles cannot be considered as point-like objects (of course, these more realistic fields are nonlocal fields in general). Aside string models, there is another way for description of spatially extended particles proposed by Finkelstein [34], he showed that elementary particle models with internal degrees of freedom can be described on manifolds larger then Minkowski space (homogeneous spaces of the Poincaré group $\mathcal{P}$). All the homogeneous spaces of $\mathcal{P}$, which contain Minkowski space, were given by Finkelstein [34] and by Bacry and Kihlberg [35]. In 1964, under the influence of Regge pole theory, Lurçat suggested to construct quantum field theory on the group manifold of $\mathcal{P}$ [36], where one of the main motivations was to give a dynamical role to the spin. The constructions of quantum fields theories on different homogeneous spaces of $\mathcal{P}$ were given in Refs. [37]-[46].

The main goal of the present paper is a synthesis of the two mentioned above directions (Dirac-like formulation of Maxwell equations and quantum field theory on the Poincaré group). The Maxwell field is represented by Biedenharn type functions [47] on the group manifold $\mathcal{M}_{10}$ (this manifold is a direct product of Minkowski space and of the manifold of the Lorentz subgroup). It is shown that a general form of the wavefunction inherits its structure from the semidirect product $SL(2, \mathbb{C}) \odot T_4$ and for that reason the Maxwell field on $\mathcal{M}_{10}$ is defined by a factorization $\psi(x)\psi(\mathbf{g})$, where $x \in T_4$, $\mathbf{g} \in SL(2, \mathbb{C})$. It is obvious that the Dirac-like form of Maxwell equations should be derived from a Dirac-like Lagrangian. Using a Lagrangian formalism on the tangent bundle $T\mathcal{M}_{10}$ of the manifold $\mathcal{M}_{10}$, we obtain field equations separately for the parts $\psi(x)$ and $\psi(\mathbf{g})$. Solutions of the field equations for $\psi(x)$ (Maxwell equations in Dirac-like form) are obtained via the plane-wave approximation ³. In turn, solutions of the field equations with $\psi(\mathbf{g})$ have been found in the form of expansions in associated hyperspherical functions ⁴.

Preliminaries

(тут много утверждений, с которыми я не особо знаком, так что на каждое - свой параграф и свой вопрос)

Let us consider some basic facts concerning the Poincaré group $\mathcal{P}$. First of all, the group $\mathcal{P}$ has the same number of connected components as with the Lorentz group. Later on we will consider only the component $\mathcal{P}_+^\uparrow$ corresponding the connected component $L_+^\uparrow$ (so-called special Lorentz group [49]). As known, an universal covering $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ of the group $\mathcal{P}_+^\uparrow$ is defined

by a semidirect product $\overline{\mathcal{P}}_+^\uparrow = SL(2, \mathbb{C}) \odot T_4 \simeq \text{Spin}_+(1, 3) \odot T_4$, where T_4 is a subgroup of four-dimensional translations.

The each transformation $T_\alpha \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ is defined by a parameter set $\alpha (\alpha_1, \dots, \alpha_{10})$, which can be represented by a point of the space $\mathcal{M}_{10}$. The space $\mathcal{M}_{10}$ possesses locally euclidean properties, therefore, it is a manifold called a group manifold of the Poincaré group. It is easy to see that the set α can be divided into two subsets, $\alpha (x_1, x_2, x_3, x_4, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4, \mathbf{g}_5, \mathbf{g}_6)$, where $x_i \in T_4$ are parameters of the translation subgroup, $\mathbf{g}_j$ are parameters of the group

³ As known, exponentials define unitary representations of the translation subgroup T_4 . In a sense, the functions e^{ikx} can be understood as "matrix elements" of T_4 .

⁴ Matrix elements of both spinor and principal series representations of the Lorentz group are expressed via the hyperspherical functions [48] (see Appendix). $SL(2, \mathbb{C})$. In turn, the transformation T_g is defined by a set $\mathbf{g}(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_6)$, which can be represented by a point of a six-dimensional submanifold $\mathfrak{L}_6 \subset \mathcal{M}_{10}$ called a group manifold of the Lorentz group.

In the present paper we restricted ourselves by a consideration of finite dimensional representations of the Poincaré group. The group T_4 of four-dimensional translations is an Abelian group, formed by a direct product of the four one-dimensional translation groups, the each of which is isomorphic to additive group of real numbers. Hence it follows that all irreducible representations of T_4 are one-dimensional and expressed via the exponential. In turn, as it showed by Naimark [50], spinor representations exhaust all the finite dimensional irreducible representations of the group $SL(2, \mathbb{C})$. Any spinor representation of $SL(2, \mathbb{C})$ can be defined in the space of symmetric polynomials of the following form

$$p(z_0, z_1, \bar{z}_0, \bar{z}_1) = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \\ (\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_r)}} \frac{1}{k!r!} a^{\alpha_1 \dots \alpha_k \dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_r} z_{\alpha_1} \dots z_{\alpha_k} \bar{z}_{\dot{\alpha}_1} \dots \bar{z}_{\dot{\alpha}_r} \\ (\alpha_i, \dot{\alpha}_i = 0, 1),$$

where the numbers $a^{\alpha_1 \dots \alpha_k \dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_r}$ are unaffected at the permutations of indices. The expressions (1) can be understood as functions on the Lorentz group. When the coefficients

$a^{\alpha_1 \dots \alpha_k \dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_r}$ in (1) are depend on the variables $x_i \in T_4 (i = 1, 2, 3, 4)$, we come to the Biedenharn type functions [47]:

$$p(x, z, \bar{z}) = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \\ (\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_r)}} \frac{1}{k!r!} a^{\alpha_1 \dots \alpha_k \dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_r}(x) z_{\alpha_1} \dots z_{\alpha_k} \bar{z}_{\dot{\alpha}_1} \dots \bar{z}_{\dot{\alpha}_r}.$$

$$(\alpha_i, \dot{\alpha}_i = 0, 1)$$

The functions (2) should be considered as the functions on the Poincaré group. Some applications of these functions contained in Refs. 51,45. Representations of the Poincaré group $SL(2, \mathbb{C}) \odot T(4)$ are realized via the functions (2).

Общая формула для Лагранжиана по Варламову (?????)

(???? this is a strange theory, I don't know, who really uses it!!! I'll check later)

Let $\mathcal{L}(\alpha)$ be a Lagrangian on the group manifold $\mathcal{M}_{10}$ of the Poincaré group (in other words, $\mathcal{L}(\alpha)$ is a 10-dimensional point function), where α is the parameter set of this group. Then an integral for $\mathcal{L}(\alpha)$ on some 10-dimensional volume Ω of the group manifold we will call an action on the Poincaré group:

$$A = \int_{\Omega} d\alpha \mathcal{L}(\alpha)$$

where $d\alpha$ is a Haar measure ⁵ on the group $\mathcal{P}$.

Let $\psi(\alpha)$ be a function on the group manifold $\mathcal{M}_{10}$ (now it is sufficient to assume that $\psi(\alpha)$ is a square integrable function on the Poincaré group) and let

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}} = 0$$

⁵ The invariant measure $d\alpha$ on the Poincaré group can be factorized as $d\alpha = dx d\mathbf{g}$, where $d\mathbf{g}$ is a Haar measure on the Lorentz group. be Euler-Lagrange equations on $\mathcal{M}_{10}$ (more precisely speaking, the equations (3) act on the tangent bundle $T\mathcal{M}_{10} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{M}_{10}} T_{\alpha} \mathcal{M}_{10}$ of the manifold $\mathcal{M}_{10}$, see Ref. 52).

(!?!?!? вот с неба падает такой лагранжиан и от него все и идет. и откуда он вообще???)

Let us introduce a Lagrangian $\mathcal{L}(\alpha)$ depending on the field function $\psi(\alpha)$ as follows:

$$\mathcal{L}(\alpha) = -\frac{1}{2} \left(\psi^*(\alpha) B_{\mu} \frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha_{\mu}} - \frac{\partial \psi^*(\alpha)}{\partial \alpha_{\mu}} B_{\mu} \psi(\alpha) \right) - \kappa \psi^*(\alpha) B_{11} \psi(\alpha),$$

where $B_{\nu} (\nu = 1, 2, \dots, 10)$ are square matrices. The number of rows and columns in these matrices is equal to the number of components of $\psi(\alpha)$, κ is a non-null real constant.

Further, if B_{11} is non-singular, then we can introduce the matrices

$$\Pi_{\mu} = B_{11}^{-1} B_{\mu}, \quad \mu = 1, 2, \dots, 10,$$

and represent the Lagrangian $\mathcal{L}(\alpha)$ in the form

$$\mathcal{L}(\alpha) = -\frac{1}{2} \left(\bar{\psi}(\alpha) \Pi_{\mu} \frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha_{\mu}} - \frac{\bar{\psi}(\alpha)}{\partial \alpha_{\mu}} \Pi_{\mu} \psi(\alpha) \right) - \kappa \bar{\psi}(\alpha) \psi(\alpha),$$

where

$$\bar{\psi}(\alpha) = \psi^*(\alpha) B_{11}.$$

In case of the massless field $(j, 0) \oplus (0, j)$ we will consider on the group manifold $\mathcal{M}_{10}$ a Lagrangian of the form

$$\mathcal{L}(\alpha) = -\frac{1}{2} \left(\bar{\psi}(\alpha) \Pi_\mu \frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \alpha_\mu} - \frac{\bar{\psi}(\alpha)}{\partial \alpha_\mu} \Pi_\mu \psi(\alpha) \right).$$

(!?!?!?! тут большой вопрос про то, откуда этот лагранжиан???)

As a direct consequence of (2), the relativistic wavefunction $\psi(\alpha)$ on the group manifold $\mathcal{M}_{10}$ is represented by a following factorization

$$\psi(\alpha) = \psi(x) \psi(\mathbf{g}) = \psi(x_1, x_2, x_3, x_4) \psi(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, \phi, \varepsilon),$$

where $\psi(x_i)$ is a function depending on the parameters of the subgroup T_4 , $x_i \in T_4$ ($i = 1, \dots, 4$), and $\psi(\mathbf{g})$ is a function on the Lorentz group, where six parameters of this group are defined by the Euler angles $\varphi, \epsilon, \theta, \tau, \phi, \varepsilon$ which compose complex angles of the form $\varphi^c = \varphi - i\epsilon$, $\theta^c = \theta - i\tau$, $\phi^c = \phi - i\varepsilon$ (see Appendix).

The field $(1, 0) \oplus (0, 1)$ and Dirac-like form of Lagrangian (!!!!!!?)

Before we proceed to start this section let us repeat that the Dirac-like form of Maxwell equations, considered by many authors, should be derived from a Dirac-like Lagrangian. It is one of the main assumptions which we will prove in this paper. Let us rewrite (4) in the form

$$\mathcal{L}(\alpha) = -\frac{1}{2} \left(\bar{\psi}(\alpha) \Gamma_\mu \frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\psi}(\alpha)}{\partial x_\mu} \Gamma_\mu \psi(\alpha) \right) - \frac{1}{2} \left(\bar{\psi}(\alpha) \Upsilon_\nu \frac{\partial \psi(\alpha)}{\partial \mathbf{g}_\nu} - \frac{\partial \bar{\psi}(\alpha)}{\partial \mathbf{g}_\nu} \Upsilon_\nu \psi(\alpha) \right),$$

where $\psi(\alpha) = \psi(x) \psi(\mathbf{g})$ ($\mu = 0, 1, 2, 3, \nu = 1, \dots, 6$), and

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix} \\ \Upsilon_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_1^* \\ \Lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_2^* \\ \Lambda_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_3^* \\ \Lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \\ \Upsilon_4 &= \begin{pmatrix} 0 & i\Lambda_1^* \\ i\Lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_5 = \begin{pmatrix} 0 & i\Lambda_2^* \\ i\Lambda_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_6 = \begin{pmatrix} 0 & i\Lambda_3^* \\ i\Lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_1 &= \frac{c_{11}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \frac{c_{11}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = c_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Varying independently $\psi(x)$ and $\bar{\psi}(x)$ in the Lagrangian (6), we come to the following equations:

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu} &= 0 \\ \Gamma_\mu^T \frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x_\mu} &= 0 \end{aligned}$$

The equation (11) can be written as follows:

$$\left[\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} - i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_i \\ \alpha_i & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi^*(x) \end{pmatrix} = 0$$

where

$$\begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi^*(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} - i\mathbf{B} \\ \mathbf{E} + i\mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 - iB_1 \\ E_2 - iB_2 \\ E_3 - iB_3 \\ E_1 + iB_1 \\ E_2 + iB_2 \\ E_3 + iB_3 \end{pmatrix}.$$

From the equation (13) it follows that

$$\begin{aligned} \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \alpha_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \psi(x) &= 0 \\ \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \alpha_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \psi^*(x) &= 0. \end{aligned}$$

The latter equations with allowance for transversality conditions ($\mathbf{p} \cdot \psi = 0, \mathbf{p} \cdot \psi^* = 0$) coincide with the Maxwell equations. Indeed, taking into account that $(\mathbf{p} \cdot \alpha)\psi = \hbar \nabla \times \psi$, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\hbar \nabla \times \psi, \\ -i\hbar \nabla \cdot \psi &= 0. \end{aligned}$$

Whence

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{E} - i\mathbf{B}) &= -\frac{i}{c} \frac{\partial (\mathbf{E} - i\mathbf{B})}{\partial t}, \\ \nabla \cdot (\mathbf{E} - i\mathbf{B}) &= 0 \end{aligned}$$

(the constant $\hbar$ is cancelled). Separating the real and imaginary parts, we obtain Maxwell equations

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

It is easy to verify that we come again to Maxwell equations starting from the equations

$$\begin{aligned} \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \alpha_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \psi^*(x) &= 0, \\ -i\hbar \nabla \cdot \psi^*(x) &= 0. \end{aligned}$$

In spite of the fact that equations (114) and (15) give rise to the same Maxwell equations, the physical interpretation of these equations is different (see Refs. 28,32). Namely, the equations (14) and (15) are equations with negative and positive helicity, respectively ⁶.

As usual, the conjugated wavefunction $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \Gamma_0 = (\psi(x), \psi^*(x))$ corresponds to antiparticle (it is a direct consequence of the Dirac-like Lagrangian (6), $\psi(x)$ is a complex function). Therefore, we come to a very controversial conclusion that the equations (12) describes the antiparticle (antiphoton) and, moreover, hence it follows that there exist the current and charge for the photon field. At first glance, we come to a drastic contradiction with the widely accepted fact that the photon is truly neutral particle. However, it is easy to verify that equations (12) give rise to the Maxwell equations also. It means that the photon coincides with its "antiparticle". Following to the standard procedure given in many textbooks, we can define the "charge" of the photon by an expression

$$Q \sim \int d\mathbf{x} \bar{\psi} \Gamma_0 \psi,$$

⁶ It is interesting to note a correspondence between photon helicity states and a complexification of the group $SU(2)$ presented by a local isomorphism $SU(2) \otimes SU(2) \simeq SL(2, \mathbb{C})$. As known, a root subgroup of a semisimple Lie group O_4 (a rotation group of the 4-dimensional space) is a normal divisor of O_4 . For that reason the 6-parameter group O_4 is semisimple, and is represented by a direct product of the two 3-parameter unimodular groups. By analogy with the group O_4 , a double covering $SL(2, \mathbb{C})$ of the proper orthochronous Lorentz group (a rotation group of the 4-dimensional spacetime continuum) is semisimple, and is represented by a direct product of the two 3-parameter special unimodular groups, $SL(2, \mathbb{C}) \simeq SU(2) \otimes SU(2)$. An explicit form of this isomorphism can be obtained by means of a complexification of the group $SU(2)$, that is, $SL(2, \mathbb{C}) \simeq \text{complex}(SU(2)) \simeq SU(2) \otimes SU(2)$ [53]. Moreover, in the works [54] [55], inspired by Ryder book [56], the Lorentz group is represented by a product $SU_R(2) \otimes SU_L(2)$, and spinors $\psi(p^\mu) = (\phi_R(p^\mu), \phi_L(p^\mu))^T$ are transformed within $(j_1, j_2) \oplus (j_2, j_1)$ representation space. The components $\phi_R(p^\mu)$ and $\phi_L(p^\mu)$ correspond to different helicity states (right- and left-handed spinors). Hence it follows an analogy with the photon spin states. Namely, the operators $X = J + iK$ and $Y = J - iK$ correspond to the right and left polarization states of the photon, where J and K are generators of rotation and Lorentz boosts, respectively. where $\bar{\psi} \Gamma_0 \psi = 2(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$. However, Newton and Wigner [57] showed that for the photon there exist no localized states. Therefore, the integral in the right side of (20) presents an indeterminable expression. Since the integral (20) does not exist in general, then the "charge" of the photon cannot be considered as a constant magnitude (as it takes place for the electron field which has localized states [57] and a well-defined constant charge). In a sense, one can say that the "charge" of the photon is equal to the energy $\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2$ of γ -quantum.

We see that the equation (13) gives rise to the two Dirac-like equations (14) and (15) which in combination with the transversality conditions (17) and (19) are equivalent to the Maxwell equations. Let us represent solutions of (114) in a plane-wave form

$$\psi(x) = \varepsilon(\mathbf{k}) \exp[i\hbar^{-1}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)].$$

After substitution of (21) into (14i) we come to the following matrix eigenvalue problem

$$-c \begin{pmatrix} 0 & ik_3 & -ik_2 \\ -ik_3 & 0 & ik_1 \\ ik_2 & -ik_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

It is easy to verify that we come to the same eigenvalue problem starting from (15). The secular equation has the solutions $\omega = \pm c\mathbf{k}, 0$.

Therefore, solutions of (13) in the plane-wave approximation are expressed via the functions

$$\psi_{\pm}(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t) = \{2(2\pi)^3\}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\pm}(\mathbf{k}) \\ \varepsilon_{\pm}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)],$$

$$\psi_0(\mathbf{k}; \mathbf{x}) = \{2(2\pi)^3\}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_0(\mathbf{k}) \\ \varepsilon_0(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}]$$

and the complex conjugate functions $\psi_{\pm}^*(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t)$ and $\psi_0^*(\mathbf{k}; \mathbf{x})(\mathbf{E} + i\mathbf{B})$ corresponding to positive helicity, here $\omega = c|\mathbf{k}|$ and $\varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k})(\lambda = \pm, 0)$ are the polarization vectors of a photon:

$$\varepsilon_{\pm}(\mathbf{k}) = \{2|\mathbf{k}|^2 (k_1^2 + k_2^2)\}^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -k_1 k_3 \pm i k_2 |\mathbf{k}| \\ -k_2 k_3 \mp i k_1 |\mathbf{k}| \\ k_1^2 + k_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_0(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^{-1} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}.$$

Varying now $\psi(\mathbf{g})$ and $\bar{\psi}(\mathbf{g})$ in the Lagrangian (6), we come to equations

$$\Upsilon_{\nu} \frac{\partial \psi(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{g}_{\nu}} = 0,$$

$$\Upsilon_{\nu}^T \frac{\partial \bar{\psi}(\mathbf{g})}{\partial \mathbf{g}_{\nu}} = 0.$$

The latter equations are written in the parameters of $SL(2, \mathbb{C})$. Since an universal covering $SL(2, \mathbb{C})$ of the proper orthochronous Lorentz group is a complexification of the group $SU(2)$, then it is more convenient to express six parameters of the group $SL(2, \mathbb{C})$ via three parameters a_1, a_2, a_3 of $SU(2)$. It is obvious that $\mathbf{g}_1 = a_1, \mathbf{g}_2 = a_2, \mathbf{g}_3 = a_3, \mathbf{g}_4 = ia_1, \mathbf{g}_5 = ia_2, \mathbf{g}_6 = ia_3$. Taking into account the structure of Υ_{ν} given by (7) -(8), we can rewrite the first equation from (22) as follows

$$\sum_{k=1}^3 \Lambda_k \frac{\partial \psi}{\partial a_k} - i \sum_{k=1}^3 \Lambda_k \frac{\partial \psi}{\partial a_k^*} = 0$$

$$\sum_{k=1}^3 \Lambda_k^* \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \tilde{a}_k} + i \sum_{k=1}^3 \Lambda_k^* \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \tilde{a}_k^*} = 0.$$

where $a_1^* = -i\mathbf{g}_4, a_2^* = -i\mathbf{g}_5, a_3^* = -i\mathbf{g}_6$, and $\tilde{a}_k, \tilde{a}_k^*$ are parameters corresponding to dual basis. In essence, equations (23) are defined in a three-dimensional complex space $\mathbb{C}^3$. In turn, the space $\mathbb{C}^3$ is isometric to a six-dimensional bivector space $\mathbb{R}^6$ (a parameter space of the Lorentz group [59]). The bivector space $\mathbb{R}^6$ is a tangent space of the group manifold $\mathfrak{L}_6$ of the Lorentz group, that is, the group manifold $\mathfrak{L}_6$ in the each its point is equivalent to the space $\mathbb{R}^6$. Thus, for all $\mathbf{g} \in \mathfrak{L}_6$ we have $T_{\mathbf{g}}\mathfrak{L}_6 \simeq \mathbb{R}^6$. Taking into account the explicit form ⁷ of the matrices Λ_i given by (10), we can rewrite the system (23) in the following form

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1^*} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2^*} - i \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3^*} = 0, \\
& \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} + i \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - i \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} - i \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1^*} - i \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1^*} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2^*} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2^*} = 0, \\
& \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1^*} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2^*} + i \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3^*} = 0, \\
& \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \dot{\psi}_2}{\partial \tilde{x}_1} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \dot{\psi}_2}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\partial \dot{\psi}_1}{\partial \tilde{x}_3} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \dot{\psi}_2}{\partial \tilde{x}_1^*} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \dot{\psi}_2}{\partial \tilde{x}_2^*} + i \frac{\partial \dot{\psi}_1}{\partial \tilde{x}_3^*} = 0, \\
& \frac{\partial \dot{\psi}_1}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \dot{\psi}_3}{\partial \tilde{x}_1} + i \frac{\partial \dot{\psi}_1}{\partial \tilde{x}_2} - i \frac{\partial \dot{\psi}_3}{\partial \tilde{x}_2} + i \frac{\partial \dot{\psi}_1}{\partial \tilde{x}_1^*} + i \frac{\partial \dot{\psi}_3}{\partial \tilde{x}_1^*} - \frac{\partial \dot{\psi}_1}{\partial \tilde{x}_2^*} + \frac{\partial \dot{\psi}_3}{\partial \tilde{x}_2^*} = 0, \\
& \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \dot{\psi}_2}{\partial \tilde{x}_1} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \dot{\psi}_2}{\partial \tilde{x}_2} - \frac{\partial \dot{\psi}_3}{\partial \tilde{x}_3} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \dot{\psi}_2}{\partial \tilde{x}_1^*} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \dot{\psi}_2}{\partial \tilde{x}_2^*} - i \frac{\partial \dot{\psi}_3}{\partial \tilde{x}_3^*} = 0,
\end{aligned}$$

A separation of variables in (24) is realized via the following factorizations:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \mathbf{f}_{1,1}^l(r) \mathfrak{M}_l^1(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0) \\
\psi_2 &= \mathbf{f}_{1,0}^l(r) \mathfrak{M}_l^0(0, 0, \theta, \tau, 0, 0) \\
\psi_3 &= \mathbf{f}_{1,-1}^l(r) \mathfrak{M}_l^{-1}(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0) \\
\dot{\psi}_1 &= \mathbf{f}_{1,1}^i(r^*) \mathfrak{M}_i^1(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0) \\
\dot{\psi}_2 &= \mathbf{f}_{1,0}^i(r^*) \mathfrak{M}_i^0(0, 0, \theta, \tau, 0, 0) \\
\dot{\psi}_3 &= \mathbf{f}_{1,-1}^i(r^*) \mathfrak{M}_i^{-1}(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0)
\end{aligned}$$

where $\mathfrak{M}_l^m(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0)$ ($\mathfrak{M}_i^m(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0)$) are associated hyperspherical functions defined on the surface of the two-dimensional complex sphere of the radius r , $\mathbf{f}_{lmk}^{lo}(r)$ and $\mathbf{f}_{i_{mk}}^{i_{mk}}(r^*)$

⁷ The matrices (10) can be derived at $l = 1$ from the more general expressions (62)-(67) given in the Ref. 62 are radial functions (for more details about two-dimensional complex sphere see Refs. 6062)⁸

Repeating for the case $l = 1$ all the transformations presented for the general relativistically invariant system 62, we come to the following system (the system (126) in the Ref. 62 at $l = 1$)

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{d\mathbf{f}_{1,1}^l(r)}{dr} - \frac{1}{r} \mathbf{f}_{1,1}^l(r) - \frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r} \mathbf{f}_{1,0}^l(r) = 0, \\
& -\frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r} \mathbf{f}_{1,-1}^l(r) + \frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r} \mathbf{f}_{1,1}^l(r) = 0, \\
& -2 \frac{d\mathbf{f}_{1,-1}^l(r)}{dr} + \frac{1}{r} \mathbf{f}_{1,-1}^l(r) + \frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r} \mathbf{f}_{1,0}^l(r) = 0, \\
& 2 \frac{d\mathbf{f}_{1,1}^i(r^*)}{dr^*} - \frac{1}{r^*} \mathbf{f}_{1,1}^i(r^*) - \frac{\sqrt{2i(i+1)}}{r^*} \mathbf{f}_{1,0}^i(r^*) = 0, \\
& -\frac{i\sqrt{2i(i+1)}}{r^*} \mathbf{f}_{1,-1}^i(r^*) + \frac{\sqrt{2i(i+1)}}{r^*} \mathbf{f}_{1,1}^i(r^*) = 0, \\
& -2 \frac{d\mathbf{f}_{1,-1}^i(r^*)}{dr^*} + \frac{1}{r^*} \mathbf{f}_{1,-1}^i(r^*) + \frac{\sqrt{i(i+1)}}{r^*} \mathbf{f}_{1,0}^i(r^*) = 0,
\end{aligned}$$

From the second and fifth equations it follows that $\mathbf{f}_{1,-1}^l(r) = \mathbf{f}_{1,1}^l(r)$ and $\mathbf{f}_{1,-1}^i(r^*) = \mathbf{f}_{1,1}^i(r^*)$. Taking into account these relations we can rewrite the system (25) as follows

$$\begin{aligned}
 2 \frac{d\mathbf{f}_{1,1}^l(r)}{dr} - \frac{1}{r} \mathbf{f}_{1,1}^l(r) - \frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r} \mathbf{f}_{1,0}^l(r) &= 0 \\
 -2 \frac{d\mathbf{f}_{1,-1}^l(r)}{dr} + \frac{1}{r} \mathbf{f}_{1,-1}^l(r) + \frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r} \mathbf{f}_{1,0}^l(r) &= 0, \\
 2 \frac{d\mathbf{f}_{1,1}^i(r^*)}{dr^*} - \frac{1}{r^*} \mathbf{f}_{1,1}^i(r^*) - \frac{\sqrt{2i(i+1)}}{r^*} \mathbf{f}_{1,0}^i(r^*) &= 0 \\
 -2 \frac{d\mathbf{f}_{1,-1}^i(r^*)}{dr^*} + \frac{1}{r^*} \mathbf{f}_{1,-1}^i(r^*) + \frac{\sqrt{2i(i+1)}}{r^*} \mathbf{f}_{1,0}^i(r^*) &= 0
 \end{aligned}$$

⁸ Choosing the two-dimensional complex sphere as an internal spin space, we see that our configuration space $\mathcal{M}_{10} = \mathbb{R}^{1,3} \times \mathfrak{L}_6$ reduces to $\mathcal{M}_8 = \mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{C}^2$. Bacry and Kihlberg [35] claimed that the 8-dimensional configuration space $\mathcal{M}_8$ is the most suitable for a description of both half-integer and integer spins. $\mathcal{M}_8$ is a homogeneous space of the Poincaré group. Indeed, the space $\mathbb{C}^2$ is homeomorphic to an extended complex plane $\mathbb{C} \cup \infty$ which presents an absolute (a set of infinitely distant points) of a Lobachevskii space $S^{1,2}$. At this point, the group of fractional linear transformations of the plane $\mathbb{C} \cup \infty$ is isomorphic to a motion group of $S^{1,2}$. In turn, the Lobachevskii space $S^{1,2}$ is an absolute of the Minkowski world $\mathbb{R}^{1,3}$ and, therefore, the group of fractional linear transformations of $\mathbb{C} \cup \infty$ double covers a rotation group of $\mathbb{R}^{1,3}$, that is, the Lorentz group. It is not hard to see that the two-dimensional complex sphere coincides with a well-known Penrose's celestial sphere [63]. Further, using a canonical projection $\pi : \mathbb{C}_*^2 \rightarrow S^2$, where $\mathbb{C}_*^2 = \mathbb{C}^2 / \{0, 0\}$ and S^2 is a two-dimensional real sphere, we see that the configuration space $\mathcal{M}_8 = \mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{C}^2$ reduces to $\mathcal{M}_6 = \mathbb{R}^{1,3} \times S^2$. The real two-sphere S^2 has a minimal possible dimension among the homogeneous spaces of the Lorentz group. For that reason $\mathcal{M}_6$ is a minimal homogeneous space of the Poincaré group (the spacetime translations act trivially on S^2). Field models on the configuration space $\mathcal{M}_6$ have been considered in recent works [41, 42, 43]. In the Ref. [43] Drechsler considered the two-sphere as a "spin shell" $S_{r=2s}^2$ of radius $r = 2s$, where $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. It is easy to see that the first equation is equivalent to the second, and third equation is equivalent to the fourth. Thus, we come to the following inhomogeneous differential equations of the first order:

$$\begin{aligned}
 2r \frac{d\mathbf{f}_{1,1}^l(r)}{dr} - \mathbf{f}_{1,1}^l(r) - \sqrt{2l(l+1)} \mathbf{f}_{1,0}^l(r) &= 0, \\
 2r^* \frac{d\mathbf{f}_{1,1}^i(r^*)}{dr^*} - \mathbf{f}_{1,1}^i(r^*) - \sqrt{2i(i+1)} \mathbf{f}_{1,0}^i(r^*) &= 0,
 \end{aligned}$$

where the functions $\mathbf{f}_{1,0}^l(r)$ and $\mathbf{f}_{1,0}^i(r^*)$ are understood as inhomogeneous parts. Solutions of these equations are expressed via the elementary functions:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{1,1}^l(r) &= C\sqrt{r} + \sqrt{2l(l+1)}r \\
 \mathbf{f}_{1,1}^i(r^*) &= \dot{C}\sqrt{r^*} + \sqrt{2i(i+1)}r^*.
 \end{aligned}$$

Therefore, solutions of the radial part have the form:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{1,1}^l(r) &= \mathbf{f}_{1,-1}^l(r) = C\sqrt{r} + \sqrt{2l(l+1)}r, \\
 \mathbf{f}_{1,0}^l(r) &= \sqrt{2l(l+1)}r, \\
 \mathbf{f}_{1,1}^i(r^*) &= \mathbf{f}_{1,-1}^i(r^*) = \dot{C}\sqrt{r^*} + \sqrt{2i(i+1)}r^*, \\
 \mathbf{f}_{1,0}^i(r^*) &= \sqrt{2i(i+1)}r^*.
 \end{aligned}$$

In such a way, solutions of the $SL(2, \mathbb{C})$ -field equations (24) are

$$\begin{aligned}
 \psi_1(r, \varphi^c, \theta^c) &= \mathbf{f}_{1,1}^l(r) \mathfrak{M}_l^1(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0), \\
 \psi_2(r, \varphi^c, \theta^c) &= \mathbf{f}_{1,0}^l(r) \mathfrak{M}_l^0(0, 0, \theta, \tau, 0, 0), \\
 \psi_3(r, \varphi^c, \theta^c) &= \mathbf{f}_{1,-1}^l(r) \mathfrak{M}_l^{-1}(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0), \\
 \dot{\psi}_1(r^*, \dot{\varphi}^c, \dot{\theta}^c) &= \mathbf{f}_{1,1}^i(r^*) \mathfrak{M}_i^1(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0), \\
 \dot{\psi}_2(r^*, \dot{\varphi}^c, \dot{\theta}^c) &= \mathbf{f}_{1,0}^i(r^*) \mathfrak{M}_i^0(0, 0, \theta, \tau, 0, 0), \\
 \dot{\psi}_3(r^*, \dot{\varphi}^c, \dot{\theta}^c) &= \mathbf{f}_{1,-1}^i(r^*) \mathfrak{M}_i^{-1}(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0),
 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
 l &= 1, 2, 3, \dots \\
 i &= 1, 2, 3, \dots \\
 \mathfrak{M}_l^{\pm 1}(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0) &= e^{\mp(\epsilon + i\varphi)} Z_l^{\pm 1}(\theta, \tau), \\
 Z_l^{\pm 1}(\theta, \tau) &= \cos^{2l} \frac{\theta}{2} \operatorname{ch}^{2l} \frac{\tau}{2} \sum_{k=-l}^l i^{\pm 1-k} \tan^{\pm 1-k} \frac{\theta}{2} \operatorname{th}^{-k} \frac{\tau}{2} \times \\
 {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \pm 1 - l + 1, 1 - l - k \\ \pm 1 - k + 1 \end{matrix} \middle| i^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -l + 1, 1 - l - k \\ -k + 1 \end{matrix} \middle| \operatorname{th}^2 \frac{\tau}{2} \right), k + 1 \\
 \mathfrak{M}_l^0(0, 0, \theta, \tau, 0, 0) &= Z_l^0(\theta, \tau) \\
 Z_l^0(\theta, \tau) &= \cos^{2l} \frac{\theta}{2} \operatorname{ch}^{2l} \frac{\tau}{2} \sum_{k=-l}^l i^{-k} \tan^{-k} \frac{\theta}{2} \operatorname{th}^{-k} \frac{\tau}{2} \times \\
 \mathfrak{M}_i^{\pm 1}(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0) &= e^{\mp(\epsilon - i\varphi)} Z_i^{\pm 1}(\theta, \tau) \\
 Z_i^{\pm 1}(\theta, \tau) &= \cos^{2i} \frac{\theta}{2} \operatorname{ch}^{2i} \frac{\tau}{2} \sum_{k=-i}^i i^{\pm 1-k} \tan^{\pm 1-k} \frac{\theta}{2} \operatorname{th}^{-k} \frac{\tau}{2} \times \\
 {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \pm 1 - i + 1, 1 - i - k \\ \pm 1 - k + 1 \end{matrix} \middle| i^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -i + 1, 1 - i - k \\ -k + 1 \end{matrix} \middle| \operatorname{th}^2 \frac{\tau}{2} \right), \\
 \mathfrak{M}_i^0(0, 0, \theta, \tau, 0, 0) &= Z_i^0(\theta, \tau) \\
 Z_i^0(\theta, \tau) &= \cos^{2i} \frac{\theta}{2} \operatorname{ch}^{2i} \frac{\tau}{2} \sum_{k=-i}^i i^{-k} \tan^{-k} \frac{\theta}{2} \operatorname{th}^{-k} \frac{\tau}{2} \times \\
 {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -i + 1, 1 - i - k \\ -k + 1 \end{matrix} \middle| i^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -i + 1, 1 - i - k \\ -k + 1 \end{matrix} \middle| \operatorname{th}^2 \frac{\tau}{2} \right),
 \end{aligned}$$

where $\mathfrak{M}_l^0(0, 0, \theta, \tau, 0, 0)$ ($Z_l^0(\theta, \tau)$) are zonal hyperspherical functions (see Ref. 48).

Therefore, in accordance with the factorization (5) an explicit form of the relativistic wavefunction $\psi(\boldsymbol{\alpha}) = \psi(x)\psi(\mathbf{g})$ on the Poincaré group in the case of $(1, 0) \oplus (0, 1)$ representation (Maxwell field) is defined by the following expressions (complete set)

$$\begin{aligned}
\psi_1(\alpha) &= \psi_+(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t) \psi_1(\mathbf{g}) = \\
&\{2(2\pi)^3\}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_+(\mathbf{k}) \\ \varepsilon_+(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \mathbf{f}_{1,1}^l(r) \mathfrak{M}_l^1(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0), \\
\psi_0(\alpha) &= \psi_0(\mathbf{k}; \mathbf{x}) \psi_0(\mathbf{g}) = \{2(2\pi)^3\}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_0(\mathbf{k}) \\ \varepsilon_0(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] \mathbf{f}_{1,0}^l(r) \mathfrak{M}_l(0, 0, \theta, \tau, 0, 0), \\
\psi_{-1}(\alpha) &= \psi_-(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t) \psi_{-1}(\mathbf{g}) = \\
&\{2(2\pi)^3\}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_-(\mathbf{k}) \\ \varepsilon_-(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \mathbf{f}_{1,-1}^l(r) \mathfrak{M}_l^{-1}(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0), \\
&\{2(2\pi)^3\}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_+^*(\mathbf{k}) \\ \varepsilon_+^*(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \mathbf{f}_{1,1}^l(r^*) \mathfrak{M}_l^1(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0), \\
&{}_2F_1 \left(\begin{matrix} -l+1, 1-l-k \\ -k+1 \end{matrix} \middle| i^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -l+1, 1-l-k \\ -k+1 \end{matrix} \middle| \tanh^2 \frac{\tau}{2} \right), \\
\dot{\psi}_0(\alpha) &= \dot{\psi}_0^*(\mathbf{k}; \mathbf{x}) \dot{\psi}_0(\mathbf{g}) = \{2(2\pi)^3\}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_0^*(\mathbf{k}) \\ \varepsilon_0^*(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] \mathbf{f}_{1,0}^l(r^*) \mathfrak{M}_l(0, 0, \theta, \tau, 0, 0), \\
\dot{\psi}_{-1}(\alpha) &= \dot{\psi}_{-1}^*(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t) \dot{\psi}_{-1}(\mathbf{g}) = \\
&\{2(2\pi)^3\}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_-^*(\mathbf{k}) \\ \varepsilon_-^*(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \mathbf{f}_{1,-1}^l(r^*) \mathfrak{M}_l^{-1}(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0)
\end{aligned}$$

The set (27) consists of the transverse solutions $\psi_{\pm 1}(\alpha)$ (positive energy), $\dot{\psi}_{\pm 1}(\alpha)$ (negative energy) and the zero-eigenvalue (longitudinal) solutions $\psi_0(\alpha)$ and $\dot{\psi}_0(\alpha)$. The negative energy solutions $\dot{\psi}_{\pm 1}(\alpha)$ should be omitted, since photons have no antiparticles. The longitudinal solutions $\psi_0(\alpha)$ and $\dot{\psi}_0(\alpha)$ do not contribute to a real photon due to their transversality conditions (17) and (19). Thus, any real photon should be described by only $\psi_{\pm 1}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\psi_{\pm 1}(\alpha) &= \psi_{\pm}(\mathbf{k}; \mathbf{x}, t) \psi_{\pm 1}(\mathbf{g}) = \\
&\{2(2\pi)^3\}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\pm}(\mathbf{k}) \\ \varepsilon_{\pm}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \mathbf{f}_{1,\pm 1}^l(r) \mathfrak{M}_l^{\pm 1}(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, 0, 0),
\end{aligned}$$

In such a way, we obtain a solution set defining the Maxwell field $(1, 0) \oplus (0, 1)$ on the Poincaré group (or, equally, on the group manifold $\mathcal{M}_8$). It should be noted that obtained previously solutions for the field $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ (Dirac field) 64 have the analogous mathematical structure, that is, they are the functions on the Poincaré group. This circumstance allows us to consider the fields $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ and $(1, 0) \oplus (0, 1)$ on an equal footing, from the one group theoretical viewpoint. The following step is a definition of field operators in the obtained solutions for the Dirac and Maxwell fields via harmonic analysis on the Poincaré group. A construction of quantum electrodynamics in terms of so-defined field operators will be studied in a separate work.

Другое о выводе уравнений Максвелла из соображений пространства-времени

Построение лагранжиана по уравнениям движения по Киселеву (!??)

Вывод

Зачем столько всего сложного?

(пойму - отвечу на этот вопрос)

Другие вопросы о лагранжиане из представлений группы Пуанкаре (!??)

Почему бы просто не найти инвариант-скаляры и их подставить в лагранжиан?

(?? казалось бы, найти нужно просто инварианты и собрать из них лагранжиан. ну, думаю, дело в том, что хочется общую формулу иметь. и, видимо, она на самом деле есть. подумаю потом еще раз, мб на самом деле все можно проще сделать. Киселев сам ведь зачем-то варьировал очень долго все полученное?????)

7.2.6 Interaction of Fields from the Point of View of the Poincaré Group (????)

(??? и как они вообще взаимодействовать могут???)
да какие-то конструкции, которые я не знаю.

7.2.7 Derivation of Other Equations from the Poincaré Group**Вывод уравнения Прока из группы Пуанкаре****Теория**

Рассмотрим векторное поле $\varphi^\mu(x)$. Мы показали, что условия того, что это поле преобразуется по массивному неприводимому представлению группы Лоренца со спином $s = 1$ имеют вид

$$(\square + m^2) \varphi^\mu(x) = 0, \quad \partial_\mu \varphi^\mu(x) = 0.$$

Покажем, что два этих условия можно переписать эквивалентным образом в виде одного уравнения.

Введем антисимметричное тензорное поле $F_{\mu\nu}$ по правилу

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu(x) - \partial_\nu \varphi_\mu(x).$$

Рассмотрим уравнение

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 \varphi^\nu = 0.$$

Действуя на него оператором ∂_ν получим $m^2 \partial_\nu \varphi^\nu = 0$. То есть уравнение (253) содержит как следствие условие равенства нулю дивергенции поля φ^μ . Подставляя (252) в (253) получим

$$\square \varphi^\nu - \partial^\nu \partial_\mu \varphi^\mu + m^2 \varphi^\nu = 0$$

Но мы показали, что из уравнения (253) следует $\partial_\mu \varphi^\mu = 0$. Подставляя это в (254) получим $(\square + m^2) \varphi^\nu = 0$. Таким образом, уравнение (253) содержит как следствие все условия, определяющие массивное представление со спином $s = 1$.

Уравнение (136) называется уравнением Прока, оно описывает динамику массивного поля со спином $s = 1$.

Вывод уравнения Паули-Фирца ($s = 2$) из группы Пуанкаре

Вывод

Уравнение Паули-Фирца представляет собой релятивистское уравнение, описывающее распространение неприводимого массивного представления группы Пуанкаре со спином $s = 2$.

Как было показано ранее, неприводимое массивное представление группы Пуанкаре спином $s = 2$ реализуется в терминах симметричного тензорного поля второго ранга $\varphi_{\mu\nu}$, удовлетворяющего уравнению Клейна-Гордона $(\square + m^2)\varphi_{\mu\nu} = 0$ и дополнительным условиям

$$\begin{aligned}\partial^\mu \varphi_{\mu\nu} &= 0 \\ \eta^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} &= 0\end{aligned}$$

Наша цель состоит в нахождении уравнения, тождественными следствиями которого являются соотношения (258), (259).

Наиболее общее линейное релятивистски ковариантное уравнение для поля $\varphi_{\mu\nu}$ без высших производных записывается в виде

$$\begin{aligned}(\square + m^2)\varphi_{\mu\nu} + a(\partial_\mu \partial^\alpha \varphi_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha \varphi_{\mu\alpha}) + b\eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \varphi_{\alpha\beta} + \\ + b\eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \varphi_{\alpha\beta} + c\partial_\mu \partial_\nu \varphi + d\eta_{\mu\nu} (\square + m^2)\varphi = 0.\end{aligned}$$

Здесь обозначено $\varphi = \varphi^\mu{}_\mu$ и a, b, c, d - произвольные безразмерные числовые коэффициенты. Задача состоит в подборе этих коэффициентов так, чтобы из уравнений (260) вытекали условия (258), (259) как тождественные следствия. Заметим, что вообще говоря мы могли записать в уравнении (260) вместо $(\square + m^2)\varphi_{\mu\nu}$ и $d(\square + m^2)\varphi$ выражения $\square\varphi_{\mu\nu} + km^2\varphi_{\mu\nu}$ и $d\square\varphi + lm^2\varphi$ с дополнительными коэффициентами k, l , но ясно, что релятивистской теории выражения $\square$ и m^2 должны входить в комбинации $+m^2$

а. Свернем уравнение (260) с $\eta^{\mu\nu}$, получим

$$\begin{aligned}(\square + m^2)\varphi + a(\partial^\mu \partial^\nu \varphi_{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu \varphi_{\mu\nu}) + 4b\partial^\mu \partial^\nu \varphi_{\mu\nu} + \\ + c\square\varphi + 4d(\square + m^2)\varphi = 0\end{aligned}$$

Или

$$[(1 + c + 4d)\square + (1 + 4d)m^2]\varphi + 2(a + 2b)\partial^\mu \partial^\nu \varphi_{\mu\nu} = 0$$

б. Подействуем на уравнение (260) оператором $\partial^\mu \partial^\nu$, получим

$$\begin{aligned}(\square + m^2)\partial^\mu \partial^\nu \varphi_{\mu\nu} + 2a\square\partial^\mu \partial^\nu \varphi_{\mu\nu} + b\square\partial^\mu \partial^\nu \varphi_{\mu\nu} + c\square^2\varphi + \\ + d\square(\square + m^2)\varphi = 0\end{aligned}$$

Или

$$[(1 + 2a + b)\square + m^2]\partial^\mu \partial^\nu \varphi_{\mu\nu} + (c + d)\square^2\varphi + dm^2\square\varphi = 0$$

с. Подействуем на уравнение (260) оператором ∂^μ , получим

$$\begin{aligned}(\square + m^2)\partial^\mu \varphi_{\mu\nu} + a(\square\partial^\mu \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha \partial^\beta \varphi_{\alpha\beta}) + \\ + b\partial_\nu \partial^\alpha \partial^\beta \varphi_{\alpha\beta} + c\square\partial_\nu \varphi + d\square\partial_\nu \varphi + dm^2\partial_\nu \varphi = 0\end{aligned}$$

Или

$$(1+a)\square\partial^\mu\varphi_{\mu\nu} + m^2\partial^\mu\varphi_{\mu\nu} + (a+b)\partial_\nu\partial^\alpha\partial^\beta\varphi_{\alpha\beta} + \\ (c+d)\square\partial_\nu\varphi + dm^2\partial_\nu\varphi = 0$$

Обратим внимание, что соотношения (261), (262) можно рассматривать как систему из двух линейных уравнений для нахождения двух величин φ и $\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu}$. Из уравнения (261) получим

$$\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} = -\frac{[(1+c+4d)\square + (1+4d)m^2]\varphi}{2(a+2b)}$$

Подставим это выражение в уравнение (262). Имеем

$$[(1+2a+b)(1+c+4d)\square^2 + [(1+2a+b)(1+4d) + \\ + (1+c+4d)]m^2\square + (1+4d)m^4]\varphi - 2(a+2b)(c+d)\square^2\varphi - \\ - 2(a+2b)dm^2\square^2\varphi = 0$$

Или

$$[(1+2a+b)(1+c+4d) - 2(a+2b)(c+d)]\square^2 + \\ + [(1+2a+b)(1+4d) + (1+c+4d) - 2d(a+2b)]m^2\square + \\ + (1+4d)m^4]\varphi = 0$$

Это соотношение должно выполняться тождественно. Выберем коэффициенты a, b, c, d так, чтобы выполнялись условия

$$(1+2a+b)(1+c+4d) - 2(a+2b)(c+d) = 0 \\ (1+2a+b)(1+4d) - (1+c+4d) - 2d(a+2b) = 0$$

После этого уравнение (264) примет вид

$$(1+4d)m^4\varphi = 0$$

Пусть $1+4d \neq 0$. Тогда из уравнения (266) следует $\varphi = 0$ как и должно быть согласно второму из условий (259). Но если $\varphi = 0$, из уравнения (263) следует $\partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} = 0$. Подставляя это соотношение в уравнение (262) вместе с $\varphi = 0$ получим

$$(1+a)\square\partial^\mu\varphi_{\mu\nu} + m^2\partial^\mu\varphi_{\mu\nu} = 0$$

Выберем a из условия $1+a=0$. Тогда получим

$$m^2\partial^\mu\varphi_{\mu\nu} = 0$$

Или $\partial^\mu\varphi_{\mu\nu} = 0$ как и должно быть согласно первому из соотношений (259). Подставляя равенства $\varphi = 0, \partial^\mu\partial^\nu\varphi_{\mu\nu} = 0, \partial^\mu\varphi_{\mu\nu} = 0$ в исходное уравнение (260) получим $(\square + m^2)\varphi_{\mu\nu} = 0$. Таким образом, уравнение (260) ведет к требуем условиям (258), если выполнены условия $a = -1$ и (266).

Подставим $a = -1$ в соотношение (266), получим

$$(b-1)(1+c+4d) - 2(2b-1)(c+d) = 0 \\ (b-1)(1+4d) + (1+c+4d) - 2d(2b-1) = 0$$

В результате мы имеем систему двух алгебраических уравнений для нахождения трех коэффициентов b, c, d . Ясно, что из этих уравнений можно найти только два коэффициента, один всегда остается произвольным. Это обстоятельство можно было бы

заметить с самого начала. Действительно, совершим в исходном уравнении (260) замену поля $\varphi_{\mu\nu}$ на поле $\bar{\varphi}_{\mu\nu}$ по правилу

$$\varphi_{\mu\nu} = \bar{\varphi}_{\mu\nu} + \alpha\eta_{\mu\nu}\varphi$$

Подставляя (270) в уравнение (260), получим

$$\begin{aligned} & (\square + m^2) \bar{\varphi}_{\mu\nu} + \alpha\eta_{\mu\nu} (\square + m^2) \varphi + a (\partial_\mu \partial^\alpha \bar{\varphi}_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha \bar{\varphi}_{\mu\alpha}) + \\ & + 2\alpha a \partial_\mu \partial_\nu \varphi + b\eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{\varphi}_{\alpha\beta} + b\alpha\eta_{\mu\nu} \square \varphi + \\ & + c\partial_\mu \partial_\nu \varphi + d (\square + m^2) \varphi = 0 \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} & (\square + m^2) \bar{\varphi}_{\mu\nu} + a (\partial_\mu \partial^\alpha \bar{\varphi}_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha \bar{\varphi}_{\mu\alpha}) + b\eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{\varphi}_{\alpha\beta} + \\ & + (c + 2\alpha a) \partial_\mu \partial_\nu \varphi + (d + \alpha)\eta_{\mu\nu} (\square + m^2) \varphi = 0 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что уравнение (272) совпадает по форме с уравнением (260), но теперь коэффициенты перед $\partial_\mu \partial_\nu \varphi$ и $(\square + m^2) \varphi$ зависят от α . Это значит, что коэффициенты c и d в уравнении (260) не могут быть определены однозначно, один из них обязательно произволен.

Частное решение уравнений (269) имеет вид $b = 1, c = 1, d = -1$. Это, вместе с $a = -1$ позволяет записать искомое уравнение в виде

$$\begin{aligned} & (\square + m^2) \varphi_{\mu\nu} - (\partial_\mu \partial^\alpha \varphi_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha \varphi_{\mu\alpha}) \\ & \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \varphi_{\alpha\beta} + \partial_\mu \partial_\nu \varphi - \eta_{\mu\nu} (\square + m^2) \varphi = 0 \end{aligned}$$

Это есть стандартная форма записи уравнения Паули-Фирца. В общем случае, мы имеем однопараметрическое семейство уравнений, описывающих динамику массивного неприводимого представления группы Пуанкаре со спином $s = 2$. Эти уравнения были впервые построены в 1939 году.

Можно показать, что при нулевой массе уравнение Паули-Фирца сводится к линеаризованному приближению для уравнений гравитационного поля Эйнштейна без материи.

По Киселеву

(он просто упомянул и всё.)

В заключение приведем без вывода действие для массивного векторного поля $\mathcal{V}^\nu$:

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4c} F_{\mu\nu}(\mathcal{V}) F^{\mu\nu}(\mathcal{V}) + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \mathcal{V}^\nu \mathcal{V}_\nu \right\} = -\frac{1}{2c\hbar^2} \int d^4x \left\{ \mathcal{V}_\nu^\perp p^2 \mathcal{V}_\nu^\perp - \mathcal{V}^\nu (mc)^2 \mathcal{V}_\nu \right\},$$

где условие поперечности поля $\partial_\nu \mathcal{V}^\nu = 0$ является следствием уравнений движения, полученных из вариационного принципа - уравнений ПрокА:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \mathcal{V}^\mu,$$

поскольку $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} \equiv 0$ как свертка симметричного тензора с антисимметричным.

Вывод уравнения Рарита-Швингера из группы Пуанкаре

Теория

Уравнение Рарита-Швингера представляет собой уравнение, описывающее распространение неприводимого массивного представления группы Пуанкаре со спином $s = \frac{3}{2}$.

Ранее мы показали, что для описания поля со спином $a = \frac{3}{2}$ используются представления $(1, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, 1)$, то есть спин-тензоры $\varphi_{(ba)b}$ и $\chi_{b(\dot{b}a)}$. После конвертации спинорных индексов в векторные получим $\varphi_{\mu a}$ и $\chi_{\mu \dot{a}}$. Мы будем предполагать, что искомое уравнение должно быть инвариантным относительно преобразований четности, это означает, что следует рассматривать оба представления $(1, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, 1)$, то есть объединить двухкомпонентные спин-векторные поля $\varphi_{\mu a}, \chi_{\mu \dot{a}}$ в одно векторное поле ψ_μ , являющееся дираковским четырех компонентным спинором

$$\psi_\mu = \begin{pmatrix} \varphi_{\mu a} \\ \chi_{\mu \dot{a}} \end{pmatrix}$$

Условия, определяющие неприводимое представление записываются в виде

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_\nu &= 0 \\ \partial^\mu \psi_\mu &= 0 \\ \gamma^\mu \psi_\mu &= 0 \end{aligned}$$

Наша цель состоит в том, чтобы найти уравнение, тождественными следствиями которого являются соотношения (274), (275). Наиболее общее релятивистски ковариантное уравнение первого порядка для поля ψ_μ записывается в виде

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_\nu + a\gamma_\nu (i\partial^\mu \psi_\mu) + b i \partial_\nu (\gamma^\mu \psi_\mu) + \\ + c \gamma_\nu (i\gamma^\alpha \partial_\alpha) (\gamma^\mu \psi_\mu) + d m \gamma_\nu (\gamma^\mu \psi_\mu) = 0 \end{aligned}$$

Здесь a, b, c, d безразмерные числовые коэффициенты. Задача состоит в подборе этих коэффициентов. Так, чтобы из уравнения (276) следовали условия (274), (275).

а. Свернем уравнение (276) с матрицей γ^ν , получим

$$\begin{aligned} 2(1 + 2a) (i\partial^\mu \psi_\mu) + (b + 4c - 1) (i\gamma^\alpha \partial_\alpha) (\gamma^\mu \psi_\mu) + \\ + (4d - 1)m (\gamma^\mu \psi_\mu) = 0 \end{aligned}$$

б. Подействуем на уравнение (276) оператором $i\partial^\nu$, получим

$$\begin{aligned} (1 + a) (i\gamma^\nu \partial_\nu) (i\partial^\mu \psi_\mu) - (b + c) \square (\gamma^\mu \psi_\mu) + \\ + m d (i\gamma^\nu \partial_\nu) (\gamma^\mu \psi_\mu) - m (i\partial^\mu \psi_\mu) = 0 \end{aligned}$$

Выразим из уравнения (277) выражение $i\partial^\mu \psi_\mu$ и подставим в уравнение (278). Это приводит к соотношению

$$\begin{aligned} [(1 + a)(b + 4c - 1) - 2(1 + 2a)(b + c)] \square (\gamma^\mu \psi_\mu) - \\ - [(1 + a)(4d - 1) - 2d(1 + 2a)] m (i\gamma^\nu \partial_\nu) (\gamma^\mu \psi_\mu) - \\ - 2(1 + 2a)m (i\partial^\mu \psi_\mu) = 0 \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы в (279) коэффициент при $(i\gamma^\nu \partial_\nu) (\gamma^\mu \psi_\mu)$ обратился в ноль. Отсюда $d = \frac{a+1}{2}$. Потребуем еще, чтобы коэффициент при $\square (\gamma^\mu \psi_\mu)$ обратился в ноль. Это приводит к уравнению

$$(1 + a)(b + 4c - 1) - 2(1 + 2a)(b + c) = 0$$

При выполнении последнего условия в предположении что $1 + 2a \neq 0$, уравнение (279) сводится к

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0,$$

что совпадает с первым из условий (275). Подставим это условие в уравнение (277), получим

$$(b + 4c - 1)(i\gamma^\nu \partial_\nu)(\gamma^\mu \psi_\mu) + (4d - 1)m(\gamma^\mu \psi_\mu) = 0.$$

Потребуем выполнение условий $b + 4c - 1 = 0$ и $4d - 1 \neq 0$. Тогда из уравнения (282) следует

$$\gamma^m \psi_\mu = 0,$$

что совпадает со вторым их условий (275). Подставляя уравнения (281), (283) в исходное уравнение (276), получим

$$(\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_\nu = 0,$$

что совпадает с условием (274). Обратимся снова к уравнению (280). С учетом $b + 4c - 1 = 0$ из него следует $b + c = 0$. Два последних уравнения дают $b = -\frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$. Кроме того, мы показали, что $d = \frac{a+1}{2}$. Подставляя эти значения для b, c, d в исходное уравнение (276) получим окончательно

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_\nu + a\gamma_\nu (i\partial^\mu \psi_\mu) - \frac{1}{3}i\partial_\nu (\gamma^\mu \psi_\mu) + \\ + \frac{1}{3}\gamma_\nu (i\gamma^\alpha \partial_\alpha) (\gamma^\mu \psi_\mu) + \frac{a+1}{2}m\gamma_\nu (\gamma^\mu \psi_\mu) = 0 \end{aligned}$$

Это уравнение содержит как тождественные следствия условия (274), (275), определяющие неприводимое представление группы Пуанкаре со спином $s = \frac{3}{1}$. По существу мы получили однопараметрическое семейство таких уравнений, все они называются уравнениями Рарита-Швингера.

О различных формах уравнения Рарита-Швингера

Выбирая различные значения для параметра a можно получить разные специальные формы уравнения Рарита-Швингера. Например при $a = -\frac{1}{3}$ будем иметь

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_\nu - \frac{1}{3}(\gamma_\nu i\partial_\mu + \gamma_\mu i\partial_\nu) \psi^\mu + \frac{1}{3}\gamma_\nu (i\gamma^\alpha \partial_\alpha + m) (\gamma^\mu \psi_\mu) = 0$$

Именно в такой форму уравнение движения для поля со спином $s = \frac{3}{2}$ было записано в оригинальной работе Рарита и Швингера в 1941 году. Помимо произвола, связанного с выбором параметра a , уравнение Рарита-Швингера содержит дополнительный произвол, обусловленный возможностью внести вместо поля ψ_μ поле $\tilde{\psi}_\mu$ по правилу

$$\tilde{\psi}_\mu = \psi_\mu + k\gamma_\mu (\gamma^\nu \psi_\nu),$$

включающему произвольный параметр k . Наличие произвола в записи полевого уравнения есть общее свойство теории с высшими спинами. Безмассовое уравнение Рарита-Швингера используется в супергравитации для описания гравитино.

Кстати, а как иначе получить уравнение Рариты-Швингера?

(там Проен почти с потолка его взял, укажу)

Об основных применениях уравнения Рариты-Швингера

(Абзац про суперсимметрии как способе поправки причинности в ур Р-Ш (????)) (?? см вики, не знаю ничего про это конкретно.)

(Абзац про Омега-барионы)

О других применениях уравнения Р-Ш

(??? указание на то, что в следующей части будет подробно.)

7.2.8 Review and Details of Representations of the Poincaré Group**Что может быть, а что нет?**

Могут ли быть частицы со спином $1/2$ и движущиеся со скоростью света? (????)

(?? типа как фотон и электрон, свойства одного и другого иметь?? хз. вопрос пока.)

7.3 Other about Representations of the Poincaré Group**7.3.1 Projective Representations****Суть**

(????? хз вообще)

Теория

Как уже указывалось выше, группа симметрий G может быть представлена на физических состояниях проективно, то есть элементы g_1, g_2 и т.д.

группы симметрии G могут быть представлены на физическом гильбертовом пространстве унитарными операторами $\hat{F}(g_1), \hat{F}(g_2)$ и т.д., удовлетворяющими правилу композиции

$$\hat{F}(g_1) \hat{F}(g_2) = e^{i\phi(g_1, g_2)} \hat{F}(g_1 g_2)$$

действительной фазой ϕ .

Основным требованием, которому должна удовлетворять фаза ϕ , является условие ассоциативности: $\hat{F}(g_3) (\hat{F}(g_2) \hat{F}(g_1)) = (\hat{F}(g_3) \hat{F}(g_2)) \hat{F}(g_1)$, означающее, что

$$\phi(g_2, g_1) + \phi(g_3, g_2 g_1) = \phi(g_3, g_2) + \phi(g_3 g_2, g_1)$$

Хотя любая фаза вида

$$\phi(g_1, g_2) = \alpha(g_1 g_2) - \alpha(g_1) - \alpha(g_2)$$

автоматически удовлетворяет уравнению (1.27), проективное представление с такой фазой эквивалентно обычному представлению, что легко видеть, совершив замену $\hat{F}(g) \mapsto \hat{F}'(g) \equiv e^{i\alpha(g)} \hat{F}(g)$, для которого $\hat{F}'(g_1) \hat{F}'(g_2) = \hat{F}'(g_1 g_2)$ Любой набор функций $\phi(g_1, g_2)$ удовлетворяющий уравнению (1.27) и отличающихся друг от друга на произвольную функцию $\delta\phi(g_1, g_2)$ вида (1.28), называется два-коциклом.

Коцикл, содержащий функцию $\phi = 0$, является тривиальным.

Как легко видеть, он состоит из функций вида (1.28), которые можно легко устранить переопределением оператора $\hat{F}(g)$.

Нас же интересует, допускает ли группа симметрии какие-либо нетривиальные два-коциклы, т.е.

может ли она иметь на гильбертовом пространстве существенно проективное представление, такое, что фазу $\phi(g_1, g_2)$ нельзя устранить переопределением оператора представления.

Для ответа на поставленный вопрос полезно понять, как нетривиальная фаза ϕ из уравнения (1.26) изменяет Коммутационные соотношения для генераторов.

Из (1.26) очевидно, что $\phi(g, e) = \phi(e, g) = 0$.

Для инфинитезимальных преобразований фаза также должна быть мала.

Параметризуем групповые элементы координатами θ^α и воспользуемся нашим соглашением $g(\theta = 0) \equiv e$.

Тогда, имея в виду (1.26), (1.15), (1.17), а также разложение фазы:

$$\phi(g(\theta_1)g(\theta_2)) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_1^\beta \partial \theta_2^\gamma} \theta_1^\beta \theta_2^\gamma + \dots \equiv \gamma_{\beta\gamma} \theta_1^\beta \theta_2^\gamma + \dots$$

получаем

$$\begin{aligned} & \left(1 + i\theta_1^\alpha \hat{\Gamma}_\alpha + \frac{1}{2}\theta_1^\beta \theta_1^\gamma \hat{\Gamma}_{\beta\gamma} + \dots\right) \cdot \left(1 + i\theta_2^\alpha \hat{\Gamma}_\alpha + \frac{1}{2}\theta_2^\beta \theta_2^\gamma \hat{\Gamma}_{\beta\gamma} + \dots\right) = \\ & = \gamma_{\beta\gamma} \theta_1^\beta \theta_2^\gamma + i\left(\theta_1^\alpha + \theta_2^\alpha + f_{\beta\gamma}^\alpha \theta_1^\beta \theta_2^\gamma + \dots\right) \hat{\Gamma}_\alpha + \frac{1}{2}\left(\theta_1^\beta + \theta_2^\beta + \dots\right)\left(\theta_1^\gamma + \theta_2^\gamma + \dots\right) \hat{\Gamma}_{\beta\gamma} + \dots \end{aligned}$$

Члены порядка 1, θ_1 , θ_2 , θ_1^2 и θ_2^2 в правой и левой частях полученного уравнения, как и в случае обычного представления связной группы Ли, автоматически совпадают, а благодаря существованию членов, пропорциональных $\theta_1 \theta_2$, возникает нетривиальное условие

$$\hat{\Gamma}_{\beta\gamma} = -\hat{\Gamma}_\beta \hat{\Gamma}_\gamma - i f_{\beta\gamma}^\alpha \hat{\Gamma}_\alpha - i \gamma_{\beta\gamma}$$

В силу того, что $\hat{\Gamma}_{\beta\gamma} = \hat{\Gamma}_{\gamma\beta}$ получаем

$$[\hat{\Gamma}_\beta, \hat{\Gamma}_\gamma] = i c_{\beta\gamma}^\alpha \hat{\Gamma}_\alpha + i a_{\beta\gamma}$$

где $a_{\beta\gamma} = -\gamma_{\beta\gamma} + \gamma_{\gamma\beta} = -a_{\gamma\beta}$, а $c_{\beta\gamma}^\alpha = -f_{\beta\gamma}^\alpha + f_{\gamma\beta}^\alpha$ - уже известные нам структурные константы группы. Возникновение в правой части коммутационного соотношения членов, пропорциональных единичному - т.н.

центральных зарядов, отражает тот факт, что фаза в проективном представлении группы для алгебры Ли нетривиальна. Из тождества Якоби для генераторов

$$[[\hat{\Gamma}_\beta, \hat{\Gamma}_\gamma], \hat{\Gamma}_\sigma] + [[\hat{\Gamma}_\sigma, \hat{\Gamma}_\beta], \hat{\Gamma}_\gamma] + [[\hat{\Gamma}_\gamma, \hat{\Gamma}_\sigma], \hat{\Gamma}_\beta] = 0$$

можно получить важное соотношение, связывающее постоянные $a_{\beta\gamma}$ со структурными постоянными группы:

$$c_{\beta\gamma}^\alpha \gamma_{\alpha\sigma} + c_{\sigma\beta}^\alpha c_{\alpha\gamma}^\lambda + c_{\gamma\sigma}^\alpha c_{\alpha\beta}^\lambda = 0, \quad c_{\beta\gamma}^\alpha a_{\alpha\sigma} + c_{\sigma\beta}^\alpha a_{\alpha\gamma} + c_{\gamma\sigma}^\alpha a_{\alpha\beta} = 0$$

Всегда существует класс ненулевых $a_{\alpha\beta}$, удовлетворяющих уравнению (1.31): $a_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}^\gamma u_\gamma$, где u_γ - произвольный набор вещественных постоянных.

Для таких решений центральные заряды из уравнения (1.30) можно устранить, переопределив генераторы следующим образом: $\hat{\Gamma}_\alpha \mapsto \hat{\Gamma}'_\alpha = \hat{\Gamma}_\alpha + u_\alpha$.

Тогда новые генераторы будут удовлетворять старым коммутационным соотношениям без центральных зарядов.

Для некоторой алгебры Ли решения уравнения (1.31), отличные от $a_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}^\gamma u_\gamma$, могут и не существовать¹.

7.3.2 Representations of the Type $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

four-vector (E&M vector potential)
(нужно будет - подумаю про это)

8 Features, Special Effects and Constructions in Scope of SR

8.1 Other Conceptual Topics

8.1.1 Other Models and Phenomena of SR

(тут все остальное, чем мало занимался и что мало пользы несет)

Вращение Террелла — Пенроуза (???)

(пока не до этого)

Тот факт, что сфотографированные релятивистские объекты выглядят не сжатыми, а повернутыми, называется вращением Террелла — Пенроуза. На этот эффект независимо друг от друга в 1959 году указали Джеймс Террелл [2] и Роджер Пенроуз [3]. Поэтому иногда этот эффект называется вращением Пенроуза—Террелла, а иногда эффектом Террелла [4] [5].

Вращение Террелла—Пенроуза, при котором происходит поворот релятивистского объекта без его видимой деформации, возникает только при фотографировании с ортогональной проекцией. Для расчёта результата вращения Террелла — Пенроуза может быть использован как учёт времени распространения сигнала, так и формулы для абберации света.

Как СТО сочетается с квантовой механикой? (????)

(тоже интересный вопрос, давно был.)

8.1.2 Some Fals Statements about SR

О редковстречаемых сомнительных конструкциях

Стремная диаграмма круга в пространстве времени, согласно которой все движется со скоростью света

Пока считаю, что это фигня, потому что чего-то содержательного в ней я не увидел, и вообще ничего в ней нет строгого.

8.1.3 Generalization of SR ot GR in a Nutshell

(пока об этом в записи по ОТО, потом буду сюда суть переносить)

Суть обобщения СТО до ОТО

(напишу тут подробно потом.)

Уравнение геодезической

(??? пока тут, тут лишь указание, вообще это в ОТО будет написано, тут лишь связь между темами. в диффгеме потренируюсь еще, задачи на это прорешать нужно!!!)

Вывод уравнения геодезической

Найдем уравнение движения луча света или частицы в искривленном пространстве. Действие в нем по определению равно

$$S \equiv -mc \int ds \equiv \int d\tau \tilde{L} \equiv -mc^2 \int d\tau \sqrt{g_{\lambda\nu}(x) \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}.$$

Заметим, что по определению 4-скорости $u^2 = c^2 = g_{\lambda\nu}(x) \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$, где $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ — 4-скорость. То есть под действием константа, но нас это не волнует (?? мб почитаю про это потом больше). Уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\mu} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\mu}$. Посчитаем для них

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\mu} &= -\frac{1}{2} m \frac{c^2}{g_{\lambda\nu}(x) \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} u^\nu u^\lambda \partial_\mu g_{\nu\lambda}(x) = -\frac{1}{2} m c u^\nu u^\lambda \partial_\mu g_{\nu\lambda}(x). \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\mu} &= -m c g_{\mu\lambda}(x) u^\lambda (???). \end{aligned}$$

В итоге,

$$\frac{d}{d\tau} g_{\mu\lambda}(x) u^\lambda = \frac{1}{2} u^\nu u^\lambda \partial_\mu g_{\nu\lambda}(x)$$

Производная по параметру эволюции есть

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau} \partial_\nu = u^\nu \partial_\nu$$

что позволяет переписать уравнения движения:

$$g_{\mu\lambda} u^\nu \partial_\nu u^\lambda + \left(u^\nu u^\lambda \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \frac{u^\nu u^\lambda}{2} \partial_\mu g_{\nu\lambda} \right) = 0$$

Вклад, симметричный по перестановкам $\nu \langle \lambda$, можно представить как

$$u^\nu u^\lambda \partial_\nu g_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} u^\nu u^\lambda (\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\nu})$$

Тогда свертка уравнений движения с тензором $g^{\mu\alpha}$ дает

$$u^\nu \left(\partial_\nu u^\alpha + \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} [\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda}] u^\lambda \right) = 0$$

Величины $\Gamma_{\nu\lambda}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} [\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda}]$ называются символами Кристоффеля, в их помощью запишем:

$$u^\nu (\partial_\nu u^\alpha + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha u^\lambda) = 0$$

По построению, в частности, в форме (Д.16) уравнения движения являются тензорными. Поэтому тензором является величина

$$\nabla_\nu u^\alpha = \partial_\nu u^\alpha + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha u^\lambda \equiv u_{;\nu}^\alpha$$

которую называют ковариантной производной вектора. Или, определив ∇_ν скобку выше, запишем уравнения движения

$$u^\nu \nabla_\nu u^\alpha = 0$$

В эти уравнения не входит масса частицы.

О тензорности уравнения геодезической (???)

(?? как будто нас это тут волнует? мб удалю потом это.)

Тензором является комбинация частной производной и символов Кристоффеля, которых также называют коэффициентами метрической связности. По отдельности, ни частные производные вектора, ни символы Кристоффеля, вообще говоря, не являются тензорами в криволинейных координатах, поскольку матрицы нелинейных преобразований координат (в отличие от линейных преобразований в декартовых координатах) зависят от координат, так что при дифференцировании возникают вклады с производными от матриц преобразования, чего не должно быть у тензоров (по каждому индексу идет умножение на матрицу преобразований).

Итак, уравнения движения свободной релятивистской частицы при наличии метрики, зависящей от координат, принимают явно ковариантный вид

$$u^\nu \nabla_\nu u^\alpha = 0$$

Нерелятивистский предел (!!)

(?!!! проделать это нужно уже бы наконец-то)

Посмотрим на нерелятивистский предел уравнений движения в слабых полях:

$$v \ll c, \quad g_{\mu\nu} \sim 1.$$

В этом случае 4-скорость

$$u^\mu \approx c \left(1, \frac{v^\alpha}{c} \right), \quad v^\alpha = \frac{dr^\alpha}{dt}$$

а в выражении для символов Кристоффеля следует избегать дифференцирования по временной компоненте, так как она дает фактор $1/c$: $\partial_0 = \frac{1}{c} \partial_t$.

(??? ну вот тут нужно нормально написать, почему только такие два члена остаются. проработать нужно, вывел, не вписал, и забыл уже.)

Тогда

$$u^\nu \nabla_\nu u^\alpha \approx u^0 \frac{1}{c} \partial_t u^\alpha + \Gamma_{00}^\alpha u^0 u^0 + \mathcal{O}(v^2)$$

где мы пренебрегаем вкладом, квадратичными по u^α .

Тут

$$u^0 \frac{1}{c} \partial_t u^\alpha \approx \ddot{r}^\alpha$$

а второй равен

$$\Gamma_{00}^\alpha \approx -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\beta g_{00} \approx \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{00}$$

где мы учли, что метрика мало отличается от метрики Минковского: $g^{\alpha\beta} \approx -\delta_\beta^\alpha$. Таким образом, в нерелятивистском приближении и при слабых полях уравнения движения приобретают вид

$$\ddot{\mathbf{r}} \approx -\nabla \phi(\mathbf{r}),$$

где $\phi(\mathbf{r}) \approx \frac{c^2}{2} g_{00} + \text{const}$.

Отсюда, если потенциал на бесконечности равен нулю, а пространство-время в этом пределе становится пространством-временем Минковского, то константу интегрирования легко определить, так как

$$g_{00}(\mathbf{r}) \approx 1 + 2 \frac{\phi(\mathbf{r})}{c^2}$$

Этот результат согласуется с рассмотрением равноускоренного движения в $d\tau^2 \approx \left(1 + 2 \frac{\phi(x)}{c^2} \right) dt^2$.

8.1.4 History of SR in a Nutshell

(there are big books about it, I'll write main events shortly)

в 1911 году на лекции в Цюрихе ему задали вопрос.

Он сперва сказал, что СТО не работает с этим, так как системы отчета становятся неинерциальными.

8.1.5 Review of Applications of the Philosophy of Time in Everyday Life

(про это думал, но потом отдельно продумаю и напишу. Очень важный вопрос, но пока человечество не на том уровне, чтобы серьезно и четко на него отвечать, важность этого даже не замечается.)

8.2 Other Mathematical Topics

(some formalism, that is nearly useless)

8.2.1 Inönü–Wigner Contraction (??)

(??????????)

Суть (??)

(просто у Вайнберга почитаю и всё.)

О случаях применения сужения Инену-Вигнера (???)

(зачем оно?)

связь алгебры Пуанкаре с алгеброй Ли группы

Интересно сравнить алгебру Пуанкаре с алгеброй Ли группы симметрии ньютоновской механики - группы Галилея.

Её можно вывести, воспользовавшись преобразованиями группы Галилея и следуя затем той же самой процедуре, с помощью которой нами была получена алгебра Пуанкаре.

Однако, поскольку у нас уже есть соотношения (1.25), значительно проще получить гагилеевскую алгебру как нерелятивистский предел алгебры Пуанкаре.

Такой способ называют сужением Инену-Вигнера.

Для системы частиц с характерной массой m и скоростью v операторы $\mathbf{J}$ - импульса и углового момента оказываются порядка $p \sim mv$, $\mathcal{J} \sim 1$.

Оператор энергии $H = M + W$, где M - полная масса, а W - сумма кинетического и потенциального членов, имеющие порядок $M \sim m$, $W \sim mv^2$.

Учитывая, что $\mathcal{K} \sim \frac{1}{v}$, получаем

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{J}}_i, \hat{\mathcal{J}}_j] &= i\epsilon_{ijk}\hat{\mathcal{J}}_k, & [\hat{\mathcal{J}}_i, \hat{\mathcal{K}}_j] &= i\epsilon_{ijk}\hat{\mathcal{K}}_k, & [\hat{\mathcal{K}}_i, \hat{\mathcal{K}}_j] &= 0, & [\hat{\mathcal{J}}_i, \hat{\mathbf{p}}_j] &= i\epsilon_{ijk}\hat{\mathbf{p}}_k, & [\hat{\mathcal{K}}_i, \hat{\mathbf{p}}_j] &= -iM\delta_{ij} \\ [\hat{\mathcal{J}}_i, \hat{W}] &= [\hat{\mathbf{p}}_i, \hat{W}] = 0, & [\hat{\mathcal{K}}_i, \hat{W}] &= -i\hat{\mathbf{p}}_i, & [\hat{\mathbf{J}}_i, M] &= [\hat{\mathbf{p}}_i, M] = [\hat{\mathcal{K}}_i, M] = [\hat{W}, M] = 0 \end{aligned}$$

Заметим, что результат произведения операторов трансляций $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}$ и буста $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ должен представлять собой преобразование вида $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}$, что, однако, неверно

для действия этих операторов на гильбертовом пространстве состояний:

$$e^{-i\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{K}}}e^{-i\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{p}}} = e^{\frac{i}{2}M\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}e^{-i(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{K}}+\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{p}})}$$

Здесь мы воспользовались тождеством Бэйкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа для операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$: $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]+\dots}$.

Появление фазового множителя $e^{\frac{i}{2}M\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}$ показывает, что данное представление является проективным, с правилами суперотбора, запрещающими суперпозицию квантовых состояний с различными массами.

В этом отношении математика группы Пуанкаре проще математики группы Галилея.

Однако, эту ситуацию можно исправить, если формально расширить группу Галилея, введя в её алгебру Ли ещё один коммутирующий со всеми остальными генератор, собственные значения которого равны массам различных состояний.

В этом случае физические состояния образуют обычное, а не проективное представление расширенной группы симметрии.

При таком переопределении группы Галилея уже нет необходимости в правилах суперотбора для масс.

8.2.2 Group Operators and Homotopy Classes by Weinberg (??)

(нужно будет - выгружу)

8.2.3 Inversions and Degeneracy of Multiplets by Weinberg (??)

(нужно будет - выгружу)

8.2.4 Topology of the Poincaré Group

(все пока от Володи только, сам не занимался пока ей)

О случаях применения топологии группы Пуанкаре (??)

проде это поможет лучше понять, почему наш мир такой?
а мб и нет?

Theory

Изучение топологии собственной ортохронной группы Лоренца $SO_+^\uparrow(3, 1)$ представлено в этом параграфе несколькими этапами.

Первым делом мы построим гомоморфизм $\pi : SL(2|\mathbb{C}) \rightarrow SO_+^\uparrow(3, 1)$.

Для этого рассмотрим векторное пространство эрмитовых матриц 2×2 : $X = X^\dagger$.

В этом пространстве можно выбрать базис $\sigma_\mu = (\mathbf{1}, \sigma)$, где матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

По ходу дела нам понадобятся ещё матрицы $\bar{\sigma}_\mu = (\mathbf{1}, -\sigma)$.

Полезно знать следующие свойства матриц σ_μ и $\bar{\sigma}_\mu$:

$$\sigma_\mu \sigma^\mu = 1, \quad \text{tr}(\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu) = 2\eta_{\mu\nu}$$

Первое из них легко показать прямым вычислением, впрочем, как и второе.

Поскольку матрицы σ_μ образуют базис в пространстве эрмитовых матриц (2×2) : $X = X^\dagger$, то X можно разложить по этому базису согласно

$$X = x^\mu \sigma_\mu$$

где координаты x^μ - вещественные числа.

Как мы скоро увидим, их можно ассоциировать с координатами пространства Минковского.

Легко показать, что

$$x^\mu = \frac{1}{2} \text{tr} (\bar{\sigma}_\mu X)$$

Действительно, $\frac{1}{2} \text{tr} (\bar{\sigma}_\mu X) = \frac{1}{2} x^\nu \text{tr} (\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu) = \eta_{\mu\nu} x^\nu = x^\mu$.

Теперь рассмотрим линейное преобразование матриц X вида $X \mapsto X' = \omega X \omega^\dagger$, где $\omega \in SL(2|\mathbb{C})$.

Легко видеть, что $X'^\dagger = (\omega X \omega^\dagger)^\dagger = \omega X^\dagger \omega^\dagger = X'$.

Кроме того

$$\det X' = |\det \omega|^2 \det X = \det X$$

Записывая в явном виде матрицу $X = x^\mu \sigma_\mu$:

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

получаем $\det X = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$.

Таким образом $\eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$.

Т.е.

такое линейное преобразование сохраняет квадрат 4-вектора x^μ .

Найдём x'^μ .

Для этого разложим X' по базису σ_μ :

$$x'^\mu = \frac{1}{2} \text{tr} (\bar{\sigma}_\mu X') = \frac{1}{2} \text{tr} (\bar{\sigma}_\mu \omega X \omega^\dagger) = \frac{1}{2} \text{tr} (\bar{\sigma}_\mu \omega \sigma_\nu \omega^\dagger) x^\nu \equiv \Lambda_\nu^\mu(\omega) x^\nu$$

То есть преобразование $X \mapsto X'$ выглядит в координатах как некоторое преобразование Лоренца.

Покажем, что оно действительно является преобразованием Лоренца.

Для этого проверим базовое соотношение $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$.

На самом деле это очевидно из равенства

$$\eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta.$$

Значит, матрица $\Lambda_\nu^\mu(\omega) = \frac{1}{2} \text{tr} (\bar{\sigma}_\mu \omega \sigma_\nu \omega^\dagger)$ осуществляет некоторое преобразование Лоренца, $\Lambda(\omega) \in SO(3, 1)$.

Можно показать, что $\det \Lambda(\omega) = 1$, а также, что $\Lambda_0^0 > 0$.

Докажем только второе утверждение:

$$\Lambda_0^0 = \frac{1}{2} \text{tr} (\omega \omega^\dagger)$$

Найдём $\omega \omega^\dagger$, если $\omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\omega \omega^\dagger = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & ac^* + bd^* \\ a^*c + b^*d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\text{tr}(\omega\omega^\dagger) = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = \Sigma > 0$.

Поэтому $\Lambda_0^0 = \frac{1}{2}\Sigma > 0$, что и требовалось доказать.

Мы нашли, что $\Lambda(\omega) \in SO_+^\uparrow(3, 1)$.

Теперь покажем, что мы на самом деле построили гомоморфизм

$$\pi : SL(2|\mathbb{C}) \rightarrow SO_+^\uparrow(3, 1)$$

Т.е.

что

$$\Lambda(\omega_1) \cdot \Lambda(\omega_2) = \Lambda(\omega_1\omega_2)$$

Для этого вернёмся к соотношению $X' = \omega X \omega^\dagger$.

В наших обозначениях это равенство сводится к

$$\Lambda_\nu^\mu(\omega) \sigma_\mu = \omega \sigma_\nu \omega^\dagger$$

Тогда

$$\Lambda_\nu^\mu(\omega_1\omega_2) \sigma_\mu = (\omega_1\omega_2) \sigma_\nu (\omega_1\omega_2)^\dagger = \omega_1\omega_2 \sigma_\nu \omega_2^\dagger \omega_1^\dagger = \Lambda_\nu^\lambda(\omega_2) \omega_1 \sigma_\lambda \omega_1^\dagger = \Lambda_\lambda^\mu(\omega_1) \Lambda_\nu^\lambda(\omega_2) \sigma_\mu$$

что доказывает нам свойство гомоморфизма.

Найдём ядро гомоморфизма π , то есть $\sigma_\mu = \omega \sigma_\mu \omega^\dagger$.

Положим в этом выражении сначала $\mu = 0$.

Тогда $\omega\omega^\dagger = 1$.

Отсюда получаем

$$\omega\omega^\dagger = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & ac^* + bd^* \\ a^*c + b^*d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1$$

$ad = 1 + bc$, $(1 + bc)c^* = -b|d|^2$, $c^* + b(|c|^2 + |d|^2) = c^* + b = 0$, значит $c = -b^*$. Аналогично ,

$bc = ad - 1$, $a^*(ad - 1) = -|b|^2d = |a|^2d - a^*$, $a^* = d$. Таким образом, $\omega = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$.

Теперь подставим $\mu = 3$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b^* & -a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 - |b|^2 & -2ab \\ -2a^*b^* & |b|^2 - |a|^2 \end{pmatrix}$$

Отсюда $b = 0$, $a = e^{i\varphi}$.

Наконец, при $\mu = 1, 2$ имеем $e^{2i\varphi} = 1$, $\omega = \pm 1$.

Значит $\ker \pi \cong \mathbb{E}_2$

Отсюда следует что две матрицы $\pm\omega$ отвечают одному и тому же преобразованию Лоренца (по свойству гомоморфизма: $\Lambda(\omega)\Lambda(\mathbf{1}) = \Lambda(\omega)$, $\Lambda(\omega)\Lambda(-1) = \Lambda(\omega)$).

Таким образом $\pi : SL(2|\mathbb{C}) \rightarrow SO_+^\uparrow(3, 1)$ - гомоморфизм, причём $\text{Im } \pi \subset SO_+^\uparrow(3, 1)$.

Покажем, что на самом деле $\text{Im } \pi = SO_+^\uparrow(3, 1)$, то есть это отображение сюръективно.

Для этого посчитаем число независимых параметров в группе матриц $\Lambda_\nu^\mu(\omega)$.

Каждая ω имеем 4 комплексных параметра, или, эквивалентно = 8 вещественных параметров, а условие $\det \omega = 1$ - условие с двумя вещественным связями, в том смысле, что $\text{Re } \det \omega = 1$, $\text{Im } \det \omega = 0$.

Значит $8 - 2 = 6$ параметров, также как и в собственной ортохронной группе Лоренца.

Значит, $\text{Im } \pi = SO_+^\uparrow(3, 1)$.

Но тогда по первой теореме о гомоморфизме

$$\text{Im } \pi = SO_+^\uparrow(3, 1) \cong SL(2|\mathbb{C}) / \ker \pi \cong SL(2|\mathbb{C}) / \mathbb{E}_2$$

Мы установили, что $SO_+^\uparrow(3, 1) \cong SL(2|\mathbb{C}) / \mathbb{E}_2$

какая-то еще топология от Володи

мы сформулировали теорему, которая утверждает, что фазу любого представления группы можно выбрать так, чтобы в уравнении, определяющем проективное представление, $\phi = 0$, если группа односвязна, т.е.

любые два её элемента можно соединить непрерывной кривой, лежащей внутри группы, и любые две такие кривые непрерывно гомотопны, а также если генераторы группы в этом представлении можно переопределить так, чтобы все центральные заряды алгебры Ли были устранены.

Как было выяснено, генераторы из алгебры Пуанкаре допускают исключение центральных зарядов.

Однако, вопрос о том, является ли группа Пуанкаре односвязной, остался открытым.

Для ответа на этот вопрос, как мы поняли из предыдущей лекции, необходимо исследовать топологию группы Пуанкаре, причём, на самом деле, достаточно разобраться с топологией собственной ортохронной группы Лоренца, ведь группа трансляций - подгруппа группы Пуанкаре - топологически изоморфна пространству $\mathbb{R}^4$, которое, очевидно, односвязно; что касается остальных компонент связности группы Лоренца, отличных от $SO_+^\uparrow(3, 1)$, то все они гомеоморфны $SO_+^\uparrow(3, 1)$.

Мы начали двигаться в нужном направлении: был построен сюръективный гомоморфизм $\pi : SL(2|\mathbb{C}) \rightarrow SO_+^\uparrow(3, 1)$ с ядром $\ker \pi \cong \mathbb{E}_2$, существование которого по первой теореме о гомоморфизме дало нам изоморфизм $SO_+^\uparrow(3, 1) \cong SL(2|\mathbb{C})/\mathbb{E}_2$.

И поскольку изоморфизм, как известно из линейной алгебры, сохраняет топологию, займёмся изучением топологии $SL(2|\mathbb{C})/\mathbb{E}_2$, предварительно вспомнив некоторые определения и понятия гомотопической топологии, необходимые для дальнейшего.

Ориентированные кривые $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow M$ и $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow M$ гомотопны, если $\exists \varphi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow M$ - непрерывное, такое что $\varphi(t, 0) = \gamma_1(t)$, $\varphi(t, 1) = \gamma_2(t)$.

Отношение гомотопности ориентированных кривых, очевидно, является отношением эквивалентности $\sim$.

Класс ориентированных кривых, эквивалентных γ (гомотопический класс γ), обозначим через $[\gamma]$.

Ориентированная кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ называется петлёй в точке $p \in M$, если $\gamma(a) = \gamma(b) = p$.

Операция конкатенации, очевидно, определена для любой пары петель в некоторой точке $p \in M$.

Множество классов эквивалентности петель в точке $p \in M$ обозначается через $\pi(p, M)$.

Это множество наделено умножением: $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] = [\gamma_1 \diamond \gamma_2]$.

Несложно показать, что множество классов эквивалентности петель $\pi(p, M)$ является группой по отношению к операции конкатенации, которую называют фундаментальной группой топологического пространства M в точке $p \in M$.

Единицей фундаментальной группы является кривая γ_e , гомотопная тождественной кривой id_p - т.н.

неподвижная петля, а обратным элементом к $[\gamma]$ - гомотопический класс петли, пройденной в обратном направлении.

Пусть $f : N \rightarrow M$ - непрерывное отображение топологических пространств.

Гово-

рят, что открытое подмножество $U \subset M$ правильно накрыто отображением f , если $f^{-1}(U)$ представляет собой дизъюнктное объединение открытых подмножеств в N , каждое из которых гомеоморфно отображается на U при помощи отображения f .

Непрерывное отображение $f : N \rightarrow M$ называется накрытием, если любая точка $p \in M$ имеет открытую окрестность, правильно накрытую отображением f .

При этом M называют базой накрытия, а N - накрывающим пространством для M .

Иными словами, $f : N \rightarrow M$ - накрытие, если f - сюръективно и $\forall p \in M \exists$ открытое $U : p \in U | f^{-1}(U) = \cup_{\alpha} V_{\alpha}$ для некоторого семейства $\{V_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ подмножеств N таких, что $\begin{cases} V_{\alpha} \cap V_{\beta} = \emptyset, & \forall \alpha \neq \beta \\ \forall \alpha \in A : f(V_{\alpha}) \rightarrow U, & \end{cases}$. В терминах фундаментальной группы можно определить

понятие односвязности следующим образом: топологическое пространство M называется односвязным, если оно линейно связно и $\pi(p, M) = \text{id}_p$ для некоторой точки $p \in M$.

Если $f : N \rightarrow M$ - накрытие, причём N является односвязным топологическим пространством, то f называют универсальным накрытием, а N - универсальным накрывающим пространством.

Если универсальное накрытие существует, то оно единственно в следующем смысле: если $f_1 : N_1 \rightarrow M, f_2 : N_2 \rightarrow M$ - два универсальных накрытия с накрывающими пространствами N_1 и N_2 , то существует гомеоморфизм $\varphi : N_1 \rightarrow N_2$, удовлетворяющий условию $f_2 \circ \varphi = f_1$.

Перейдём к изучению топологии $SL(2|\mathbb{C})/\mathbb{E}_2$.

Начнём с группы $SL(2|\mathbb{C})$.

Согласно теореме о полярном разложении любую матрицу $\omega \in SL(2|\mathbb{C})$ можно записать в виде

$$\omega = ue^h$$

где u - унитарная матрица: $uu^\dagger = 1$, а h - эрмитова матрица: $h = h^\dagger$.

Причём, это разложение единственно, поэтому $SL(2|\mathbb{C})$ с топологической точки зрения представляет собой прямое произведение пространства всех u на пространство всех h .

Поскольку $\det u$ равен по модулю единице, а $\det e^h = e^{\text{tr}h}$ является вещественным и положительным числом, то для выполнения условия $\det \omega = 1$ необходимо, чтобы

$$\det u = 1, \quad \text{tr}h = 0$$

Как мы видели на прошлой лекции, в пространстве эрмитовых матриц 2×2 можно выбрать базис $\sigma_\mu = (\mathbf{1}, \sigma)$, где матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Поэтому матрицы h можно разложить по этому базису согласно

$$h = h^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} h^0 + h^3 & h^1 - ih^2 \\ h^1 + ih^2 & h^0 - h^3 \end{pmatrix}$$

Условие бесследовости (4.2) даёт нам

$$h = \begin{pmatrix} h^3 & h^1 - ih^2 \\ h^1 + ih^2 & -h^3 \end{pmatrix}$$

то есть эрмитовы бесследовые матрицы, как и должно быть, разлагаются по базису из матриц Паули, причём вещественные числа h^i произвольны.

Поэтому пространство всех h с топологической точки зрения совпадает с обычным трёхмерным плоским пространством $\mathbb{R}^3$.

С другой стороны, любую унитарную матрицу 2×2 с единичным определителем можно представить в виде

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix}$$

В силу условия $\det u = 1$ получаем $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$.

Поэтому пространство $SU(2)$ всех u топологически изоморфно $\mathbb{S}^3$, трёхмерной сфере в плоском четырёхмерном пространстве.

Таким образом, группа $SL(2|\mathbb{C})$ имеет такую же топологию, как прямое произведение $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^3 : SL(2|\mathbb{C}) \stackrel{\text{top}}{\cong} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^3$.

Это произведение односвязно: любая петля в $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{S}^3$ гомотопна тождественной кривой (стягивается в точку).

То же самое верно и для прямого произведения.

Докажем это.

Пусть M и N - топологические пространства.

Рассмотрим петлю $\gamma : [a, b] \rightarrow M \times N$ в некоторой точке $p \in M \times N$.

При помощи естественных проекций: $\pi_M : M \times N \rightarrow M$, $\pi_N : M \times N \rightarrow N$ можно определить петли $\gamma_M : [a, b] \rightarrow M$ и $\gamma_N : [a, b] \rightarrow N$ согласно

$$\gamma_M = \pi_M \circ \gamma, \quad \gamma_N = \pi_N \circ \gamma$$

Поскольку любая петля в M или в N гомотопна тождественной, то существуют гомотопии

$$f : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow M, \quad g : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow N,$$

такие, что $f(t, 0) = \gamma_M(t)$, $f(t, 1) = \text{id}_p$, $g(t, 0) = \gamma_N(t)$, $g(t, 1) = \text{id}_p$

Определим отображение $h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow M \times N$ как

$$h(t, s) = \begin{pmatrix} f(t, s) \\ g(t, s) \end{pmatrix}$$

Видно, что $h(t, 0) = \begin{pmatrix} f(t, 0) \\ g(t, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_M(t) \\ \gamma_N(t) \end{pmatrix} = \gamma(t)$, $h(t, 1) = \begin{pmatrix} f(t, 1) \\ g(t, 1) \end{pmatrix} = \text{id}_p$.

Остаётся показать, что h непрерывно.

На $M \times N$ определена тихоновская топология $\tau : U \times V \in \tau, U \in \tau_M, V \in \tau_N$, в которой все естественные проекции являются непрерывными отображениями.

В виду топологического определения непрерывности покажем, что прообраз $h^{-1}(U \times V) \in \tau$.

Нетрудно видеть, что

$$h^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$$

И поскольку $f(t, s) \in U, g(t, s) \in V$, то $h^{-1}(U \times V) \in \tau$.

Таким образом группа $SL(2|\mathbb{C})$ односвязна.

Нас, однако, интересует $SL(2|\mathbb{C})/\mathbb{E}_2$, а не $SL(2|\mathbb{C})$.

Поскольку e^h всегда положительно определена, то отождествление ω с $-\omega$ эквивалентно отождествлению u и $-u$.

Поэтому собственная ортохронная группа Лоренца имеет топологию $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^3/\mathbb{E}_2$, где $\mathbb{S}^3/\mathbb{E}_2$ - трёхмерная сферическая поверхность с отождествлёнными противоположными точками сферы.

Эта поверхность неодносвязна.

Например, кривую на $\mathbb{S}^3$ из u_1 в u_2 нельзя непрерывно деформировать в кривую $\mathbb{S}^3$ из u_1 в $-u_2$ даже в том случае, если эти две кривые связывают одинаковые точки из $\mathbb{S}^3/\mathbb{E}_2$.

Фактически, $\mathbb{S}^3/\mathbb{E}_2$ двусвязна: кривые между любыми двумя точками распадаются на два гомотопических класса в зависимости от того, включают ли они инверсию $u \mapsto -u$ или нет.

8.2.5 Theorem on Representation of Symmetry by Weinberg (??)

(нужно будет - выгружу)

8.2.6 Overview of Other Mathematical-Theoretical Constructions of Relativity

(тут указания на дополнения и другие статьи.)

О бесконечных спинах (????)

(???? do they really exist???? there are many works about them, but is there a value in them? I don't know, I am very not sure)

Part III

Formalism, Fields

Обсудим подробно способы описания полей и их общие свойства.

(еще плохо написана глава, видно, что опыта в классической теории поля гораздо меньше нужного.)

9 Formalism for Describing Fields

Познакомимся с основными методами создания полей и исследованиями их свойств.

Работать будем в пространстве Минковского, хорошо изученной в прошлой части.

9.1 Formalism of Field Theory

9.1.1 What Is a Field? (?)

(общие ответы, чтобы не было потом вопросов про то, что такое его квантование, что за вероятностная интерпретация, почему внезапно поле включает в себя рождение античастиц (парадокс Клейна). глубокие вопросы, потом напишу)

Why in the past, people didn't know that there is a concept of field at all but turns out that there is a whole zoo of fields?

By "didn't know" I mean that there were philosophical concepts, concepts of space-time, but there was no concept of a pure distributing field.

Maybe description of effects with fields is just our abstraction and there are just few fields?

Are other fields except electromagnetic one important?

(??? I'll write it here. of course, they are used for some strong interactions, inflation in cosmology and so on, but still, should one study them? maybe they are just exotic models and tell us nothing fundamentally? I'll think later seriously about it)

9.1.2 Intuitive Understanding of the Whole Field Theory

Как понимать теорию поля, чтобы все основные уравнения можно было вывести? (????)

(очень важный вопрос, когда-то потом отвечу. Очень много тут глубокого понимания должно быть для такого. Пока просто изучаю выводы и всё)

9.1.3 Transition from Mechanical Systems to Field Systems (?)

(прорабатываем это.)

все методы описания полей вкратце

Поле $\Phi = \Phi(\mathbf{x})$ представляет собой заполненное пространство каким-то либо объектом, в общем случае спин-тензором. У каждого поля есть функция, которая его описывает, эта функция называется функцией лагранжа $\mathcal{L} = \mathcal{L}()$

Поля могут меняться при сдвигах по координатам и по времени, так что вводят соответствующие производные: $\partial_t \Phi = \partial \Phi / \partial t$, $\partial_x \Phi = \partial \Phi / \partial x$.

Согласно принципу причинности траектория поля определяется его координатами и производными по времени.

Никакого хаоса у нас не будет.

переход от конечного числа степеней свободы к бесконечному

подробно пропишем этот переход, потому что он очень полезный.
мб даже фундаментальный

сравнение лагранжевых и гамильтоновых формализмов в теории поля

обсудим, почему лагранжианы такие, какие мы видим.

для поля Клейна-Гордона почему они такие?

В лагранжевом формализме x и $\dot{x}$ независимы, в гамильтоновом независимые переменные x и p , так что x и $\dot{x}$ зависимы.

(как так?)

отличие релятивистских полей от нерелятивистских

тут явно запишу это

Теория поля есть следствие конечности скорости распространения взаимодействия

Благодаря конечной скорости распространения взаимодействий поле надо рассматривать как самостоятельную систему с собственными «степенями свободы».

(раскрою эту грань потом.)

Что такое поле?

(думаю, все-таки очень полезно это указать.)

Как понимать выражение вида $\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \{a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a_c^*(\mathbf{k})e^{ikx}\}$

?

Решение К-Г в общем виде:

$$\phi = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2L^3\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t+i\mathbf{k}\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}}^*e^{i\omega_{\mathbf{k}}t-i\mathbf{k}\mathbf{x}})$$

Именно при таких многих константах у нас и будут разные решения. Нужно частное - бери какие-то константы не нулем, а все остальные нулем.

(???? проверю потом, правильно ли понимаю это???)

Для векторного поля все абсолютно такое же, только пара компонент. В данных моделях мы рассматриваем поле как что-то, что во всем пространстве, так что вектор поляризации одинаков во всех точках, начало его не фиксировано, фиксировано только направление.

О связи полей и волновых функций (?????)

(пишу так, как пока что понимаю)

Мы считаем волновую функцию частицы величиной

$$\text{wave function} = \phi^C \equiv \phi^*.$$

часто это одно и то же, что и поле то есть $\phi^C \equiv \phi$.

Почему? Потому что волновая функция пропорциональна $\exp(-iEt)$. Поэтому, если решение полевого уравнения зависит от времени как $\exp(+iEt)$, то энергия окажется отрицательной, что мы не имеем в моделях квантовой механики.

Поэтому для частных решений типа античастиц $\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2L^3\omega_{\mathbf{k}}}} b_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}}$, где $b_{\mathbf{k}}$ - некоторая постоянная, мы считаем волновую функцию частицы величиной

$$\text{wave. f.} = \phi^C \equiv \phi^*.$$

Тут знак C обозначает т.н. операцию зарядового сопряжения (??? напишу формулы ключевые про нее.)

(????? что там с многочастичным случаем и отображением гильбертовых пространств - не понял аргумент.)

(??? если открытые системы, то что-то будет особенного??)

Допустим, мы видим, что частицы движутся особым образом и мы начинаем считать, что есть поле, которое на них влияет. Как из этого понимания дойти до того, что вообще-то есть и другие поля и вообще частица - это тоже поле? (!?!?!?)

(напишу потом, важный вопрос для понимания. На самом деле, у нас только ЭМ поле и все, все остальное - всякие не такие частые в мире явления! Поэтому вообще можно ничего о них и не знать. Важная интересная связка.)

9.1.4 Lagrangian Formalism in Field Theory

(все это буду переписывать.)

действия для полей и его свойства

В теории поля все законы динамики полей могут быть получены из принципа наименьшего действия.

Согласно этому принципу вводится функционал от поля, называемый действием $S[\Phi]$, постулируется, что он имеет вид:

$$S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}$$

где Ω - некоторая область в пространстве Минковского, в которой распространяется поле.

$\mathcal{L}$ - должна быть лоренцевским скаляром.

Прийти к такому описанию можно, приняв, что все в мире происходит наиболее оптимальным способом, учитывая природу рассматриваемых объектов.

Поэтому можно составить какую-то функцию - действие, от функции которая бы описывала нужные нам объекты - функция лагранжа,

и имела бы минимум среди всех законов динамики на том законе, который бы реализовывался в реальности.

Более подробно, действие записывается в виде

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L} \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

где $L = \int d^3x \mathcal{L}$ - аналог функции Лагранжа в классической механике.

Функция $\mathcal{L}$ - называется лагранжианом.

Постулируется,

что он является функцией поля и его производных до некоторого конечного порядка:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x), \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \Phi(x))$$

В обычных моделях лагранжиан содержит производные порядка не выше второго. (почему?)

Также, чтобы теория работала, нужно, чтобы интеграл сходился, то есть, чтобы поля стремились к нулю на бесконечности пространства Минковского.

Покажем, как с помощью принципа наименьшего действия можно получать траектории и уравнение динамики.

Будем считать, что концы траектории фиксированы.

Стандартный метод состоит в том, что нужно найти вариацию действия на траектории.

Обозначим поле, которое существует,

$\Phi(x)$ и $\Phi'(x)$ - другое поле, той же спин-тензорной структуры.

Разность $\delta\Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x)$ называется вариацией поля, и она должна быть всегда положительной, если $\Phi(x)$ искомое поле.

Запишем подробнее:

$$S[\Phi + \delta\Phi] - S[\Phi] = \int_{\Omega} d^4x A(x) \delta\Phi(x) + \dots$$

Здесь первый член называется вариацией действия и обозначается $\delta S[\Phi]$.

Сама функция $A(x)$ называется функциональной производной и обозначается $\frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi(x)}$.

Таким образом, вариация записывается в виде

$$\delta S[\Phi] = \int_{\Omega} d^4x \frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi(x)} \delta\Phi(x)$$

Поскольку $\delta\Phi(x)$ произвольно, то

$$\frac{\delta S[\Phi]}{\delta\Phi(x)} = 0$$

то есть добавим такую δq , что $\delta q(t_0) = \delta q(t_f) = 0$.

Заметим, что из определения $\delta\Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x)$ следует, что $\partial_\mu \delta\Phi(x) = \partial_\mu \Phi'(x) - \partial_\mu \Phi(x) = \delta\partial_\mu \Phi(x)$.

Операция варьирования поля переставима с операцией его дифференцирования.

В соотношении проведем разложение в ряд Тейлора, получим

$$\begin{aligned} S[\Phi + \delta\Phi] - S[\Phi] &= \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \partial_\mu \delta\Phi - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \right\} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta S &= S[\Phi + \delta\Phi] - S[\Phi] = \int_{t_0, \Phi_0}^{t', \Phi'} dt \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi} \delta\Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \delta\dot{\Phi} \right) \\
S[\Phi + \delta\Phi] - S[\Phi] &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi} \partial_{\mu} \delta\Phi \right\} + \dots = \\
&= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi} \right) \right\} \delta\Phi + \int d^4x \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi} \delta\Phi \right) + \dots = \\
&= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi} \right) \right\} \delta\Phi + \int_{\partial\Omega} d\sigma_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi} \delta\Phi + \dots
\end{aligned}$$

Можно вынести вариацию поля за скобку, тогда запишем:

$$\delta S = \int_{t_0, \Phi_0}^{t', \Phi'} dt \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \right) \delta\Phi(t)$$

И так как она произвольна, можно записать, что
(пропущены мысли Бухбиндера)

В итоге

$$\delta S[\Phi] = \int_{\Omega} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi} \right) \right) \delta\Phi(x)$$

Поэтому уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi(x)} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi(x)} = 0$$

Оно также называется полевым уравнением Эйлера-Лагранжа. Посмотрим на его свойства. Например, подробно расписывая, уравнение Эйлера-Лагранжа можно записать без правил суммирования:

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \Phi} + \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_x \Phi} + \partial_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_y \Phi} + \partial_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_z \Phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}$$

Его можно также переписать в виде

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \Phi) \partial \Phi} \partial_{\mu} \Phi - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \Phi) \partial (\partial_{\nu} \Phi)} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \Phi = 0$$

а потом ввести

$$\begin{aligned}
A^{\mu\nu}(\Phi(x), \partial_{\alpha} \Phi(x)) &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \Phi(x)) \partial (\partial_{\nu} \Phi(x))} \\
B^{\mu}(\Phi(x), \partial_{\alpha} \Phi(x)) &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \Phi(x)) \partial \Phi(x)} \\
C(\Phi(x), \partial_{\alpha} \Phi(x)) &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi(x)}
\end{aligned}$$

и переписать

$$A^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \Phi + B^{\mu} \partial_{\mu} \Phi + C = 0$$

Из этих уравнений видно, что лагранжиан $\mathcal{L}$ определен неоднозначно.

К нему всегда можно добавить выражение вида $\partial_{\mu} R^{\mu}(\Phi(x))$, где $R^{\mu}(\Phi(x))$ - произвольное векторное поле, зависящее от $\Phi(x)$, при этом уравнения движения не изменятся.

обзор простейших полей и их действий

Скалярное релятивистское поле имеет Лагранжиан

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - U(\phi)$$

Из которого приходим к уравнению Эйлера-Лагранжа, которое имеет вид:

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \omega_0^2 \phi = 0$$

где кстати $k^2 = \eta^{\mu\nu} k_\nu k_\mu$.

а корень что ли не извлечь из этого?

Пример 9.1. электромагнитное поле также легко описывается в рамках этого формализма.

(?????)

вот так мы задаем действие для этого поля.

$$S_{EM}[A] = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = - \int F \wedge *F$$

$$T_\mu^\nu = -F_{\mu\lambda} F^{\nu\lambda} + \frac{\delta_\mu^\nu}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda}$$

$$W = \frac{E^2 + H^2}{2}, \quad S = E \times H, \quad \sigma^{ij} = E_i E_j + H_i H_j - W \delta_{ij}$$

отличие от принципа наименьшего действия в механике

обсудим его.

абсолютно все поля можно создать через действие????

и я просто не знаю примера, где это не так, но интересно было бы узнать.

хз, потом посмотрим.

Эффективное действие

(знаю, что такое есть, не пользовался, так что лень писать про это. потом если нужно будет - добавлю теорию про это.)

О применениях эффективного действия (???)

(хз)

Примеры действий и лагранжианов

Посмотрим, какие действия могут быть у разных полей.

(Очень легко написать, просто не до этого. Пока выгрузка из иванова)

$$S[\varphi(\underline{x})] = \int \left(-\frac{1}{2} (\partial_i \varphi) (\partial^i \varphi) + \frac{k}{2} \varphi^2 - \frac{C}{4} \varphi^4 \right) d^4 \underline{x}, \quad (k, C = \text{const}).$$

б) Комплексное скалярное поле описывается уравнением Клейна-Фока-Гордона.

$$S = \int \left(-\frac{1}{2} (\partial_i \varphi^*) (\partial^i \varphi) - \frac{1}{2} |\varphi|^2 \right) d^4 \underline{x}.$$

Показать, что при варьировании по $\text{Re } \varphi(\underline{x})$ и $\text{Im } \varphi(\underline{x})$ и при варьировании по $\varphi(\underline{x})$ и $\varphi^*(\underline{x})$ (как по независимым переменным) получаются эквивалентные уравнения поля.

в) Нестационарное уравнение Шрёдингера.

$$S[\psi(\mathbf{r}, t), \psi^*(\mathbf{r}, t)] = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \psi^*, \nabla \psi) + U(\mathbf{r}) \psi^* \psi - \psi^* i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \right) d^3 \mathbf{r} dt, \quad m, \hbar = \text{const}, \quad i^2 = -1.$$

г) Стационарное уравнение Шрёдингера.

$$S[\psi(\mathbf{r}), \psi^*(\mathbf{r}), E] = E + \int \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \Delta \psi + U(\mathbf{r}) |\psi|^2 - E |\psi|^2 \right) d^3 \mathbf{r},$$

где $m, \hbar = \text{const}$, E - число (без аргументов!), д) Уравнение синус-Гордона - нелинейный аналог уравнения Клейна-Фока-Гордона. Является одной из наиболее популярных нелинейных моделей (обычно оставляют одну пространственную координату). Допускает решения типа солитонов (устойчивые уединённые волны).

$$S[\varphi(\underline{x})] = \int \left(\frac{1}{2} \varphi \square \varphi + \cos(\varphi) \right) d^4 \underline{x}, \quad \left(\square = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \partial_i \partial^i \right).$$

е*) Электрически заряженное комплексное скалярное поле $\varphi(\underline{x})$, взаимодействующее с электромагнитным полем, которое описывается вещественным 4-потенциалом $A_i(\underline{x})$.

$$S[\varphi(\underline{x}), \varphi^*(\underline{x})] = \int \left(-\frac{1}{2} (\partial^i \varphi^* + i e A^i(\underline{x}) \varphi^*) (\partial_i \varphi - i e A_i(\underline{x}) \varphi) + \frac{1}{2} |\varphi|^2 \right) d^4 \underline{x}.$$

ж*) Непрерывное распределение невзаимодействующих мембран, заданных условием постоянства вещественного скалярного поля $\varphi = \text{const}$.

$$S[\varphi(\underline{x})] = -T \int \sqrt{(\partial_i \varphi)(\partial^i \varphi)} d^4 \underline{x}, \quad (T = \text{const}).$$

з**) $(n - 1)$ -мерная мембрана в D -мерном пространстве-времени. Действие пропорционально n -мерной площади n -мерного мирового листа.

$$S[X^i(\xi^a)] = -\sigma \int \sqrt{-\det(h_{ab})} d^n \xi,$$

где $h_{ab} = g_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^j}{\partial \xi^b}$, $i = 0, \dots, D$, $a = 1, \dots, n$. Сравнить с предыдущим пунктом.
(под конец)

Действие для системы заряженных частиц и электромагнитного поля в гравитационном поле:

$$S_m = \sum_n \left\{ -m_n c \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x_n)} dx_n^\mu dx_n^\nu - \frac{e_n}{c} \int A_\mu(x_n) dx_n^\mu \right\} - \frac{1}{16\pi c} \int g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} \sqrt{-g} d^{(4)}x$$

Здесь индекс n нумерует частицы, $x_n^\mu = x_n^\mu(s_n)$ - мировая линия частицы с номером n и параметром s_n , и m_n, e_n - ее масса и заряд, соответственно. 1-форма $A(x) = A_\mu(x) dx^\mu$ описывает потенциал электромагнитного поля. А величина $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

S Действия в электродинамике**Вид действия**

Действие электромагнитного поля (в системе Хевисайда) имеет вид

$$S_{EM}[A] = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = - \int F \wedge *F$$

где $(*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}$.

В случае наличия источников, оно имеет вид

$$S[A] = \frac{1}{2} \int F \wedge *F - \int A \wedge *j$$

(что с системой единиц, в других - другие её виды?)

Другие действия

(потом чуть лучше структуру сделаю)

действие для заряда в электромагнитном поле имеет вид

$$S = \int_a^b \left(-mc ds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right)$$

В гауссовой системе единиц действие свободного поля

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

О других возможных действиях

обсудим, какие еще они могли бы быть.

мб тут пару слов о Черн-Саймонсе скажу, пока ничего не знаю про это.

Взаимодействие с источниками

(важный член действия, опишем его!)

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c} \int d\tau u^\mu \mathcal{A}_\mu(x)$$

где коэффициент e/c связан с определением единиц измерения поля.

При наличии распределения малых зарядов de взаимодействие зарядов с полем (4.2) можно расписать в виде

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \int de \int dt \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_\mu = -\frac{1}{c} \int dV \frac{de}{dV} \int dt \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_\mu$$

так что, вводя $\rho = de/dV$ и учитывая, что $dx^\mu/dt = (c, \mathbf{v})$, а $\rho dx^\mu/dt = j^\mu$ - плотность тока, тогда:

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu(x) \mathcal{A}_\mu(x).$$

Другое о лагранжевом формализме

Обсудим коротко другие темы про лагранжев формализм.
(неактуальное перенесу в раздел про теорию поля)

Квантование в лагранжевом формализме через интеграл по траекториям

(переход в КТП, пока он не актуален. укажу и все, не тут это нужно писать.)

9.1.5 Hamiltonian Formalism of Field Theory

Примеры полей в гамильтоновом формализме

пока хз.

(порядок по актуальности)

В качестве иллюстрации приведем типичные примеры гамильтонианов полей.

Гамильтониан электромагнитного поля:

(???)

действительно... (?)

Скалярного поля (????):

$$H = \int d_3x T^{00} = \int d_3x \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)$$

Функция Гамильтона для скалярного поля в нерелятивистской нормировке есть:

$$H = \int \frac{d_3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \omega_p [a(\mathbf{p}) a^*(\mathbf{p}) + a^*(\mathbf{p}) a(\mathbf{p})],$$

где операторы рождения и уничтожения - это (??), ω_p - это (???). ОН получается вычислением слагаемого $m^2 \int d_3x \phi^* \phi$ и других поотдельности (???), при подстановкой скалярного поля в виде разложения по модам и подстановкой уравнений движения ($-\omega_p^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 = 0$).

9.1.6 Energy momentum tensor

Concept of EMT

(write main theory about it! maybe write the theory of Landau)

In special relativity, the stress-energy tensor contains information about the energy and momentum densities of a given system, in addition to the momentum and energy flux densities.
[4]

Given a Lagrangian density $\mathcal{L}$ that is a function of a set of fields ϕ_α and their derivatives, but explicitly not of any of the spacetime coordinates, we can construct the canonical stress-energy tensor by looking at the total derivative with respect to one of the generalized coordinates of the system. So, with our condition

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = 0$$

By using the chain rule, we then have

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx^\nu} = d_\nu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \frac{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x^\nu}$$

Written in useful shorthand,

$$d_\nu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial_\nu \partial_\mu \phi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} \partial_\nu \phi_\alpha$$

Then, we can use the Euler-Lagrange Equation:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha}$$

And then use the fact that partial derivatives commute so that we now have

$$d_\nu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial_\mu \partial_\nu \phi_\alpha + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \right) \partial_\nu \phi_\alpha$$

We can recognize the right hand side as a product rule. Writing it as the derivative of a product of functions tells us that

$$d_\nu \mathcal{L} = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial_\nu \phi_\alpha \right]$$

Now, in flat space, one can write $d_\nu \mathcal{L} = \partial_\mu [\delta_\nu^\mu \mathcal{L}]$. Doing this and moving it to the other side of the equation tells us that

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial_\nu \phi_\alpha \right] - \partial_\mu (\delta_\nu^\mu \mathcal{L}) = 0$$

And upon regrouping terms,

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial_\nu \phi_\alpha - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right] = 0$$

This is to say that the divergence of the tensor in the brackets is 0 . Indeed, with this, we define the stress-energy tensor:

$$T^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial_\nu \phi_\alpha - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}$$

By construction it has the property that

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$$

Note that this divergenceless property of this tensor is equivalent to four continuity equations. That is, fields have at least four sets of quantities that obey the continuity equation.

As an example, it can be seen that T^0_0 is the energy density of the system and that it is thus possible to obtain the Hamiltonian density from the stress-energy tensor.

Indeed, since this is the case, observing that $\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$, we then have

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \phi_\alpha} \dot{\phi}_\alpha \right) = 0$$

We can then conclude that the terms of $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \phi_\alpha} \dot{\phi}_\alpha$ represent the energy flux density of the system.

More intuition about concept of EMT

(it is important because still, there are questions about what is it??? I'll write later)

Examples of EMT

(write main theory about it!)

Stress-energy of a fluid in equilibrium

For a perfect fluid in thermodynamic equilibrium, the stress-energy tensor takes on a particularly simple form

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta}$$

where ρ is the mass-energy density (kilograms per cubic meter), p is the hydrostatic pressure (pascals), u^α is the fluid's four-velocity, and $g^{\alpha\beta}$ is the matrix inverse of the metric tensor. Therefore, the trace is given by

$$T^\alpha_\alpha = g_{\alpha\beta} T^{\beta\alpha} = 3p - \rho c^2$$

The four-velocity satisfies

$$u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = -c^2$$

In an inertial frame of reference comoving with the fluid, better known as the fluid's proper frame of reference, the fourvelocity is

$$u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$$

the matrix inverse of the metric tensor is simply

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and the stress-energy tensor is a diagonal matrix

Electromagnetic stress-energy tensor

The Hilbert stress-energy tensor of a source-free electromagnetic field is

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} F^{\nu\beta} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\delta\gamma} F^{\delta\gamma} \right)$$

where $F_{\mu\nu}$ is the electromagnetic field tensor.

Scalar field

Main article: Klein-Gordon equation The stress-energy tensor for a complex scalar field ϕ that satisfies the Klein-Gordon equation is

$$T^{\mu\nu} = \frac{\hbar^2}{m} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \partial_\alpha \bar{\phi} \partial_\beta \phi - g^{\mu\nu} m c^2 \bar{\phi} \phi$$

and when the metric is flat (Minkowski in Cartesian coordinates) its components work out to be:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{\hbar^2}{m c^4} (\partial_0 \bar{\phi} \partial_0 \phi + c^2 \partial_k \bar{\phi} \partial_k \phi) + m \bar{\phi} \phi, \\ T^{0i} &= T^{i0} = -\frac{\hbar^2}{m c^2} (\partial_0 \bar{\phi} \partial_i \phi + \partial_i \bar{\phi} \partial_0 \phi), \text{ and} \\ T^{ij} &= \frac{\hbar^2}{m} (\partial_i \bar{\phi} \partial_j \phi + \partial_j \bar{\phi} \partial_i \phi) - \delta_{ij} \left(\frac{\hbar^2}{m} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{\phi} \partial_\beta \phi + m c^2 \bar{\phi} \phi \right). \end{aligned}$$

Детали ТЭИ по Иванову МФТИ (???)

(!) Плотность обобщённого импульса поля $\pi_a = c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \phi^a}$, как правило, не имеет отношения к обычному механическому импульсу.

(!) Плотность механического импульса в направлении α - это $\frac{1}{c} T^0_\alpha$. (!*) К тензору энергии-импульса можно прибавлять добавки δT^i_j с нулевой дивергенцией $\partial_i \delta T^i_j = 0$. (!*) Предпочтительно использовать симметричный тензор энергии-импульса $T^{ij} = T^{ji}$. Тогда можно ввести плотность момента импульса и плотность потока момента импульса

$$x^i T^{0j} - x^j T^{0i}, \quad x^i T^{kj} - x^j T^{ki}$$

Уравнение непрерывности для плотности момента импульса требует симметричности тензора энергии-импульса

$$\partial_k (x^i T^{kj} - x^j T^{ki}) = (\delta^i_k T^{kj} - \delta^j_k T^{ki}) + (x^i \partial_k T^{kj} - x^j \partial_k T^{ki}) = T^{ij} - T^{ji} = 0$$

$\frac{1}{c} T^i_j$ - это плотность потока компоненты в направлении оси x_j .

Для симметричного тензора энергии-импульса компоненты имеют следующий смысл

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} W & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ \frac{S_x}{c} & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \frac{S_y}{c} & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \frac{S_z}{c} & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

- * W — плотность энергии,
- * S — вектор Умова-Пойнтинга — плотность потока энергии,
- * $\frac{1}{c^2}S$ — объёмная плотность импульса,
- * $\sigma_{\alpha\beta}$ — тензор напряжения (обычно определяется с противоположным знаком) — сила, действующая в направлении x_α , на единицу площади границы объёма (изнутри объёма), если нормаль к границе направлена по x_β ,
- * $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ — давление по осям x, y, z .

(*) Однозначно тензор энергии импульса определяется только в общей теории относительности (или её обобщениях).

(**) Для того, чтобы вычислить суммарный вектор (или ковектор) энергии-импульса, нужен независимый от траектории параллельный перенос, чтобы просуммировать вклад разных элементов объёма.

(***) Если параллельный перенос не однозначен (в искривлённом пространстве-времени), то поля могут обмениваться энергией и импульсом с полем метрического тензора.

(***) Если метрический тензор переходит в себя при сдвиге вдоль некоторого векторного поля (вектор Киллинга), то сохраняется проекция импульса на этот вектор. Для пространства Минковского это 4 компоненты вектора энергии-импульса и 6 компонент тензора момента импульса.

9.1.7 Stress–energy Tensor: Other Definitions

(a paragraph about each is here. most likely I'll not create a section for each, since they maybe not that important and used only in really specific cases)

Overview of variant definitions of stress–energy

Hilbert stress-energy tensor

The Hilbert stress-energy tensor is defined as the functional derivative

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{matter}})}{\partial g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{matter}}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{matter}}$$

where S_{matter} is the nongravitational part of the action, $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ is the nongravitational part of the Lagrangian density, and the Euler-Lagrange equation has been used. This is symmetric and gauge-invariant. See Einstein-Hilbert action for more information.

Canonical stress-energy tensor

Noether's theorem implies that there is a conserved current associated with translations through space and time; for details see the section above on the stress-energy tensor in special relativity. This is called the canonical stress-energy tensor. Generally, this is not symmetric and if we have some gauge theory, it may not be gauge invariant because space-dependent gauge transformations do not commute with spatial translations.

In general relativity, the translations are with respect to the coordinate system and as such, do not transform covariantly. See the section below on the gravitational stress-energy pseudotensor.

Belinfante-Rosenfeld stress-energy tensor

Main article: Belinfante-Rosenfeld stress-energy tensor In the presence of spin or other intrinsic angular momentum, the canonical Noether stress-energy tensor fails to be symmetric. The Belinfante-Rosenfeld stress-energy tensor is constructed from the canonical stress-energy tensor and the spin current in such a way as to be symmetric and still conserved. In general relativity, this modified tensor agrees with the Hilbert stress-energy tensor.

Иллюстративные примеры ТЭИ (!!!)

(тут тупо перечисление)

Для скалярного поля ТЭИ имеет вид:

...

действительно....

9.1.8 Mass of Fields

(по идее именно тут и обсуждается подробно, что такое масса полей.)

9.1.9 Limits of Applicability of Field Theories

можно ли лазер считать полем, если рассматривать его внутренние области?

не знаю.

сперва пойму основы, потом отвечу.

9.2 Symmetries

(это пока в мод. теориях поля в основном, потом сюда напишу!)

9.2.1 Concept of Symmetry in Field Theory

(see not on special field theories about it also, a very important concept)

Что такое симметрии?

(большая тема. многое напишу потом)

поиск симметрий

Расскажем, что такое симметрии, и как их находить?

(тут простейшие методы симметрий и вся теория с ними. в параграфе далее - примеры симметрий на эту теорию)

Рассмотрим теорию с набором полей $\Phi^i(x)$ и действием

$$S[\Phi] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_{\mu}\Phi)$$

Здесь индекс i включает в себя все индексы полей.

Бесконечно малые преобразования координат и полей

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= x^{\mu} + \delta x^{\mu} \\ \Phi^i(x') &= \Phi^i(x) + \Delta\Phi^i(x) \end{aligned}$$

Такие преобразования называются бесконечно малыми преобразованиями симметрии, если они оставляют действие инвариантным, то есть

$$S[\Phi] = S[\Phi']$$

или

$$\int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_{\mu}\Phi(x)) = \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(\Phi'(x'), \partial'_{\mu}\Phi'(x'))$$

Здесь важно не забывать, что Ω' - это область изменения координат x'^{μ} , Ω - область изменения координат x^{μ} , а ∂'_{μ} - это производные по координатам x'^{μ} .

То есть при преобразовании координат $x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}$ область Ω' переходит в область Ω .

Посмотрим подробнее, как преобразовывается поле:

$$\Phi^i(x + \delta x) = \Phi^i(x) + \Delta\Phi^i(x)$$

это можно переписать

$$\Phi^i(x) + \partial_{\mu}\Phi^i(x)\delta x^{\mu} = \Phi^i(x) + \Delta\Phi^i(x)$$

Отсюда

$$\Delta\Phi^i(x) = \Phi^i(x) - \Phi^i(x) + \partial_{\mu}\Phi^i(x)\delta x^{\mu}$$

таким образом, мы получаем удобную запись

$$\Delta\Phi^i(x) = \delta\Phi^i(x) + \partial_{\mu}\Phi^i(x)\delta x^{\mu}$$

Если преобразования зависят от параметров, то их можно записать с помощью дополнительных функций

$$\begin{aligned}\delta x^{\mu} &= X_a^{\mu}(x)\xi^a \\ \delta\Phi^i(x) &= Y_a^i(x, \Phi(x), \partial_{\mu}\Phi(x))\xi^a\end{aligned}$$

(бухбиндер?)

поэтому можно записать

$$\begin{aligned}x'^{\mu} &= x^{\mu} + \delta x^{\mu} \\ \delta x^{\mu} &= X_a^{\mu}(x)\xi^a \\ \Phi^i(x') &= \Phi^i(x) + \Delta\Phi^i(x) \\ \Delta\Phi^i(x) &= (Y_a^i(x, \Phi(x), \partial_{\mu}\Phi(x)) + \partial_{\mu}\Phi(x)X_a^{\mu}(x))\xi^a\end{aligned}$$

(это вообще нужно?)

Остановимся на общих принципах нахождения симметрий.

Можно показать, что каждому N - параметрическому непрерывному преобразованию симметрии соответствует N динамических инвариантов.

Proof. (тут тема из бухбиндера, мне честно говоря не актуально понимать, почему так) пока я не врубаюсь в это и нигде не нужно было это.

□

Why we are bothered about symmetries of a theory at all?

(??? I'll answer later, I don't understand it deep yet. Like, yes, EM field is a gauge field, so what? so it is an important question.)

внутренние симметрии

(бухбиндер см.)

Пусть поле с лоренцевскими индексами A является вектором в некотором n -мерном линейном пространстве, и значит, имеет n компонент, $\Phi \equiv \Phi_A^I, I = 1, 2, \dots, n$.

Пусть кроме того в этом линейном пространстве определено представление некоторой группы Ли с параметрами ξ^a и генераторами $(T_a)^I$,

Это значит, что задано линейное преобразование

$$\delta \Phi_A^I = i (T_a)^I J \Phi_A^J \xi^a$$

Заметим, что здесь лоренцевские индексы не преобразуются.

Генераторы T_a удовлетворяют соотношению

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c$$

где f_{ab}^c - структурные постоянные данной группы Ли.

Пусть действие $S[\Phi]$ инвариантно относительно преобразований (19).

В этом случае преобразование (19) является преобразованием внутренней симметрии.

9.2.2 Noether's theorem: Basics

Обсудим подробно теорему Нетер.

главные формулы теоремы Нетер

Существует метод нахождения сохраняющихся величин в теории поля - метод Нетер.

$$\left. \frac{dS}{da} \right|_{\text{field}} = \int d^4x \partial_\nu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a} - \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial a} \partial_{\lambda'} \Phi \right) + \mathcal{L} \frac{\partial x^\nu}{\partial a} \right\}$$

пока я не очень понимаю ее..

посмотрим на ее доказательства и аналогичные формы записи.

роль теоремы Нетер в теории поля

(тут развернутый ответ на этот вопрос)

она дает:

вид лагранжиана, ведь на него есть ограничения из СТО.

Доказательство теоремы Нетер через дифференцирование по параметру

Рассмотрим параметрическое преобразование координат и времени, переводящее «прямую» траекторию $q(t)$ в «прямую» траекторию $q_a(t_a)$ согласно (1.3). При этом, $q = q(t)$ - решение уравнений движения в непреобразованных координатах. Траектория $q_a(t_a)$ также является экстремальной для действия с той же функцией Лагранжа

$$S[q_a(t_a)] = \int_{t_a^{(1)}(a, q_1, t_1)}^{t_a^{(2)}(a, q_2, t_2)} dt_a L(q_a(t_a), \dot{q}_a(t_a), t_a)$$

в котором от параметра a явно зависят граничные точки траектории, а t_a является независимой переменной интегрирования, и значит, $dt_a/da \equiv 0$.

Для вычисления производной действия по параметру, напомним, как производится дифференцирование интеграла по параметру.

$$\frac{d}{da} \int_{t_1(a)}^{t_2(a)} dt f(t, a) = f(t_2(a), a) \frac{dt_2(a)}{da} - f(t_1(a), a) \frac{dt_1(a)}{da} + \int_{t_1(a)}^{t_2(a)} dt \frac{d}{da} f(t, a)$$

Вычислим производную действия по параметру a на траектории

$$\frac{dS}{da} = \frac{d}{da} \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} L(q_a, \dot{q}_a, t_a) dt_a$$

где необходимо варьировать, во-первых, пределы интегрирования, а во-вторых, подынтегральную функцию от q_a и $\dot{q}_a$, которые сами зависят от параметра, в отличие от переменной эволюции на траектории t_a , так что

$$\frac{dS}{da} = L \frac{\partial t_a}{\partial a} \Big|_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} + \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} \frac{dq_a}{da} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{d\dot{q}_a}{da} \right\} dt_a$$

Далее, во-первых,

$$L \frac{\partial t_a}{\partial a} \Big|_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left(L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) dt_a$$

во-вторых, уравнения движения, так как по условию они удовлетворяются,

$$\frac{d}{dt_a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial L}{\partial q_a}$$

дают

$$\int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{\partial L}{\partial q_a} \frac{dq_a}{da} dt_a = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left(\frac{d}{dt_a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) \frac{dq_a}{da} dt_a$$

Получим сначала

$$\int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} \frac{dq_a}{da} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{d\dot{q}_a}{da} \right\} dt_a = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left(\frac{d}{dt_a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) \frac{dq_a}{da} dt_a + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{d\dot{q}_a}{da} dt_a$$

"На траектории" дифференциалы равны

$$\begin{aligned} dq_a &= \frac{\partial q_a}{\partial a} da + \frac{dq_a}{dt} dt \\ dt_a &= \frac{\partial t_a}{\partial a} da + \frac{dt_a}{dt} dt \end{aligned}$$

Следовательно, в силу независимости переменной эволюции от параметра преобразования

$$\frac{dt_a}{da} = \frac{\partial t_a}{\partial a} + \frac{dt_a}{dt} \frac{dt}{da} \equiv 0$$

откуда с помощью понятия о неявной обратной функции следует

$$\frac{dt_a}{dt} \frac{dt}{da} = -\frac{\partial t_a}{\partial a}$$

Независимость переменной интегрирования t_a , выраженная в виде (1.7), означает, что при фиксированном значении t_a зависимость от параметра a в функции замены переменных неявно переносится на зависимость t от a . Тогда согласно (1.6) полная производная координаты равна

$$\frac{dq_a}{da} = \frac{\partial q_a}{\partial a} + \frac{dq_a}{dt} \frac{dt}{da} = \frac{\partial q_a}{\partial a} + \frac{dq_a}{dt_a} \frac{dt_a}{dt} \frac{dt}{da} = \frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a}$$

где мы ввели обычное обозначение для полной производной по времени посредством точки

$$\frac{dq_a}{dt_a} \equiv \dot{q}_a$$

Перестановочность дифференцирования по параметру и переменной эволюции приводит к

$$\frac{d\dot{q}_a}{da} = \frac{d}{dt_a} \frac{dq_a}{da}$$

и следовательно,

$$\int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} \frac{dq_a}{da} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{d\dot{q}_a}{da} \right\} dt_a = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{dq_a}{da} \right) dt_a$$

так что, собирая все члены, получаем

$$\frac{dS}{da} = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{dq_a}{da} + L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right\} dt_a$$

В итоге ⁴,

$$\frac{dS}{da} = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left(\frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) + L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right\} dt_a$$

что и составляет содержание теоремы Нётер. В случае, когда координата не единственная, следует провести суммирование по координатам в системе:

$$\frac{dS}{da} = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left\{ L \frac{\partial t_a}{\partial a} + \sum_q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left(\frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) \right\} dt_a$$

Непрерывное преобразование называется симметрией, если экстремум не зависит от параметра, т.е. $dS/da \equiv 0$, а значит, одному и тому же экстремуму отвечает целое семейство решений уравнений движения. Из наличия симметрии $dS/da = 0$ следует сохранение во времени величины ⁵

$$\mathcal{I} = L \frac{\partial t}{\partial a} + \sum_q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_q} \left(\frac{\partial q}{\partial a} - \frac{\partial t}{\partial a} \dot{q}_q \right)$$

которую называют интегралом движения: $\mathcal{I}(t') = \mathcal{I}(t_0)$. Легко написать аналог теоремы Нётер в теории поля, просто проводя подстановку переменных интегрирования и дифференцирования в (1.11):

$$dt \mapsto dt \, d^3r = \frac{1}{c} d^4x, \quad \partial_t \mapsto \partial_\nu, \quad \partial_t \mapsto \partial x^\nu, \quad L \mapsto \mathcal{L}, \quad q \mapsto \Phi$$

так что ⁶

$$\frac{dS}{da} = \frac{1}{c} \int d^4x \partial_\nu \left\{ \mathcal{L} \frac{\partial x^\nu}{\partial a} + \sum_{\Phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a} - \frac{\partial x^\lambda}{\partial a} \partial_\lambda \Phi \right) \right\}$$

В случае инвариантности действия в произвольно выбранной области пространства в любом интервале времени находим локальный закон сохранения

$$\partial_\nu \partial^\nu = 0, \quad g^\nu = \mathcal{L} \frac{\partial x^\nu}{\partial a} + \sum_{\Phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a} - \frac{\partial x^\lambda}{\partial a} \partial_\lambda \Phi \right) - \text{ток Нётер.}$$

Полевые законы сохранения мы исследуем позже с использованием тензорных обозначений из векторного анализа.

Тензор энергии-импульса как следствие теоремы Нётер по Степаньянцу

Поскольку физические законы одинаковы во всех точках пространства и во все моменты времени, то функция Лагранжа не должна явно зависеть от координат, т.е.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$$

Далее мы будем рассматривать только те модели, которые удовлетворяют этому требованию.

При выполнении условия (2.66) функционал действия является инвариантным относительно трансляций

$$\begin{cases} x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu; \\ \phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x'), \quad \text{причем} \quad \phi'_i(x') = \phi_i(x), \end{cases}$$

где a^μ - некоторые постоянные, поскольку тогда при интегрировании по произвольной области M

$$\begin{aligned} S' &= \int_{M'} d^4x' \mathcal{L}(\phi'_i(x'), \partial_\mu \phi'_i(x')) = \int_{M'} d^4x' \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)) = \\ &= \int_M d^4x \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)) = S \end{aligned}$$

В силу произвольности a^μ из теоремы Нётер следует закон сохранения тензора энергии-импульса ⁷

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \mathcal{L} \delta^\mu_\nu,$$

который записывается в виде $\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$. Справедливость этого закона проверена в Задаче 1 явным вычислением.

Тензору энергии-импульса T^μ_ν соответствует сохраняющаяся во времени величина

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu} = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_i)} \partial^\nu \phi_i - \eta^{0\nu} \mathcal{L} \right)$$

Сравнивая P^0 с выражением для обобщенной энергии (2.46), принимая во внимание равенство (1.19) и учитывая, что аналогом обобщенных координат теперь являются $\phi_i(x)$, заключаем, что $E = P^0$. А поскольку $P^\mu = (E, \mathbf{P})$ для точечной частицы представляет собой четырехвектор, то его оставшиеся компоненты мы должны отождествить с импульсом полевой конфигурации. Поэтому смысл термина «тензор энергии-импульса» теперь становится понятным.

Заметим, что поскольку интеграл по пространственным координатам от компоненты T^{00} равен энергии, то эту компоненту можно отождествить с плотностью энергии поля. Аналогичным образом компоненты T^{0i} представляют собой плотность импульса. Для того чтобы понять смысл оставшихся компонент, заметим, что после интегрирования закона сохранения $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ по некоторой области пространства M получается равенство

$$\frac{d}{dt} P^\nu(t) = \frac{d}{dt} \int_M d^3x T^{0\nu} = - \int_{\partial M} dS_i T^{i\nu},$$

где через ∂M обозначена граница области M . Поэтому изменение энергии и импульса поля в области M происходит за счет того, что энергия и импульс приходят или уходят через границу области M . При этом величины T^{i0} , очевидно, представляют собой вектор (по отношению к группе пространственных вращений) потока энергии, а T^{ij} - тензор, описывающий поток импульса. 1)

Построим теперь $T_{\mu\nu}$ для некоторых из рассмотренных ранее моделей.

Сохранение тензора углового момента по Степаньянцу

Конструкция

Физические законы не только не зависят от точки пространства и момента времени, но и не меняются при преобразованиях Лоренца. (Основные сведения о простейших группах Ли и, в частности, группе Лоренца, а также соответствующих им алгебрам Ли приведены в Приложении.) Бесконечно малые преобразования Лоренца можно записать в виде

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \alpha^{\alpha\beta} x_\beta,$$

причем $\alpha^{\alpha\beta} = -\alpha^{\beta\alpha}$ (это равенство следует из инвариантности величины $x^\alpha x_\alpha$). Кроме того, поля также меняются под действием преобразований Лоренца. Формально закон их преобразования в бесконечно малой форме может быть записан как

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x), \quad \text{где} \quad \phi'_i(x') = \phi_i(x) - \frac{i}{2} (T_{\alpha\beta})_i{}^j \phi_j(x) \alpha^{\alpha\beta},$$

а $(T_{\alpha\beta})_i{}^j$ - генераторы группы Лоренца в том представлении, где находятся поля ϕ_i . (Обратим внимание на то, в каких точках берутся поля.) Конкретные примеры таких преобразований будут рассмотрены ниже. Пока же для нас важно, что функция Лагранжа должна быть инвариантна относительно преобразований

$$\begin{cases} \delta x^\alpha = \alpha^\alpha x^\beta x^\beta \\ \delta \phi_i = -\frac{i}{2} (T_{\alpha\beta})_i{}^j \phi_j \alpha^{\alpha\beta}. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в (2.51), получаем, что соответствующий сохраняющийся ток (с точностью до несущественного знака) может быть представлен как

$$M^\mu_{\alpha\beta} = L^\mu_{\alpha\beta} + S^\mu_{\alpha\beta},$$

где

$$L_{\alpha\beta}^{\mu} \equiv T_{\beta}^{\mu} x_{\alpha} - T_{\alpha}^{\mu} x_{\beta}; \quad S_{\alpha\beta}^{\mu} \equiv -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_i)} (T_{\alpha\beta})_i{}^j \phi_j.$$

Следует заметить, что в $L_{\alpha\beta}^{\mu}$ включены все слагаемые, связанные с преобразованиями координат x^{μ} , а в $S_{\alpha\beta}^{\mu}$ - слагаемые, связанные с преобразованиями полей ϕ_i . Выражение $L_{\alpha\beta}^{\mu}$ называют тензором орбитального момента, а $S_{\alpha\beta}^{\mu}$ - тензором спина. Угловой момент, который сохраняется благодаря инвариантности действия относительно преобразований Лоренца, записывается в виде

$$M_{\mu\nu} = \int d^3x M_{\mu\nu}^0 = \int d^3x (L_{\mu\nu}^0 + S_{\mu\nu}^0).$$

Если рассмотреть только пространственные компоненты этой величины, то (в случае, если размерность пространства-времени равна 4) можно получить вектор (по отношению к группе пространственных вращений) углового момента

$$M_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk}.$$

Умножая это равенство на ε_{imn} , получаем, что $M_{mn} = \varepsilon_{imn} M_i$. Аналогичным образом можно построить трехмерные векторы орбитального момента и спина.

Тензор углового момента вещественного скалярного поля

По определению скалярное поле не меняется под действием преобразований Лоренца, так что $(X_{\alpha\beta})_i{}^j = 0$. Поэтому в этом случае

$$S_{\alpha\beta}^{\mu} = 0; \quad M_{\alpha\beta}^{\mu} = L_{\alpha\beta}^{\mu}.$$

Тензор углового момента свободное электромагнитное поле.

Поскольку при преобразованиях Лоренца A^{μ} преобразуется так же как и координата x^{μ} , то $\delta A^{\mu} = \alpha^{\mu\nu} A_{\nu}$ и, следовательно,

$$(T_{\alpha\beta})_{\mu}{}^{\nu} = i (\delta_{\beta}^{\nu} \eta_{\mu\alpha} - \delta_{\alpha}^{\nu} \eta_{\mu\beta}).$$

Поэтому тензоры орбитального момента и спина запишутся в виде

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta}^{\mu} &= x_{\alpha} \left(-\partial_{\beta} A^{\gamma} F_{\mu\gamma} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\beta} F_{\gamma\delta}^2 \right) - x_{\beta} \left(-\partial_{\alpha} A^{\gamma} F_{\mu\gamma} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\alpha} F_{\gamma\delta}^2 \right) \\ S_{\alpha\beta}^{\mu} &= F^{\mu}{}_{\beta} A_{\alpha} - F^{\mu}{}_{\alpha} A_{\beta}. \end{aligned}$$

Симметризованный тензор энергии-импульса (??)

Обратим внимание, что орбитальный, спиновый и даже полный угловой моменты не являются калибровочно инвариантными. Что касается орбитального и спинного моментов, то ничего плохого в этом нет, поскольку разделение $M_{\alpha\beta}^{\mu}$ на две части является достаточно искусственным. Однако отсутствие калибровочной инвариантности у наблюдаемого суммарного тензора момента импульса крайне нежелательно. Тем не менее, несложно проверить, что на уравнениях движения

$$M_{\alpha\beta}^{\mu} = L_{\alpha\beta}^{\mu} + S_{\alpha\beta}^{\mu} = J_{\alpha\beta}^{\mu} + \partial_{\nu} (F^{\mu\nu} A_{\alpha} x_{\beta} - F^{\mu\nu} A_{\beta} x_{\alpha}),$$

где величина

$$J_{\alpha\beta}^{\mu} = x_{\alpha}\Theta_{\beta}^{\mu} - x_{\beta}\Theta_{\alpha}^{\mu}$$

с очевидностью сохраняется и является инвариантной относительно калибровочных преобразований. Более того, заметим, что определенный с помощью (2.96) тензор момента импульса удовлетворяет закону сохранения $\partial_{\mu}J_{\alpha\beta}^{\mu} = 0$ автоматически благодаря симметрии $\Theta_{\mu\nu}$ (вторая часть Задачи).

Общее определение симметризованного тензора энергии-импульса будет дано в Части 6.6. Там также будет показано, что в общем случае симметризованный тензор энергии-импульса может быть записан как

$$\Theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \partial^{\alpha}t_{\alpha\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^{\alpha}(S_{\alpha,\mu\nu} - S_{\mu,\alpha\nu} + S_{\nu,\mu\alpha})$$

где $S_{\mu,\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}S_{\alpha\beta}^{\nu}$. В частности, для случая свободного электромагнитного поля (тензор спина которого дается формулой (2.94)) отсюда следует, что

$$\Theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \partial^{\alpha}(F_{\mu\alpha}A_{\nu}).$$

что совпадает с определением (2.78). Подставляя (2.97) в выражение для $J_{\alpha\beta}^{\mu}$, получаем (см. Задачу), что и в общем случае

$$J_{\alpha\beta}^{\mu} = M_{\alpha\beta}^{\mu} + \partial_{\nu}(t_{\nu}^{\mu}{}_{\beta}x_{\alpha} - t_{\nu}^{\mu}{}_{\alpha}x_{\beta}),$$

причем последнее слагаемое с очевидностью антисимметрично относительно перестановки индексов μ и ν .

С-2.3.3.3 Проверить сохранение тензора $J_{\alpha\beta}^{\mu}$

Исходя из равенства (2.97) получить соотношение между каноническим тензором момента импульса $M_{\alpha\beta}^{\mu}$ и $J_{\alpha\beta}^{\mu} = \Theta_{\beta}^{\mu}x_{\alpha} - \Theta_{\alpha}^{\mu}x_{\beta}$. Проверить сохранение тензора $J_{\alpha\beta}^{\mu}$. Подставляя

$$\Theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^{\alpha}(S_{\alpha,\mu\nu} - S_{\mu,\alpha\nu} + S_{\nu,\mu\alpha}) \equiv T_{\mu\nu} + \partial^{\alpha}t_{\alpha\mu\nu}$$

в выражение для $J_{\alpha\beta}^{\mu}$, получаем, что

$$\begin{aligned} J_{\mu,\alpha\beta} &= T_{\mu\beta}x_{\alpha} - T_{\mu\alpha}x_{\beta} + \partial^{\nu}t_{\nu\mu\beta}x_{\alpha} - \partial^{\nu}t_{\nu\mu\alpha}x_{\beta} = L_{\mu,\alpha\beta} + \partial^{\nu}(t_{\nu\mu\beta}x_{\alpha}) - \\ &- \partial^{\nu}(t_{\nu\mu\alpha}x_{\beta}) - t_{\alpha\mu\beta} + t_{\beta\mu\alpha} = L_{\mu,\alpha\beta} + S_{\mu,\alpha\beta} + \partial^{\nu}(t_{\nu\mu\beta}x_{\alpha} - t_{\nu\mu\alpha}x_{\beta}). \end{aligned}$$

Поскольку тензор $t_{\nu\mu\alpha}$ антисимметричен по первым двум индексам, то из закона сохранения $M_{\alpha\beta}^{\mu}$ следует, что

$$\partial_{\mu}J_{\alpha\beta}^{\mu} = 0.$$

Это равенство также может быть доказано, исходя из симметрии тензора энергии-импульса $\Theta^{\mu\nu}$ и закона его сохранения. Действительно, поскольку $\partial_{\mu}\Theta_{\nu}^{\mu} = 0$, то

$$\partial_{\mu}J_{\alpha\beta}^{\mu} = \partial_{\mu}(\Theta_{\alpha}^{\mu}x_{\beta} - \Theta_{\beta}^{\mu}x_{\alpha}) = \Theta_{\beta\alpha} - \Theta_{\alpha\beta} = 0.$$

Сохранение электрического заряда по Степаньянцу

Рассмотрим скалярную электродинамику, описываемую лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}_{\mu}\phi^{*}\mathcal{D}^{\mu}\phi - V(\phi^{*}\phi).$$

В Части 2.1 мы выяснили, что такая модель является инвариантной относительно локальных калибровочных преобразований (2.11). Их частным случаем являются глобальные преобразования

$$\phi \rightarrow e^{-ie\alpha} \phi; \quad \phi^* \rightarrow e^{ie\alpha} \phi^*; \quad A_\mu \rightarrow A_\mu,$$

в которых $\alpha \neq \alpha(x)$. В соответствии с теоремой Нетер (2.51) глобальные преобразования (2.105) приводят к сохранению тока (Задача)

$$j_\mu = -ie (\phi^* \mathcal{D}_\mu \phi - \phi \mathcal{D}_\mu \phi^*).$$

Ранее мы уже выяснили, что условие $\partial_\mu j^\mu = 0$ необходимо для разрешимости уравнений движения и проверили его выполнение прямым вычислением (Задача 3 Части 2.1).

Заметим теперь, что полученный по теореме Нетер ток j^μ совпадает с током, который стоит с правой части уравнений движения

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu.$$

Поскольку эти уравнения фактически представляют собой уравнения Максвелла с источниками, то в рассматриваемой модели j^μ может быть отождествлен с четырехвектором электромагнитного тока, а сохраняющаяся во времени величина

$$q = -ie \int d^3x (\phi^* \mathcal{D}_0 \phi - \phi \mathcal{D}_0 \phi^*)$$

с электрическим зарядом. Поэтому инвариантность относительно глобальных калибровочных преобразований приводит к сохранению электрического заряда. Приведенное рассуждение также подчеркивает необходимость существования калибровочной инвариантности как одного из требований, предъявляемых к моделям теории поля.

Сохраняющийся ток

Найти сохраняющийся ток, соответствующий глобальным калибровочным преобразованиям в модели (2.104).

Записывая бесконечно малые глобальные калибровочные преобразования, находим, что

$$\delta\phi = -ie\alpha\phi; \quad \delta\phi^* = ie\alpha\phi^*.$$

Поэтому из теоремы Нетер получаем закон сохранения в виде

$$0 = \partial_\mu \left(-ie\alpha\phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} + ie\alpha\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \partial_\mu (-ie\alpha (\phi^* \mathcal{D}_\mu \phi - \phi \mathcal{D}_\mu \phi^*))$$

Поскольку $\alpha \neq \alpha(x)$, отсюда следует, что

$$0 = \partial_\mu (-ie (\phi^* \mathcal{D}_\mu \phi - \phi \mathcal{D}_\mu \phi^*)).$$

Поэтому сохранение электрического заряда является следствием глобальной калибровочной инвариантности.

2.3.5. Метод Нетер.

Как уже упоминалось ранее, закон сохранения в форме (2.51) не работает в тех случаях, когда при некоторых преобразованиях функция Лагранжа является инвариантной с точностью до четырехдивергенции. В принципе, переформулировав приведенное в Задаче Части 2.3.1 доказательство теоремы Нетер, можно необходимым образом модифицировать (2.51) и на этот случай, однако практически более удобным оказывается несколько иной способ построения сохраняющихся величин, который носит название метод Нетер. Конечно, этот метод применим и в тех случаях, когда дополнительная четырехдивергенция отсутствует.

Проиллюстрируем метод Нетер на примере нахождения закона сохранения электромагнитного тока.

Рассмотренное ранее действие (2.104) инвариантно относительно глобальных калибровочных преобразований (2.105). Однако инвариантность будет нарушена, если формально положить в (2.105) $\alpha = \alpha(x)$. Другими словами, действие не является инвариантным относительно преобразований (Заметим, что (2.112) не совпадает с локальными калибровочными преобразованиями, поскольку в них калибровочное поле остается неизменным.)

Предположим теперь, что мы вычислили вариацию действия δS . Благодаря инвариантности действия относительно глобальных калибровочных преобразований, при подстановке в нее $\alpha \neq \alpha(x)$ должен получиться 0. Это означает, что с точностью до членов первого порядка малости по α

$$\delta S = - \int d^4x \partial_\mu \alpha(x) j^\mu,$$

где j^μ - некоторая функция полевых переменных. Если при этом поля удовлетворяют уравнениям Лагранжа, то $\delta S = 0$ в силу принципа наименьшего действия. Так как в соответствии с принципом наименьшего действия $\alpha(x) = 0$ на границе области интегрирования, то условие

$$0 = \int d^4x \partial_\mu \alpha(x) j^\mu$$

эквивалентно закону сохранения. В заключение заметим, что, получив выражение (2.116), мы фактически явно проверили инвариантность действия относительно глобальных калибровочных преобразований. Поэтому метод Нетер позволяет не только построить сохраняющийся ток, но и проверить инвариантность действия одновременно, что часто является очень полезным при исследовании более сложных моделей.

выражение для сохраняющегося тока в скалярной электродинамике

С помощью метода Нетер найти выражение для сохраняющегося тока в скалярной электродинамике. В соответствии с методом Нетер необходимо совершить над действием

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}_\mu \phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^* \phi) \right)$$

преобразования (2.112). Очевидно, что неинвариантным при этом является только второе слагаемое в (2.118), поскольку

$$\mathcal{D}_\mu \phi \rightarrow (\partial_\mu - ieA_\mu) (e^{-ie\alpha} \phi) = e^{-ie\alpha} (\mathcal{D}_\mu \phi - ie\partial_\mu \alpha \phi)$$

Следовательно, сохраняя только члены первого порядка малости по $\alpha(x)$, получаем, что

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left((\mathcal{D}^\mu \phi^* + ie\partial^\mu \alpha \phi^*) (\mathcal{D}_\mu \phi - ie\partial_\mu \alpha \phi) - \mathcal{D}^\mu \dot{\phi}^* \mathcal{D}_\mu \phi \right) \approx \\ &\approx ie \int d^4x \partial_\mu \alpha(x) (\phi^* \mathcal{D}_\mu \phi - \phi \mathcal{D}_\mu \phi^*)\end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с (2.113), заключаем, что

$$j^\mu = -ie (\phi^* \mathcal{D}_\mu \phi - \phi \mathcal{D}_\mu \phi^*)$$

9.2.3 Noether's theorem: Advanced Features

Overview of Noether's theorem in QFT

(there are a lot of new things there, I'll write later)

9.2.4 Global Symmetries

Выясним теперь вопрос о том, каким спектром частиц обладают калибровочно-инвариантные модели теории поля. Как мы увидим далее, результат существенно зависит от формы потенциала, а также от того, является ли калибровочная симметрия глобальной или локальной.

Глобальные симметрии

Рассмотрим простейшую теорию, в которой имеется инвариантность относительно глобальных калибровочных преобразований. Она содержит одно комплексное скалярное поле и описывается функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi).$$

Оказывается, что при переходе к квантовой теории поля самосогласованными будут только теории, в которых потенциал V имеет не более чем четвертый порядок по полям ϕ и ϕ^* , т.е.

$$V(\phi^* \phi) = c_1 + c_2 \phi^* \phi + c_3 (\phi^* \phi)^2.$$

(??? did I write, why it is so???)

Положительная определенность потенциальной энергии может быть достигнута наложением условия $c_3 > 0$ (или $c_3 = 0, c_2 > 0$). Постоянную c_1 мы будем далее подбирать таким образом, чтобы в точке минимума $V = 0$.

В простейшем случае $V = m^2 \phi^* \phi$. Тогда теория описывает одно свободное комплексное скалярное поле массы m . Представляя ϕ в виде

$$\phi = P + iS,$$

где P и S - некоторые вещественные скалярные поля, получаем, что

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi = (\partial_\mu P)^2 - m^2 P^2 + (\partial_\mu S)^2 - m^2 S^2.$$

Yes, the “mixed terms” have canceled one another. Это означает, что исходная модель эквивалентна системе двух вещественных скалярных полей с одинаковой массой m .

В случае, если потенциал V имеет более сложный вид, исследование спектра теории (????? what is the spectra of the theory??? masses, energy or what??) несколько менее

тривиально и напоминает исследование малых колебаний вблизи положения равновесия для механических систем.

В данном случае аналогом положения равновесия в механике является вакуумное состояние, которое определяется как состояние с минимальным значением функционала энергии. Для модели $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$

$$E = \int d^3x (\partial_0 \phi^* \partial_0 \phi + \partial_i \phi^* \partial_i \phi + V(\phi^* \phi)),$$

where we put one index down thus got rid of one minus sign and did the usual Legendre transformations. (add here that formula for energy from mechanics or from Noether's theorem!!!) Минимальное значение энергии E достигается в том случае, если поле ϕ является постоянным во всех точках пространства и соответствует минимуму потенциала V .

При исследовании спектра частиц (???) мы считаем, что поля незначительно отличаются от своих вакуумных значений (????), и раскладываем действие в ряд Тейлора вблизи вакуумного состояния. Поскольку в точке минимума первые производные потенциала V обращаются в 0, то этот ряд будет начинаться с членов, квадратичных по полям. Если ограничиться только квадратичными слагаемыми, рассматривая все остальные члены как малые возмущения, то с помощью линейного преобразования полевых переменных всегда можно добиться того, чтобы квадратичный лагранжиан представлял собой сумму лагранжианов для отдельных полей. Сравнивая результат со стандартными выражениями для лагранжианов массивных и безмассовых скалярных, векторных и т.д. полей, находим состав и массы частиц, присутствующих в теории.

В качестве конкретного примера рассмотрим модель $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$. В зависимости от формы V , в этой модели возникают два случая, соответствующие принципиально различным вакуумным состояниям и различным спектрам частиц.

Потенциал V имеет единственный минимум

Потенциал V имеет единственный минимум в точке $\phi = 0$ и может быть записан как

$$V = m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2.$$

Очевидно, что в данном случае вакуумом является состояние

$$\phi_0 = 0.$$

Обратим внимание, что оно является инвариантным относительно калибровочных преобразований:

$$\phi_0 \rightarrow e^{-ie\alpha} \phi_0 = \phi_0.$$

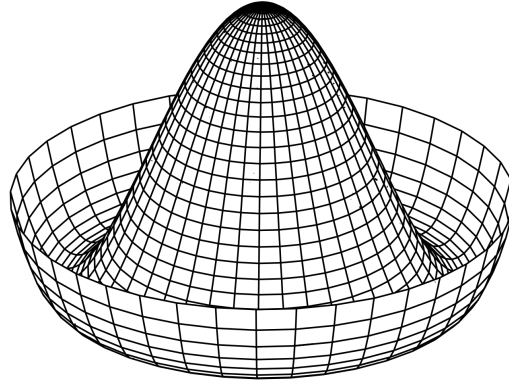
Поскольку вблизи вакуумного состояния ϕ_0 значение ϕ является малым, то при исследовании спектра теории можно ограничиться квадратичными по ϕ слагаемыми. При этом мы возвращаемся к рассмотренному ранее случаю $V = m^2 \phi^* \phi$, и спектр теории составляют два массивных вещественных скалярных поля с массой m .

Потенциал $V = \lambda (\phi^* \phi - v^2)^2 = \lambda (P^2 + S^2 - v^2)^2$

Другая возможность соответствует потенциалу

$$V = \lambda (\phi^* \phi - v^2)^2 = \lambda (P^2 + S^2 - v^2)^2.$$

Этот потенциал как функция P и S и его разрез схематично показаны на Рис. ниже.



Функция $V(P, S)$ достигает минимума на окружности

$$P^2 + S^2 = v^2.$$

Каждая из точек этой окружности может быть выбрана в качестве вакуумного состояния. Рассмотрим, например, случай

$$P = v; \quad S = 0.$$

Характерной особенностью этого вакуумного состояния является его неинвариантность под действием калибровочных преобразований (2.188). Такая ситуация получила название спонтанного нарушения симметрии. При этом термин «нарушение симметрии» отнюдь не подразумевает, что в рассматриваемой модели перестает существовать калибровочная инвариантность. Калибровочная симметрия по-прежнему имеет место, однако, вакуум теории под ее действием уже не является инвариантным.

Для нахождения спектра модели $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi)$ в случае спонтанного нарушения симметрии разложим функцию Лагранжа в ряд Тейлора по отклонениям полей от вакуумных значений, которые запишутся как

$$P_1 \equiv P - P_0 = P - v; \quad S_1 \equiv S - S_0 = S.$$

В терминах P_1 и S_1 исходный лагранжиан может быть представлен в виде

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu P_1)^2 + (\partial_\mu S_1)^2 - \lambda \left((P_1 + v)^2 + S_1^2 - v^2 \right)^2.$$

Obviously, this Lagrangian является инвариантным относительно преобразований

$$\begin{cases} P_1 \rightarrow (P_1 + v) \cos(e\alpha) + S_1 \sin(e\alpha) - v \\ S_1 \rightarrow (P_1 + v) \sin(e\alpha) - S_1 \cos(e\alpha) \end{cases}$$

которые просто представляют собой глобальные калибровочные преобразования, переписанные в терминах полей P_1 и S_1 .

Ограничиваясь квадратичным приближением по отклонениям полей от вакуумного значения, получаем, что

$$\mathcal{L} \approx (\partial_\mu P_1)^2 + (\partial_\mu S_1)^2 - 4\lambda v^2 P_1^2.$$

Поэтому в спектре теории присутствует одно массивное вещественное скалярное поле P_1 с массой $2\sqrt{\lambda}v$ и одно безмассовое поле S_1 .

Существование безмассовых скалярных полей (т.н. голдстоуновских бозонов) является характерным свойством всех теорий со спонтанно нарушенной глобальной калибровочной симметрией. Причина их появления достаточно прозрачна. Из рисунка 2.2 очевидно, что малые изменения поля S_1 (при постоянном P_1) соответствуют сдвигам по касательной к окружности (2.190), на которой потенциал V постоянен и обращается в 0. Поэтому в квадратичном приближении малые изменения S_1 не меняют потенциальную энергию. Это фактически и означает, что масса поля S_1 оказывается равной 0. Поэтому появление голдстоуновского бозона S_1 связано с существованием окружности, на которой потенциал обращается в 0. А существование этой окружности, в свою очередь, является следствием неинвариантности вакуума под действием калибровочных преобразований. Действительно, совершая некоторое калибровочное преобразование над вакуумным состоянием, мы заведомо приходим в точку плоскости (P, S) , в которой $V = 0$, поскольку значение потенциала не может меняться под действием таких преобразований. А так как вакуум не является калибровочно инвариантным, то новая точка не совпадает с исходным вакуумным состоянием. Учитывая, что калибровочные преобразования непрерывно зависят от параметра α , мы должны сделать вывод о существовании некоторой непрерывной кривой, на которой $V = 0$. Поэтому существование безмассового голдстоуновского бозона действительно является следствием неинвариантности вакуума под действием калибровочных преобразований.

9.2.5 Local Abelian Symmetry

Выясним теперь, каким спектром частиц обладает теория с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}^\mu \phi^* \mathcal{D}_\mu \phi - V(\phi^* \phi),$$

инвариантным относительно локальных калибровочных преобразований

$$\phi \rightarrow e^{-ica(x)}\phi; \quad \phi^* \rightarrow e^{iea(x)}\phi^*; \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha(x)$$

Как и ранее, ответ на этот вопрос существенно зависит от формы потенциала V , причем при исследовании возникают точно такие же случаи, что и в случае глобальной калибровочной симметрии.

Потенциал V имеет единственный минимум

Если потенциал V имеет единственный минимум при $\phi = 0$ и, следовательно, может быть записан в форме $V = m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$.

Как мы установили ранее, в этом случае при исследовании спектра частиц поле ϕ можно считать малым. Поскольку тензор $F_{\mu\nu}$ квадратичен калибровочному полю A_μ , то

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}^\mu \phi^* \mathcal{D}_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \approx -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi.$$

Это соответствует одному безмассовому векторному полю A_μ и двум массивным (с массой m) вещественным скалярным полям P и S , определяемым соотношением $\phi = P + iS$.

$$\text{Case of a potential } V = \lambda (\dot{\phi}^* \dot{\phi} - v^2)^2 = \lambda (P^2 + S^2 - v^2)^2$$

Если в теории имеется спонтанное нарушение симметрии, то всегда можно подобрать функцию $\alpha(x)$ таким образом, чтобы во всех точках пространства $\phi(x) \in \text{Re}$. В случае

же глобальной симметрии параметр α был одинаков во всех точках пространства, и поэтому такой выбор ранее был невозможен (??? why???). Другими словами, можно зафиксировать калибровочное условие таким образом, чтобы

$$\phi(x) = P(x),$$

где P - вещественное скалярное поле.

Калибровка (2.199) называется унитарной. В ней функция Лагранжа записывается как

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + (\partial^\mu P + ieA^\mu P)(\partial_\mu P - ieA_\mu P) - \lambda(P^2 - v^2)^2.$$

Раскладывая ее вблизи вакуумного значения $P_0 = v$ (или, эквивалентно, $P_0 = -v$), получаем, что в квадратичном приближении

$$\mathcal{L} \approx -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + e^2 v^2 A_\mu^2 + (\partial_\mu P_1)^2 - 4\lambda v^2 P_1^2.$$

Таким образом, в спектре теории присутствуют массивное скалярное поле P_1 ($m_P = 2\sqrt{\lambda}v$) (т.н. хиггсовский бозон) и массивное векторное поле ($m_A = \sqrt{2}ev$).

Обратим внимание, что по сравнению со случаем спонтанного нарушения глобальной симметрии из спектра теории исчез голдстоуновский бозон, в то время как слагаемые, описывающие массивное скалярное поле, остаются полностью неизменными.

Спектр теории, в принципе, может быть получен и без использования унитарной калибровки. Для этого удобно перейти к новым полевым переменным $\rho(x)$ и $\varphi(x)$, определяемым соотношением

$$\phi(x) = \rho(x)e^{i\varphi(x)}.$$

Тогда легко проверить, что $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}^\mu \phi^* \mathcal{D}_\mu \phi - \lambda(\dot{\phi}^* \dot{\phi} - v^2)^2 = \lambda(P^2 + S^2 - v^2)^2$ перепишется в виде (??? check it!!)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |\partial_\mu \rho + i\rho \partial_\mu \varphi - ieA_\mu \rho|^2 - \lambda(\rho^2 - v^2)^2.$$

Определяя новое поле $B_\mu \equiv A_\mu - \partial_\mu \varphi/e$, получаем, что в терминах полей B_μ, ρ и φ

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + (\partial_\mu \rho)^2 + e^2 \rho^2 B_\mu^2 - \lambda(\rho^2 - v^2)^2,$$

что с точностью до обозначений совпадает с (2.200). При этом поле $\varphi(x)$ оказывается нефизическим и полностью исчезает из функции Лагранжа.

Еще раз подчеркнем, что несмотря на присутствие массивного векторного поля, теория остается калибровочно инвариантной (в отличие от простейшей модели, рассмотренной в Части 2.2). Например, в терминах B_μ, ρ и φ локальные калибровочные преобразования запишутся как

$$B_3^* B_\mu(x) \rightarrow B_\mu(x); \quad \rho(x) \rightarrow \rho(x); \quad \varphi(x) \rightarrow \varphi(x) - e\alpha(x).$$

Поэтому описанный здесь метод позволяет получить массивное векторное поле без нарушения калибровочной инвариантности. В литературе он получил название механизм Хиггса. Поскольку существование калибровочной инвариантности является важнейшим требованием, предъявляемым к моделям теории поля, то в реалистичных моделях масса векторных частиц обычно вводится с помощью механизма Хиггса.

Поэтому описанный здесь метод позволяет получить массивное векторное поле без нарушения калибровочной инвариантности. В литературе он получил название механизм Хиггса. Поскольку существование калибровочной инвариантности является важнейшим требованием, предъявляемым к моделям теории поля, то в реалистичных моделях масса векторных частиц обычно вводится с помощью механизма Хиггса.

В заключение заметим, что, несмотря на то, что в зависимости от формы потенциала спектр частиц является различным, суммарное число степеней свободы остается неизменным. Действительно, как мы выяснили в Части 2.2, безмассовое векторное поле имеет 2 степени свободы, а массивное — 3. Каждое вещественное скалярное поле дает еще одну степень свободы. Поэтому в случае тривиального вакуума число степеней свободы есть $2(A_\mu) + 1(P) + 1(S) = 4$, а в случае спонтанного нарушения симметрии $-3(A_\mu) + 1(P_1) = 4$. Поэтому иногда говорят, что векторное поле "съедает" голдстоуновский бозон и в результате этого приобретает массу.

Локальные симметрии по Киселеву

Что мешает нам произвольно выбирать комплексную фазу при переходе от двух вещественных полей к комплексному в каждой точке пространства-времени?

Рассмотрим локальное калибровочное преобразование $\Phi_u(x) = \Phi(x)e^{-ieu(x)}$, при нем

$$\partial_\mu \Phi_u = e^{-ieu(x)} (\partial_\mu - ie\partial_\mu u(x)) \Phi(x)$$

Значит, производная поля теперь становится, так называемой ковариантной производной

$$\partial_\mu \Phi \mapsto \nabla_\mu \Phi, \quad \nabla_\mu = \partial_\mu + ie\mathcal{A}_\mu(x)$$

где 4-векторное поле $\mathcal{A}_\mu(x)$ называют калибровочным векторным полем или связностью. We have chosen the "+" sign because thus it will cancel the minus above, as we will be right below. The function of coordinates $(\nabla_\mu \Phi)^* \nabla^\mu \Phi$ явно является калибровочно инвариантной, если наряду с калибровочным преобразованием поля с зарядом e провести и калибровочное преобразование векторного калибровочного поля $\mathcal{A}_\mu$:

$$\begin{aligned} \{\partial_\mu + ie\mathcal{A}_\mu^u(x)\} \Phi_u(x) &= e^{-ieu(x)} \{\partial_\mu + ie\mathcal{A}_\mu^u(x) - ie\partial_\mu u(x)\} \Phi = \\ &= e^{-ieu(x)} \{\partial_\mu + ie\mathcal{A}_\mu(x)\} \Phi(x) \end{aligned}$$

т.е.

$$\nabla_\mu^u \Phi_u(x) = e^{-ieu(x)} \nabla_\mu \Phi(x)$$

при градиентном калибровочном преобразовании

$$\mathcal{A}_\mu^u(x) = \mathcal{A}_\mu(x) + \partial_\mu u(x)$$

Связность $\mathcal{A}_\mu$ может быть чистой калибровкой, т.е. $\mathcal{A}_\mu = \partial_\mu u(x)$. Тогда с помощью калибровочного преобразования ее можно сделать равной нулю во всех точках пространства-времени.

Для определения того, является ли связность тривиальной или нет, необходимо построить тензор

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$$

знакомый нам тензор напряженности векторного поля.

Если тензор напряженности тождественно обращается в нуль, то связность тривиальна.

Если же тензор напряженности не равен нулю, то имеет место взаимодействие заряженного скалярного поля с калибровочным векторным полем A_μ .

Это векторное поле может быть внешним, т.е. заданным условием задачи, или динамическим, т.е. само возникать и распространяться вследствие взаимодействия с заряженными источниками.

Такая динамическая теория поля и есть изученная нами электродинамика.

В итоге, мы имеем следующую логическую цепочку: сохраняющиеся заряды отвечают глобальной калибровочной симметрии, сохраняющемуся току; если симметрия реализуется в природе глобально, но нарушена спонтанно, т.е. вакуумным состоянием полей, то возникает безмассовый голдстоуновский бозон; если симметрия локальна, то существует динамическое безмассовое векторное калибровочное поле.

Этой схеме отвечают все известные в фундаментальной физике силы природы: электромагнитные, слабые и сильные, за исключением гравитационного взаимодействия, где в качестве поля выступает не векторная связность, а тензорная метрика, которая задает и связность, возникающую при локальных преобразованиях координат пространства-времени.

отличие локальной и глобальной симметрий в природе в том, что локальный параметр ненаблюдаем (?)

Отличие локальной симметрии в природе от глобальной выражается прежде всего в том, что локальный калибровочный параметр, который становился голдстоуновским бозоном в случае спонтанно нарушенной глобальной симметрии, не может быть наблюдаемым в случае локальной симметрии действия: действие инвариантно как раз относительно локальных калибровочных преобразований.

То есть голдстоуновский бозон не взаимодействует с полями, поскольку от значений локального параметра действие не зависит.

При локальной калибровочной симметрии сил природы их переносчиком (причинный пропагатор Фейнмана) становится калибровочное поле, которое является безмассовым, а значит реализуется дальное действие.

Это свойство находится в видимом противоречии с конечным радиусом действия как слабого взаимодействия, так и сильного.

конечность радиуса взаимодействия

Конечность радиуса взаимодействия можно объяснить тем, что вакуумное состояние является средой для калибровочных векторных бозонов.

В среде векторное поле может либо приобретать ненулевую массу, как в случае, например, фотона в ионосфере, или вообще не распространяться и затухать на конечных расстояниях, как в случае, например, магнитного поля в сверхпроводнике.

Первый сценарий - приобретение массы - реализуется для слабых взаимодействий вследствие механизма Хиггса для W- и Z-бозонов.

(??? тут формулу вставляю.)

Второй же, видимо, имеет место для сильных взаимодействий, переносчики которого - глюоны - не распространяются в качестве свободных волн, а затухают на радиусе, как говорят, конфайнмента: свободно распространяются только системы с нулевым сильным зарядом адроны, имеющие размеры того же радиуса конфайнмента.

Приведенная нами аналогия с распространением калибровочных векторных бозонов в среде не является полной, поскольку необходимо,

чтобы вакуум как среда сохранял инвариантность относительно группы Пуанкаре - группы симметрии пространства-времени Минковского.

Из этого сразу следует, что вакуумные средние могут быть только глобальными скалярными величинами, а не тензорами высших рангов и не зависящими от координат и времени величинами.

Простейшая реализация такого сценария - скалярное поле с вакуумным средним.

Механизм Хиггса для векторного поля по (??? мб Киселеву?)

Исходное калибровочно инвариантное действие включает в себя комплексное скалярное поле и векторный калибровочный бозон

$$S = \int d^4x \left\{ (\nabla_\mu \Phi)^* \nabla_\mu \Phi - \frac{\lambda}{4} \left(\Phi^* \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \right\}$$

где $\nabla_\mu = \partial_\mu + ie\mathcal{A}_\mu(x)$.

Калибровочную свободу преобразования полей зафиксируем условием, исключаящим произвол в изменении комплексной фазы скалярного поля, например,

$$\text{Im}\Phi \equiv 0$$

Тогда это поле записывается в виде, учитывающем спонтанное нарушение калибровочной симметрии вакуумом,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \{v + \chi(x)\}$$

Тогда (check!!!)

$$(\nabla_\mu \Phi)^* \nabla^\mu \Phi = \frac{1}{2} \{(\partial_\mu \chi)^2 + e^2(v + \chi(x))^2 \mathcal{A}_\mu^2\}$$

Подставим и сгруппируем:

$$S = S_0 + S_{\text{int}}$$

где

$$S_0 = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} m_{\mathcal{A}}^2 \mathcal{A}_\mu^2 \right\}$$

при $m_{\mathcal{A}}^2 = e^2 v^2$, $m_\chi^2 = \frac{1}{2} \lambda v^2$. И также

$$S_{\text{int}} = \int d^4x \left\{ -\frac{\lambda}{4} \left(v\chi^3 + \frac{\chi^4}{4} \right) + \frac{e^2}{2} (2v\chi + \chi^2) \mathcal{A}_\mu^2 \right\}.$$

и здесь χ называют бозоном Хиггса.

Масса этого бозона определяется самодействием поля и его вакуумным средним.

Это же вакуумное среднее задает параметр $m_{\mathcal{A}}$ в S_0 .

Запишем уравнения движения для свободного калибровочного поля, проварьировав S_0 по $\mathcal{A}_\nu$ (??? проделаю потом, проверю), так называемое уравнение Прока:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -m_{\mathcal{A}}^2 \mathcal{A}^\nu.$$

Поскольку свертка симметричного тензора с антисимметричным тождественно равна нулю: $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv 0$, сразу найдем

$$\partial_\nu \mathcal{A}^\nu = 0$$

т.е. условие Лоренца является следствием уравнения Прока.

Тогда

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu) = \partial^2 \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu \mathcal{A}^\mu) = \partial^2 \mathcal{A}^\nu$$

Значит, уравнение Прока дает

$$(\partial^2 + m_A^2) \mathcal{A}^\nu = 0$$

откуда находим закон дисперсии для свободных плоских монохроматических волн

$$A^\nu \mapsto \varepsilon^\nu e^{-ikx} \rightarrow k^2 - m_A^2 = 0, \quad \varepsilon^\nu \neq 0$$

и следовательно, калибровочное векторное поле, взаимодействующее с вакуумным полем v бозона Хиггса, приобретает массу m_A .

Степени свободы поля Хиггса

У этого поля временная компонента не распространяется (в действие не входит производная по времени от $\mathcal{A}_0$), она не является динамической, и в отсутствие источников мы можем положить $\mathcal{A}_0 \equiv 0$.

Таким образом, после спонтанного нарушения локальной калибровочной симметрии в системе остаются 4 динамических степени свободы: бозон Хиггса и 3 поляризации массивного калибровочного векторного поля, что согласуется с подсчетом физических степеней свободы в системе вне зависимости от сохранения или нарушения симметрии и выбора калибровки: 2 степени свободы комплексного скалярного поля + 4 степени свободы 4-векторного поля - 1 степень свободы локального калибровочного преобразования - 1 степень свободы нединамической компоненты $\mathcal{A}_0$: $2 + 4 - 1 - 1 = 4$ Взаимодействие полей включает в себя, конечно, самодействие хиггсовского поля и его линейное и квадратичное взаимодействие с массивным векторным полем.

Пропагатор

(????????????????)

Пропагатор массивного вещественного поля легко найти стандартным методом, если записать квадратичный по полю вклад (??? где??) в виде

$$\frac{1}{2} \mathcal{A}^\mu \hat{\Gamma}_{\mu\nu} \mathcal{A}^\nu, \quad \hat{\Gamma}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} (p^2 - m_A^2) + p_\mu p_\nu$$

Тогда в импульсном представлении пропагатор

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(p) = i\Gamma_{\mu\nu}^{-1}$$

так что с причинным условием Фейнмана для обхода полюсов получаем

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(p) = \frac{i}{p^2 - m_A^2 + i0} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m_A^2} \right)$$

Механизм Хиггса и скалярного поля

В модели можно добавить другие поля.

Например, пусть вещественное скалярное поле $\varphi(x)$ имеет лагранжиан вида

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \lambda_\varphi \varphi^2 \Phi^* \Phi$$

с безразмерной константой Юкавы $\lambda_\varphi > 0$.

Тогда при спонтанном нарушении симметрии это поле приобретает массу за счет взаимодействия с вакуумным средним бозона Хиггса:

$$m_\varphi^2 = \lambda_\varphi v^2$$

Для спинорных полей конструкция похожа, чуть сложнее: пусть задано правое вейлевское поле $\bar{\chi}$ с тем же зарядом, что и у поля Хиггса Φ , и в той же группе внутренней симметрии, а также нейтральное по отношению группы внутренней симметрии левое вейлевское поле θ , причем калибровочно и релятивистски инвариантное взаимодействие юкавского типа имеет вид

$$\mathcal{L}_Y = -\lambda_Y (\Phi^* \bar{\theta} \bar{\chi} + \chi \theta \Phi)$$

Тогда при фиксированном значении вакуумного поля Хиггса $\langle \Phi \rangle = v/\sqrt{2}$ вейлевские поля образуют дираковский спинор с массой

$$m_D = \lambda_Y \frac{v}{\sqrt{2}}$$

В этом смысле говорят, что хиггсовский бозон обуславливает наличие массы у элементарных частиц, взаимодействующих с вакуумом как средой распространения.

В Стандартной модели калибровочных взаимодействий фотон и переносчики сильного взаимодействия - глюоны - являются нейтральными по отношению к бозону Хиггса и они остаются безмассовыми, в то время как переносчики слабого взаимодействия - W- и Z-бозоны - взаимодействуют с полем Хиггса и приобретают массу, что обуславливает короткодействие сил слабого взаимодействия.

Кроме того, все известные фермионные поля: электроны и другие лептоны, а также компоненты адронной материи кварки, - все они, кроме нейтрино, приобретают массу за счет эффекта Хиггса

Intuitive explanation of Higgs effect (???)

(?? I heard nonsenses about it, maybe one day I'll write a good intuitive explanation)

9.2.6 Other about Spontaneous Symmetry Breaking and Higgs Mechanism

глава 8 райдер КТП, мб так же и здесь пропишу

Применения СНС (???)

(укажу, где они нужны, потом)

суть спонтанного нарушения симметрий

3) В калибровочных же теориях СНС приводит к совершенно новому явлению: частицы Голдстоуна отсутствуют, а некоторые (или все) калибровочные поля становятся массивными.

Это показывается в случае как абелевой, так и неабелевой модели.

теорема Голдстоуна

суть теоремы Голдстоуна

потом впишу, читал уже

классические соображения остаются справедливыми и в квантовой теории, то есть из СНС вытекает существование безмассовых частиц.

В этом состоит теорема Голдстоуна.

голдстоуновский бозон в двух словах

хз

число голдстоуновских частиц

В общем случае, когда лагранжиан инвариантен относительно группы симметрии G , но основное состояние (вакуум) инвариантно только относительно подгруппы H , число голдстоуновских частиц равно $\dim G/H$.

о теореме Голдстоуна в случае квантовых полей

для полноты параграф пропишу

нарушение неабелевых симметрий**примеры СНС**

(как пропишу теорию - сразу займусь рассмотрением примеров)

ферромагнетизм иллюстрирует явление спонтанного нарушения симметрии

хз, у райдера мб это есть

Сверхпроводимость

4) Сверхпроводимость является примером теории с СНС В электродинамике, т.е. абелевой калибровочной теории.

9.3 Other General Properties of Fields**9.3.1 Connection of Wavefunction in QM and Classical Field****Поля и волновые функции по Степаньянцу**

Попытаемся теперь более аккуратно установить соответствие между полями, которые исследуются в классической теории поля, и волновыми функциями частиц, которые рассматриваются в квантовой механике. При этом основное внимание здесь будет уделяться исследованию свободных полей, для которых функция Лагранжа является квадратичной. Одним из самых простых и наглядных примеров такого рода является комплексное массивное скалярное поле с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi.$$

Уравнением движения для этого лагранжиана будет уравнение Клейна-Гордона-Фока (2.2). Общее решение этого уравнения было

получено в Части 2.1. Рассмотрим его частный случай, который соответствует плоской волне. При этом часто удобно считать, что система помещена в кубический ящик со стороной $L \rightarrow \infty$, так что объем пространства равен L^3 . Кроме того, на решение уравнений движения будем накладывать дополнительное условие периодичности

$$\phi(t, x, y, z) = \phi(t, x - L, y, z) = \phi(t, x, y + L, z) = \phi(t, x, y, z + L)$$

Тогда одним из решений уравнения Клейна-Гордона-Фока будет

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2L^3\omega_{\mathbf{k}}}} a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

где $a_{\mathbf{k}}$ - некоторая постоянная, а $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. При этом из условия периодичности следует, что $\mathbf{k} = 2\pi\mathbf{N}/L$, где $\mathbf{N}$ - вектор, проекции которого являются целыми числами. Величины $\omega_{\mathbf{k}}$ и L^3 добавлены в знаменатель для удобства дальнейших обозначений. После этого можно легко вычислить энергию, импульс и заряд, которые соответствуют этому решению (Задача 1), подставляя решение (2.124) в заряды, полученные по теореме Нетер:

$$E = \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}; \quad \mathbf{P} = \mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}; \quad q = -e a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}. \quad (2.125)$$

(Спин скалярного поля, очевидно, равен 0.) Если положить $a_{\mathbf{k}} = 1$, то получится полевая конфигурация, которая представляет собой волновую функцию частицы, для которой четырехвектор энергии-импульса равен $k^\mu = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$, а заряд $-(-e)$. Поскольку при этом $k_\mu^2 = m^2$, то масса такой частицы будет равна m .

Аналогичным образом можно рассмотреть и другое частное решение уравнения Клейна-Гордона-Фока, которое имеет противоположный знак перед ω . Мы будем записывать его как

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2L^3\omega_{\mathbf{k}}}} b_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

где $b_{\mathbf{k}}$ - некоторая постоянная. В квантовой механике волновая функция частицы пропорциональна $\exp(-iEt)$. Поэтому, если интерпретировать такое решение как волновую функцию частицы, то энергия окажется отрицательной, что, вообще говоря, нежелательно. Поэтому для решений типа (2.126) мы будем отождествлять волновую функцию частицы с величиной $\phi^C \equiv \phi^*$. (Знак C обозначает т.н. операцию зарядового сопряжения, о которой мы еще будем говорить далее.) Тогда (Задача 1)

$$E = \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*; \quad \mathbf{P} = \mathbf{k} b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*; \quad q = e b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*.$$

Заметим, что в классической теории поля величина $b_{\mathbf{k}}$ представляет собой некоторое число, благодаря чему $b_{\mathbf{k}}^*$ и $b_{\mathbf{k}}$ можно записывать в произвольном порядке. Однако при переходе к квантовой теории поля порядок записи будет существенен. Поэтому мы сохранили тот порядок, который возникает с самого начала. Если положить величину $b_{\mathbf{k}}$ равной 1, то четырехвектор энергии-импульса окажется равным $(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$, а заряд частицы - $+e$. Заметим, что знак заряда по сравнению с решением (2.124) изменился на противоположный. Поэтому решения типа (2.126) описывают т.н. античастицы, у которых все заряды имеют противоположные знаки.

Connection of wave function and classical field through quantum field

(it is well-known how they are connected, so I'll write also statements from this side. Will I get statements before???)

Wrong ideas about what is the connection of wave functions and classical fields

(there are a lot of things to add here, later)

9.3.2 Decomposition of Fields into Modes

Theory of decomposition into modes

В общем случае решение уравнения Клейна-Гордона-Фока можно представить в виде

$$\phi = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2L^3\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}}).$$

Тогда, в соответствии с результатом Задачи 1,

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*); \quad \mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*)$$

$$q = -e \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} - b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*)$$

Поэтому величины $|a_{\mathbf{k}}|^2$ и $|b_{\mathbf{k}}|^2$ можно интерпретировать как вероятности того, что частица или античастица соответственно находятся в состоянии с импульсом $\mathbf{k}$.

В случае, если скалярное поле является вещественным и описывается функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2,$$

решение уравнения Клейна-Гордона-Фока можно записывать в виде

$$\phi = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2L^3 \omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k}\mathbf{x}})$$

Другими словами, в этом случае $a_{\mathbf{k}} = b_{\mathbf{k}}$. Как следствие, частицы и античастицы совпадают, что является следствием равенства $\phi^C = \phi^* = \phi$. При этом подстановка решения уравнения Клейна-Гордона-Фока в заряды, получаемые по теореме Нетер, приводит к равенствам (здесь мы уже учитываем, что в классической теории a и a^* коммутируют)

$$E = \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}; \quad \mathbf{P} = \mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}; \quad q = 0.$$

Выясним теперь, как будут выглядеть сохраняющиеся величины для электромагнитного поля A_{μ} . Оно является вещественным и (как показано в Части 2.2) в калибровке Лоренца также удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона-Фока. При этом его Фурье-образ удовлетворяет условию $k_{\mu} A^{\mu}(k) = 0$. Кроме того, с помощью остаточной калибровочной инвариантности можно добиться того, чтобы $A_0(k) = 0$. Поэтому величину $A_{\mu}(k)$ можно разложить по базису $e_{\mathbf{k},\mu}^1$ и $e_{\mathbf{k},\mu}^2$, так что $e_{\mathbf{k},\mu}^{(a)} = (0, -\mathbf{e}_{\mathbf{k}})$, а $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(a)} \mathbf{k} = 0$. Кроме того, мы будем предполагать, что векторы $(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(1)}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(2)}, \mathbf{k})$ образуют правую тройку. ($e_{\mathbf{k},\mu}^{(a)}$ будут свои для каждого $\mathbf{k}$.) Тогда можно записать решение уравнений движения для калибровочного поля в виде

$$A_{\mu} = \sum_{\mathbf{k},a} \frac{1}{\sqrt{2L^3 \omega_{\mathbf{k}}}} \left(e_{\mathbf{k},\mu}^{(a)} a_{\mathbf{k},a} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + e_{\mathbf{k},\mu}^{(a)*} a_{\mathbf{k},a}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right)$$

где $a_{\mathbf{k},a}$ - некоторые числовые коэффициенты, индекс a пробегает значения 1 и 2, а $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2} = |\mathbf{k}|$. Далее так же будет удобно построить величины

$$a_{\mathbf{k},\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\mathbf{k},1} \mp i a_{\mathbf{k},2}); \quad e_{\mathbf{k},\mu}^{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e_{\mathbf{k},\mu}^{(1)} \pm i e_{\mathbf{k},\mu}^{(2)} \right),$$

в терминах которых поле A_{μ} можно записать в виде

$$A_{\mu} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2L^3 \omega_{\mathbf{k}}}} \left(\left(e_{\mathbf{k},\mu}^{(+)} a_{\mathbf{k},+} + e_{\mathbf{k},\mu}^{(-)} a_{\mathbf{k},-} \right) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \text{к.с.} \right).$$

Подставляя разложение вектора A_{μ} в тензор энергии-импульса (2.79) после несложных преобразований, выполненных в Задаче 2, получаем, что

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k},-}^* a_{\mathbf{k},+} + a_{\mathbf{k},-}^* a_{\mathbf{k},-}); \quad \mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (a_{\mathbf{k},+}^* a_{\mathbf{k},+} + a_{\mathbf{k},-}^* a_{\mathbf{k},-})$$

(В этом равенстве уже учтено, что числа a и a^* можно переставлять местами. Но при выводе этой формулы в Задаче 2 мы не использовали этого утверждения.)

В Приложении А.6 показано, что состояния безмассовой частицы характеризуются величиной спиральности, т.е. проекцией спина на направление импульса. Эта величина для электромагнитного поля вычислена в Задаче 3, где показано, что

$$\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{n} (a_{\mathbf{k},+}^* a_{\mathbf{k},+} - a_{\mathbf{k},-}^* a_{\mathbf{k},-})$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор, направленный вдоль импульса волны. Это равенство можно интерпретировать следующим образом: состояния, которые соответствуют $a_{\mathbf{k},-}$, имеют спин 1, направленный вдоль импульса, а состояния, которые соответствуют $a_{\mathbf{k},+}$, имеют спин -1 , направленный против импульса. Другими словами, спиральность состояний с $a_{\mathbf{k},+}$ равна 1, а спиральность состояний с $a_{\mathbf{k},-}$ равна -1 . Заметим, что состояния со спиральностью, равной 0, в данном случае отсутствуют.

Как и в Части 2.2 интересно сравнить случаи массивного и безмассового векторных полей. В массивном случае решение уравнений движения также можно записать в виде (2.133), но при этом индекс a будет пробегать значения от 1 до 3, а $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Векторы $e_{\mathbf{k},\mu}^{(a)}$, $a = 1, 2, 3$, по определению являются взаимно ортогональными, имеют квадрат, равный -1 , а также удовлетворяют условию $k^\mu e_{\mathbf{k},\mu}^{(a)} = 0$. В Задаче 2 показано, что вектор энергии-импульса массивного векторного поля записывается в виде

$$P'' = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},a} k^\mu (a_{\mathbf{k},a}^\times a_{\mathbf{k},a} + a_{\mathbf{k},a} a_{\mathbf{k},a}^*) = \sum_{\mathbf{k},a} k^\mu a_{\mathbf{k},a}^* a_{\mathbf{k},a}$$

где $k'' = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$. (Первое выражение получается, если нигде не переставлять местами коэффициенты a^* и a .)

В Задаче 4 показано, что в системе отсчета, где частица покоится, третья компонента спина записывается в виде

$$S_3 = (a_{0,+}^* a_{0,+} - a_{0,-}^* a_{0,-}),$$

причем $a_{0,\pm}$ определяются точно так же, как и в безмассовом случае. Из этого выражения следует, что для состояния, у которого отлична от 0 только $a_{0,-} = 1$, третья компонента спина в системе покоя равна $S_3 = 1$, для состояния с $a_{0,-} = 1$ равна $S_3 = -1$ и, наконец, для состояния с $a_{0,3} = 1$ равна $S_3 = 0$. Полезно взглянуть на этот результат с точки зрения теории групп и алгебр Ли. В Приложении А.6 показано, что в массивном случае состояния образуют представления алгебры Ли группы вращений $SO(3)$. Такие представления исследованы в Приложении А.5, где покажем, что неприводимые представления характеризуются целым или полуцелым числом j , причем значения третьей компоненты момента могут пробегать значения от $-j$ до j с шагом 1. Очевидно, что в случае массивного векторного поля указанный выше набор состояний образует базис в пространстве представления с $j = 1$, которое соответствует векторному представлению группы $SO(3)$.

В общем случае также несложно убедиться, что величина спина в массивном случае или спиральности в безмассовом случае на самом деле определяется представлением группы Лоренца, в котором лежит то или иное поле. Действительно, рассмотрим некоторую полевую конфигурацию ϕ_i , которая является собственным вектором оператора импульса $i\partial^\mu$ с собственным значением $k^\mu = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$, причем $\omega_{\mathbf{k}} > 0$. Тогда импульс этого состояния будет равен

$$P^m = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_i)} \partial^m \phi_i = -ik^m \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_i)} \phi_i.$$

(Заметим, что это выражение построено с помощью канонического тензора энергии-импульса. При переходе к симметризованному тензору энергии-импульса необходимо учесть дополнительное слагаемое $\partial_\alpha t^{\alpha\mu\nu}$, которое обсуждалось в Части 2.3.2. Поскольку нас интересует случай $\mu = 0$, то в силу антисимметрии тензора t по μ и α , это дополнительное слагаемое содержит только полные производные по пространственным координатам, которые исчезают при интегрировании по трехмерному пространству.) Если дополнительно наложить условие

$$\int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_i)} \phi_i = i,$$

то импульс рассматриваемого состояния будет равен $\mathbf{k}$. Затем в массивном случае мы перейдем в систему покоя, где $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$, а в безмассовом случае направим импульс вдоль третьей оси, так что $k^\mu = (E, 0, 0, E)$. После этого вычислим проекцию вектора спина на третью ось или, эквивалентно, компоненту S_{12} тензора спина

$$S_{\alpha\beta} = \int d^3x S_{\alpha\beta}^0 = -i \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_i)} (T_{\alpha\beta})_i{}^j \phi_j.$$

При этом мы будем предполагать, что рассматриваемая полевая конфигурация является собственным вектором эрмитового генератора группы Лоренца T_{12} с собственным значением λ , т.е.

$$(T_{12})_i{}^j \phi_j = \lambda \phi_i.$$

Тогда из формул (2.141) и (2.142) следует, что $S_3 = S_{12} = \lambda$. Поэтому в безмассовом случае спиральность, а в массивном случае - третья компонента вектора спина в системе покоя на самом деле определяются тем представлением, по которому поле преобразуется под действием группы Лоренца.

В случае, если рассматривается отрицательно-частотное состояние (например, состояние (2.126)), то его можно считать собственным вектором оператора $P^\mu = i\partial^\mu$ с собственным значением $-k^\mu = (-\omega_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k})$. Тогда аналогичным образом получается, что $S_3 = -\lambda$. (В этом случае проекция спина будет равна собственному значению оператора спина, действующего на зарядово-сопряженное состояние.)

Energy, momenta, charge of a scalar field

Вычислить энергию, импульс и заряд для свободного комплексного скалярного поля $\phi = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2L^3\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}})$.

Мы выяснили, что решение уравнения Клейна-Гордона-Фока можно записать в виде

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} -\frac{1}{\sqrt{2L^3\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}})$$

где $a_{\mathbf{k}}$ и $b_{\mathbf{k}}$ - некоторые коэффициенты, а L - длина стороны кубического ящика, в который помещена система. Подставим это выражение в формулу для энергии скалярного поля

$$E = \int d^3x (\partial_0 \phi^* \partial_0 \phi + \partial_t \phi^* \partial_i \phi + m^2 \phi^* \phi)$$

и используем равенство

$$\frac{1}{L^3} \int d^3x e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{p}}.$$

Для того чтобы убедиться в его справедливости, заметим, что если начало координат расположить в центре куба, внутри которого находится система, то при $k = 2\pi n/L \neq 0$

$$\int_{L/2}^{L/2} dx \frac{1}{L} e^{-ikx} = \frac{i}{kL} (e^{-ikL/2} - e^{ikL/2}) = 0$$

в силу условия периодичности, а при $k = 0$

$$\int_{L/2}^{L/2} dx \frac{1}{L} e^{-ikx} = \int dx \frac{1}{L} = 1.$$

Принимая во внимание, что если $\mathbf{p} = \pm \mathbf{k}$, то $\omega_{\mathbf{p}} = \omega_{\mathbf{k}}$, мы легко получаем, что

$$\begin{aligned} E = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} \int d^3x \frac{1}{2L^3 \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{p}}}} & \left[(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{p}} + \mathbf{k} \mathbf{p} + m^2) (a_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}})t - i\mathbf{k} \mathbf{x}} e^{i\mathbf{p} \mathbf{x}} + b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}})t - i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \mathbf{x}}) + \right. \\ & \left. + (-\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{p}} - \mathbf{k} \mathbf{p} + m^2) (a_{\mathbf{p}}^* b_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} e^{i\omega_{\mathbf{p}} t - i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \mathbf{x}} + b_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}})t - i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \mathbf{x}}) \right] = \\ & = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*). \end{aligned}$$

Аналогичным образом вычисляется импульс скалярного поля, выражение для которого можно легко получить из формулы для тензора энергии-импульса:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = - \int d^3x (\partial \phi^* \partial_0 \phi + \partial_0 \phi^* \partial \phi) = \\ = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} \int d^3x \frac{1}{2L^3 \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{p}}}} & \left[(\mathbf{p} \omega_{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \omega_{\mathbf{p}}) (a_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}})t + i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \mathbf{x}} - b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}})t - i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \mathbf{x}} - \right. \\ & \left. - a_{\mathbf{p}}^* b_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}})t + 2(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \mathbf{x}} - b_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}})t + i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \mathbf{x}}) \right] = \\ & = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*). \end{aligned}$$

Электрический заряд в рассматриваемой теории может быть получен из формулы (2.108), если положить в ней калибровочное поле равным 0. Его вычисление осуществляется тем же самым способом:

$$\begin{aligned} Q = -ie \int d^3x (\phi^* \partial_0 \phi - \partial_0 \phi^* \phi) = -e \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} \int d^3x \frac{1}{2L^3 \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{p}}}} \times \\ \times [(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}}) (a_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}})t + i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \mathbf{x}} - b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}})t - i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \mathbf{x}}) - \\ - (\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}}) (a_{\mathbf{p}}^* b_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}})t - i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \mathbf{x}} - b_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}})t - i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \mathbf{x}})] = \\ = -e \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} - b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*). \end{aligned}$$

Energy and momenta of a massive electromagnetic field

Вычислить энергию и импульс электромагнитного и массивного векторного полей, представленных в виде $A_{\mu} = \sum_{\mathbf{k}, a} \frac{1}{\sqrt{2L^3 \omega_{\mathbf{k}}}} \left(e_{\mathbf{k}, \mu}^{(a)} a_{\mathbf{k}, a} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k} \mathbf{x}} + e_{\mathbf{k}, \mu}^{(a)} a_{\mathbf{k}, a}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k} \mathbf{x}} \right)$.

Вначале рассмотрим безмассовый случай. В соответствии с результатами Части 2.3.2 энергия и импульс электромагнитного поля записываются в виде

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2); \quad \mathbf{P} = \int d^3x [\mathbf{E} \times \mathbf{H}].$$

Для вычисления этих величин вначале построим выражения для электрического и магнитного полей. При этом необходимо учитывать, что с помощью остаточных калибровочных преобразований можно добиться того, чтобы $A_\mu = (0, -\mathbf{A})$. Пространственные компоненты векторов $e_{\mathbf{k},\mu}$ мы будем обозначать через $-\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$, так что

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}, a=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2L^3\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(a)} a_{\mathbf{k},a} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(a)*} a_{\mathbf{k},a}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right).$$

Поскольку $A_0 = 0$, то электрическое поле оказывается равным

$$\mathbf{E} = -\partial_0 \mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} i \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2L^3}} \left(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(a)} a_{\mathbf{k},a} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} - \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(a)*} a_{\mathbf{k},a}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right)$$

Для вычисления магнитного поля необходимо заметить, что поскольку векторы $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(1)}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(2)}$ и $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ образуют правую тройку, то

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(1)}] = \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(2)}; \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(2)}] = -\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(1)}.$$

Как следствие,

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} i \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2L^3}} \left(\left(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(2)} a_{\mathbf{k},1} - \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(1)} a_{\mathbf{k},2} \right) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \left(\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(1)*} a_{\mathbf{k},2}^* - \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(2)*} a_{\mathbf{k},1}^* \right) e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right).$$

Несложно видеть (см. далее), что при подстановке электрического и магнитного полей в выражения для энергии и импульса электромагнитного поля возникают величины

$$\frac{1}{L^3} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\mathbf{p}\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{p}}; \quad \frac{1}{L^3} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\mathbf{p}\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{p}}.$$

Если $\mathbf{k} = -\mathbf{p}$, то мы будем полагать, что

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(1)} = \mathbf{e}_{-\mathbf{k}}^{(1)}, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(2)} = -\mathbf{e}_{-\mathbf{k}}^{(2)}.$$

образовывали бы правую тройку.

С помощью этих формул после несложных преобразований получаем, что

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) = \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, a} \int d^3x \frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{p}}}}{2L^3} (a_{\mathbf{p},a}^* a_{\mathbf{k},a} + a_{\mathbf{k},a} a_{\mathbf{p},a}^*) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}})t + i(\mathbf{k} - \mathbf{p})\mathbf{x}} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, a=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k},a}^* a_{\mathbf{k},a} + a_{\mathbf{k},a} a_{\mathbf{k},a}^*) \end{aligned}$$

(Все остальные слагаемые либо равны 0 в силу формулы (2.157) или ортогональности векторов $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(1)}$ и $\mathbf{e}_{+\mathbf{k}}^{(2)}$, либо взаимно уничтожаются.) В терминах величин $a_{\mathbf{k},=}$ это выражение можно эквивалентно переписать в виде

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k},+}^* a_{\mathbf{k},-} + a_{\mathbf{k},+} a_{\mathbf{k},-}^* + a_{\mathbf{k},-}^* a_{\mathbf{k},-} + a_{\mathbf{k},-} a_{\mathbf{k},-}^*).$$

Поскольку в классической теории поля величины a и a^* представляют собой некоторые функции, то это выражение можно эквивалентно записать в виде (2.136)

Аналогичным образом можно вычислить вектор импульса электромагнитного поля. Принимая во внимание, что

$$\left[\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(1)} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(2)} \right] = \mathbf{n},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$, а результат интегрирования по d^3x отличен от 0 только при $\mathbf{p} = \pm\mathbf{k}$, после несложных преобразований получим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int d^3x [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, a=1}^2 \mathbf{n} \int d^3x \frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{p}}}}{2L^3} (a_{\mathbf{p},a}^* a_{\mathbf{k},a} + a_{\mathbf{k},a} a_{\mathbf{p},a}^*) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}})t - i(\mathbf{k} - \mathbf{p})\mathbf{x}} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, a=1}^2 \mathbf{n} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{p},a}^* a_{\mathbf{k},a} + a_{\mathbf{p},a} a_{\mathbf{k},a}^*) \end{aligned}$$

При этом было принято во внимание, что все остальные слагаемые исчезают при суммировании по импульсам, например,

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{p}}{\omega_{\mathbf{p}}} a_{-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} e^{2i\omega_{\mathbf{p}}t} = - \sum_{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{p}}{\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} e^{-2i\omega_{\mathbf{p}}t} = 0.$$

Рассмотрим теперь случай массинного векторного поля. Вначале необходимо построить выражение для симметризованного тензора энергии-импульса. Это делается полностью аналогично рассмотренному ранее случаю электродинамики. В качестве исходной точки необходимо взять лагранжиан (2.33), из которого получается, что канонический тензор энергии-импульса равен

$$T_{\mu\nu} = -\partial_{\nu} A_{\alpha} F_{\mu}^{\alpha} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^2 - \frac{1}{2} m^2 \eta_{\mu\nu} A_{\alpha}^2.$$

Симметризованный тензор получается так же, как и в электродинамике, и при учете уравнения движения (2.34) может быть записан как

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} + \partial_{\alpha} (A_{\nu} F_{\mu}^{\alpha}) = \\ &= -F_{\mu}^{\alpha} F_{\nu\alpha} + m^2 A_{\mu} A_{\nu} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^2 - \frac{1}{2} m^2 \eta_{\mu\nu} A_{\alpha}^2. \end{aligned}$$

Однако несложно убедиться, что при вычислении энергии и импульса оба записанных выше тензора дают одинаковый результат. Действительно,

$$\int d^3x (\Theta_{0\nu} - T_{0\nu}) = \int d^3x \partial^{\alpha} (A_{\nu} F_{0\alpha}) = - \int d^3x \partial_i (A_{\nu} F_{0i}) = 0,$$

поскольку мы предполагаем, что все поля достаточно быстро убывают на пространственной бесконечности. С учетом уравнения $\partial_{\alpha} A^{\alpha} = 0$ канонический тензор энергии-импульса можно, в свою очередь, переписать в виде

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -\partial_{\nu} A_{\alpha} \partial_{\mu} A^{\alpha} + \partial_{\alpha} (\partial_{\nu} A^{\alpha} A_{\mu}) + \\ &+ \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_{\alpha} A_{\beta})^2 - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} (A^{\beta} A^{\alpha}) - \frac{1}{2} m^2 \eta_{\mu\nu} A_{\alpha}^2 \end{aligned}$$

При вычислении энергии и импульса с полными производными можно отбросить. Действительно, нас интересует случай $\mu = 0$, и мы можем отбрасывать

полные производные по пространственным переменным. При $\mu = 0$ полные производные по времени возникают из выражения

$$\partial_0 (\partial_\nu A_0 A_0) - \frac{1}{2} \eta_{0\nu} \partial_0^2 (A_0^2) = \frac{1}{2} \partial_0 (\partial_\nu - \eta_{0\nu} \partial_0) (A_0^2).$$

При $\nu = 0$ это выражение оказывается равным 0, а при $\nu = 1, 2, 3$ - полной производной по пространственным координатам. Поэтому выражение для энергии-импульса массивного векторного поля может быть переписано в виде

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu} = \int d^3x \left(-\partial^\nu A_\alpha \partial^0 A_\alpha + \frac{1}{2} \eta^{0\nu} (\partial_\beta A_\alpha)^2 - \frac{1}{2} m^2 \eta^{0\nu} A_\alpha^2 \right)$$

Это выражение очень похоже на выражение для энергии-импульса для вещественного скалярного поля и отличается от него только знаком и наличием индекса α . Принимая во внимание, что векторы $e_\alpha^{(a)}$ удовлетворяют условию

$$e_{\mathbf{k},\alpha}^{(a)} e_{\mathbf{k}}^{a(b)} = -\delta^{ab},$$

из выражения для энергии-импульса скалярного поля получаем, что

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},a=1}^3 \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k},a}^* a_{\mathbf{k},a} + a_{\mathbf{k},a} a_{\mathbf{k},a}^*); \quad \mathbf{P} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},a=1}^3 \mathbf{k} (a_{\mathbf{k},a}^* a_{\mathbf{k},a} + a_{\mathbf{k},a} a_{\mathbf{k},a}^*).$$

Spin vector of an electromagnetic field

Вычислить вектор спина для электромагнитного поля

$$A_\mu = \sum_{\mathbf{k},a} \frac{1}{\sqrt{2L^3 \omega_{\mathbf{k}}}} \left(e_{\mathbf{k},\mu}^{(a)} a_{\mathbf{k},a} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + e_{\mathbf{k},\mu}^{(a)} a_{\mathbf{k},a}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right).$$

В качестве исходной точки рассмотрим выражения для тензора спина

$$S_{\alpha\beta}^\mu = F^\mu{}_\beta A_\alpha - F^\mu{}_\alpha A_\beta,$$

При вычислении энергии и импульса слагаемые с полными производными можно отбросить. Действительно, нас интересует случай $\mu = 0$, и мы можем отбрасывать полные производные по пространственным переменным. При $\mu = 0$ полные производные по времени возникают из выражения

$$\partial_0 (\partial_\nu A_0 A_0) - \frac{1}{2} \eta_{0\nu} \partial_0^2 (A_0^2) = \frac{1}{2} \partial_0 (\partial_\nu - \eta_{0\nu} \partial_0) (A_0^2).$$

При $\nu = 0$ это выражение оказывается равным 0, а при $\nu = 1, 2, 3$ - полной производной по пространственным координатам. Поэтому выражение для энергии-импульса массивного векторного поля может быть переписано в виде

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu} = \int d^3x \left(-\partial^\nu A_\alpha \partial^0 A_\alpha + \frac{1}{2} \eta^{0\nu} (\partial_\beta A_\alpha)^2 - \frac{1}{2} m^2 \eta^{0\nu} A_\alpha^2 \right)$$

Это выражение очень похоже на выражение для энергии-импульса для вещественного скалярного поля и отличается от него только знаком и наличием индекса α . Принимая во внимание, что векторы $e_\alpha^{(a)}$ удовлетворяют условию

$$e_{\mathbf{k},\alpha}^{(a)} e_{\mathbf{k}}^{a(b)} = -\delta^{ab},$$

из выражения для энергии-импульса скалярного поля получаем, что

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, a=1}^3 \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k},a}^* a_{\mathbf{k},a} + a_{\mathbf{k},a} a_{\mathbf{k},a}^*) ; \quad \mathbf{P} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, a=1}^3 \mathbf{k} (a_{\mathbf{k},a}^* a_{\mathbf{k},a} + a_{\mathbf{k},a} a_{\mathbf{k},a}^*) .$$

3. Вычислить вектор спина для электромагнитного поля (2.133). В качестве исходной точки рассмотрим выражения для тензора спина

$$S_{\alpha\beta}^{\mu} = F^{\mu}_{\beta} A_{\alpha} - F^{\mu}_{\alpha} A_{\beta},$$

которое справедливо как для безмассового, так и для массивного векторных полей. В четырехмерном пространстве-времени можно определить вектор спина с помощью равенства

$$S_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int d^3x S_{jk}^0 = -\varepsilon_{ijk} \int d^3x E_j A_k.$$

Принимая во внимание, что $A_{\mu} = (\varphi, -\mathbf{A})$, он переписывается в виде

$$\mathbf{S} = - \int d^3x [\mathbf{A} \times \mathbf{E}]$$

Подставим в эту формулу выражения для потенциала электромагнитного поля $\mathbf{A}$ и электрического поля $\mathbf{E}$. Поскольку векторы $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(1)}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(2)}$ и $\mathbf{n}$ образуют правую тройку, то

$$[\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(1)} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(2)}] = \mathbf{n}$$

В результате после несложных преобразований получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= - \int d^3x [\mathbf{A} \times \mathbf{E}] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{n} (a_{\mathbf{k}+}^* a_{\mathbf{k}+} + a_{\mathbf{k}+} a_{\mathbf{k}-}^* - a_{\mathbf{k}-}^* a_{\mathbf{k}-} - a_{\mathbf{k}-} a_{\mathbf{k}+}^*) \end{aligned}$$

Last component of spin vector

Найти выражение для третьей компоненты вектора спина частицы, которая соответствует массивному векторному полю, в системе отсчета, где она покоится.

(??? why is this important???)

Покоящаяся частица описывается волновой функцией, для которой $\mathbf{k} = 0$:

$$A_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2L^3 m}} \sum_{a=1}^3 e_{0,\mu}^{(a)} (a_{0,a} e^{-imt} + a_{0,a}^* e^{imt})$$

При этом мы будем считать, что $e_{0,\mu}^{(a)} = (0, -\mathbf{e}_0^{(a)})$, а векторы $\mathbf{e}_0^{(a)}$ совпадают с единичными ортами декартовой системы координат, так что $e_0^{i(a)} = \delta^{za}$. Подставим выражение для A_{μ} в формулу для третьей компоненты вектора спина

$$S_3 = \int d^3x S_{12}^0 = - \int d^3x (F_{01} A_2 - F_{02} A_1) = \int d^3x (E_x \Lambda_y - E_y \Lambda_x)$$

При этом

$$\mathbf{E} = i \sqrt{\frac{m}{2L^3}} \sum_{a=1}^3 \mathbf{e}_0^{(a)} (a_{0,a} e^{-imt} - a_{0,a}^* e^{imt})$$

а третья компонента спина в системе отсчета, где частица покоится, будет равна

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{i}{2L^3} \sum_{a,b=1}^3 \int d^3x e^{1(a)} (a_{0,a} e^{-imt} - a_{0,a}^* e^{imt}) e^{2(b)} (a_{0,b} e^{-imt} + a_{0,b}^* e^{imt}) - (1 \leftrightarrow 2) = \\ &= \frac{i}{2} (a_{0,1} e^{-imt} - a_{0,1}^* e^{imt}) (a_{0,2} e^{-imt} + a_{0,2}^* e^{imt}) - (1 \leftrightarrow 2) = \\ &= -\frac{i}{2} (a_{0,1}^* a_{0,2} + a_{0,2} a_{0,1}^* - a_{0,2}^* a_{0,1} - a_{0,1} a_{0,2}^*) = a_{0,+}^* a_{0,+} - a_{0,-}^* a_{0,-} \end{aligned}$$

(??? what did we get???)

9.3.3 Temperature of Fields: Basic Concepts

Обсудим, что такое температура полей, приведем примеры.

(вводный в это все раздел, потом допишу, see cond matter or stat phys about it for now, a topic for a whole book - FT at finite temperatures)

9.3.4 The Choice of Field for Describing a System (??!!)

У нас много есть вариантов: скалярное, векторное, спинорные разных рангов. И так получается, что иногда мы вообще объект считаем частицей, иногда берем просто скалярное поле и забываем обо всём остальном, а иногда берем спинорное и не понимаем, что с ним делать? Приведем полный обзор, какое брать и почему?

(вообще, типа из постановки задачи все это и берется, а так в абстрактном смысле - не готов еще ответить.)

(пока это больше про КТП, в теории поля можно многое делать и не знать ответ на этот вопрос)

О системах и явлениях, описываемых хорошо скалярным полем (???)

Скалярное поле берется тогда, когда?????

(про какие-то вектора Герца теория, которая еще не вписана.)

(?? почему температуру в телах мы не описываем полем Клейна-Гордона? или описываем, просто у нас придел его имеется???)

О системах и явлениях, описываемых хорошо векторным полем (???)

О системах и явлениях, описываемых хорошо спинорными полями (???)

9.3.5 Invariants of Fields

(see section about ED for now, later I'll write here a general theory for other fields...)

9.3.6 Other Properties of Fields

(тут не такие актуальные)

Репараметризационная инвариантность

Суть

(потом напишу)

О нетривиальности этого условия (????)

(тут тот вопрос Пироженко, с которым мы и приехали. потом напишу его, спрошу у умных людей. I forgot all this)

9.4 Overview of Experiments that are Described by Field Theory

(this is an important question, because one might think that we are just writing formulas and that is all. many people indeed do this. but there are still many experiments that should be explained by them! and not only in electrodynamics or particle physics! because these parts do not need really field theory and many theoretical properties. so, here I'll make an overview of effects that are explained from theory that is only in this note, not in other my notes on basic physics)

10 Scalar Fields

10.1 Properties of a Scalar Field

Here, we will derive many properties of scalar field. These derivations are rather straightforward and conceptually very easy (but not always mathematically easy).

10.1.1 Real Scalar Field

Обсудим задачи о скалярном вещественном поле.

Обзор применений скалярного вещественного поля

(тип скалярные частицы вроде будут им описываться и все. плюс на нем иллюстрируют все, что будет дальше использоваться. just a motivational paragraph)

скалярное поле с источником

Пусть вещественное скалярное поле $\chi(t, x)$ взаимодействует с источником $\rho(t, x)$. Лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_t \chi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \chi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \chi^2 + \rho \chi$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа дают

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \chi + m^2 \chi = \rho$$

Решается методом Фурье. Запишем:

$$\chi(t, x) = \int \frac{d_2 p}{(2\pi)^2} \tilde{\chi}(\omega, p) e^{-i\omega t + i p x}, \quad \rho(t, x) = \int \frac{d_2 p}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}(\omega, p) e^{-i\omega t + i p x}$$

Подставим:

$$(-\omega^2 + p^2 + m^2) \tilde{\chi}(\omega, p) = \tilde{\rho}(\omega, p)$$

откуда

$$\tilde{\chi}(\omega, p) = -\frac{\tilde{\rho}(\omega, p)}{\omega^2 - \omega_p^2},$$

где $\omega_p = \sqrt{p^2 + m^2}$.

В качестве (частного) решения имеем

$$\chi(t, x) = - \int \frac{d_2 p}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{\rho}(\omega, p)}{\omega^2 - \omega_p^2} e^{-i\omega t + ipx}$$

Вычислим в общем виде обратное преобразование Фурье для произведения двух фурье образов:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f_1(\omega) f_2(\omega) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int dt_1 e^{i\omega t_1} f_1(t_1) \int dt_2 e^{i\omega t_2} f_2(t_2)$$

После интегрирования по ω получаем

???

О других способах решения (??)

(они есть или нет? пока не слышал, потом подумаю.)

явный вид скалярного поля в конкретных примерах

общее решение представлено интегралом, который не много что-то говорит нам, так что посмотрим примеры.

(мб графики добавлю, мб функции разные приведу)

(по идее просто пару мод если выделить, то вот и частные случаи. напишу это потом. так ли вообще это?)

О применениях скалярного поля

(укажу их тут, пока не думал про это.)

10.1.2 Complex Scalar Field, Mode Decomposition

Обсудим задачи о скалярном комплексном поле.

(??? I'll connect it with theory above where I already wrote about modes!!)

Разложение по модам (??)

We shall now extend the treatment of the last section to the complex Klein-Gordon field. The new feature this introduces is, as we know from Section 2.4, that we can associate a conserved charge with the field. For the real field this was not possible. We shall concentrate on this aspect of a conserved charge. In other respects, the real and complex fields are very similar, and we shall only quote the main results leaving verification to the reader. For the complex Klein-Gordon field, the Lagrangian density (3.4) is replaced by

$$\mathcal{L} = N (\phi^\dagger, {}_\alpha \phi^\alpha - \mu^2 \phi^\dagger \phi)$$

where we have at once written the quantized operator as a normal product. The field ϕ and its adjoint $\phi^\dagger$, treated as independent fields, lead to the Klein-Gordon equations

$$(\square + \mu^2) \phi(x) = 0, \quad (\square + \mu^2) \phi^\dagger(x) = 0.$$

The fields conjugate to ϕ and $\phi^\dagger$ are

$$\pi(x) = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^\dagger(x), \quad \pi^\dagger(x) = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(x)$$

and the equal-time commutation relations (2.31) become

$$\left. \begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] &= i\hbar c^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= [\phi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{x}', t)] = [\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] \\ &= [\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}'(\mathbf{x}', t)] = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Analogously to Eqs. (3.7), we write the Fourier expansions of the fields as

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} [a(\mathbf{k})e^{-ikx} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}]$$

and

$$\phi^\dagger(x) = \phi^{\dagger+}(x) + \phi^{\dagger-}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} [b(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}]$$

($\phi^{\dagger+}$ and $\phi^{\dagger-}$ are the positive and negative frequency parts of $\phi^\dagger$.) From Eqs. (3.25) and (3.26a), one obtains the commutation relations

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

and the commutator of any other pair of operators vanishes, i.e.

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [b(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] = [a(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] = 0$$

From the commutation relations (3.27), it follows that we can interpret $a(\mathbf{k})$ and $a^\dagger(\mathbf{k})$, and $b(\mathbf{k})$ and $b^\dagger(\mathbf{k})$, as absorption and creation operators of two types of particles - we shall call them a -particles and b -particles - and

$$N_a(\mathbf{k}) = a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}), \quad N_b(\mathbf{k}) = b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}),$$

as the corresponding number operators with eigenvalues $0, 1, 2, \dots$. Hence a number representation can be set up as before, with states containing a - and b -particles generated by means of the creation operators $a^\dagger$ and $b^\dagger$ from the vacuum state $|0\rangle$, which is now defined by

$$a(\mathbf{k})|0\rangle = b(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \quad \text{all } \mathbf{k}$$

or equivalently by

$$\phi^+(x)|0\rangle = \phi^{\dagger+}(x)|0\rangle = 0, \quad \text{all } x.$$

Expressed in terms of the absorption and creation operators, the energy-momentum operator (2.51) of the complex Klein-Gordon field assumes the form we expect

$$P^\alpha = (H/c, \mathbf{P}) = \sum_{\mathbf{k}} \hbar k^\alpha (N_a(\mathbf{k}) + N_b(\mathbf{k}))$$

We now turn to the charge. From the invariance of the Lagrangian density (3.22) under the phase transformation (2.41) follows the conservation of charge Q , Eq. (2.42), which now takes the form

$$Q = \frac{-iq}{\hbar c^2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{N} [\phi^\dagger(x)\phi(x) - \phi(x)\phi^\dagger(x)].$$

The corresponding charge-current density is given by

$$s^\alpha(x) = (c\rho(x), \mathbf{j}(x)) = \frac{-iq}{\hbar} \mathbf{N} \left[\frac{\partial \phi^\dagger}{\partial x_\alpha} \phi - \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \phi^\dagger \right]$$

which obviously satisfies the continuity equation

$$\frac{\partial s^\alpha(x)}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Expressed in terms of creation and absorption operators, Eq. (3.31) becomes

$$Q = q \sum_{\mathbf{k}} [N_a(\mathbf{k}) - N_b(\mathbf{k})]$$

which clearly commutes with the Hamiltonian H , Eq. (3.30). It follows from Eq. (3.34) that one must associate charges $+q$ and $-q$ with a - and b -particles, respectively. Apart from the sign of the charge, a - and b -particles have identical properties. Furthermore, the theory is completely symmetric between them, as one sees from Eqs. (3.26)-(3.34). Interchanging a and b merely changes the sign of Q . This result is not restricted to spin 0 bosons, but holds generally. The occurrence of antiparticles in association with all particles of non-zero charge is a fundamental feature of relativistic quantum field theory, which is fully vindicated by experiment. An example of a particle-antiparticle pair is the pair of charged pi-mesons. Taking $q = e(> 0)$, one can identify the π^+ - and π^- -mesons with the a - and b -particles of the complex Klein-Gordon field. On the other hand, for a real field, the charge operator Q , Eqs. (3.31) or (3.34), is identically zero, and such a field corresponds to a neutral meson, such as the π^0 .

The above considerations are not restricted to electric charge. The invariance of the Lagrangian density $\mathcal{F}$ under phase transformations would allow conservation of additive quantities, which by analogy one would call some kind of charge other than electric. The above argument would lead to the occurrence of pairs of particles and antiparticles differing from each other in the sign of this new kind of charge. Because of this, even electrically neutral particles may possess antiparticles. This situation does occur in nature. The electrically neutral pseudo-scalar K^0 -meson possesses an antiparticle, the $\bar{K}^0$ -meson, which is also electrically neutral. K^0 and $\bar{K}^0$ possess opposite hypercharge, $Y = \pm 1$, and are represented by a complex Klein-Gordon field ϕ . Hypercharge is very nearly conserved (unlike electric charge, which is always exactly conserved), which is why it is a useful concept. To be specific, hypercharge is conserved in the strong interactions which are responsible for nuclear forces and associated production of strange particles, but it is not conserved in the weak interactions (about 10^{12} times weaker than the strong interactions) responsible for the decay of strange particles. Instead of treating the complex Klein-Gordon field directly in terms of ϕ and $\phi^\dagger$ as independent fields, as we have done, one can define two real Klein-Gordon fields, ϕ_1 and ϕ_2 , by

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2),$$

and use these as independent fields. We shall not give the development in terms of the real fields as the two approaches are closely related and very similar. Since the fields ϕ_1 and ϕ_2 are real, the creation and annihilation operators associated with them cannot describe charged particles, and it is only linear combinations of them, corresponding to the complex fields (3.35), which describe charged particles. Consequently, when dealing with conserved charges, it is, in general, more natural to work directly with the complex fields.

Covariant Commutation Relations

While the equations of motion obtained using the Lagrangian formalism are manifestly covariant, this is not so obvious for the field commutation relations derived by the canonical formalism, since these single out equal times. Taking the real Klein-Gordon field as a typical

example, we shall illustrate the covariance of the commutation relations by calculating the commutator $[\phi(x), \phi(y)]$ for two arbitrary space-time points x and y . Since this commutator is a scalar, it must equal an invariant function. Writing $\phi = \phi^+ + \phi^-$, we note that

$$[\phi^+(x), \phi^+(y)] = [\phi^-(x), \phi^-(y)] = 0,$$

since ϕ^+ (ϕ^-) contains only absorption (creation) operators. Hence

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi^+(x), \phi^-(y)] + [\phi^-(x), \phi^+(y)]$$

and we need only evaluate the first commutator on the right-hand side of this equation. From Eqs. (3.7) one obtains

$$\begin{aligned} [\phi^+(x), \phi^-(y)] &= \frac{\hbar c^2}{2V} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-ikx+ik'y} \\ &= \frac{\hbar c^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-ik(x-y)} \end{aligned}$$

where we have taken the limit $V \rightarrow \infty$ [see Eq. (1.48)], and in the last integral $k_0 = \omega_{\mathbf{k}}/c$. We introduce the definition

$$\Delta^+(x) \equiv \frac{-ic}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-ikx}, \quad k_0 = \omega_{\mathbf{k}}/c$$

since this and related functions will occur repeatedly. ³ Eq. (3.38) can then be written

$$[\phi^+(x), \phi^-(y)] = i\hbar c \Delta^+(x - y),$$

and

$$[\phi^-(x), \phi^+(y)] = -i\hbar c \Delta^+(y - x) \equiv i\hbar c \Delta^-(x - y),$$

defining the function $\Delta^-(x)$. From Eqs. (3.40), (3.41) and (3.37) we obtain the commutation relation

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\hbar c \Delta(x - y)$$

with $\Delta(x)$ defined by

$$\Delta(x) \equiv \Delta^+(x) + \Delta^-(x) = \frac{-c}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} \sin kx.$$

We see that $\Delta(x)$ is a real odd function, as required by the commutation relation (3.42), which (like $\Delta^\pm$) satisfies the Klein-Gordon equation

$$(\square_x + \mu^2) \Delta(x - y) = 0.$$

The Δ -function (3.43) can be written

$$\Delta(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - \mu^2) \varepsilon(k_0) e^{-ikx}$$

where $d^4k = d^3\mathbf{k} dk_0$, the k_0 -integration is over $-\infty < k_0 < \infty$ and $\varepsilon(k_0)$ is defined by

$$\varepsilon(k_0) = \frac{k_0}{|k_0|} = \begin{cases} +1, & \text{if } k_0 > 0 \\ -1, & \text{if } k_0 < 0. \end{cases}$$

The equivalence of the definitions (3.43) and (3.45) is easily established; for example, by writing the δ -function in Eq. (3.45) as

$$\delta(k^2 - \mu^2) = \delta[k_0^2 - (\omega_{\mathbf{k}}/c)^2] = \frac{c}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left[\delta\left(k_0 + \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{c}\right) + \delta\left(k_0 - \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{c}\right) \right]$$

and performing the k_0 -integration. The invariance of $\Delta(x)$ under proper Lorentz transformations (i.e. involving neither space nor time reflections) is obvious from Eq. (3.45), since each factor in the integrand is Lorentz-invariant [$\varepsilon(k_0)$ is invariant since proper Lorentz transformations do not interchange past and future].

The Lorentz-invariance of $\Delta(x)$ enables one to give a new interpretation to the equaltime commutation relation

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = i\hbar c \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}, 0) = 0$$

which we had earlier [Eq. (3.6)].⁴ The invariance of $\Delta(x - y)$ implies that

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\hbar c \Delta(x - y) = 0, \quad \text{for } (x - y)^2 < 0,$$

i.e. the fields at any two points x and y , with space-like separation, commute. Hence if the field is a physical observable, measurements of the fields at two points with space-like separation must not interfere with each other. This is known as microcausality, since for a space-like separation, however small, a signal would have to travel with a velocity greater than the speed of light in order to cause interference, contrary to the special theory of relativity. When discussing the connection between spin and statistics, at the end of Section 4.3, we shall see that the microcausality condition (3.49) is of fundamental importance, even if the field itself is not a physical observable.

A particularly useful way of representing Δ -functions is as contour integrals in the complex k_0 -plane. The functions $\Delta^\pm(x)$ are given by

$$\Delta^\pm(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} \frac{d^4 k e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2}$$

with the contours C^+ and C^- , for Δ^+ and Δ^- respectively, shown in Fig. 3.1. Performing the contour integrations, one picks up the residues from one or other of the poles at $k_0 = \pm\omega_{\mathbf{k}}/c$, and Eq. (3.50) reduces to the definitions (3.39) and (3.41) of $\Delta^\pm(x)$. The function $\Delta(x)$, Eq. (3.43), is represented by the same integral (3.50) with the contour C shown in Fig. 3.1. Other Δ -functions are obtained by a different choice of contour.

The Meson Propagator

We shall now derive and discuss a Δ -function which is of great importance in quantum field theory. Its power and utility, particularly for the development of a systematic covariant perturbation theory, was first fully realized by Feynman. We shall again consider the real Klein-Gordon field.

To start with, we note that the Δ^+ -function can be written as the vacuum expectation value of a product of two field operators. We have from Eq. (3.40) that

$$\begin{aligned} i\hbar c \Delta^+(x - x') &= \langle 0 | [\phi^+(x), \phi^-(x')] | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^+(x) \phi^-(x') | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle. \end{aligned}$$

The Klein-Gordon Field 49 We define the time-ordered or T-product by

$$T \{ \phi(x) \phi(x') \} = \begin{cases} \phi(x) \phi(x'), & \text{if } t > t' \\ \phi(x') \phi(x), & \text{if } t' > t \end{cases}$$

($t \equiv x^0/c$, etc.), i.e. the operators are written in chronological order with time running from right to left: 'earlier' operators operate 'first'. 5 Using the step function

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t > 0 \\ 0, & \text{if } t < 0 \end{cases}$$

the T-product can be written

$$T \{ \phi(x) \phi(x') \} = \theta(t - t') \phi(x) \phi(x') + \theta(t' - t) \phi(x') \phi(x)$$

The Feynman Δ -function Δ_F is defined by the vacuum expectation value of this T-product:

$$i\hbar c \Delta_F(x - x') \equiv \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(x') \} | 0 \rangle.$$

From Eqs. (3.51) and (3.41), this leads to the explicit definition

$$\Delta_F(x) = \theta(t) \Delta^+(x) - \theta(-t) \Delta^-(x)$$

Thus

$$\Delta_F(x) = \pm \Delta^\pm(x). \quad \text{if } t \gtrless 0.$$

We would like to be able to visualize the meaning of Δ_F , Eq. (3.55). For $t > t'$, this vacuum expectation value becomes $\langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle$. We can think of this expression as representing a meson being created at x' , travelling to x , and being annihilated at x . The corresponding expression for $t' > t$, $\langle 0 | \phi(x') \phi(x) | 0 \rangle$, admits a similar interpretation as a meson created at x , propagating to x' , where it is absorbed. These two situations are illustrated schematically in Fig. 3.2. The dashed lines represent the propagation of the meson in the direction of the arrow, from x' to x or vice versa. Hence Δ_F , or the vacuum expectation value (3.55), is referred to as the Feynman propagator for the mesons of the Klein-Gordon field. We shall, briefly, call it the meson propagator, to distinguish it from the fermion and photon propagators to be introduced later. To illustrate how these propagators arise, we shall consider qualitatively nucleon-nucleon scattering. In this process there will be two nucleons, but no mesons, present in the initial and final states (i.e. before and after the scattering). The scattering, i.e. the interaction, corresponds to the exchange of virtual mesons between the nucleons. The simplest such process is the one-meson exchange, schematically illustrated in Fig. 3.3. The continuous lines represent the nucleons, the dashed lines the mesons. As before, two situations arise according to whether $t > t'$ or $t' > t$. In the actual calculation, all values of x and x' are integrated over, corresponding to emission and absorption of the meson occurring at any two space-time points.

It is interesting to note that the division into the two types of process (a) and (b) of Fig. 3.3, depending on whether $t > t'$ or $t' > t$, is not Lorentz-invariant for $(x - x')$, a space-like separation. In this case what constitutes 'later' and what 'earlier' depends on the frame of reference. On the other hand, considering both cases together leads to the covariant Feynman propagator (3.55), which we represent by the single diagram in Fig. 3.4. No time-ordering is implied in this diagram and correspondingly there is no arrow on the meson line.

We have here introduced the ideas of Feynman graphs or diagrams. We shall deal with these fully later and shall see that they are a most useful way of picturing the mathematics. But the reader must be warned not to take this pictorial description of the mathematics as a literal description of a process in space and time. For example, our naive interpretation of the meson propagator would imply that, for $(x - x')$, a space-like separation, the meson travels between the two points with a speed greater than the velocity of light. It is, however, possible to substantiate the above description if, instead of considering propagation between two points

x and x' , one calculates the probability for emission and absorption in two appropriately chosen four-dimensional regions. ⁶

In the following we shall frequently require a representation of the meson propagator, not in coordinate, but in momentum space. This is given by the following integral representation, similar to Eq. (3.50) for $\Delta^\pm(x)$:

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{d^4 k e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2},$$

where the contour C_F is shown in Fig. 3.5. To verify Eq. (3.57), we evaluate the contour integral. For $x^0 > 0$, we must complete the contour C_F in the lower half k_0 -plane [since $\exp(-ik_0 x^0) \rightarrow 0$ for $k_0 \rightarrow -i\infty$], and, comparing Eqs. (3.57) and (3.50), we obtain $\Delta_F(x) = \Delta^+(x)$, in agreement with Eq. (3.56b). For $x^0 < 0$, completion of the contour in the upper half k_0 -plane similarly leads to agreement with Eq. (3.56b).

Instead of deforming the contour as in Fig. 3.5, we can move the poles an infinitesimal distance η off the real axis, as shown in Fig. 3.6, and perform the k_0 -integration along the whole real axis, i.e. we replace Eq. (3.57) by

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k e^{-ikx}}{k_0^2 - \left(\frac{\omega_k}{c} - i\eta\right)^2} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon},$$

where $\varepsilon = 2\eta\omega_k/c$ is a small positive number which we let tend to zero after integration. In Eq. (3.58), integration with respect to each of the four variables $k_0, \dots, k_3$ is along the whole real axis $(-\infty, \infty)$

The arguments of this section at once generalize to the case of the complex scalar field, discussed in Section 3.2. The charged meson propagator is now given by

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi^\dagger(x') \} | 0 \rangle = i\hbar c \Delta_F(x - x'),$$

where $\Delta_F(x)$ is the same function [Eqs. (3.56)-(3.58)] as for the real field. The interpretation of the vacuum expectation value (3.59) in terms of the emission, propagation and reabsorption of particles or antiparticles, depending on whether $t' < t$ or $t' > t$, is left to the reader.

Уравнения движения скалярного поля по Киселеву КТП

Для поля ϕ^* уравнения Эйлера

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} \Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2) \phi = 0$$

Уравнения для поля ϕ получаются комплексным сопряжением из (Д.71).

Поскольку уравнения движения линейные, наиболее общее решение можно представить в виде суперпозиции плоских монохроматических волн

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \{ a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_c^*(\mathbf{k}) e^{ikx} \}$$

где согласно (Д.71) волновой вектор удовлетворяет уравнению массовой поверхности

$$k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = m^2,$$

а временная компонента $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ выбрана положительной. Нормировочный фактор $1/\sqrt{2k_0}$ введен для придания амплитудам $a(\mathbf{k})$ и $a_c(\mathbf{k})$, отвечающим, как говорят,

положительно и отрицательно частотным решениям, определенного физического смысла, который будет ясен из дальнейшего. Такая нормировка называется нерелятивистской.

Функция Гамильтона $H \equiv \int d^3r \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_0 \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^*)} \partial_0 \phi^* - \mathcal{L} \right\}$ равна

$$H = \int d^3r \left\{ 2\partial_0 \phi^* \partial_0 \phi - \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + m^2 \phi^* \phi \right\}, = \int d^3r \left\{ \partial_0 \phi^* \partial_0 \phi + \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi \right\}$$

Подставим в (Д.74) решение (Д.72):

$$\begin{aligned} H = & \int d^3r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2k'_0}} \\ & \times \left\{ (-ik_0 a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + ik_0 a_c^*(\mathbf{k}) e^{ikx})^* \left(-ik'_0 a(\mathbf{k}') e^{-ik'x} + ik'_0 a_c^*(\mathbf{k}') e^{ik'x} \right) \right. \\ & + (ika(\mathbf{k}) e^{-ikx} - ika_c^*(\mathbf{k}) e^{ikx})^* \left(ik'a(\mathbf{k}') e^{-ik'x} - ik'a_c^*(\mathbf{k}') e^{ik'x} \right) \\ & \left. + m^2 (a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_c^*(\mathbf{k}) e^{ikx})^* \left(a(\mathbf{k}') e^{-ik'x} + a_c^*(\mathbf{k}') e^{ik'x} \right) \right\} \end{aligned}$$

Затем интегрирование даст для

$$\int d^3r e^{\pm i(k-k')x} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

так что интеграл по штрихованному импульсу приведет к $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ и $k'_0 = k_0$ с общим фактором в виде

$$\{a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a_c^*(\mathbf{k})a_c(\mathbf{k})\} (k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2) = 2k_0^2 \{a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a_c^*(\mathbf{k})a_c(\mathbf{k})\}$$

Аналогично интегрирование даст для

$$\int d^3r e^{\pm i(k+k')x} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$$

так что интеграл по штрихованному импульсу приведет к $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ и $k'_0 = k_0$ с общим фактором в виде

$$\{a^*(\mathbf{k})a_c^*(-\mathbf{k}) + a_c(\mathbf{k})a(-\mathbf{k})\} (-k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2) = 0$$

В итоге, функция Гамильтона для комплексного скалярного поля

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_0 \{a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a_c^*(\mathbf{k})a_c(\mathbf{k})\}$$

Отсюда видно, что независимые величины

$$N(\mathbf{k}) = a^*(\mathbf{k})a(\mathbf{k}), \quad N_c(\mathbf{k}) = a_c^*(\mathbf{k})a_c(\mathbf{k}),$$

задают плотность числа массивных осцилляторов в частотой $k_0 = \sqrt{k^2 + m^2}$ в пространстве волнового вектора.

Моды и пропагатор скалярного поля

Для квантованного комплексного скалярного поля

$$\hat{\Phi}(x) = \int \frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \{e^{-ikx} \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}) + e^{ikx} \hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(\mathbf{k})\}$$

необходимо четко подчеркнуть связь положительно- и отрицательночастотных мод с пропагатором. А именно, при вычислении вакуумного матричного элемента оператора поля $\hat{\Phi}(x)$ после его действия на состояние с одним квантом $|\mathbf{k}\rangle$, которое описывает частицу с импульсом $\mathbf{k}$ в начальном состоянии, получается положительночастотная мода,

$$\langle 0 | \hat{\Phi}(x) | \mathbf{k} \rangle = e^{-ikx},$$

а для начального состояния античастицы положительночастотная мода получается при вычислении вакуумного матричного элемента после действия на состояние кванта оператора эрмитово сопряженного поля $\hat{\Phi}^\dagger(x)$,

$$\langle 0 | \hat{\Phi}^\dagger(x) | \mathbf{k}_c \rangle = e^{-ikx}.$$

Ясно, что эрмитово сопряжение этих матричных элементов дает отрицательночастотные моды при вычислении матричных элементов между одночастичными конечными состояниями и вакуумом для следующих полей:

$$\langle \mathbf{k} | \hat{\Phi}^\dagger(x) | 0 \rangle = e^{ikx}, \quad \langle \mathbf{k}_c | \hat{\Phi}(x) | 0 \rangle = e^{ikx}.$$

Поэтому причинная функция Грина, которая строится как вакуумное среднее упорядоченного по времени произведение полей при распространении одночастичных состояний, так, чтобы из вакуума сначала родился, например, квант частицы в момент времени y_0 (эрмитово сопряженное поле $\hat{\Phi}^\dagger(y)$ подействовало на вакуум), а потом этот квант исчез в момент времени $x_0 > y_0$ (поле $\hat{\Phi}(x)$ подействовало на состояние с одной частицей), отвечает следующему матричному элементу:

$$\langle 0 | T \{ \hat{\Phi}(x) \hat{\Phi}^\dagger(y) \} | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{i}{k^2 - m^2 + i0}.$$

Это значит, что при графическом изображении пропагатора заряженной частицы необходимо указывать стрелкой направление распространения заряда: частица распространяется, если $x_0 > y_0$, а если $y_0 > x_0$, то распространяется античастица.

Charge conjugation symmetry

Интересно, что причинная функция Грина зарядово сопряженного поля выражается через исходные поля в виде

$$\langle 0 | T \{ \hat{\Phi}_C(x) \hat{\Phi}_C^\dagger(y) \} | 0 \rangle = \langle 0 | T \{ \xi^* \hat{\Phi}^\dagger(x) \xi \hat{\Phi}(y) \} | 0 \rangle = \langle 0 | T \{ \hat{\Phi}^\dagger(x) \hat{\Phi}(y) \} | 0 \rangle, \quad (3.61)$$

так что она отвечает перестановке упорядочивания по времени в сравнении с двухточечным коррелятором исходного скалярного поля (3.60), а значит, установленная нами связь с модами поля и эрмитово сопряженного поля соответствует тому, что античастица распространяется, если $x_0 > y_0$, а если $y_0 > x_0$, то распространяется частица. Как видим, частицы и античастицы поменялись местами по сравнению с пропагатором исходного скалярного поля, как собственно и следовало ожидать в зарядово сопряженном мире!

Time reversal symmetry

В этом же ключе рассмотрим и причинную функцию Грина для поля в пространстве-времени с обращенной стрелой времени, $t \xrightarrow{\mathbb{T}} t_{\mathbb{T}} = -t$. Согласно преобразованию полей (3.42)

$$\hat{\Phi}_{\mathbb{T}}(t_{\mathbb{T}}, r) = \zeta^* \hat{\Phi}(t, r) = \zeta^* \hat{\Phi}(-t_{\mathbb{T}}, r),$$

запишем пропагатор

$$\begin{aligned} \langle 0 | T_{\mathbb{T}} \left\{ \hat{\Phi}_{\mathbb{T}}(t_{\mathbb{T}}, \mathbf{r}) \hat{\Phi}_{\mathbb{T}}^{\dagger}(t'_{\mathbb{T}}, \mathbf{r}') \right\} | 0 \rangle &= \langle 0 | T_{\mathbb{T}} \left\{ \hat{\Phi}(-t_{\mathbb{T}}, \mathbf{r}) \hat{\Phi}^{\dagger}(-t'_{\mathbb{T}}, \mathbf{r}') \right\} | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | T_{\mathbb{T}} \left\{ \hat{\Phi}(t, \mathbf{r}) \hat{\Phi}^{\dagger}(t', \mathbf{r}') \right\} | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что, во-первых, согласно первой строке в формуле (3.62) распространение поля в пространстве-времени с обращенной стрелой времени эквивалентно распространению исходного поля с обратным упорядочиванием по времени (обратите внимание на знак временного аргумента поля). Во-вторых, во второй строке формулы (3.62) перейдем к упорядочиванию по исходному времени t , например, $\{t > t'\} \equiv \{t'_{\mathbb{T}} > t_{\mathbb{T}}\}$, а значит,

$$\langle 0 | T_{\mathbb{T}} \left\{ \hat{\Phi}(t, \mathbf{r}) \hat{\Phi}^{\dagger}(t', \mathbf{r}') \right\} | 0 \rangle = \langle 0 | T \left\{ \hat{\Phi}^{\dagger}(t', \mathbf{r}') \hat{\Phi}(t, \mathbf{r}) \right\} | 0 \rangle,$$

а поскольку переход от поля к его комплексному сопряжению означает переход к пропагатору зарядово сопряженного поля, как мы только что установили в (3.61), приходим к выводу, что распространение квантов скалярного поля из точки 1 (4-координаты со штрихами) в точку 2 (4-координаты без штрихов) в пространстве-времени с обращенной стрелой времени эквивалентно распространению квантов зарядово сопряженного поля из точки 2 в точку 1. Простыми словами, смена направления движения квантов поля сопровождается заменой частиц на античастицы.

Commutator

Что касается коммутатора полей, который необходимо рассмотреть для выяснения факта отсутствия причинно-следственной связи операторов вне светового конуса, то необходимо напомнить, что комплексное поле построено из двух независимых вещественных полей $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$, так что

$$[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}^{\dagger}(y)] = \frac{1}{2}[\hat{\varphi}_1(x), \hat{\varphi}_1(y)] + \frac{1}{2}[\hat{\varphi}_2(x), \hat{\varphi}_2(y)]$$

а значит, мы имеем дело всё с той же функцией Паули-Йордана, которая обращается в нуль вне светового конуса, и, стало быть, принцип релятивистской причинности, конечно, выполняется.

Строго говоря, для того чтобы изучать причинно-следственные связи операторов в представлении Гейзенберга, а точнее, для того чтобы утверждать, что коммутирующие наблюдаемые величины не изменяют собственных значений друг друга, необходимо рассматривать эрмитово самосопряженные операторы, а значит, нужно вычислять коммутатор эрмитово самосопряженных полей, которые можно построить из комплексного скалярного поля $\hat{\Phi}(x)$ и эрмитово сопряженного к нему поля $\hat{\Phi}^{\dagger}(x)$, например, $\hat{\Phi}(x) + \hat{\Phi}^{\dagger}(x)$, так что

$$[\hat{\Phi}(x) + \hat{\Phi}^{\dagger}(x), \hat{\Phi}(y) + \hat{\Phi}^{\dagger}(y)] = [\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}^{\dagger}(y)] - [\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}^{\dagger}(y)]^{\dagger},$$

где мы учли, что коммутатор комплексного поля с самим полем обращается в нуль, так как в выражение для комплексного поля входят операторы уничтожения частиц и рождения античастиц, которые, конечно, коммутируют. Но, как мы видим, за счет чисто мнимого значения коммутатора поля с эрмитово сопряженным ему полем $[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}^{\dagger}(y)] = -iD(x - y)$, откуда $[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}^{\dagger}(y)]^{\dagger} = iD(x - y)$ искомый коммутатор для

эрмитовых операторов сводится к удвоенному знанию все того же коммутатора поля с его эрмитово сопряженным полем

$$\left[\hat{\Phi}(x) + \hat{\Phi}^\dagger(x), \hat{\Phi}(y) + \hat{\Phi}^\dagger(y) \right] = 2 \left[\hat{\Phi}(x), \hat{\Phi}^\dagger(y) \right] = -2iD(x-y).$$

Поэтому рассмотрение коммутатора поля $\hat{\Phi}(x)$ и эрмитово сопряженного к нему поля $\hat{\Phi}^\dagger(y)$ эквивалентно рассмотрению в рамках принципа причинности для локальных эрмитовых полей. Отметим также, что в случае многокомпонентных полей, например, для фермионов можно ввести суперпозицию этих полей с коэффициентами той же размерности и той же числовой природы, что и многокомпонентное поле, а значит, коэффициенты для фермионного поля должны быть грассмановыми числами, а для бозонных полей - комплексными. Тогда из этих суперпозиций также, как мы только что сделали для комплексного скалярного поля, можно построить эрмитовы величины путем сложения суперпозиции с эрмитово сопряженной суперпозицией. Ясно, что выполнение условия равенства нулю коммутаторов компонент суперпозиции в пространственноподобной области обеспечит равенство нулю коммутатора для эрмитово самосопряженной композиции в пространственноподобной области интервала. Поэтому в дальнейшем мы будем сразу рассматривать коммутаторы поля и эрмитово сопряженного ему поля для бозонов и антикоммутаторы для фермионов.

Тензор энергии-импульса скалярного поля

Плотность функции Гамильтона- Гамильтониан - является временной компонентой тензора энергии-импульса $H = \int d^3r T_0^0$. Канонический тензор поля, согласно теореме Нётер, имеет вид

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi} \partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi^*} \partial_\mu \phi^* - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} = \partial^\nu \phi^* \partial_\mu \phi + \partial^\nu \phi \partial_\mu \phi^* - \delta_\mu^\nu \left\{ \partial_{\mu'} \phi^* \partial^{\mu'} \phi - m^2 \phi^* \phi \right\}.$$

Отсюда для решения в виде плоской монохроматической волны

$$\phi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2k_0}} e^{\mp i k x}$$

легко с учетом $\partial^\alpha = -\nabla_\alpha$ найти, что

$$T_0^0 \mapsto k_0, \quad T_0^\alpha \mapsto k$$

как это и следовало ожидать, исходя из физического смысла плотности энергии и плотности импульса. При этом мы видим, что отрицательные частотные решения отвечают положительному значению плотности энергии, что, впрочем, очевидно, поскольку выражение для T_μ^ν инвариантно относительно замены поля на комплексно сопряженное: $\phi \leftrightarrow \phi^*$.

10.1.3 Discrete Symmetries and Transformations of a Scalar Field

Зарядовое сопряжение по Киселеву

Теория

3.2.1. Зарядовое сопряжение. Поставим сначала вопрос о классической теории поля в пространстве-времени Минковского, в котором вместо частиц движутся античастицы и наоборот, вместо античастиц - частицы. Такой мир называют зарядово сопряженным к наблюдаемому нами исходному миру. Законы динамики в зарядово сопряженном мире

не обязательно совпадают с законами движения в исходном мире. Связь полей в исходном мире с полями в зарядово сопряженном мире устанавливает операция зарядового сопряжения.

В случае комплексного скалярного поля с гамильтонианом H и зарядом Q , которые выражаются через положительно- и отрицательночастотные амплитуды $\alpha(\mathbf{k})$ и $\alpha_c(\mathbf{k})$ согласно (3.21) и (3.22), ясно что зарядовое сопряжение сводится к перестановке этих амплитуд, $\alpha(\mathbf{k}) \leftrightarrow \alpha_c(\mathbf{k})$, так что гамильтониан не меняет знак, а заряд поля меняет знак, что собственно и означает замену частиц на античастицы, так что плотность числа частиц $n_+(\mathbf{k})$ и плотность числа античастиц $n_-(\mathbf{k})$, которые определены в (3.30), преобразуются друг в друга $n_+(\mathbf{k}) \leftrightarrow n_-(\mathbf{k})$. Далее легко заметить, что, если взять классическое скалярное поле

$$\Phi(x) = \int \frac{c d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \{e^{-ikx} \alpha(\mathbf{k}) + e^{ikx} \alpha_c^*(\mathbf{k})\}$$

и его комплексное сопряжение в явном виде

$$\begin{aligned} \Phi^*(x) &= \int \frac{c d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \{e^{ikx} \alpha^*(\mathbf{k}) + e^{-ikx} \alpha_c(\mathbf{k})\} = \\ &= \int \frac{c d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \{e^{-ikx} \alpha_c(\mathbf{k}) + e^{ikx} \alpha^*(\mathbf{k})\}, \end{aligned}$$

то это, как раз, и соответствует перестановке амплитуд $\alpha \leftrightarrow \alpha_c$ для положительночастотных мод и $\alpha_c^* \leftrightarrow \alpha^*$ для отрицательночастотных мод. Поэтому можно определить операцию зарядового сопряжения классического поля в виде

$$\Phi_C(x) = \xi^* \Phi^*(x), \quad \xi = e^{i\gamma}, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma = \text{const.},$$

где мы ввели дополнительный множитель ξ , который, во-первых, сохраняет нормировку поля, так как $|\xi| = 1$, во-вторых, является глобальным, т.е. не зависит от 4-мерных координат пространства-времени Минковского, а значит, он сохраняет вид разложения по положительно- и отрицательночастотным амплитудам в (3.31), и в-третьих, при введении глобального множителя ξ^* действие скалярного поля $\Phi_C(x)$ в точности совпадает с действием для поля $\Phi(x)$, и стало быть, законы движения в зарядово сопряженном мире с полем $\Phi_C(x)$ идентичны законам движения в исходном пространстве-времени Минковского с полем $\Phi(x)$!

Подчеркнем следующие свойства преобразования зарядового сопряжения, которые следуют из выражений для зарядово сопряженного поля (3.32) с учетом явных выражений в (3.31): - положительночастотные моды частиц переходят в положительночастотные моды античастиц, а отрицательночастотные моды античастиц переходят в отрицательночастотные моды частиц, а значит, операция зарядового сопряжения является линейной при действии на суперпозицию положительно- и отрицательночастотных мод, она переводит суперпозицию с комплекснозначными коэффициентами в суперпозицию с теми же комплекснозначными коэффициентами,

- преобразуются только амплитуды частиц и античастиц, они переходят друг в друга, - операция зарядового сопряжения сохраняет нормировку поля, а значит, зарядовое сопряжение представляет собой унитарное линейное преобразование, - зарядовое сопряжение не преобразует ни координаты, ни импульсы, а значит, оно никак не меняет генераторы группы Пуанкаре, что мы уже анонсировали при рассмотрении свойств импульса, момента количества движения и 4-вектора Паули-Любанского в (2.29):

$$\mathbb{C} p^\nu \mathbb{C}^{-1} = p^\nu, \quad \mathbb{C} J_{\mu\nu} \mathbb{C}^{-1} = J_{\mu\nu}, \quad \mathbb{C} W^\nu \mathbb{C}^{-1} = W^\nu.$$

Важно подчеркнуть, что зарядово сопряжение преобразует только заряды, оставляя инвариантными пространственно-временные характеристики поля и его квантов.

Для обобщения операции зарядового сопряжения с классических полей на квантованные поля построим линейный унитарный оператор зарядового сопряжения $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^\dagger \mathbb{C} = \mathbb{1}$, который переводит вакуум в вакуум ¹ с точностью до фазового множителя $\mathbb{C}|0\rangle = \xi_{\text{vac}}|0\rangle$, $\mathbb{C}^\dagger|0\rangle = \xi_{\text{vac}}^*|0\rangle$, $\mathbb{C}^\dagger = \mathbb{C}^{-1}$, а также переводит состояние частицы в состояние античастицы, сохраняя нормировку ², и обратно состояние античастицы - в состояние частицы:

$$\mathbb{C}|\mathbf{k}\rangle = \xi|\mathbf{k}_c\rangle, \quad \mathbb{C}|\mathbf{k}_c\rangle = \xi_c|\mathbf{k}\rangle, \quad |\xi| = |\xi_c| = 1.$$

В силу линейности оператора $\mathbb{C}$ по построению ($\mathbb{C}\xi = \xi\mathbb{C}$ и проч.) сразу устанавливаем, что в случае скалярного поля, для которого состояние с заданным импульсом является невырожденным ³,

$$\mathbb{C}^2|\mathbf{k}\rangle = \xi\xi_c|\mathbf{k}\rangle, \quad \mathbb{C}^2|0\rangle = \xi_{\text{vac}}^2|0\rangle.$$

Отсюда следует, что квадрат зарядового сопряжения пропорционален единичному оператору,

$$\mathbb{C}^2 = \xi\xi_c\mathbb{1} = \xi_{\text{vac}}^2\mathbb{1},$$

и коэффициент пропорциональности, который мы установили при действии $\mathbb{C}^2$ на вакуум и одночастичные состояния, должен быть одним и тем же, а значит,

$$\xi\xi_c = \xi_{\text{vac}}^2$$

Поскольку в квантовой механике квантовые состояния представлены с точностью до общей глобальной фазы, без ограничений общности мы можем положить $\xi_{\text{vac}} = 1$, и стало быть, мы можем положить вакуум фоковского пространства свободных полей инвариантным относительно операции зарядового сопряжения. Тогда заключаем, что

$$\xi\xi_c = 1 \quad \Rightarrow \quad \xi_c = \xi^*,$$

и, кроме того, так как $\mathbb{C}^2 = \mathbb{1}$, обратный оператор при действии на вакуум совпадает с $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C}^{-1} = \mathbb{C}.$$

Используя

$$|\mathbf{k}\rangle = \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle, \quad |\mathbf{k}_c\rangle = \hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle,$$

перепишем действие зарядового сопряжения на одночастичные состояния (3.33) в виде

$$\mathbb{C}\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k})\mathbb{C}^\dagger\mathbb{C}|0\rangle = \xi\hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle, \quad \mathbb{C}\hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(\mathbf{k})\mathbb{C}^\dagger\mathbb{C}|0\rangle = \xi_c\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle,$$

откуда с учетом инвариантности вакуума относительно зарядового сопряжения заключаем, что действие зарядового сопряжения на операторы рождения частиц и античастиц сводится к выражениям

$$\mathbb{C}\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k})\mathbb{C}^\dagger = \xi\hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(\mathbf{k}), \quad \mathbb{C}\hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(\mathbf{k})\mathbb{C}^\dagger = \xi_c\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k}),$$

а после эрмитова сопряжения равенств в (3.34) для операторов уничтожения квантов находим

$$\mathbb{C}\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k})\mathbb{C}^\dagger = \xi^*\hat{\mathbf{a}}_c(\mathbf{k}), \quad \mathbb{C}\hat{\mathbf{a}}_c(\mathbf{k})\mathbb{C}^\dagger = \xi_c^*\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}),$$

что согласуется с преобразованиями амплитуд $\alpha(\mathbf{k})$ и $\alpha_c(\mathbf{k})$ в случае зарядового сопряжения классического поля, и следовательно, оператор зарядово сопряженного поля

$\hat{\Phi}_{\mathbb{C}}(x)$ можно записать как результат следящего действием линейного унитарного оператора $\mathbb{C}$: так что Но

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_{\mathbb{C}}(x) &= \int \frac{c \, d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \{e^{-ikx} \mathbb{C} \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}) \mathbb{C}^\dagger + e^{ikx} \mathbb{C} \hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(\mathbf{k}) \mathbb{C}^\dagger\} \\ &= \int \frac{c \, d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \{e^{-ikx} \xi^* \hat{\mathbf{a}}_c(\mathbf{k}) + e^{ikx} \xi_c \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k})\} \\ &= \xi^* \int \frac{c \, d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \{e^{ikx} \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k}) + e^{-ikx} \hat{\mathbf{a}}_c(\mathbf{k})\} . \\ \Phi^\dagger(x) &= \int \frac{c \, d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \{e^{ikx} \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k}) + e^{-ikx} \hat{\mathbf{a}}_c(\mathbf{k})\} ,\end{aligned}$$

и следовательно, имеет место закон преобразования квантованного скалярного поля (3.37)

Из соотношений для операторов рождения и уничтожения частиц и античастиц (3.34) и (3.35) находим, что операторы числа частиц и античастиц переходят друг в друга,

$$\mathbb{C} \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}) \mathbb{C}^\dagger = \xi \hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(\mathbf{k}) \xi^* \hat{\mathbf{a}}_c(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{a}}_c(\mathbf{k})$$

и

$$\mathbb{C} \hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{a}}_c(\mathbf{k}) \mathbb{C}^\dagger = \xi^* \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k}) \xi \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}),$$

а значит, между этими операторами числа частиц и числа античастиц не возникает относительная фаза, и зарядовое сопряжение меняет знак заряда $\hat{Q} : \mathbb{C} \hat{Q} \mathbb{C}^{-1} = -\hat{Q}$, оставляя инвариантным гамильтониан. При этом, конечно, квантованное действие остается инвариантным.

При рассмотрении распространения квантов поля $\hat{\Phi}(x)$ в разделе 3.2.4 мы обсудим также физический смысл распространения квантов поля $\hat{\Phi}_{\mathbb{C}}(x)$, откуда увидим, что при переходе от $\Phi(x)$ к $\Phi_{\mathbb{C}}(x)$ распространение частиц заменяется на распространение античастиц и обратно!

Операция зарядового сопряжения квантованного поля согласуется с рассмотренным зарядовым сопряжением классического поля, если положить

$$\hat{\Phi}_{\mathbb{C}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \hat{\Phi}(x) \mathbb{C}^\dagger = \xi^* \hat{\Phi}^\dagger(x)$$

О применениях (!!??)

Инверсия времени по Киселеву

Сначала установим связь классического комплексного скалярного поля в исходном пространстве-времени Минковского с классическим полем в пространстве-времени с обращенной стрелой времени. Поскольку поле принимает комплексные значения важно знать, во-первых, как операция инверсии времени действует на комплексные числа, которые, в частности, входят в определение положительно- и отрицательночастотных мод. Во-вторых, необходимо установить связь амплитуд положительно- и отрицательночастотных мод в исходном пространстве-времени Минковского и в пространстве-времени с обратным течением времени. Как мы уже установили в разделе 1.5.3 при обсуждении преобразований операторов момента количества движения и импульса как генераторов группы поворотов и группы трансляций на стр. 46, оператору инверсии стрелы времени $t \xrightarrow{\mathbb{T}} t_{\mathbb{T}} = -t$ отвечает операция с комплексным сопряжением: при инверсии времени мнимая единица меняет знак. Это значит, что положительночастотная мода преобразуется как

$$e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \xrightarrow{\mathbb{T}} e^{i\omega t_{\mathbb{T}} - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{-i\omega t + i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} .$$

Следовательно, положительночастотная мода переходит в положительночастотную, но движение происходит с противоположно направленным вектором импульса, $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$, как и следовало ожидать в случае обращения стрелы времени. Аналогично, для отрицательночастотного решения

$$e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \xrightarrow{\mathbb{T}} e^{-i\omega t_{\mathbb{T}} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{i\omega t - i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}},$$

и опять отрицательночастотные моды движутся в обратном направлении. Значит, если для классического поля

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{c \, d^3 k}{2\omega(2\pi)^3} \{ e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \alpha(\mathbf{k}) + e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \alpha_c^*(\mathbf{k}) \}$$

ввести обозначения для преобразование амплитуд мод под действием операции обращения стрелы времени как

$$\alpha(\mathbf{k}) \xrightarrow{\mathbb{T}} \alpha_{\mathbb{T}}(\mathbf{k}_{\mathbb{T}}), \quad \alpha_c^*(\mathbf{k}) \xrightarrow{\mathbb{T}} \{\alpha_c^*\}_{\mathbb{T}}(\mathbf{k}_{\mathbb{T}}),$$

то при $\mathbf{k}_{\mathbb{T}} = -\mathbf{k}$ получим, что инверсия времени дает поле

$$\Phi(t, \mathbf{r}) \xrightarrow{\mathbb{T}} \Phi_{\mathbb{T}}(t_{\mathbb{T}}, \mathbf{r}) = \int \frac{c \, d^3 k}{2\omega(2\pi)^3} \{ e^{-i\omega t + i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \alpha_{\mathbb{T}}(-\mathbf{k}) + e^{i\omega t - i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \{\alpha_c^*\}_{\mathbb{T}}(-\mathbf{k}) \}.$$

Это поле в пространстве-времени с обращенной стрелой времени можно сравнить с исходным выражением для поля в (3.20), если в (3.20) провести замену переменных интегрирования $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$ и умножить на глобальный множитель ζ , сохраняющий нормировку поля, $|\zeta| = 1$,

$$\zeta^* \Phi(t, \mathbf{r}) = \zeta^* \int \frac{c \, d^3 k}{2\omega(2\pi)^3} \{ e^{-i\omega t + i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \alpha(-\mathbf{k}) + e^{i\omega t - i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \alpha_c^*(-\mathbf{k}) \}$$

Таким образом, переход от исходного поля (3.20) к (3.40) в согласии с тем, как мы получили выше преобразование мод при инверсии стрелы времени в (3.38) и (3.39), соответствует следующему антилинейному преобразованию:

$$\Phi(t, r) \xrightarrow{\mathbb{T}} \Phi_{\mathbb{T}}(t_{\mathbb{T}}, r) = \zeta^* \Phi(t, r) \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\mathbb{T}}(t_{\mathbb{T}}, r) = \zeta^* \Phi(-t_{\mathbb{T}}, r),$$

если при этом потребовать, что амплитуды преобразуются по закону

$$\alpha(\mathbf{k}) \xrightarrow{\mathbb{T}} \alpha_{\mathbb{T}}(\mathbf{k}_{\mathbb{T}}) = \zeta^* \alpha(-\mathbf{k}), \quad \alpha_c^*(\mathbf{k}) \xrightarrow{\mathbb{T}} \{\alpha_c^*\}_{\mathbb{T}}(\mathbf{k}_{\mathbb{T}}) = \zeta^* \alpha_c^*(-\mathbf{k}).$$

Если учесть и преобразование частной производной по времени

$$\partial_t \xrightarrow{\mathbb{T}} \partial_{t_{\mathbb{T}}} = -\partial_t,$$

то описанные преобразования оставляют действие комплексного скалярного поля, квадратичное по частным производным, инвариантным: имеет место симметрия относительно преобразований обращения стрелы времени. Точно такие же выводы и аналог (3.41) теперь несложно получить в квантовом случае: инверсии стрелы времени

$$t \xrightarrow{\mathbb{T}} t_{\mathbb{T}} = -t$$

соответствует действие антилинейного оператора на поле в виде

$$\mathbb{T} \hat{\Phi}(t, r) \mathbb{T}^{-1} \equiv \hat{\Phi}_{\mathbb{T}}(t_{\mathbb{T}}, r) = \zeta^* \hat{\Phi}(t, r) = \zeta^* \hat{\Phi}(-t_{\mathbb{T}}, r)$$

Для полноты изложения отметим, что сохраняющий нормировку состояния антилинейный оператор называется антиунитарным. Действие такого оператора обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} & \text{антилинейность}^1 - \\ & \text{антиунитарность}^2 - \\ & \mathbb{T}(c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle) \stackrel{\text{def}}{=} c_1^* |\mathbb{T}\psi_1\rangle + c_2^* |\mathbb{T}\psi_2\rangle, \\ & \langle \mathbb{T}\Phi | \mathbb{T}\Psi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \Psi | \Phi \rangle = \langle \Phi | \Psi \rangle^*. \end{aligned}$$

Эрмитово сопряженный оператор $\mathbb{T}^\dagger$ для антилинейного определяется соотношением

$$\langle \Phi | \mathbb{T}\Psi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \Psi | \mathbb{T}^\dagger \Phi \rangle.$$

Движение вспять по времени нетривиально формулируется в терминах операторов рождения и уничтожения квантов. В самом деле, если оператор $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k})$ рождает квант с волновым вектором $\mathbf{k}$ в момент времени t , то рассмотрение этого же процесса в обратном направлении по времени означает, что в момент времени $t_{\mathbb{T}} = -t$ происходит уничтожение кванта, который двигался с волновым вектором $-\mathbf{k}$. Рассмотрение этого вопроса мы проведем в разделе 3.2.4 о причинной функции Грина, которая описывает распространение квантов поля во времени.

При описании действия оператора обращения времени на квантовые состояния прежде всего положим, что невырожденный вакуум фоковского пространства квантовых состояний свободных полей остается вакуумом,

$$\mathbb{T}|0\rangle = \zeta_{\text{vac}} |0\rangle, \quad |\zeta_{\text{vac}}| = 1$$

причем в силу антилинейности и антиунитарности оператора инверсии времени

$$\langle 0 | (\mathbb{T}|0\rangle) = \langle 0 | (\mathbb{T}^\dagger|0\rangle) = \zeta_{\text{vac}} \Rightarrow \mathbb{T}^\dagger|0\rangle = \zeta_{\text{vac}} |0\rangle,$$

отсюда антилинейность оператора $\mathbb{T}$ (обратите внимание, что $\mathbb{T}\zeta = \zeta^*\mathbb{T}$) дает

$$\mathbb{T}^\dagger|0\rangle = \mathbb{T}(\zeta_{\text{vac}} |0\rangle) = \zeta_{\text{vac}}^* \mathbb{T}|0\rangle = \zeta_{\text{vac}}^* \zeta_{\text{vac}} |0\rangle = |0\rangle,$$

и стало быть, при действии на вакуум квадрат оператора обращения времени сводится к тождественному преобразованию. Этот вывод справедлив только для невырожденного состояния. В случае вырождения какого-либо состояния, например, по проекции спина на заданную ось квадрат оператора обращения стрелы времени может быть равен тождественному преобразованию, умноженному на минус единицу. Но мы не будем рассматривать этот вопрос подробно.

Для одночастичных состояний в гейзенберговском представлении (квантовые состояния в фоковском пространстве не зависят от времени, а вся динамика движения описывается зависимостью операторов от времени) действие оператора инверсии времени переводит кванты с импульсом $\mathbf{k}$ в кванты, которые движутся в обратном направлении,

$$\mathbb{T}|\mathbf{k}\rangle = \zeta |-\mathbf{k}\rangle, \quad \mathbb{T}|\mathbf{k}_c\rangle = \zeta_c |-\mathbf{k}_c\rangle$$

причем антиунитарность $\mathbb{T}$ требует, чтобы нормировка состояний сохранялась, так что множители для частиц и античастиц должны иметь единичную норму,

$$|\zeta| = |\zeta_c| = 1.$$

В полной аналогии с выкладками, которые мы проделали в случае с зарядовым сопряжением, найдем

$$\mathbb{T}\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k})\mathbb{T}^\dagger\mathbb{T}|0\rangle = \zeta\hat{\mathbf{a}}^\dagger(-\mathbf{k})|0\rangle, \quad \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k})\mathbb{T}^\dagger\mathbb{T}|0\rangle = \zeta\hat{\mathbf{a}}^\dagger(-\mathbf{k})|0\rangle$$

откуда с учетом действия оператора инверсии времени на состояние вакуума находим

$$\mathbb{T}\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k})\mathbb{T}^\dagger = \zeta_{\text{vac}}^* \zeta \hat{\mathbf{a}}^\dagger(-\mathbf{k}), \quad \mathbb{T}\hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(\mathbf{k})\mathbb{T}^\dagger = \zeta_{\text{vac}}^* \zeta_c \hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(-\mathbf{k})$$

Эрмитово сопряжение выражений (3.49) дает формулы для действия оператора инверсии времени на операторы уничтожения частиц и античастиц

$$\mathbb{T}\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k})\mathbb{T}^\dagger = \zeta_{\text{vac}} \zeta^* \hat{\mathbf{a}}(-\mathbf{k}), \quad \mathbb{T}\hat{\mathbf{a}}_c(\mathbf{k})\mathbb{T}^\dagger = \zeta_{\text{vac}} \zeta_c^* \hat{\mathbf{a}}_c(-\mathbf{k})$$

Действие оператора инверсии времени на квантовое поле при $t \mapsto t_{\mathbb{T}} = -t$

$$\hat{\Phi}(t, \mathbf{r}) = \int \frac{c \, d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \left\{ e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{a}(\mathbf{k}) + e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{a}_c^*(\mathbf{k}) \right\}$$

задается действием линейного унитарного оператора зарядового сопряжения

$$\hat{\Phi}_{\mathbb{T}}(t_{\mathbb{T}}, \mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T}\hat{\Phi}(t, \mathbf{r})\mathbb{T}^\dagger$$

так, что, если считать вакуум инвариантным относительно инверсии времени, а значит, положить $\zeta_{\text{vac}} \equiv 1$, то

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{\mathbb{T}}(t_{\mathbb{T}}, \mathbf{r}) &= \int \frac{c \, d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \left\{ e^{-i\omega t + i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \mathbb{T}\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k})\mathbb{T}^\dagger + e^{i\omega t - i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \mathbf{a} \hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(\mathbf{k})\mathbb{T}^\dagger \right\} = \\ &= \int \frac{c \, d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \left\{ e^{-i\omega t + i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \zeta^* \hat{\mathbf{a}}(-\mathbf{k}) + e^{i\omega t - i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \zeta_c \hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(-\mathbf{k}) \right\} = \\ &= \zeta^* \hat{\Phi}(t, \mathbf{r}) = \zeta^* \hat{\Phi}(-t_{\mathbb{T}}, \mathbf{r}), \end{aligned}$$

только если

$$\zeta^* = \zeta_c.$$

Физический смысл такой связи фазовых множителей ζ и ζ_c довольно прост: если фоксовское пространство квантов скалярного поля в пространстве-времени Минковского построено из состояний частиц и античастиц, то в пространствевремени с обращенной стрелой времени можно построить такое скалярное поле, пространство квантов которого эквивалентно исходному состоянию частиц и античастиц, движущихся с обратным направлением импульса.

Действие свободного комплексного скалярного поля останется инвариантным относительно инверсии времени (3.42).

О применениях (!!??)

Инверсия пространства по Киселеву

3.2.3. Инверсия пространства. При зеркальном отражении пространства

$$\mathbf{r} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbf{r}_{\mathbb{P}} = -\mathbf{r}$$

положительночастотные моды преобразуются как

$$e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \xrightarrow{\mathbb{P}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{\mathbb{P}}} = e^{-i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{-i\omega t + i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}},$$

так как пространственная инверсия - линейная операция, т. е. она переводит суперпозицию с комплексными множителями в суперпозицию с теми же комплексными множителями. Аналогично для отрицательночастотных мод

$$e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \xrightarrow{\mathbb{P}} e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{\mathbb{P}}} = e^{i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{i\omega t - i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}}.$$

Значит, если для классического поля

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{c \, d^3 k}{2\omega(2\pi)^3} \{e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \alpha(\mathbf{k}) + e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \alpha_c^*(\mathbf{k})\}$$

ввести обозначения для преобразование амплитуд мод под действием операции зеркальной инверсии пространства как

$$\alpha(\mathbf{k}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha_{\mathbb{P}}(\mathbf{k}_{\mathbb{P}}), \quad \alpha_c^*(\mathbf{k}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \{\alpha_c^*\}_{\mathbb{P}}(\mathbf{k}_{\mathbb{P}}),$$

то при $\mathbf{k}_{\mathbb{P}} = -\mathbf{k}$ получим, что инверсия пространства дает поле

$$\Phi(t, \mathbf{r}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \Phi_{\mathbb{P}}(t, \mathbf{r}_{\mathbb{P}}) = \int \frac{c \, d^3 k}{2\omega(2\pi)^3} \{e^{-i\omega t + i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \alpha_{\mathbb{P}}(-\mathbf{k}) + e^{i\omega t - i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \{\alpha_c^*\}_{\mathbb{P}}(-\mathbf{k})\}.$$

Это поле в пространстве-времени с зеркальной инверсией пространства можно сравнить с исходным выражением для поля в (3.20), если в (3.20) провести замену переменных интегрирования $k \mapsto -k$ и умножить на глобальный множитель η , сохраняющий нормировку поля, $|\eta| = 1$,

$$\eta^* \Phi(t, \mathbf{r}) = \zeta^* \int \frac{c \, d^3 k}{2\omega(2\pi)^3} \{e^{-i\omega t + i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \alpha(-\mathbf{k}) + e^{i\omega t - i(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \alpha_c^*(-\mathbf{k})\}$$

Таким образом, переход от исходного поля (3.20) к (3.54) в согласии с тем, как мы получили выше преобразование мод при зеркальной инверсии пространства в (3.52) и (3.53), соответствует следующему линейному преобразованию:

$$\Phi(t, \mathbf{r}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \Phi_{\mathbb{P}}(t, \mathbf{r}_{\mathbb{P}}) = \eta^* \Phi(t, \mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\mathbb{P}}(t, \mathbf{r}_{\mathbb{P}}) = \eta^* \Phi(t, -\mathbf{r}_{\mathbb{P}}),$$

если при этом потребовать, что амплитуды преобразуются по закону

$$\alpha(\mathbf{k}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha_{\mathbb{P}}(\mathbf{k}_{\mathbb{P}}) = \eta^* \alpha(-\mathbf{k}), \quad \alpha_c^*(\mathbf{k}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \{\alpha_c^*\}_{\mathbb{P}}(\mathbf{k}_{\mathbb{P}}) = \eta^* \alpha_c^*(-\mathbf{k}).$$

Если учесть и преобразование частной производной по координатам

$$\nabla_r \xrightarrow{\mathbb{P}} \nabla_{r_{\mathbb{P}}} = -\nabla_r,$$

то описанные преобразования оставляют действие комплексного скалярного поля, квадратичное по частным производным, инвариантным: имеет место симметрия относительно преобразований зеркальной инверсии пространства. Зеркальное отражение пространства в квантовой механике свободной релятивистской скалярной частицы описывается линейным оператором, сохраняющим невырожденный вакуум фоковского пространства свободных квантованных полей ¹,

$$\mathbb{P}|0\rangle = |0\rangle$$

но меняющим, например, одночастичное состояние при сохранении его нормы:

$$\mathbb{P}|\mathbf{k}\rangle = \eta|-\mathbf{k}\rangle, \quad |\eta| = 1.$$

Аналогично для античастицы,

$$\mathbb{P}|\mathbf{k}_c\rangle = \eta_c|-\mathbf{k}_c\rangle, \quad |\eta_c| = 1,$$

Поскольку при зеркальной инверсии, как известно, $\mathbb{P}^2 = \mathbb{1}$, множители η и η_c являются вещественными, и они могут принимать значения $\eta = \pm 1$ и $\eta_c = \pm 1$, так что η и η_c называют внутренними пространственными четностями частицы и античастицы, соответственно.

Тогда та же схема рассуждений, что и в двух предыдущих разделах, приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{k})\mathbb{P}^{-1} &= \eta\hat{\mathbf{a}}^\dagger(-\mathbf{k}), & \mathbb{P}\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k})\mathbb{P}^{-1} &= \eta^*\hat{\mathbf{a}}(-\mathbf{k}), \\ \mathbb{P}\hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(\mathbf{k})\mathbb{P}^{-1} &= \eta_c\hat{\mathbf{a}}_c^\dagger(-\mathbf{k}), & \mathbb{P}\hat{\mathbf{a}}_c(\mathbf{k})\mathbb{P}^{-1} &= \eta_c^*\hat{\mathbf{a}}_c(-\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Если учесть элементарные соотношения типа

$$\mathbb{P}e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}\mathbb{P}^{-1} = e^{i\mathbf{r}_\mathbb{P}\cdot\mathbf{k}} = e^{-i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}$$

и в разложении поля по модам сделать очевидную замену переменных $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$, то поле преобразуется согласно

$$\mathbb{P}\hat{\Phi}(t, \mathbf{r})\mathbb{P}^{-1} = \hat{\Phi}_\mathbb{P}(t, \mathbf{r}_\mathbb{P}) = \eta^*\hat{\Phi}(t, \mathbf{r}),$$

если только $\eta^* = \eta_c = \eta$. Это значит, что произведение внутренних четностей скалярной частицы и её античастицы равно единице, $\eta\eta_c = 1$. Последнее утверждение не является универсальным, как мы увидим на примере частиц со спином $s = 1/2$, для которых произведение внутренних четностей частицы и античастицы равно минус единице. В итоге, преобразованное поле -

$$\hat{\Phi}_\mathbb{P}(t, \mathbf{r}) = \eta^*\hat{\Phi}(t, -\mathbf{r}),$$

и, если опустить «шляпки» над полями как указатели на то, что поле проквантовано, то это же выражение описывает преобразование пространственной инверсии для классического поля (3.55).

О применениях (!!??)

10.1.4 Other about Scalar Field

Dilation symmetry

Consider the dilation symmetry

$$x \rightarrow x' = \lambda x, \quad \phi'(x') = \frac{1}{\lambda}\phi(x)$$

More generally, the power of λ in the denominator is called the scaling dimension of the field. (It cannot be intuitively interpreted passively since F is nontrivial, unless we imagine the "rulers" we use to measure ϕ change as well.) The dilation leaves the action

$$S = \int d^4x \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - g\phi^4$$

invariant, though a mass term would not be invariant. For an infinitesimal transformation $\lambda = 1 - \epsilon$,

$$\delta\phi = \phi + x^\mu\partial_\mu\phi$$

Since the Noether current is linear in $\delta\phi$, we can consider the two terms separately. The first term straightforwardly gives $\pi^\mu\delta\phi$. The second term is just a translation, with x^μ replacing a^μ , so

$$j^\mu = \pi^\mu\delta\phi + x_\nu T^{\mu\nu} = (\partial^\mu\phi)(\phi + x_\nu\partial^\nu\phi) - x^\mu\mathcal{L}$$

An internal symmetry.

We consider the complex scalar field

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2$$

which has a $U(1)$ internal symmetry $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$. Treating ϕ and ϕ^* as independent fields, the equation of motion is

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0$$

along with its conjugate, and under the $U(1)$ symmetry,

$$\alpha \Delta \phi = i\alpha \phi, \quad \alpha \Delta \phi^* = -i\alpha \phi^*, \quad \Delta \mathcal{L} = 0$$

which gives the conserved current

$$j^\mu = i [(\partial^\mu \phi^*) \phi - \phi^* (\partial^\mu \phi)]$$

This quantity corresponds to the particle number current; it is reminiscent of the probability current in quantum mechanics, but j^0 can be positive or negative. This causes problems when interpreting the Klein-Gordon equation as a relativistic particle equation; as a field equation the negative sign corresponds to antiparticles.

Note. Why can we treat ϕ and ϕ^* as independent? Consider the variation

$$\Delta S \sim A \delta \phi + A^* \delta \phi^*$$

Treating the variations as independent gives $A = A^* = 0$. On the other hand, taking real and imaginary variations gives $A \pm A^* = 0$ which gives the exact same conclusion.

Another way to think about this is to write $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ the ϕ_i are real. Then the 'extra' degrees of freedom we get are the same as those when we use complex variations $\delta \phi_i$. This gives no extra constraints because $\mathcal{L}$ is analytic in the ϕ_i , so if $\delta \mathcal{L}$ vanishes along the real direction, it also vanishes along the imaginary direction.

Why is there no factor 1/2 in the complex scalar field Lagrangian?

Classically, it doesn't matter because scaling the action has no effect. At the quantum level, fields must be canonically normalized (for free fields, have a kinetic term with coefficient 1/2) for the fields to create conventionally normalized particle states. We may define

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}$$

the $\sqrt{2}$ factor ensures that ϕ is canonically normalized if the ϕ_i are. Then the Lagrangian in terms of the real scalar fields ϕ_i has the desired factors of 1/2.

longitudinal vibrations of a spring

Consider longitudinal vibrations of a spring, described by

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2$$

There are two symmetries, corresponding to shifts in M and shifts in T ,

$$\delta x = a, \quad \delta \phi = a$$

This is subtle, because both of these symmetries would appear to be translational symmetry, as ϕ is simply the displacement of a point on the spring; in this case it is essential to distinguish M and T . The first symmetry corresponds to $\delta\phi = a\partial_x\phi$ and corresponds to translating everything; it yields the momentum. The second symmetry heuristically to "translating the wave within the spring" and yields the pseudomomentum $\int \pi dx$.

Electromagnetism

Electromagnetism is described by the Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

The factor of $-1/4$ ensures that we have canonically normalized kinetic terms of the form $\dot{A}_i^2/2$. However, the A_0 field has no kinetic term at all, which will present some subtleties later. As currently written, $\mathcal{L}$ doesn't depend on A_μ , so

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) = -F^{\mu\nu}$$

giving the equation of motion

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

We can also integrate by parts, so that the canonical momenta change, and forces $\partial\mathcal{L}/\partial A_\mu$ appear. Of course, the equations of motion and all observable quantities remain the same. The naive stressenergy tensor is neither symmetric or gauge invariant, and must be improved.

Massive vector field

A massive vector field instead has the Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$$

There is still no kinetic term for A_0 , but we no longer have a gauge symmetry. The Euler-Lagrange equations are

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$$

and taking the divergence gives $m^2\partial_\mu A^\mu = 0$, so $\partial_\mu A^\mu = 0$ automatically; in the case $m^2 = 0$ we must impose this constraint by hand as a gauge fixing condition. Then the equation of motion reduces to the Klein-Gordon equation $(\partial^2 + m^2)A_\mu = 0$ as expected.

Начальные условия для скалярного поля (???)

Обзор обобщений скалярного поля

что можно еще сделать с этим полем?

добавить источник.

сделать его заряженным.

???

и вкратце наметки дам, как это сделать.

Скалярное поле в искривленном пространстве

Рассмотрим действие в искривленном пространстве:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(\phi) \right]$$

уравнения Эйлера-Лагранжа дадут:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta})_{,\alpha} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \sqrt{-g} = 0$$

Запишем с помощью так называемого оператора Лапласа-Бельтрами $\Delta_{LB} = \nabla_\alpha \nabla^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta})$:

$$\Delta_{LB} \phi + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0$$

В случае нулевого потенциала получаем просто

$$\Delta_{LB} \phi = 0$$

write О способах решения (????)

Преобразования волнового уравнения в случае прохождения мимо линзирующего объекта

Рассмотрим преобразования волнового уравнения $\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0$.

Если подставить простейшую зависимость от времени $\phi(\vec{r}, t) = \tilde{\phi}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$, то получим уравнение

$$(\nabla^2 + \omega^2) \tilde{\phi} = 4\omega^2 U \tilde{\phi}$$

(??? как же лень проверять, потом проверю.)

Запишем в терминах фактора усиления волны $F(\vec{r}) = \tilde{\phi}(\vec{r})/\tilde{\phi}_0(r)$, где $\tilde{\phi}_0(r) = A e^{i\omega r}/r$ - волна, распространяющаяся без линзирующего объекта. В таком случае, волна имеет вид:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2i\omega \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \nabla_\theta^2 F = 4\omega^2 U F$$

где $\nabla_\theta^2 = \partial^2/\partial\theta^2 + \theta^{-1} \partial/\partial\theta + \theta^{-2} \partial^2/\partial\varphi^2$.

Распишем в $(\nabla^2 + \omega^2) \tilde{\phi} = 4\omega^2 U \tilde{\phi}$ лапласиан и подставим $\phi = F \tilde{\phi}_0$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \omega^2 \right] (F \tilde{\phi}_0) = 4\omega^2 U F \tilde{\phi}_0$$

Сгруппируем, введем оператор ∇_θ^2 и рассмотрим приближение малых углов:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \omega^2 + \frac{1}{r^2} \nabla_\theta^2 \right] (F \tilde{\phi}_0) = 4\omega^2 U F \tilde{\phi}_0$$

Посчитаем производные от $\tilde{\phi}_0(r) = Ae^{i\omega r}/r$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial r} &= i\omega r^{-1}e^{i\omega r} - r^{-2}e^{i\omega r} = \tilde{\phi}_0(i\omega - r^{-1}) \\ \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_0}{\partial r^2} &= -\omega^2 r^{-1}e^{i\omega r} - 2i\omega r^{-2}e^{i\omega r} + 2r^{-2}e^{i\omega r} = \tilde{\phi}_0(-\omega^2 - 2i\omega r^{-1} + 2r^{-2}) \\ \frac{\partial}{\partial r} (F\tilde{\phi}_0) &= \tilde{\phi}_0 \left(F(i\omega - r^{-2}) + \frac{\partial F}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (F\tilde{\phi}_0) &= \tilde{\phi}_0 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial r} + F \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_0}{\partial r^2} = \\ &= \tilde{\phi}_0 \left(F(-\omega^2 - 2i\omega r^{-1} + 2r^{-2}) + 2\frac{\partial F}{\partial r}(i\omega - r^{-1}) + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right)\end{aligned}$$

После подстановки этих производных в уравнение выше, многие слагаемые сокращаются и получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2i\omega \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \nabla_\theta^2 F = 4\omega^2 U F$$

Именно это уравнение далее и будет решаться в линзировании.

Скалярное поле в искривленном пространстве: Applications

(paragraph about GL or GW propagation, sounds rather useful)

квантование скалярного поля

отдельно обсудим его квантование, потому что это отдельная важная концепция.

Обзор применений скалярного поля в физике

Обсудим, где эта модель используется?

в пи мезонах (?).

вот тут расскажу, как и зачем.

(про космологию)

Скалярное поле как инфлантонное поле в космологии

На ранних этапах развития вселенной мир можно описать моделью, схожей с моделью скалярного поля.

(напишу потом)

10.2 Classical Models with a Scalar Field

(I'll write later here, now it is written below)

10.2.1 Basics of Scalar Field Again

It transforms as a contravariant four-vector, so that

$$\begin{aligned}\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu &= -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right) \\ &\equiv -\hbar^2 \square = -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right).\end{aligned}\tag{1.12}$$

This equation defines both the three-dimensional delta operator ($\Delta = \nabla^2$) and the four-dimensional d'Alembertian ($\square = (1/c^2 \partial^2 / \partial t^2 - \Delta)$). Finally we check the commutation relations of momentum and position by means of (1.11 and 1.5), obtaining

$$\begin{aligned} [\hat{p}^\mu, x^\nu]_- &= i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}, g^{\nu\sigma} x_\sigma \right]_- = i\hbar g^{\nu\sigma} \frac{\partial x_\sigma}{\partial x_\mu} \\ &= i\hbar g^{\nu\sigma} \delta_\sigma^\mu = i\hbar g^{\nu\mu} = i\hbar g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

On the right hand side (rhs), the metric tensor $g^{\mu\nu}$ appears expressing the covariant form of the commutation relation.

The four-potential of the electromagnetic field is given by

$$A^\mu = \{A_0, \mathbf{A}\} = \{A_0, A_x, A_y, A_z\} = g^{\mu\nu} A_\nu. \quad (1.14)$$

Here A^μ are the contravariant, and $A_\mu = \{A_0, -A_x, -A_y, -A_z\}$ the covariant components. From A^μ the electromagnetic field tensor follows in the well-known way:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

1.2 The Klein-Gordon Equation

From elementary quantum mechanics ² we know that the Schrödinger equation

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + V(x) \right] \psi(x, t) \quad (1.16)$$

corresponds to the nonrelativistic energy relation in operator form,

$$\hat{E} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} + V(\mathbf{x}) \quad , \quad \text{where} \quad (1.17)$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla \quad (1.18)$$

are the operators of energy and momentum, respectively. In order to obtain a relativistic wave equation we start by considering free particles with the relativistic relation

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m_0^2 c^2.$$

We now replace the four-momentum p^μ by the four-momentum operator

$$\begin{aligned} \hat{p}^\mu &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial(ct)}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right\} \\ &= i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla \right\} = \{\hat{p}_0, \hat{\mathbf{p}}\}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Following (1.6) and (1.11), the result is in accordance with (1.18). Thus, we obtain the Klein-Gordon equation for free particles,

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \psi = m_0^2 c^2 \psi \quad (1.21)$$

² See Vol. 1 of this series, Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

Here m_0 is the rest mass of the particle and c the velocity of light in vacuum. With the help of (1.12) we can write (1.21) in the form

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi = \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi = 0 \quad (1.22)$$

We can immediately verify the Lorentz covariance of the Klein-Gordon equation, as $\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu$ is Lorentz-invariant. We also recognize (1.22) as the classical wave equation including the mass term $m_0^2 c^2 / \hbar^2$. Free solutions are of the form

$$\psi = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (p_0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\right] = \exp\left[+\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)\right]. \quad (1.23)$$

Indeed, insertion of (1.23) into (1.21) leads to the condition which results in

$$\begin{aligned} \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \psi &= m_0^2 c^2 \psi \rightarrow p^\mu p_\mu \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right) = m_0^2 c^2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right) \\ &\rightarrow p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 \text{ or } \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m_0^2 c^2 \\ E &= \pm \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Thus, there exist solutions both for positive $E = +c(m_0^2 c^2 + p^2)^{1/2}$ as well as for negative $E = -c(m_0^2 c^2 + p^2)^{1/2}$ energies respectively (see Fig. 1.1).

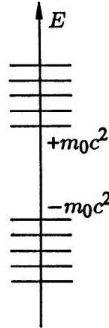


Fig. 1.1. Energy spectrum of the free Klein-Gordon equation

We shall see later that the solutions yielding negative energy are physically connected with antiparticles. Since antiparticles can indeed be observed in nature, we have already obtained an indication of the value of extending the nonrelativistic theory.

Next we construct the four-current j_μ connected with (1.21). In analogy to our considerations concerning the Schrödinger equation, we expect a conservation law for the j_μ . We start from (1.22), in the form

$$(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m_0^2 c^2) \psi = 0$$

and take the complex conjugate of this equation, i.e.

$$(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m_0^2 c^2) \psi^* = 0.$$

Multiplying both equations from the left, the first by ψ^* and the second by ψ , and calculating the difference of the resulting two equations yields

$$\psi^* (\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m_0^2 c^2) \psi - \psi (\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m_0^2 c^2) \psi^* = 0$$

or

$$\begin{aligned} & -\psi^* (\hbar^2 \nabla_\mu \nabla^\mu + m_0^2 c^2) \psi + \psi (\hbar^2 \nabla_\mu \nabla^\mu + m_0^2 c^2) \psi^* = 0 \\ & \Rightarrow \nabla_\mu (\psi^* \nabla^\mu \psi - \psi \nabla^\mu \psi^*) \equiv \nabla_\mu j^\mu = 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

The four-current density is therefore

$$j_\mu = \frac{i\hbar}{2m_0} (\psi^* \nabla_\mu \psi - \psi \nabla_\mu \psi^*) \quad (1.26)$$

Here we have multiplied by $i\hbar/2m_0$, so that the zero component j_0 has the dimension of a probability density (that is $1/\text{cm}^3$). Furthermore this ensures that we obtain the correct nonrelativistic limit [cf. (1.30-31)] below. In detail, (1.25) reads

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{i\hbar}{2m_0 c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \right] + \text{div} \left(\frac{-i\hbar}{2m_0} \right) [\psi^* (\nabla \psi) - \psi (\nabla \psi^*)] = 0 \quad (1.27)$$

This expression possess the form of a continuity equation

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div } j = 0 \quad (1.28)$$

As usual integration over the entire configuration space yields

$$\int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} d^3x = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho d^3x = - \int_V \text{div } j d^3x = - \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} = 0$$

Hence,

$$\int_V \varrho d^3x = \text{const.}$$

i.e. $\int_V \varrho d^3x$ is constant in time. It would be a natural guess to interpret

$$\varrho = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (1.29)$$

as a probability density. However, there is a problem with such an interpretation: At a given time t both ψ and $\partial\psi/\partial t$ may have arbitrary values; therefore, $\varrho(x, t)$ in (1.29) may be either positive or negative. Hence, $\varrho(x, t)$ is not positive definite and thus not a probability density. The deeper reason for this is that the Klein-Gordon equation is of second order in time, so that we must know both ψ and $\partial\psi(x, t)/\partial t$ for a given t . Furthermore there exist solutions for negative energy [see (1.24) and (1.38) below]. This and the difficulty with the probability interpretation was the reason that, for a long time, the Klein-Gordon equation was regarded to be physically senseless. One therefore looked for a relativistic wave equation of first order in time with positive definite probability, which was finally derived by Dirac (cf. Chap. 2). However, it turns out that this equation has negative energy solutions too. As we have previously remarked and as we shall discuss in greater detail later, in Chap. 2, these solutions are connected with the existence of antiparticles.

1.3 The Nonrelativistic Limit

We can study the nonrelativistic limit of the Klein-Gordon equation (1.21). In order to do this we make the ansatz

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right) \quad (1.30)$$

i.e. we split the time dependence of ψ into two terms, one containing the rest mass. In the nonrelativistic limit the difference of total energy E of the particle and the rest mass $m_0 c^2$ is small. Therefore we define

$$E' = E - m_0 c^2$$

and remark that the kinematic energy E' is nonrelativistic, which means $E' \ll m_0 c^2$. Hence,

$$\left| i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \approx E' \varphi \ll m_0 c^2 \varphi \quad (1.31)$$

holds also and with (1.31) we have

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi \right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right) \approx -i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi \right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right) \\ &\approx \left[-i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right) \\ &= - \left[i \frac{2m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right). \end{aligned}$$

Inserting this result into (1.21) yields

or

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{c^2} \left[i \frac{2m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \varphi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right) \\ i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= - \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = - \frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \varphi \end{aligned} \quad (1.32)$$

This is the free Schrödinger equation for spinless particles. As the type of particle which is described by a wave equation does not depend upon whether the particle is relativistic or nonrelativistic, we infer that the Klein-Gordon equation describes spin-zero particles. Later on we will obtain this important result in a totally different manner by making use of the transformation properties of the Klein-Gordon field ψ .

1.4 Free Spin-Zero Particles

Previously we have remarked that in a relativistic theory the concept of a free particle is an idealization. Furthermore spin-zero particles, like pions or kaons, interact strongly with other particles and fields. Nevertheless we can discover some of the practical methods for dealing with these problems by studying the free solutions of (1.21). We return to the interpretation of the current density (1.26) that we discarded due to ϱ in (1.29) not being positive definite. As usual integrating the continuity equation (1.28) yields

$$\int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} d^3x = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho(x, t) d^3x = - \int_V \operatorname{div} j d^3x = - \int_F j \cdot d\mathbf{F} = 0$$

which means that

$$\int_V \varrho d^3x = \text{const} \quad (1.33)$$

i.e. the constancy in time of the normalization (which is a reasonable result). The question remains of how to interpret ϱ and j . The probability interpretation is not applicable, as we have just seen in context with (1.29). However, we do have the following alternative: We obtain the four-current density of charge by multiplication of the current density (1.26) with the elementary charge e to give

$$j'_\mu = \frac{ie\hbar}{2m_0} (\psi^* \nabla_\mu \psi - \psi \nabla_\mu \psi^*) = \{c\varrho', -j'\} \quad (1.34)$$

where

$$\varrho' = \frac{i\hbar e}{2m_0 c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (1.35)$$

signifies the charge density, and

$$j' = -\frac{ie\hbar}{2m_0} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (1.36)$$

denotes the charge-current density. The charge density (1.35) is allowed to be positive, negative or zero. This equates with the existence of particles and antiparticles in the theory. By calculating the solutions for free particles, we may understand this still better. Starting from (1.22), written in the form

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - m_0^2 c^2) \psi = 0$$

and from the ansatz (1.23) for free waves

$$\psi = A \exp \left(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu \right) = A \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et) \right],$$

we obtain the necessary condition that

$$p^\mu p_\mu - m_0^2 c^2 = 0 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m_0^2 c^2$$

or, because of $p_0 = E/c$,

$$E^2 = c^2 (\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2) \quad (1.37)$$

Consequently, there exist two possible solutions for a given momentum p : one with positive, the other with negative energy,

$$E_p = \pm c \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2} \quad , \quad \psi_{(\pm)} = A_{(\pm)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \mp |E_p| t) \right] \quad (1.38)$$

$A_{(\pm)}$ are normalization constants, to be determined later. Inserting this into the density formula (1.35), we find

$$\varrho_{(\pm)} = \pm \frac{e |E_p|}{m_0 c^2} \psi_{(\pm)}^* \psi_{(\pm)} \quad (1.39)$$

This suggests the following interpretation: $\psi_{(+)}$ specifies particles with charge $+e$; $\psi_{(-)}$ specifies particles with the same mass, but with charge $-e$. The general solution of the wave equation is always a linear combination of both types of functions. This point may be further clarified by discretizing the continuous plane waves (1.23). For that purpose we confine the waves to a large cubic box (normalization box) with edge length L (see Fig. 1.2) and, as usual, we demand periodic boundary conditions at the box walls. This yields in the well-known manner

$$\psi_{n(\pm)} = A_{n(\pm)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x} \mp E_{p_n} t) \right] \quad (1.40)$$

where

$$\mathbf{p}_n = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n} \quad , \quad \mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\} \quad ; \quad n_i \in \mathbb{N}$$

and

$$E_{p_n} = c \sqrt{p_n^2 + m_0^2 c^2} \equiv E_n \quad (1.41)$$

Here n is a (discrete) vector in the lattice space with axes n_x, n_y, n_z . Using (1.39), the normalization factors $A_{(\pm)}$ are determined by the requirement that

$$\pm e = \int_{L^3} d^3x \varrho_{(\pm)}(x) = \pm \frac{e E_{p_n}}{m_0 c^2} |A_{n(\pm)}|^2 L^3$$

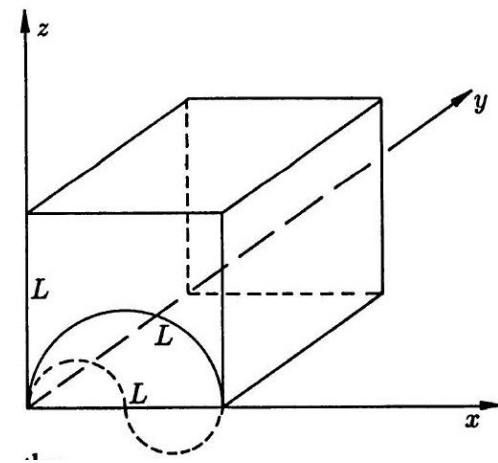


Fig. 1.2. The figure shows a normalization box. Two standing waves along the x axis are indicated

Choosing the phases in such a way that the amplitudes are real, we get

$$A_{n(\pm)} = \sqrt{\frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}}} \quad (1.42)$$

and thereby

$$\psi_{n(\pm)} = \sqrt{\frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x} \mp E_{p_n} t) \right]. \quad (1.43)$$

Notice that the normalization of either type of solution (corresponding to positive and negative charge) is the same. The only difference is due to the time factor $\exp(\pm E_{p_n} t)$. The most general solutions of the Klein-Gordon equation for positive and negative spin-0 particles read then as

$$\psi_{(+)} = \sum_n a_n \psi_{n(+)} = \sum_n a_n \sqrt{\frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x} - E_{p_n} t) \right]$$

and

$$\psi_{(-)} = \sum_n b_n \psi_{n(-)} = \sum_n b_n \sqrt{\frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x} + E_{p_n} t) \right] \quad (1.44)$$

respectively. Solutions for spin-0 particles with zero charge can be constructed too. One immediately recognizes from the form of the expression for the charge density (1.35) that the Klein-Gordon field ψ has to be real for neutral particles, in which case

$$\psi^* = \psi. \quad (1.45)$$

By means of (1.43) we can easily describe a wave front for a neutral particle:

$$\begin{aligned} \psi_{n(0)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{(+)}^n(\mathbf{p}_n) + \psi_{(-)}^n(-\mathbf{p}_n)) \\ &= \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2L^3 E_{p_n}}} \left\{ \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x} - E_{p_n} t) \right] + \exp \left[\frac{i}{\hbar} (-\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x} + E_{p_n} t) \right] \right\} \\ &= \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2L^3 E_{p_n}}} \left\{ \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x} - E_{p_n} t) \right] + \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x} - E_{p_n} t) \right] \right\} \\ &= \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2L^3 E_{p_n}}} 2 \cos \left(\frac{\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x} - E_{p_n} t}{\hbar} \right). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Thus $\psi_{(0)}^n = \psi_{(0)}^{n*}$ holds and, therefore, according to (1.35)

$$\varrho' = \frac{i\hbar e}{2m_0 c^2} \left(\psi_{n(0)}^* \frac{\partial \psi_{n(0)}}{\partial t} - \psi_{n(0)} \frac{\partial \psi_{n(0)}^*}{\partial t} \right) = 0$$

Furthermore, we realize that the current density $\mathbf{j}'(\mathbf{x}, t)$ of neutral particles (1.36) vanishes too. Consequently in this case there is no conservation law. Obviously the relativistic quantum theory necessarily leads to novel degrees of freedom, that is to say the charge degrees of freedom of particles. In a nonrelativistic theory free, spinless particles can propagate freely with a well-defined momentum p . In the relativistic case of a free, spinless particle, three solutions, which correspond to the electric charge $(+, -, 0)$ of the particles, exist for every momentum p .

1.1 The Charged Klein-Gordon Field

Hitherto we have inspected the Klein-Gordon equation both for a real, i.e. uncharged, and for a complex, i.e. charged, scalar field. In the case of the complex field we specified a current

$$j^\mu = \frac{ie\hbar}{2m_0} (\varphi^* \nabla^\mu \varphi - \varphi \nabla^\mu \varphi^*),$$

with $\partial j^\mu / \partial x^\mu = 0$ and a charge

$$Q = (ie\hbar/2m_0 c^2) \int d^3x (\varphi^* \dot{\varphi} - \varphi \dot{\varphi}^*).$$

Now we want to examine charged fields in a little bit more detail. To that end we decompose the complex wave function $\varphi(x)$ into real and imaginary components as

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)],$$

where $\varphi_1(x)$ and $\varphi_2(x)$ are real. If $\varphi(x)$ fulfills the Klein-Gordon equation

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) \varphi(x) = 0 \quad (4)$$

then it immediately follows that φ_1 and φ_2 also obey the Klein-Gordon equation, i.e.

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) \varphi_1(x) = 0 \quad \text{and} \quad \left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) \varphi_2(x) = 0 \quad (5)$$

Conversely the following holds: If two fields $\varphi_1(x)$ and $\varphi_2(x)$ separately fulfill a Klein-Gordon equation with the same mass $m = m_1 = m_2$, then the equations can be replaced by one equation for a complex field, i.e.

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 + i\varphi_2) \quad \text{and} \quad \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 - i\varphi_2)$$

fulfill

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) \varphi = 0 \quad \text{and} \quad \left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) \varphi^* = 0.$$

By interchanging φ and φ^* in

$$Q = \frac{ie\hbar}{2m_0 c^2} \int d^3x (\varphi^* \dot{\varphi} - \varphi \dot{\varphi}^*)$$

we obtain the opposite charge. Hence φ and φ^* characterize opposite charges. These studies can, for example, be applied to the pion triplet (π^+, π^-, π^0) : The π^0 , being a neutral particle, is characterized by a real wave function, whereas π^+ and π^- being charged fields have to be represented by complex wave functions. π^+ and π^- have the same mass and opposite charges, i.e. we can define

$$\varphi_{\pi^{++}} = \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 - i\varphi_2),$$

$$\varphi_{\pi^-} = \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 + i\varphi_2)$$

and

$$\varphi_{\pi^0} = \varphi_0 = \varphi_0^*.$$

Before we start to discuss the degrees of freedom, with respect to charge in detail, let us consider the energy. Is the energy positive (for positive particles), negative (for negative particles) or even equal to zero (for neutral particles)? In order to answer this question, we have to discuss the energy of the Klein-Gordon field within the scope of the general canonical formalism.

1.10 Gauge Invariance of the Coupling

We know that electrodynamics is gauge invariant. By that we mean that the electrodynamic laws (Maxwell equations) do not change under gauge transformations

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{\partial \chi(x)}{\partial x^\mu} \quad (1.132)$$

The argument x represents all space-time coordinates, i.e.

$$x = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{ct, x, y, z\}.$$

We now investigate the consequences of the gauge transformation (1.132) for the Klein-Gordon equation (1.121), the transformation producing the change,

$$g^{\mu\nu} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{e}{c} A'_\nu \right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A'_\mu \right) \psi - m_0^2 c^2 \psi = 0$$

or

$$g^{\mu\nu} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{e}{c} A_\nu - \frac{e}{c} \frac{\partial \chi}{\partial x^\nu} \right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu - \frac{e}{c} \frac{\partial \chi}{\partial x^\mu} \right) \psi - m_0^2 c^2 \psi = 0,$$

or

$$g^{\mu\nu} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{e}{c} A_\nu \right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right) \psi' - m_0^2 c^2 \psi' = 0 \quad (1.133)$$

with

$$\psi' = \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \chi \right) \psi \quad (1.134)$$

In other words the gauge transformation (1.131) changes the phase of the wave function only. The phase factor $\exp[(ie/\hbar c)\chi]$ is the same for all states ψ . Since all physical observables are represented by bilinear forms of the structure $\psi_m^* \dots \psi_n$, a common, identical phase factor does not play any role in the physics. Thus, we say that the Klein-Gordon equation is gauge invariant for the minimal coupling

$$\begin{aligned} \left[\left(\hat{p}_\nu - \frac{e}{c} A'_\nu \right) \psi \right] \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \chi \right) &= \left[\left(\hat{p}_\nu - \frac{e}{c} A_\nu - \frac{e}{c} \frac{\partial \chi}{\partial x^\nu} \right) \psi \right] \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \chi \right) \\ &= \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{e}{c} A_\nu \right) \psi \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \chi \right) \right] \end{aligned} \quad (1.135)$$

and therefore also for arbitrary powers

$$\begin{aligned} \left[\left(\hat{p}_\nu - \frac{e}{c} A'_\nu \right)^n \psi \right] \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \chi \right) &= \left[\left(\hat{p}_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right)^n \psi \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \chi \right) \right] \\ &= \left[\left(\hat{p}_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right)^n \right] \psi' \end{aligned} \quad (1.136)$$

and, consequently, also for arbitrary operator functions $f(\hat{p}_\nu - (e/c)A_\nu)$ which are expandable in power series of $(\hat{p}_\nu - (e/c)A_\nu)$, giving

$$\left[f \left(\hat{p}_\nu - \frac{e}{c} A'_\nu \right) \psi \right] \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \chi \right) = \left[f \left(\hat{p}_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) \psi' \right] \quad (1.137)$$

Thus, minimal coupling is gauge invariant in this very general sense. The parentheses [...] used in the above formulae shall help to illustrate the action of the $\hat{p}$ operators more clearly.

10.2.2 1.5 Energy-Momentum Tensor of the Klein-Gordon Field

In classical mechanics the energy is always given by the Hamilton function H which depends on the Lagrange function by means of the relation

$$H = \sum_i \pi_i \dot{q}_i - L \quad (1.47)$$

³ See H. Goldstein: Classical Mechanics, 2nd ed. (Addison Wesley, Reading, MA 1980) or W. Greiner: Theoretische Physik II: Mechanik II (Harri Deutsch, Frankfurt a.M. 1989).

⁴ See J.D. Jackson: Classical Electrodynamics, 2nd ed. (Wiley, New York 1975).
The classical equations of motion are obtained from the variational principle

$$\delta \int L dt = 0 \quad (1.48)$$

which leads to the Lagrange equations in the familiar way ³, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.49)$$

The field theory is based on a similar concept ⁴ where the starting point is the Lagrange density

$$\mathcal{L} \left(\psi_\sigma, \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\mu} \right) \quad (1.50)$$

from which one obtains the Lagrange function by integration over the three-dimensional volume V

$$L = \int_V \mathcal{L} \left(\psi_\sigma, \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\mu} \right) d^3x \quad (1.51)$$

In general, the Lagrange density $\mathcal{L}$ depends on the various wave fields ψ_σ and all their derivatives $\partial \psi_\sigma / \partial x_\mu$. Derivatives of higher order are not considered because they would lead to nonlocal theories. So the variational principle (1.48) reads

$$\begin{aligned} \delta \int L dt &= \delta \int \mathcal{L} \left(\psi_\sigma, \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\mu} \right) d^3x dt \\ &= \delta \int \mathcal{L} \left(\psi_\sigma, \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\mu} \right) d^4x = 0 \end{aligned} \quad (1.52)$$

and yields in the well-known way (see the following Exercise 1.2) the field equations

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi_\sigma / \partial x^\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} = 0 \quad (1.53)$$

Within the theory of wave fields (1.53) represent the equations of motion and are analogous to the classical equations of motion (1.49). Note the similarities and differences between (1.49) and (1.53): the variable t (time) distinguished in (1.49) is of the same significance as all other coordinates of x^μ in (1.53). In (1.49) one considers the Lagrange function L , whereas in the field equations (1.53) L is replaced by the Lagrange density $\mathcal{L}$.

1.2 Derivation of the Field Equations for Wavefields

Problem. Derive the equations of motion (field equations) from the variation principle for the fields $\psi_\sigma(x)$

$$\delta \int_{V_4} \mathcal{L} \left(\psi_\sigma, \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_\mu} \right) d^4x = 0$$

Solution

The variation is defined by

$$\begin{aligned} & \delta \int \mathcal{L} \left(\psi_\sigma, \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x^\mu} \right) d^4x \\ &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} \delta \psi_\sigma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi_\sigma / \partial x^\mu)} \delta \left(\frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x^\mu} \right) \right] d^4x = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

We make use of the possibility of interchanging variation and partial differentiation,

$$\delta \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\psi_\sigma + \delta \psi_\sigma) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi_\sigma = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\delta \psi_\sigma) \quad (2)$$

The second term in (1) is integrated by parts, taking into account that the variation of ψ_σ vanishes at the integration boundaries. This leads to

$$\int \delta \psi_\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi_\sigma / \partial x^\mu)} \right] d^4x = 0$$

As these equations are valid for arbitrary variations $\delta \psi_\sigma$, one obtains the field equations (Euler-Lagrange equations)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi_\sigma / \partial x^\mu)} = 0$$

We will now demonstrate the procedure of the Lagrange formalism for the Klein-Gordon field. In this case we deal with two wave fields ψ and ψ^* (for charged particles). We could also choose the real and imaginary part of ψ as independent fields, but prefer the choice of ψ and ψ^* . Now, the Lagrange density for the Klein-Gordon field is of the form

$$\mathcal{L} \left(\psi, \psi^*, \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}, \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* \psi \right) \quad (1.54)$$

The constant $\hbar^2/2m_0$ is chosen in such a way that $\int \mathcal{L} d^3x$ has the dimension of energy, so that in particular the plane waves (1.43) carry the energy E_{p_n} [see (1.61) below]. The proof that this expression is the correct Lagrange density for the Klein-Gordon field is given by showing that, with the help of (1.53), one obtains the Klein-Gordon equations for ψ and ψ^* as resulting field equations. We note that one can immediately recognise from (1.54) that $\mathcal{L}$ is a Lorentz scalar if ψ and ψ^* are scalar fields, which we assume. Because of the covariance of (1.53), the resulting field equations (in our case the Klein-Gordon equation) are also Lorentz-invariant. Indeed, by inserting (1.54) into (1.53) one immediately obtains

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi^* / \partial x^\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = 0 = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{m_0} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi \right)$$

or

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0 \quad (1.55)$$

and, analogously for the ψ^* field,

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi / \partial x^\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{m_0} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\mu} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* \right)$$

or

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi^* + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* = 0 \quad (1.56)$$

Hence, the Lagrange density (1.54) yields precisely the Klein-Gordon equation for the ψ field as well as for the ψ^* field.

The energy and momentum of the wave field are described by the energy-momentum tensor⁵, defined as

$$T_{\mu}^{\nu} = \sum_{\sigma} \frac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi_{\sigma} / \partial x^{\nu})} - \mathcal{L} g_{\mu}^{\nu} \quad (1.57)$$

The energy density $\mathcal{H}(x)$ of the field is identical with T_0^0 ,

$$\mathcal{H}(x) = T_0^0(x) \quad (1.58)$$

In our case one obtains from (1.54) that

$$\begin{aligned} T_{\mu}^{\nu} &= \frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi / \partial x^{\nu})} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi^* / \partial x^{\nu})} - \mathcal{L} g_{\mu}^{\nu} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[g^{\sigma\nu} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}} + g^{\sigma\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^{\mu}} - \left(g^{\sigma\varrho} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\varrho}} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar} \psi^* \psi \right) g_{\mu}^{\nu} \right] \end{aligned} \quad (1.59)$$

and, hence

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &\equiv T_0^0 \\ &= \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[g^{\sigma 0} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \psi}{\partial x^0} + g^{\sigma 0} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^0} \left(g^{\sigma\varrho} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\varrho}} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar} \psi^* \psi \right) g_0^0 \right] \\ &= \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x^0} \frac{\partial \psi}{\partial x^0} + \frac{\partial \psi}{\partial x^0} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^0} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x^0} \frac{\partial \psi}{\partial x^0} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi^*}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar} \psi^* \psi \right) \right] \\ &= \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\nabla \psi^*) \cdot (\nabla \psi) + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar} \psi^* \psi \right] \end{aligned} \quad (1.60)$$

The energy H , which belongs to the plane wave solutions (1.43), is given by the integral, over the energy density in the volume L^3 ,

$$\begin{aligned} H_{n(\pm)} &= \int_{L^3} T_0^0(n, \pm) d^3x \\ &= \int_{L^3} \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}} \frac{(\mp E_{p_n})^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}} \frac{\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_n}{\hbar^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}} \right] d^3x \\ &= \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n} \hbar^2} \left[\frac{E_{p_n}^2}{c^2} + \mathbf{p}_n^2 + m_0^2 c^2 \right] L^3 \\ &= \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n} \hbar^2} \frac{2E_{p_n}^2}{c^2} L^3 = E_{p_n} \end{aligned} \quad (1.61)$$

Although we chose the constant $\hbar^2/2m_0$ of the Lagrange density (1.54) in such a way that the wave $\psi_{n(+)}$ carried the energy $+E_{p_n}$, the result (1.61) shows that the wave $\psi_{n(-)}$ also carries energy $+E_{p_n}$. Thus, we have found the interesting result that plane waves $\psi_{n(\pm)}$ from (1.43) describe particles with positive and negative charge, respectively [see (1.39) and (1.42)], but

⁵ See Example 1.3 and, for a detailed discussion, J.D. Jackson: Classical Electrodynamics, 2nd ed. (Wiley, New York 1975) or W. Greiner: Theoretische Physik III, Klassische Elektrodynamik (Harri Deutsch, Frankfurt a.M. 1985).

that both waves carry positive energy $+E_{p_n} = +c(p_n^2 + m_0^2 c^2)^{1/2}$. Hence, energy plays two roles: On one hand $+E_p$ characterizes particles with positive charge according to (1.39) - the plane wave in this case reading as $\psi_{(+)} \sim \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E_p t)/\hbar]$ - and $-E_p$, particles of negative charge - the plane wave in this case reads as $\psi_{(-)} \sim \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + E_p t)/\hbar]$. On the other hand $|E_p|$ always gives the energy of the particles.

1.3 Determination of the Energy-Momentum Tensor for a General Lagrange Density $\mathcal{L}(\psi_\sigma, \partial\psi_\sigma/\partial x^\mu)$

In order to calculate the energy-momentum tensor we start with the Noether theorem: Each continuous symmetry transformation which leaves the Lagrange density invariant, corresponds to a conservation law and, hence, to a constant of motion. Specifically we shall discuss the conservation laws, which follow from the translational invariance of classical field theory.

Consider the infinitesimal displacement

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu,$$

$$\delta x_\mu = x'_\mu - x_\mu = \varepsilon_\mu.$$

The corresponding variation of the Lagrangian is given by

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} \delta x_\mu = \varepsilon_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}.$$

If, on the other hand, $\mathcal{L}$ is translationally invariant then $\mathcal{L}$ does not explicitly depend on the coordinates. Thus, we can write $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi_\sigma, \partial\psi_\sigma/\partial x_\mu)$. From this follows the variation

$$\delta\mathcal{L} = \sum_\sigma \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\sigma} \delta\psi_\sigma + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_\sigma/\partial x_\mu)} \delta \left(\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_\mu} \right) \right].$$

The variation of ψ_σ is obtained as

$$\delta\psi_\sigma = \frac{\partial\psi_\sigma(x)}{\partial x_\nu} \delta x_\nu = \frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_\nu} \varepsilon_\nu.$$

In the following we will also use the Euler-Lagrange equations (field equations)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_\sigma/\partial x^\mu)} = 0.$$

Equating (2) and (3) yields

$$\begin{aligned} \varepsilon_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} &= \sum_\sigma \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_\sigma} \delta\psi_\sigma + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_\sigma/\partial x_\mu)} \delta \left(\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_\mu} \right) \right] \\ &= \sum_\sigma \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_\sigma/\partial x^\mu)} \right\} \varepsilon_\nu \frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_\sigma/\partial x_\mu)} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_\mu} \right) \varepsilon_\nu \right], \end{aligned} \quad (6)$$

where we have used

$$\delta \left(\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_\mu} \right) \delta x_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_\mu} \right) \varepsilon_\nu \quad (7)$$

The rhs of (6) can be expressed as

$$\varepsilon_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\sum_\sigma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_\sigma/\partial x_\mu)} \varepsilon_\nu \frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_\nu} \right].$$

Since the result holds for arbitrary translations ε_μ we can write

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} T_{\mu\nu} = 0 \quad (9)$$

These are four continuity equations (one for every ν) and, thus, four conservation laws. $T_{\mu\nu}$ is the energy-momentum tensor (stress tensor), given by

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_\sigma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi_\sigma/\partial x_\mu)} \frac{\partial\psi_\sigma}{\partial x^\nu}.$$

For a better understanding of its physical content we will illustrate the meaning of the T_{00} -component. For that reason, in analogy to classical mechanics, where the generalized momentum is given by $p_n = \partial L / \partial \dot{q}_n$, we define the momentum-density conjugate to $\psi_\sigma(\mathbf{x}, t)$ by

$$\pi_\sigma(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}(\psi_\sigma, \partial \psi_\sigma / \partial x_\nu)}{\partial \dot{\psi}_\sigma(\mathbf{x}, t)}.$$

Here the short-hand notation $\dot{\psi}_\sigma \equiv \partial \psi_\sigma / \partial (ct)$ has been used. The classical Hamiltonian reads

$$H(p, q) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}).$$

Analogously, we express the Hamiltonian as a volume integral over a Hamiltonian density $\mathcal{H}(\pi, \psi)$ with the definition

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\pi(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{x}, t)),$$

and

$$\mathcal{H} = \sum_\sigma \pi_\sigma \dot{\psi}_\sigma - \mathcal{L}.$$

Using (14) and (11), Eq. (10) yields

$$p_\nu = \int d^3x T_{0\nu} = \int d^3x \left[\sum_\sigma \pi_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x^\nu} - g_{0\nu} \mathcal{L} \right],$$

with $\partial p_\nu / \partial t = 0$. The quantities p_ν are therefore constant in time, which follows from (9), because $\int d^3x \partial T_{0\nu} / \partial t = - \int d^3x \partial T_{i\nu} / \partial x_i = 0$ according to Gau's theorem. For the T_{00} component of the stress tensor it clearly follows that

$$T_{00} = \sum_\sigma \pi_\sigma \dot{\psi}_\sigma - \mathcal{L} = \mathcal{H},$$

and, therefore, from (13)

$$\int d^3x T_{00} = H.$$

Hence, we can identify p_ν with the energy-momentum four-vector. Its time component is clearly the energy, and also each component of p_ν is conserved in time, i.e. it is a constant of motion.

1.4 Lagrange Density and Energy-Momentum Tensor of the Schrödinger Equation

Problem. Derive the Lagrangian for the Schrödinger equation and discuss the corresponding energy-momentum tensor.

Solution

The Lagrangian is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{\hbar^2}{2m_0} (\nabla \psi^*) \cdot (\nabla \psi) \\ & -\frac{\hbar}{2i} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) - \psi^* V \psi. \end{aligned} \quad (1)$$

Using the Euler-Lagrange differential equation we will show that the variation of this Lagrangian yields the Schrödinger equation. ψ and ψ^* have to be varied independently.

The Euler-Lagrange equation, split up into space and time components, reads

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi_\sigma / \partial x^i)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\sigma} = 0,$$

where the summation over i runs through $i = 1, 2, 3$ or

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\sigma} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi_\sigma)}.$$

First we vary with respect to ψ^* and obtain

$$-V\psi + \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \psi - \frac{\hbar}{i} \dot{\psi} = 0$$

Analogously, variation with respect to ψ yields

$$-V\psi^* + \frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\psi^* + \frac{\hbar}{i}\dot{\psi}^* = 0.$$

Rewriting (4) and (5) yields the Schrödinger equation for ψ and ψ^* in the familiar form,

$$i\hbar\dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\psi + V\psi \equiv \hat{H}\psi,$$

$$-i\hbar\dot{\psi}^* = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\psi^* + V\psi^* \equiv \hat{H}^\dagger\psi^*,$$

where

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta + V(x)$$

is the Hamiltonian. The conjugate momenta to ψ are

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = \frac{i\hbar}{2}\dot{\psi}^*,$$

and

$$\pi^* = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^*} = -\frac{i\hbar}{2}\dot{\psi}.$$

Hence, the Hamiltonian density reads

$$\mathcal{H} = \sum_{\sigma} \pi_{\sigma} \dot{\psi}_{\sigma} - \mathcal{L} = -\frac{i\hbar}{m_0} \nabla\pi \cdot \nabla\psi - \frac{2i}{\hbar} V\pi\psi.$$

We also determine the stress tensor belonging to the Lagrange density (1),

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial\psi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi/\partial x^{\nu})} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi^*/\partial x^{\nu})} - \mathcal{L}\delta_{\mu}^{\nu}.$$

In particular the T_0^0 component, split up into space and time components, is

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \dot{\psi} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} + \dot{\psi}^* \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^*} - \mathcal{L} \\ &= -\frac{\hbar}{2i} \dot{\psi} \dot{\psi}^* + \dot{\psi}^* \frac{\hbar}{2i} \dot{\psi} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi \\ &\quad + \frac{\hbar}{2i} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) + \psi^* V\psi \\ &= \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + \psi^* V\psi \equiv \mathcal{H}, \end{aligned} \tag{11}$$

that is, in accordance with (9). T_0^0 gives the energy density of a given system. The total energy of the Schrödinger field is then

$$\begin{aligned} H &= \int T_0^0 d^3x = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + \psi^* V\psi \right) d^3x \\ &= \int \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x = \int \psi^* \hat{H} \psi d^3x \end{aligned}$$

i.e. the expectation value of the Hamiltonian.

Calculation of the energy flux S : In analogy to the Poynting vector in electrodynamics, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$, the canonical formulation generally follows as

$$S = e_1 T_0^1 + e_2 T_0^2 + e_3 T_0^3,$$

where e_i are the Cartesian unit vectors. In the case of the Schrödinger field we get

$$\begin{aligned} S &= \dot{\psi} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)} + \dot{\psi}^* \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi^*)} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} (\dot{\psi}^* \nabla\psi + \dot{\psi} \nabla\psi^*) \end{aligned} \tag{13}$$

Calculation of the momentum density $\mathbf{p}$:

$$\begin{aligned}
p &= e_1 T_1^0 + e_2 T_2^0 + e_3 T_3^0 \\
&= (\nabla \psi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} + (\nabla \psi^*) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} \\
&= -\frac{\hbar}{2i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)
\end{aligned} \tag{14}$$

This is the expression known to us from elementary quantum mechanics ⁶. The remaining components of the tensor are called momentum fluxes.

1.5 Lorentz Invariance of the Klein-Gordon Equation

Problem. Show the Lorentz invariance of the Klein-Gordon equation.

Solution

The Lorentz invariance of the Klein-Gordon equation is a direct consequence of the invariance of the underlying energy-momentum relation. In four-vector notation it reads

$$\sum_{\mu=0}^3 p_\mu p^\mu = p_\mu p^\mu = E^2/c^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m_0^2 c^2$$

Now it is helpful to express the Klein-Gordon equation in four-vector notation, i.e.

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4) \psi$$

changes to

$$\left[\square + \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(x_\mu) = 0, \text{ where}$$

$$\square = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Hence, in the transformed system the Klein-Gordon equation should read

$$\left[\frac{\partial}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} + \kappa^2 \right] \psi'(x'_\mu) = 0 \quad \text{with} \quad \kappa = \frac{m_0 c}{\hbar},$$

thus, it has to be shown that the operator $(\partial/\partial x_\mu)(\partial/\partial x^\mu)$ is invariant under Lorentz transformations. This may easily be seen, because

$$\hat{p}_\mu = +i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ and, therefore,}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sim \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu.$$

The length of the vector p_μ is, as stated before, Lorentz invariant and, therefore, the operator $\square$ is too.

The transformation properties of the wave function can easily be deduced by looking at the plane-wave solutions of the Klein-Gordon equation,

$$\psi(x_\mu) = e^{ik_\mu x^\mu}, \text{ with } k_0 = \frac{\omega}{c} = \sqrt{k^2 + \kappa^2}.$$

The difference between $\psi'(x'_\mu)$ and $\psi'(x_\mu)$ should be noticed: $\psi(x_\mu)$ and $\psi'(x'_\mu)$ refer to the same space-time point, i.e., $x'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 a_\mu{}^\nu x_\nu$, where $a_\mu{}^\nu$ is a Lorentz transformation, whereas $\psi(x_\mu)$ and $\psi'(x_\mu)$ refer to two different points with coordinates x_μ in the old and new system, respectively.

⁶ See Vol. 1 of this series: Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

1.6 The Klein-Gordon Equation in Schrödinger Form

To demonstrate the new degrees of freedom of the charge in a more distinct way, it is advantageous to transform the Klein-Gordon equation (1.22) - which is of second order in the time coordinate - into a system of two coupled differential equations that are of first order in time. This is achieved by the ansatz

$$\psi = \varphi + \chi \quad , \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = m_0 c^2 (\varphi - \chi) \quad (1.62)$$

in which ψ and the time derivative $\partial\psi/\partial t$ are expressed by the two functions φ and χ . According to (1.22), the Klein-Gordon field fulfills

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi$$

It is easily proved that the two coupled differential equations,

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta(\varphi + \chi) + m_0 c^2 \varphi, \quad (1.63a)$$

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta(\varphi + \chi) - m_0 c^2 \chi, \quad (1.63b)$$

are equivalent to the Klein-Gordon equation (1.22). By adding and subtracting the (1.63), the following arguments can be made:

a) addition yields

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\varphi + \chi) = m_0 c^2 (\varphi - \chi).$$

This is the second equation of (1.62); it leads to the trivial equation $\partial\psi/\partial t = \partial\psi/\partial t$. b) subtraction yields

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\varphi - \chi) = -\frac{\hbar^2}{m_0} \Delta(\varphi - \chi) + m_0 c^2 (\varphi + \chi),$$

or, using (1.62),

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{i\hbar}{m_0 c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) &= -\frac{\hbar^2}{m_0} \Delta \psi + m_0 c^2 \psi \Leftrightarrow \\ -\frac{\hbar^2}{m_0} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -\frac{\hbar^2}{m_0} \Delta \psi + m_0 c^2 \psi \Leftrightarrow \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \Delta \psi - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi, \end{aligned}$$

which is just the Klein-Gordon equation (1.22).

The coupled equations (1.63) may be combined to form one equation. For this purpose we introduce the column vector

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

and make use of the four 2×2 matrices

$$\hat{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

These are identical to the Pauli matrices ⁷, with the significant difference that the matrices (1.65) do not act in spin space, but in the vector space defined by (1.64). The Pauli matrices fulfill the algebraic relations

$$\hat{\tau}_k^2 = 11 \quad , \quad \hat{\tau}_k \hat{\tau}_l = -\hat{\tau}_l \hat{\tau}_k = i\hat{\tau}_m \quad \{k, l, m = 1, 2, 3 - \text{cyclic}\}. \quad (1.66)$$

Using (1.64-66) we can combine the coupled equations (1.63) to form a Schrödinger-type equation, namely,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi &= \hat{H}_f \Psi \quad , \quad \text{or} \\ \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_f \right) \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (1.67)$$

where the Hamiltonian $\hat{H}_f$ for free particles is given by

$$\begin{aligned} \hat{H}_f &= (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} + \hat{\tau}_{3m_0} c^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m_0 c^2. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Hence, in (1.67) we have found a Schrödinger formulation of the Klein-Gordon equation. Starting from (1.67) and using the relation

$$\hat{H}_f^2 = c^2 \hat{\mathbf{p}}^2 + m_0^2 c^4 \quad (1.69)$$

it is easily proved that each component of the vector Ψ of (1.64) individually satisfies the Klein-Gordon equation. This is most elegantly shown by applying $(i\partial/\partial t + \hat{H}_f)$ to the lhs of (1.67), yielding

$$\begin{cases} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \hat{H}_f \right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_f \right) \Psi &= 0 \\ \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hat{H}_f^2 \right) \Psi &= 0 \\ \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 c^2 \Delta - m_0^2 c^4 \right) \Psi &= 0, \end{cases}$$

or

$$\left(+\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi = 0 \quad (1.70)$$

In this representation the expression for the density (1.35) becomes especially simple. With (1.62) we find

⁷ These were introduced in Vol. 1 of this series Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

$$\begin{aligned}
\rho' &= \frac{ie\hbar}{2m_0c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \\
&= \frac{em_0c^2}{2m_0c^2} (\psi^*(\varphi - \chi) + \psi(\varphi^* - \chi^*)) \\
&= \frac{e}{2} [(\varphi^* + \chi^*)(\varphi - \chi) + (\varphi + \chi)(\varphi^* - \chi^*)] \\
&= \frac{e}{2} [\varphi^*\varphi - \chi^*\chi - \varphi^*\chi + \varphi\chi^* + \varphi\varphi^* - \chi\chi^* - \varphi\chi^* + \varphi^*\chi] \\
&= e(\varphi^*\varphi - \chi^*\chi) \\
&= e\Psi^\dagger \hat{\tau}_3 \Psi.
\end{aligned} \tag{1.71}$$

Similarly, from (1.36) we can infer the current vector in Schrödinger representation

$$j' = \frac{e\hbar}{2m_0i} [\Psi^\dagger \hat{\tau}_3 (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \nabla \Psi - (\nabla \Psi^\dagger) \hat{\tau}_3 (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \Psi] \tag{1.72}$$

For the normalization of charge it follows that

$$\begin{aligned}
\int \rho'(x) d^3x &= \pm e, \quad \text{or} \\
\int \Psi^\dagger \hat{\tau}_3 \Psi d^3x &= \pm 1 = \int (\varphi\varphi^* - \chi\chi^*) d^3x.
\end{aligned} \tag{1.73}$$

Let us once again consider free particles in this new representation. If we write

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et) \right] \tag{1.74}$$

and substitute this ansatz into (1.67) by means of (1.68), we find

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{p^2}{2m_0} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m_0c^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{1.75}$$

or, alternatively,

$$E\varphi = \frac{p^2}{2m_0}(\varphi + \chi) + m_0c^2\varphi, \quad E\chi = -\frac{p^2}{2m_0}(\varphi + \chi) - m_0c^2\chi. \tag{1.76}$$

φ_0 and χ_0 are therefore readily determined by the solution of the coupled equations

$$\begin{aligned}
\left(E - \frac{p^2}{2m_0} - m_0c^2 \right) \varphi_0 - \frac{p^2}{2m_0} \chi_0 &= 0 \\
\left(\frac{p^2}{2m_0} \right) \varphi_0 + \left(E + \frac{p^2}{2m_0} + m_0c^2 \right) \chi_0 &= 0
\end{aligned} \tag{1.77}$$

and, since the determinant necessarily needs to vanish,

$$\begin{vmatrix} E - \frac{p^2}{2m_0} - m_0c^2 & -\frac{p^2}{2m_0} \\ +\frac{p^2}{2m_0} & E + \frac{p^2}{2m_0} + m_0c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

It follows that

$$E^2 - \left(\frac{p^2}{2m_0} + m_0 c^2 \right)^2 + \left(\frac{p^2}{2m_0} \right)^2 = 0$$

We thus recover the relativistic energy-momentum relation

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad \text{or} \quad E = \pm c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \equiv \pm E_p$$

the corresponding solutions following from (1.77) and (1.74). We shall discuss the positive and negative energy solutions separately:

1. $E = +E_p$:

$$\Psi^{(+)}(\mathbf{p}) = A_{(+)} \begin{pmatrix} \varphi_0^{(+)} \\ \chi_0^{(+)} \end{pmatrix} \exp [i (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E_p t) / \hbar] \equiv \begin{pmatrix} \varphi^{(+)}(\mathbf{p}) \\ \chi^{(+)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (1.78a)$$

where

$$\begin{pmatrix} \varphi_0^{(+)} \\ \chi_0^{(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 c^2 + E_p \\ m_0 c^2 - E_p \end{pmatrix} \quad (1.78b)$$

and

$$A_{(+)} = \frac{1}{\sqrt{E_p L^3}} \frac{1}{\sqrt{4m_0 c^2}} \quad (1.78c)$$

Equations (1.78) are readily understood if we refer to (1.76), from which we can deduce that

$$(E_p - m_0 c^2) \varphi_0^{(+)} = - (E_p + m_0 c^2) \chi_0^{(+)} \quad \text{or} \quad \varphi_0^{(+)} = \frac{m_0 c^2 + E_p}{m_0 c^2 - E_p} \chi_0^{(+)}.$$

Choosing

$$\chi_0^{(+)} = m_0 c^2 - E_p$$

it consequently follows that

$$\varphi_0^{(+)} = m_0 c^2 + E_p.$$

Equation (1.73) allows us to calculate the normalization constant $A_{(+)}$ from

$$\begin{aligned} |A_{(+)}|^2 & \int \left(\varphi_0^{(+)*} \varphi_0^{(-)} - \chi_0^{(+)*} \varphi_0^{(+)} \right) d^3 x \\ & = |A_{(+)}|^2 L^3 \left[(m_0 c^2 + E_p)^2 - (m_0 c^2 - E_p)^2 \right] = 1. \end{aligned}$$

If we chose the phase to be real, the result is

$$A_{(+)} = \frac{1}{\sqrt{L^3 (m_0 c^2 E_p)}} = \frac{1}{\sqrt{4m_0 c^2} \sqrt{L^3 E_p}}.$$

We proceed similarly in the other case.

2) $E = -E_p$:

$$\Psi^{(-)}(\mathbf{p}) = A_{(-)} \begin{pmatrix} \varphi_0^{(-)} \\ \chi_0^{(-)} \end{pmatrix} \exp [i (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + E_p t) / \hbar] \equiv \begin{pmatrix} \varphi^{(-)}(\mathbf{p}) \\ \chi^{(-)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (1.79a)$$

where

$$\begin{pmatrix} \varphi_0^{(-)} \\ \chi_0^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 c^2 - E_p \\ m_0 c^2 + E_p \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad (1.79b)$$

$$A_{(-)} = A_{(+)} = \frac{1}{\sqrt{4m_0 c^2 L^3 E_p}} = \frac{1}{\sqrt{4m_0 c^2}} \frac{1}{\sqrt{L^3 E_p}} \quad (1.79c)$$

In the nonrelativistic limit we obtain

$$\begin{aligned} E_p &= c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_0^2 c^2}} \\ &\approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{p}^2}{m_0^2 c^2} \right) = m_0 c^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} \end{aligned} \quad (1.80)$$

and, hence,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{(+)} \varphi_0^{(+)} \\ A_{(+)} \chi_0^{(+)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} \begin{pmatrix} (m_0 c^2 + E_p) / \sqrt{E_p 4m_0 c^2} \\ (m_0 c^2 - E_p) / \sqrt{E_p 4m_0 c^2} \end{pmatrix} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{L^3}} \begin{pmatrix} 2m_0 c^2 / 2m_0 c^2 \\ [-\mathbf{p}^2 / (2m_0)] / 2m_0 c^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{v/c \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{L^3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.81)$$

and

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{(-)} \varphi_0^{(-)} \\ A_{(-)} \chi_0^{(-)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} \begin{pmatrix} (m_0 c^2 - E_p) / \sqrt{E_p 4m_0 c^2} \\ (m_0 c^2 + E_p) / \sqrt{E_p 4m_0 c^2} \end{pmatrix} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{L^3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{v/c \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{L^3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.82)$$

Thus, we can see that in the nonrelativistic limit for states with positive charge, the upper component is large and the lower one is small and vice versa for states with negative charge.

10.2.3 1.7 Charge Conjugation

By comparing (1.78a) with (1.79a), we may write down the relation

$$\begin{aligned} \Psi^{(-)}(-\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \varphi^{(-)}(-\mathbf{p}) \\ \chi^{(-)}(-\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^{(+)*}(+\mathbf{p}) \\ \varphi^{(+)*}(+\mathbf{p}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \chi^{(+)*}(+\mathbf{p}) \\ \varphi^{(+)*}(+\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \hat{\tau}_1 \Psi^{(+)*}(+\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (1.83)$$

This can be interpreted in the following way: If the state

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

represents a positive charge, then the state

$$\hat{C}\Psi\hat{C}^{-1} \equiv \Psi_c = \tau_1\Psi^* = \begin{pmatrix} \chi^* \\ \varphi^* \end{pmatrix} \quad (1.85)$$

describes a particle with negative charge. We call Ψ_c the charge-conjugated state of Ψ . Similarly, Ψ is the charge-conjugated state of Ψ_c because it obeys

$$(\Psi_c)_c = \hat{\tau}_1(\hat{\tau}_1\Psi^*)^* = \Psi \quad (1.86)$$

Explicitly, the charge conjugation implies the following transformations according to (1.83):

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(+)} &\longrightarrow \chi_0^{(-)} \\ \chi_0^{(+)} &\longrightarrow \varphi_0^{(-)} \\ \mathbf{p} &\longrightarrow -\mathbf{p} \\ +E_p &\longrightarrow -E_p \end{aligned} \quad (1.87)$$

If we (arbitrarily) call the particle described by Ψ as the particle, then we call the particle described by Ψ_c antiparticles. If we call, for example, the π^- mesons particles, then the π^+ mesons are antiparticles. Neutral particles fit into this picture too, in that for these the charge-conjugated state is the state itself. In other words, neutral particles are their own antiparticles. So we have

$$\Psi_c = \hat{\tau}_1\Psi^* = \alpha\Psi \quad (1.88)$$

The factor α has to be real. This important point can be understood if we imagine that, for a neutral particle, the Klein-Gordon-wave function $\Psi = \varphi + \chi$ (1.62) has to be real; therefore,

$$\text{Im } \varphi = -\text{Im } \chi \quad (1.89)$$

must always hold. Since ψ_c in (1.88) is describing neutral particles, then similarly,

$$\text{Im}(\alpha\varphi) = -\text{Im}(\alpha\chi) \quad (1.90)$$

must hold: Both conditions, (1.89) and (1.90), necessarily lead to real

This can also be deduced from (1.88), where for neutral particles both ψ and $\alpha\psi$ are real. From

$$(\Psi_c)_c = \Psi,$$

it follows that

$$(\alpha\Psi)_c = \hat{\tau}_1(\alpha\Psi)^* = \alpha\hat{\tau}_1\Psi^* = \alpha\alpha\Psi = \Psi,$$

so that

$$\alpha^2 = 1 \quad , \quad \alpha = \pm 1. \quad (1.91)$$

Accordingly there exist two different kinds of neutral particles, namely

a) neutral particles with positive charge parity, i.e. $\alpha = +1$

$$\Psi_c \equiv \hat{\tau}_1\Psi^* = \Psi \quad (\text{or } \varphi^* = \chi) \quad ; \quad (1.92)$$

b) neutral particles with negative charge parity, i.e. $\alpha = -1$

$$\Psi_c \equiv \hat{\tau}_1\Psi^* = -\Psi \quad (\text{or } \varphi^* = -\chi). \quad (1.93)$$

1.6 C Parity

C parity stands for charge-conjugation parity or, less accurately, particle-antiparticle conjugation symmetry. To obtain a general definition, we choose to characterize a particle state in the following way:

$$|\psi\rangle = |M, \mathbf{p}, J, \lambda; B, Q, L, N_\mu\rangle.$$

This characterization is based on a set of quantum numbers with the following definitions:

M = mass $\equiv$ energy of the system,

$\mathbf{p}$ = momentum of the system,

J = angular momentum quantum number,

λ = helicity = eigenvalue of the helicity operator, λ characterizes the spin projection onto the momentum direction),

B = baryon number,

Q = charge,

L = lepton number.

N_μ = muon number, compiled in the following table.

Equivalently we can use the hypercharge Y , the Strangeness S and the Isospin T_3 , which are connected via

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3, \quad B = Y - S$$

to the charge and baryon number. ⁸

Value of N_μ for different particles

Particle	$e^+, e^-, \bar{\nu}_e \nu_e$	μ^-, ν_μ	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$	All other particles
N_μ	0	+1	-1	0

The following processes are forbidden due to muon number conservation:

$$\left. \begin{array}{l} \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_e \\ \bar{\nu}_\mu + p \rightarrow e^+ + n \end{array} \right\}$$

On the other hand reactions like

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n \\ \bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n \end{array} \right\}$$

are allowed.

The muonic charge N_μ and the lepton-number L may be replaced by the alternative lepton numbers L_e and L_μ , which are listed, for convenience, in the following table.

Values of L_e and L_μ for different particles

Particle	$e^+, \bar{\nu}_e$	e^-, ν_e	$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$	μ^-, ν_μ	All other particles
L_e	-1	+1	0	0	0
L_μ	0	0	-1	+1	0

The introduction of L_e and L_μ has the advantage that the set of quantum numbers is symmetric with respect to electrons and muons. Clearly one has

$$L = L_e + L_\mu$$

and state (1) can be written as

$$|\psi\rangle = |M, \mathbf{p}, J, \lambda; B, Q, L_e, L_\mu\rangle.$$

The charge conjugation is now defined by the equation

⁸ See Vol. 2 of this series: Quantum Mechanics - Symmetries (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

$$\begin{aligned}
\hat{C} |M, \mathbf{p}, J, \lambda; B, Q, L_e, L_\mu\rangle \\
&\equiv |M, \mathbf{p}, J, \lambda; B, Q, L_e, L_\mu\rangle_c \\
&= \eta_c |M, \mathbf{p}, J, \lambda; -B, -Q, -L_e, -L_\mu\rangle
\end{aligned} \tag{4}$$

which is simply saying that the $\hat{C}$ operator reflects (i.e. changes the sign of) charge-like quantum numbers, whereas other properties such as M, p, J, λ , remain unchanged. The former quantities are called intrinsic, while the latter are named external. The state $|M, p, J, \lambda; B, Q, L_e, L_\mu\rangle$ is called a particle state, the state $|M, p, J, \lambda; B, -Q, -L_e, -L_\mu\rangle$ is called an antiparticle state. Since $\hat{C}|\psi\rangle = \psi_c$ should be normalized, e.g.

$$\langle\psi_c|\psi_c\rangle = 1,$$

and because the states (3) are also normalized, it follows that

$$|\nu_c|^2 = 1 \quad \text{or} \quad \eta_c = e^{i\alpha}, \alpha \text{ real.}$$

This formal property does not yet guarantee that the operator $\hat{C}$ corresponds to a physical symmetry. For this, the states on the rhs of (4) have to be physically realized, which is the case for $\hat{C}$ in nearly all known theories; however, an important exception occurs for neutrinos and antineutrinos.

Although neutrinos, in particular, are of great importance in the theory of weak interactions, the $\hat{C}$ conjugation cannot be chosen in this case as a symmetry operation'. On the other hand careful investigations have shown that the Hamiltonians of the strong and the electromagnetic interactions have a vanishing commutator with $\hat{C}$, i.e.

$$\hat{C}\hat{H}_{\text{strong}} = \hat{H}_{\text{strong}}\hat{C},$$

$$\hat{C}\hat{H}_{\text{elm}} = \hat{H}_{\text{elm}}\hat{C}.$$

Consequently, $\hat{C}$ is, as a matter of fact, a symmetry operation for all strong and electromagnetic processes.

Let us now return to (4). If one of the charge-like quantum numbers is not equal to zero, then η_c has no physical meaning. Since, in this case, one is free to choose a relative phase factor between the states $|M, p, J, \lambda; B, Q, L_e, L_\mu\rangle$ and $|M, p, J, \lambda; -B, -Q, -L_e, -L_\mu\rangle$ (which are assumed to be different), then we can choose $\eta_c = 1$. But if particles and antiparticles are identical, then (4) turns to be an eigenvalue equation

$$\begin{aligned}
&|M, \mathbf{p}, J, \lambda; 0, 0, 0, 0\rangle_c \\
&= \eta_c |M, \mathbf{p}, J, \lambda; 0, 0, 0, 0\rangle.
\end{aligned} \tag{7}$$

The eigenvalue η_c is named C -parity. It is natural to postulate that the double application of the charge conjugation $\hat{C}$ leads back to the original state. Thus,

$$\begin{aligned}
&(|M, \mathbf{p}, J, \lambda; 0, 0, 0, 0\rangle_c)_c \\
&= |M, \mathbf{p}, J, \lambda; 0, 0, 0, 0\rangle \\
&= \eta_c^2 |M, \mathbf{p}, J, \lambda; 0, 0, 0, 0\rangle.
\end{aligned} \tag{8}$$

Therefore,

$$\eta_c^2 = 1 \text{ or } \eta_c = \pm 1.$$

If one considers a many-particle state, e.g. a two-particle state like

$$|\phi_1, \phi_2\rangle = |\phi_1\rangle |\phi_2\rangle$$

where each particle state $|\phi_i\rangle$ has the C parity $\eta_c^{(i)}$, then it holds that

$$\begin{aligned}
\hat{C} |\phi_1, \phi_2\rangle &= \eta_c |\phi_1, \phi_2\rangle = |\phi_1\rangle_c |\phi_1\rangle_c \\
&= \eta_c^{(1)} |\phi_1\rangle \eta_c^{(2)} |\phi_2\rangle = \eta_c^{(1)} \eta_c^{(2)} |\phi_1\rangle |\phi_2\rangle \\
&= \eta_c^{(1)} \eta_c^{(2)} |\phi_1, \phi_2\rangle.
\end{aligned} \tag{11}$$

Thus,

$$\eta_c = \eta_c^{(1)} \eta_c^{(2)}$$

Since, from (6), $\hat{C}$ should be a symmetry operation, then C parity is a conserved quantum number for all strong and electromagnetic reactions. To illustrate this we consider the following three neutral particles:

a) The η meson, for which $m_\eta c^2 = 548.8 \text{ MeV}$, $\Gamma_\eta = \hbar/\tau_\eta = 2.3 \text{ keV}$ [$1 \text{ MeV} \hat{=} (3/2) \times 10^{31} \text{ s}^{-1}$], charge = 0, spin/parity = 0^+ ;

b) the pion π^0 , with $m_{\pi^0} c^2 = 134.97 \text{ MeV}$, $\Gamma_{\pi^0} = \hbar/\tau_{\pi^0} = 7.9 \text{ eV}$, charge = 0, spin / parity = 0^- ;

c) the photon, having $m_\gamma c^2 = 0$, $\Gamma_\gamma = \hbar/\tau_\gamma = 0$, charge = 0, spin/parity = 1^- .

For these particles, the decay processes

$$\eta \rightarrow \gamma + \gamma,$$

$$\eta \rightarrow 3\pi^0,$$

$$\eta \rightarrow \pi^0 + \gamma + \gamma,$$

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma,$$

may be observed, but the following reactions do not occur:

$$\eta \nrightarrow \pi^0 + \gamma$$

$$\eta \nrightarrow 3\gamma$$

$$\pi^0 \nrightarrow 3\gamma.$$

We can understand both the allowed as well as the forbidden processes by assuming the conservation of C parity and assigning the C parities to the particles as shown in the accompanying table.

Particle	γ	π_0	η
C parity	-1	1	+1

Of course, within a given process the C parity is only conserved if there occur solely particles with a well-defined C parity. This is true for reactions (13) and (14). The negative C parity of the photon, as shown in the table, can be understood more precisely: The photons are coupled to all other particles by the electric current j_μ . The interaction part of the Lagrangian is

$$\mathcal{L}_{\text{elm}} = j_\mu(x) A^\mu(x)$$

where $A^\mu(x)$ is the four-potential of the photon. Obviously, the current $j_\mu(x)$ changes its sign under $\hat{C}$ transformation,

$$\hat{C} j_\mu(x) \hat{C}^{-1} = -j_\mu(x).$$

Therefore,

$$\hat{C} A^\mu(x) \hat{C}^{-1} = -A^\mu(x)$$

must hold to save the invariance of the Lagrangian (15) under $\hat{C}$ transformation, i.e.

$$\hat{C} \mathcal{L}_{\text{elm}} \hat{C}^{-1} = \mathcal{L}_{\text{elm}}.$$

The positive C parities of π^0 and η follow from the existence of the decays (13) using (12).

⁹ This is discussed in more detail in Vol. 5 of this series: Gauge Theory of Weak Interactions (Springer, Berlin, Heidelberg) to be published.

10.2.4 1.8 Free Spin-0 Particles in the Feshbach-Villars Representation

Theory

We saw in (1.81) and (1.82) that positively charged particles possess a large upper component in the nonrelativistic limit ($|\varphi^{(+)}| > |\chi^{(+)}|$) while negatively charged particles have a large lower component ($|\chi^{(-)}| > |\varphi^{(-)}|$). Now there exists a representation - the so-called Φ representation - in which the positive and negative solutions are always of the following form

$$\Phi^{(+)}(p) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi^{(-)}(p) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.94)$$

This representation is established by the transformation

$$\Phi = \hat{U}\Psi, \quad \Phi^\dagger = \Psi^\dagger \hat{U}^\dagger \quad (1.95)$$

where $\hat{U}$ is the operator

$$\hat{U} = \mathbb{1} \cdot \frac{(m_0 c^2 + E_p) - \hat{\tau}_1 (m_0 c^2 - E_p)}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} \quad (1.96)$$

with $E_p = c(\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2)^{1/2}$ and $\phi^\dagger$ denotes the Hermitian conjugate of ϕ ; similarly $\hat{U}^\dagger$. The 2×2 matrix $\hat{U}$ is not unitary in the usual sense ($\hat{U}^{-1} \neq \hat{U}^\dagger$) since

$$\hat{U}^{-1} = \hat{\tau}_3 \hat{U} \hat{\tau}_3 = \mathbb{K} \cdot \frac{(m_0 c^2 + E_p) + \hat{\tau}_1 (m_0 c^2 - E_p)}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} \quad (1.97)$$

This can be seen directly with the aid of (1.66) and by the relation,

$$\hat{U} \hat{U}^{-1} = \mathbb{1} \cdot \frac{(m_0 c^2 + E_p)^2 - (m_0 c^2 - E_p)^2}{4m_0 c^2 E_p} = \mathbb{1} \cdot \frac{4m_0 c^2 E_p}{4m_0 c^2 E_p} = \mathbb{1} \quad (1.98)$$

Besides this, according to (1.78a) and (1.79a), plane waves are transformed by

$$\begin{aligned} \phi^{(+)}(\mathbf{p}) &= \hat{U} \Psi^{(+)}(\mathbf{p}) \\ &= \hat{U} \frac{1}{\sqrt{L^3}} \frac{1}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} \begin{pmatrix} m_0 c^2 + E_p \\ m_0 c^2 - E_p \end{pmatrix} \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E_p t)/\hbar] \\ &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} \frac{\begin{pmatrix} (m_0 c^2 + E_p)^2 \\ (m_0 c^2 + E_p)(m_0 c^2 - E_p) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (m_0 c^2 - E_p)^2 \\ (m_0 c^2 - E_p)(m_0 c^2 - E_p) \end{pmatrix}}{4m_0 c^2 E_p} \\ &\quad \times \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E_p t)/\hbar] \\ &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E_p t)/\hbar]. \end{aligned}$$

Similarly, we get

¹⁰ H. Feshbach, F. Villars: Rev. Mod. Phys. 30, 24 (1958).

$$\begin{aligned}
 \phi^{(-)}(\mathbf{p}) &= \hat{U}\Psi^{(-)}(\mathbf{p}) \\
 &= \hat{U} \frac{1}{\sqrt{L^3}} \frac{1}{\sqrt{4m_0c^2E_p}} \begin{pmatrix} m_0c^2 - E_p \\ m_0c^2 + E_p \end{pmatrix} \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + E_pt)/\hbar] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} \frac{\begin{pmatrix} (m_0c^2 + E_p)(m_0c^2 - E_p) \\ (m_0c^2 + E_p)^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (m_0c^2 + E_p)(m_0c^2 - E_p) \\ (m_0c^2 + E_p)^2 \end{pmatrix}}{4m_0c^2E_p} \\
 &\quad \times \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + E_pt)/\hbar] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + E_pt)/\hbar].
 \end{aligned} \tag{1.100}$$

This is, in fact, the result required by (1.94). The normalization of the Φ representation follows from that of Ψ (1.73):

$$\begin{aligned}
 \pm \mathbb{1} &= \int \Psi^\dagger \hat{\tau}_3 \Psi d^3x = \int \left(\hat{U}^{-1} \Phi \right)^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{U}^{-1} \Phi d^3x \\
 &= \int \Phi^\dagger \left(\hat{U}^{-1} \right)^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{U}^{-1} \Phi d^3x = \int \Phi^\dagger \hat{\tau}_3 \Phi d^3x
 \end{aligned} \tag{1.101}$$

since, due to (1.97), $\hat{\tau}_3 \hat{U}^{-1} = \hat{U} \hat{\tau}_3$ and therefore

$$\left(\hat{U}^{-1} \right)^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{U}^{-1} = \left(\hat{U}^{-1} \right)^\dagger \hat{U} \hat{\tau}_3 = \hat{U}^{-1} \hat{U} \hat{\tau}_3 = \hat{\tau}_3. \tag{1.102}$$

Here we have made use of $\left(\hat{U}^{-1} \right)^\dagger = \hat{U}^{-1}$ which also follows from (1.97). In analogy to (1.101) we define a generalized scalar product or Φ product

$$\langle \Psi | \Psi' \rangle_\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \int \Psi^\dagger \hat{\tau}_3 \Psi' d^3x \tag{1.103}$$

One recognizes immediately that, as in (1.101),

$$\langle \Psi | \Psi' \rangle_\Phi = \langle \Phi | \Phi' \rangle_\Phi \tag{1.104}$$

i.e. the generalized scalar product is invariant under the transformation (1.95). It seems natural to call an operator $\hat{A}$, with the property

$$\langle \Psi | \Psi' \rangle_\Phi = \left\langle \hat{A} \Phi | \hat{A} \Phi' \right\rangle_\Phi, \tag{1.105}$$

Φ unitary. Such an operator has to fulfil the condition

$$\hat{A}^H \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\tau}_3 \hat{A}^\dagger \hat{\tau}_3 = \hat{A}^{-1}, \tag{1.106}$$

since $\int \Psi^\dagger \hat{\tau}_3 \Psi' d^3x = \int \Phi^\dagger \hat{A}^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{A} \Phi' d^3x$ and, thus, $\hat{A}^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{A} = \hat{\tau}_3$ or $\hat{\tau}_3 \hat{A}^\dagger \hat{\tau}_3 = \hat{A}^{-1}$. The $\hat{U}$ operator (1.96) is a member of this class. If $\hat{A}$ and $\hat{\tau}_3$ commute, then the relation $\hat{A}^\dagger = \hat{A}^{-1}$ follows from (1.106), i.e. the usual unitary relation.

The charge Q of a state Ψ is given by the integral

$$Q = e \int \Psi^\dagger \hat{\tau}_3 \Psi d^3x \tag{1.107}$$

In the following exercise we will show that the average energy of a state Ψ is determined by

$$E = \int \Psi^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{H}_f \Psi d^3x \quad (1.108)$$

1.7 Lagrange Density and Energy-Momentum

Tensor of the Free Klein-Gordon Equation in the Feshbach-Villars Representation

Problem. Determine the Lagrange density of the free Klein-Gordon equation in the Schrödinger representation (Feshbach-Villars representation). Subsequently calculate the energy-momentum tensor and show that the energy is given by the expression $E = \int \Psi^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{H}_f \Psi d^3x$.

Solution

In the Schrödinger representation the equation of motion for the Klein-Gordon field reads

$$i\hbar \partial_t \Psi = \hat{H}_f \Psi \quad \text{with} \\ \hat{H}_f = (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} + \hat{\tau}_3 m_0 c^2.$$

The vector Ψ has two components, $\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \Rightarrow \Psi^\dagger = (\phi^*, \chi^*)$, and we define $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \hat{\tau}_3$.

To prove that the Lagrange density

$$\mathcal{L} = i\hbar \bar{\Psi} \partial_t \Psi - \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla \bar{\Psi} (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \nabla \Psi - m_0 c^2 \bar{\Psi} \hat{\tau}_3 \Psi$$

yields the correct equation of motion, we vary the action integral $I = \int \mathcal{L} d^4x$ using the standard method. This variation with respect to the components of $\bar{\Psi}$ results in equation (1),

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \bar{\Psi}_\alpha} &= 0 \\ \Rightarrow \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \bar{\Psi}_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_\alpha} &= 0 \\ \Rightarrow \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\Psi}}_\alpha} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \bar{\Psi}_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_\alpha} &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m_0} (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \nabla \Psi_\alpha - (i\hbar \partial_t \Psi_\alpha - m_0 c^2 \hat{\tau}_3 \Psi_\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

with $(\alpha = 1, 2)$.

Similarly, variation of Ψ results in the corresponding equation of motion for $\bar{\Psi}$, i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \Psi_\alpha} &= 0 \Rightarrow \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_\alpha} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \Psi_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\alpha} = 0, \\ \Rightarrow -i\hbar \partial_t \bar{\Psi}_\alpha &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 (\bar{\Psi} (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2))_\alpha \\ &\quad + m_0 c^2 (\bar{\Psi} \hat{\tau}_3)_\alpha. \end{aligned}$$

If we had defined the Lagrange density with $\Psi^\dagger$ instead of $\bar{\Psi}$, the same equation of motion (1) would have resulted from the variation with respect to $\Psi^\dagger_\alpha$. However, we demand the action $I = \int d^3x dt \mathcal{L}$ to be real which results in the condition that

$$\int \left[\bar{\Psi} (+i\hbar \partial_t) \Psi - \nabla \bar{\Psi} \frac{\hbar^2 (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2)}{2m_0} \cdot \nabla \Psi - m_0 c^2 \bar{\Psi} \hat{\tau}_3 \Psi \right] d^3x dt$$

(partial integration) = $\int \left[\bar{\Psi} \left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m_0} (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) - m_0c^2\hat{\tau}_3 \right) \Psi \right] d^3x dt$
 must be real. This is the case if each of the operators
 $i\hbar\partial_t, -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m_0} (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) + m_0c^2\hat{\tau}_3 = \hat{H}_f$
 fulfills the generalized hermiticity condition
 $\hat{O}^H = \hat{\tau}_3 \hat{O}^\dagger \hat{\tau}_3 = \hat{O}$.

This has already been proven [see (1.109) and (1.110)] to be true. The integral I would not be real if, instead of $\bar{\Psi}$, the spinor $\Psi^\dagger$ had been used.

We now calculate the energy-momentum tensor from $\mathcal{L}$, i.e.

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \partial_\nu \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} \partial_\nu \bar{\Psi} - \mathcal{L} g_{\mu\nu},$$

to obtain

$$\begin{aligned} T_{00} = & i\hbar \bar{\Psi} \partial_t \Psi - i\hbar \bar{\Psi} \partial_t \Psi + \frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla \bar{\Psi} (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \cdot \nabla \Psi \\ & + m_0c^2 \bar{\Psi} \hat{\tau}_3 \Psi \end{aligned} \quad (4)$$

and

$$\begin{aligned} E = & \int T_{00}^0 d^3x = \int T_{00} d^3x \\ = & \int \left(\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla \bar{\Psi} \cdot (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \nabla \Psi + m_0c^2 \bar{\Psi} \hat{\tau}_3 \Psi \right) d^3x \\ = & \int \bar{\Psi} \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \nabla^2 + m_0c^2 \hat{\tau}_3 \right) \Psi d^3x \\ = & \int \Psi^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{H}_f \Psi d^3x \end{aligned} \quad (5)$$

which is just (1.108).

From (1.107) and (1.108) we can now guess the generalization of the expectation values of arbitrary operators $\hat{L}$ and define the mean value (expectation value) $\langle L \rangle$ by

$$\langle L \rangle = \int \Psi^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{L} \Psi d^3x \quad (1.109)$$

where $\langle L \rangle$ must be real. This results from the condition that

$$\int \Psi^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{L} \Psi d^3x = \left(\int \Psi^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{L} \Psi d^3x \right)^\dagger = \int \Psi^\dagger \hat{L}^\dagger \hat{\tau}_3^\dagger \Psi d^3x$$

Therefore,

$$\hat{\tau}_3 \hat{L} = \hat{L}^\dagger \hat{\tau}_3 \quad \text{or} \quad L^H \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\tau}_3 \hat{L}^\dagger \hat{\tau}_3 = \hat{L}, \quad (1.110)$$

which is the generalized hermiticity for an operator $\hat{L}$. We immediately see that the hermiticity of the Hamiltonian $\hat{H}_f$ is general, because

$$\begin{aligned} \hat{H}_f^H = & \hat{\tau}_3 \hat{H}_f^\dagger \hat{\tau}_3 = \left[(\hat{\tau}_3 - i\hat{\tau}_2) \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} + \hat{\tau}_3 m_0c^2 \right] \hat{\tau}_3 \\ = & \left[(\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} + \hat{\tau}_3 m_0c^2 \right] \hat{\tau}_3 \hat{\tau}_3 \equiv \hat{H}_f. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Nevertheless, the operator $\hat{U}$ (1.96) is ordinary hermitian (i.e. hermitian in the standard sense), i.e. $\hat{U}^\dagger = \hat{U}$.

The generalized scalar product (1.103), (1.109) necessarily leads to a transformation law for the operators $\hat{L}$ when changing the states according to (1.95). We simply calculate

$$\begin{aligned} \int \Psi^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{L} \Psi d^3x &= \int \Phi^\dagger \left(\hat{U}^{-1} \right)^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{L} \hat{U}^{-1} \Phi d^3x \\ &= \int \Phi^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{U} \hat{L} \hat{U}^{-1} \Phi d^3x \\ &\equiv \int \Phi^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{L}_\Phi \Phi d^3x \end{aligned}$$

using (1.102). Thus,

$$\hat{L}_\Phi = \hat{U} \hat{L} \hat{U}^{-1} \quad (1.112)$$

This is the transformation law for operators covering the transition from Ψ representation to Φ representation (1.95).

Remark: Notice that the transformation law for operators depends on the definition of the scalar product. If, instead of the Φ product (1.103, 109), we had used the ordinary scalar product

$$\langle \Psi | \Psi' \rangle = \int \Psi^\dagger \Psi' d^3x$$

with the matrix elements for operators $\hat{L}$ being

$$\langle \Psi | \hat{L} | \Psi' \rangle = \int \Psi^\dagger \hat{L} \Psi' d^3x$$

then the operator $\hat{L}$ in Φ representation (we denote it by $\hat{L}'_\Phi$) would have been

$$\int \Psi^\dagger \hat{L} \Psi d^3x = \int \Phi^\dagger \left(\hat{U}^{-1} \right)^\dagger \hat{L} \hat{U}^{-1} \Phi d^3x \equiv \int \Phi^\dagger \hat{L}'_\Phi \Phi d^3x$$

Thus,

$$\hat{L}'_\Phi = \left(\hat{U}^{-1} \right)^\dagger \hat{L} \hat{U}^{-1} = \hat{U}^{-1} \hat{L} \hat{U}^{-1}$$

i.e. a different law from (1.112). It is important that, because of physical reasons (charge interpretation), only the generalized scalar product (Φ product) makes sense to us and thus the transformation law (1.112) will be used in the following.

1.8 The Hamiltonian in the Feshbach-Villars Representation

Problem. Show that, in the Feshbach-Villars representation, the Hamiltonian for all momentum eigenstates is given by $\hat{H}_\Phi = \hat{U} \hat{H}_f \hat{U}^{-1} = \hat{\tau}_3 E_p$.

Solution

According to (1.112) the Hamiltonian $\hat{H}_f$ of (1.68) for a free Klein-Gordon field transforms, under the transition to the Feshbach-Villars representation (1.95), according to

$$\begin{aligned}\hat{H}_\Phi = \hat{U} \hat{H}_f \hat{U}^{-1} &= \left[\frac{(E_p + m_0 c^2) \mathbb{1} - (m_0 c^2 - E_p) \hat{\tau}_1}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} \right] \\ &\times \left[(\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} + \hat{\tau}_3 m_0 c^2 \right] \\ &\times \left[\frac{(m_0 c^2 + E_p) \mathbb{1} + (m_0 c^2 - E_p) \hat{\tau}_1}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} \right].\end{aligned}$$

If we define $a_+ = m_0 c^2 + E_p$, $a_- = m_0 c^2 - E_p$, $a = m_0 c^2$, then it follows that

$$\begin{aligned}\hat{H}_\Phi &= \frac{1}{4m_0 c^2 E_p} [a_+ - a_- \hat{\tau}_1] \\ &\times \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) + a \hat{\tau}_3 \right] (a_+ + a_- \hat{\tau}_1) \\ &= \frac{1}{4m_0 c^2 E_p} [a_+ - a_- \hat{\tau}_1] \left[a_+ \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \right. \\ &\quad \left. + a_- \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} (\hat{\tau}_3 \hat{\tau}_1 + i\hat{\tau}_2 \hat{\tau}_1) + a a_+ \hat{\tau}_3 + a a_- \hat{\tau}_3 \hat{\tau}_1 \right] \\ &= \frac{1}{4m_0 c^2 E_p} \left[a_+^2 \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \right. \\ &\quad \left. + a_+ a_- \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} (\hat{\tau}_3 \hat{\tau}_1 + i\hat{\tau}_2 \hat{\tau}_1) \right. \\ &\quad \left. + a a_+^2 \hat{\tau}_3 + a a_- a_+ \hat{\tau}_3 \hat{\tau}_1 - a_- a_+ \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} (\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_2) \right. \\ &\quad \left. - a_-^2 \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} (\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_3 \hat{\tau}_1 + i\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_2 \hat{\tau}_1) - a a_+ a_- \hat{\tau}_1 \hat{\tau}_3 \right. \\ &\quad \left. - a a_-^2 \hat{\tau}_1 \hat{\tau}_3 \hat{\tau}_1 \right].\end{aligned}$$

For momentum eigenstates the operator $\hat{\mathbf{p}}$ can be substituted by its eigenvalue. Therefore, with $\hat{\tau}_i \hat{\tau}_j = i\epsilon_{ijk} \hat{\tau}_k$ ($i \neq j = 1, 2, 3$) one has

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2 &= +i\hat{\tau}_2 \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_3 \hat{\tau}_1 = -i\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1 \hat{\tau}_3 \\ &= -\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_3 \hat{\tau}_1 - i\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_2 \hat{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

and

$$\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_3 \hat{\tau}_1 = -\hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

as well as

$$-\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

and we get

$$\begin{aligned}
\hat{H}_\Phi &= \frac{1}{4m_0c^2E_p} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \left\{ a_+^2 \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} + a_+ a_- \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} \right. \\
&\quad \left. + a_- a_+ \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} + a_-^2 \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} \right\} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \{ a_+^2 a + a_-^2 a \} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \{ 2aa_- a_+ \} \Big] \\
&= \frac{1}{4m_0c^2E_p} \left[\hat{\tau}_3 \left\{ (a_+ + a_-)^2 \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} + (a_+^2 + a_-^2) a \right\} \right. \\
&\quad \left. + i\hat{\tau}_2 \left\{ (a_+ + a_-)^2 \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} + 2aa_- a_+ \right\} \right].
\end{aligned}$$

Using the relation

$$(a_+ + a_-)^2 \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} = 4m_0^2c^4 \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} = 2m_0c^2 \mathbf{p}^2 c^2 E,$$

$$\begin{aligned}
(a_+^2 + a_-^2) a &= 2m_0c^2 (m_0^2c^4 + E_p^2) \\
&= 2m_0c^2 (2m_0^2c^4 + \mathbf{p}^2 c^2), \\
2aa_- a_+ &= 2m_0c^2 (m_0^2c^4 - E_p^2) = -2m_0c^2 \mathbf{p}^2 c^2,
\end{aligned}$$

we obtain

$$\begin{aligned}
\hat{H}_\Phi &= \frac{1}{4m_0c^2E_p} [\hat{\tau}_3 \cdot 4m_0c^2E_p^2 + i\hat{\tau}_2 \cdot 0] \\
&= \hat{\tau}_3 E_p.
\end{aligned}$$

From the free Klein-Gordon equation in Schrödinger representation (1.67)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_f \Psi$$

and by the application of $\hat{U}$ from the left it follows that

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U} \Psi}{\partial t} = \hat{U} \hat{H}_f \hat{U}^{-1} \hat{U} \Psi$$

Using the results of Exercise 1.8 and (1.95), we obtain the free Klein-Gordon equation in the Feshbach-Villars representation, i.e.

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \hat{\tau}_3 E_p \Phi \quad (1.113)$$

This equation yields two different solutions for any given momentum $\mathbf{p}$, one with positive ($+E_p$) and one with negative ($-E_p$) time factor. They are precisely the solutions (1.99) and (1.100), obtained by the direct transformation, and can be interpreted, according to the time factor, as belonging to positive charge or negative charge, respectively (see the following Exercise 1.9 for further details).

1.9 Solution of the Free Klein-Gordon Equation in the Feshbach-Villars Representation

Problem. Solve the free Klein-Gordon equation in the Feshbach-Villars representation (1.113) directly and show that the solutions are identical to (1.99) and (1.100).

Solution

The Feshbach-Villars representation of the Schrödinger equation reads

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \hat{\tau}_3 E_p \Phi,$$

where the ϕ 's are eigenstates of the momentum operator

$$\Phi = \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar) \theta, \quad \theta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix},$$

$$E_p = \sqrt{m_0^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}.$$

By inserting the matrix $\hat{\tau}_3$ we get

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = E_p \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ -\vartheta_2 \end{pmatrix} \text{ and, thus,}$$

$$i\hbar \dot{\vartheta}_1 = E_p \vartheta_1, \quad i\hbar \dot{\vartheta}_2 = -E_p \vartheta_2.$$

Integration yields ϑ_1 and ϑ_2 is the form of

$$\vartheta_1 = N_1 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_p t\right)$$

$$\vartheta_2 = N_2 \exp\left(+\frac{i}{\hbar} E_p t\right).$$

N_1 and N_2 are normalization constants which are determined by the normalization condition

(1.101),

$$\int \Phi^\dagger \hat{\tau}_3 \Phi d^3 r = \int \theta^\dagger \hat{\tau}_3 \theta d^3 r = \pm 1,$$

yielding

$$|N_1|^2 - |N_2|^2 = \pm \frac{1}{V}.$$

Hence, we obtain two independent solutions [see (1.99)

and (1.100)].

$$\Phi^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{V}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - E_p t)\right], \text{ charge } +1$$

$$\Phi^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{V}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + E_p t)\right] \quad , \quad \text{charge } -1$$

Again each linear combination

$$n_1 \Phi^{(+)} + n_2 \Phi^{(-)}, \text{ with } |n_1|^2 - |n_2|^2 = 1,$$

is a normalized eigenfunction of the momentum p with charge $+1$, and each linear combination with $|n_1|^2 - |n_2|^2 = -1$ is a normalized solution with charge -1 .

We denote the solutions (1.99) and (1.100) of the Klein-Gordon equation (1.113) for fixed momentum $\mathbf{p}$ (see Exercise 1.9) by

$$\Phi_{p,\lambda},$$

$$p = \{p_i\} = \left\{ \frac{2\pi\hbar}{L} n_i \right\} \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \lambda = +1, -1. \quad (1.114)$$

From now on we drop the index i on p_i , which has its origin in the box normalization, to simplify the notation, e.g. $\sum_p$ means $\sum_{p_i}$. The index $\lambda = +1$ denotes a positive charge state whereas $\lambda = -1$ denotes a negative one. The states $\Phi_{p,\lambda}$ in (1.114) form a complete orthonormalized system. Hence, the following relation holds:

$$\int \Phi_{p,\lambda}^\dagger \hat{\tau}_3 \Phi_{p',\lambda'} d^3 x = \lambda \delta_{p,p'} \delta_{\lambda,\lambda'} \quad (1.115)$$

where $\lambda, \lambda' = \pm 1$ and $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ take the values given in (1.114). Let us now consider a general state Φ containing particles with positive as well as negative charge. We can recognize and distinguish between the charged particles by expanding Φ in terms of $\phi_{p,\lambda}$ to give

$$\Phi = \sum_{p,\lambda} a_{p,\lambda} \Phi_{p,\lambda} = \sum_p (a_{p,+1} \Phi_{p,+1} + a_{p,-1} \Phi_{p,-1}) \quad (1.116)$$

where the expansion coefficient $a_{p,\lambda}$ is given by

$$a_{p,\lambda} = \int \Phi_{p,\lambda}^\dagger \hat{\tau}_3 \Phi d^3x \quad (1.117)$$

For the total charge we obtain

$$e \int \Phi^\dagger \hat{\tau}_3 \Phi d^3x = e \sum_p [|a_{p,+1}|^2 - |a_{p,-1}|^2] = \pm Ne \quad (1.118)$$

The total number N of elementary charges which are contained in the state Φ can be positive, negative or zero. $\sum_p |a_{p,+1}|^2$ is equal to the total number of positive elementary charges and $\sum_p |a_{p,-1}|^2$ equal to the total number of negative elementary charges in Φ .

10.2.5 1.9 The Interaction of a Spin-0 Particle with an Electromagnetic Field

The electromagnetic field is described by the four-vector [defined in (1.14)]

$$\begin{aligned} A^\mu &= \{A_0, \mathbf{A}\} = \{A_0, A_x, A_y, A_z\} = g^{\mu\nu} A_\nu, \\ A_\mu &= g_{\mu\nu} A^\nu = \{A_0, -\mathbf{A}\}. \end{aligned}$$

In the case of nonrelativistic quantum mechanics we specified minimal coupling of the electromagnetic field,

$$\hat{E} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \quad , \quad \hat{\mathbf{p}} \Rightarrow -i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

which can be compressed to the four-dimensional and covariant form as

$$\hat{p}^\mu \Rightarrow \hat{p}^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \quad \text{or} \quad \hat{p}_\mu \Rightarrow \hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu. \quad (1.119)$$

With the same minimal coupling, the free Klein-Gordon equation (1.21) is transformed into the Klein-Gordon equation with an electromagnetic field (compare with the later passage on gauge invariance of the coupling),

$$\left(\hat{p}^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \left(\hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \psi = m_0^2 c^2 \psi \quad (1.120)$$

or

$$\left[g^{\mu\nu} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{e}{c} A_\nu \right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right) \right] \psi = m_0^2 c^2 \psi \quad (1.121)$$

and, explicitly,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right)^2 \psi &= \left(\sum_{i=1}^3 \left(+i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{e}{c} A_i \right)^2 + m_0^2 c^2 \right) \psi \\ &= \left(\left(+i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m_0^2 c^2 \right) \psi. \end{aligned} \quad (1.122)$$

In order to examine the charge and current densities, we start with (1.121), multiply by ψ^* from the lhs and subtract the complex conjugate. These operations can be symbolized by $\psi^*(xx) - \psi(xx)^*$, where (xx) denotes (1.121), and they result in

$$\begin{aligned}
 0 &= \psi^* \left[-g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \right] \psi \\
 &\quad - \psi \left[-g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \right] \psi^* \\
 &= g^{\mu\nu} \left[\psi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi^* - \psi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi - \psi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \psi \right. \\
 &\quad \left. - \psi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \psi^* - \psi^* \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi - \psi \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi^* \right] \\
 &= g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\psi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi^* - \psi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi \right) - 2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\psi \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \psi^* \right) \right].
 \end{aligned}$$

One calls

$$j_\nu = \frac{i\hbar e}{2m_0} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi^* \right) - \frac{e^2}{m_0 c} A_\nu \psi \psi^* = \{c\rho', -j'\} \quad (1.123)$$

the four-current density in the electromagnetic field A_ν . Obviously, the following relation holds:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} j_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu = 0 \quad (1.124)$$

This is a continuity equation for the four-current density, usually its meaning is that of a conservation law. Suitable normalization [like in (1.123)] yields charge conservation. Note that (1.123) is identical to the previous result, (1.34), if we exclude the term proportional to A_ν . To make this fact more evident we write explicitly,

$$\rho' = \frac{i\hbar e}{2m_0 c^2} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) - \frac{e^2}{m_0 c^2} A_0 \psi \psi^* \quad (1.125)$$

and

$$\mathbf{j}' = -\frac{i\hbar e}{2m_0} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{e^2}{m_0 c} \mathbf{A} \psi \psi^* \quad (1.126)$$

and compare these expressions with (1.35) and (1.36). It is remarkable that electromagnetic potentials appear in the charge and current densities (1.125) and (1.126). To obtain a deeper understanding of this fact, we consider a negatively charged particle in a central Coulomb potential, which is given by

$$eA_0(r) = -Ze^2 V(r), \quad \mathbf{A} = 0 \quad (1.127)$$

$V(r) \sim 1/r$ for large r and rounded off as for an oscillator within the range of the nucleus (see Fig. 1.3). A stationary state of the Klein-Gordon equation has the form

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-i\varepsilon t/\hbar) \quad (1.128)$$

where $|\varepsilon|$ is the energy of the particle (see Exercises 1.10 and 1.11). The charge density (1.125) can be calculated as follows:

$$\rho'(\mathbf{r}) = e \frac{[\varepsilon - eA_0(\mathbf{r})]}{m_0 c^2} \psi \psi^*(\mathbf{r}) = e \frac{[\varepsilon + Ze^2 V(r)]}{m_0 c^2} \psi \psi^*(\mathbf{r}). \quad (1.129)$$

Therefore, the charge density becomes

$$\varrho' > 0 \text{ for } \varepsilon > eA_0(\mathbf{x}), \quad \varrho' < 0 \text{ for } \varepsilon < eA_0(\mathbf{x}). \quad (1.130)$$

In the first case the charge density has the same sign as the charge, e , of the particle; in the second it is the other way round. The charge density has the opposite sign to the particle charge e , wherever the potential energy has values so that $\varepsilon < eA_0(x)$. The physical meaning of this change of sign of ϱ' in strong fields can only be understood within the frame of the field theory where the number of particles becomes variable. One can imagine that in the areas of strong fields, particle-antiparticle pairs will be produced and that the potential term in the charge density (1.129) may be interpreted as simulating such many-body aspects.

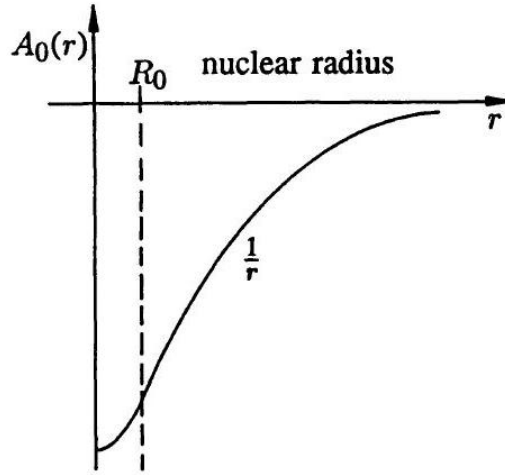


Fig. 1.3. The Coulomb potential of a negatively charged particle in the vicinity of the atomic nucleus

Now let us carry over what we have said about normalization and the energy factor ε for the Klein-Gordon equation to our present case. The charge normalization is carried out according to $\int \varrho'(x) d^3x = \pm e$ (e being the charge of the electron). For π^- mesons ($e < 0$) we take the positive sign, for bound π^+ mesons we choose the negative sign. Hence, the charge density for π^- mesons becomes

$$\varrho'(\mathbf{x}) = e \frac{[\varepsilon + Ze^2 V(\mathbf{x})]}{m_0 c^2} \psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x})$$

Figures 1.3 and 1.4 illustrate strong Coulomb potentials and the corresponding charge density.¹¹

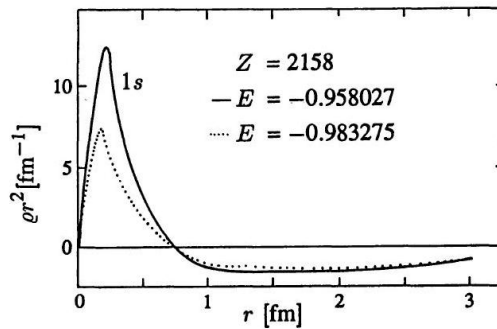


Fig. 1.4. The radial density ϱr^2 of a π meson in the $1s$ state of an exponential potential of the form $V(r) = -Z\alpha \exp(-r/a)$ (see Exercise 1.15). The range parameter a of the potential is

chosen to be $a = 0.2\lambda$, where $\lambda_\pi = \hbar/m_\pi c$ is the Compton wavelength of the pion. The coupling strength is fixed by $Z = 2158$. Such an extreme central charge is chosen to make various new features of the Klein-Gordon equation especially obvious. The energy eigenvalue of the $1s$ pion bound in this extremely short range and deep potential is $E = -0.958027$ measured in units of the rest energy $m_\pi c^2$ of the pion. It is evident that the charge density is not positive definite, and that antiparticles can also be bound in this potential. The radial density of antiparticle in the same potential is shown by the dashed line - the energy eigenvalue of a bound antiparticle is $E = -0.983275m_\pi c^2$

An interpretation of the positive part of the charge density is that, in strong fields,

11 W. Fleischer, G. Soff: Z. Naturforsch. 39a, 703 (1984). some fraction of π^+ mesons is always mixed with the π^- meson. This indicates the great difficulties of the single particle interpretation in strong potentials.

1.10. Separation of Angular and Radial Parts of the Wave Function for the Stationary Klein-Gordon Equation with a Coulomb Potential

Problem. Separate the angular and the radial part of the wave function for the stationary Klein-Gordon equation for spherically symmetric Coulomb potentials.

Solution

We put $eA_0 = V(r)$ and $\mathbf{A} = 0$. Then the stationary Klein-Gordon equation reads

$$\left[(\varepsilon - V(r))^2 - m_0^2 c^4 + \hbar^2 \nabla^2 \right] \psi(r) = 0 \quad (1)$$

or, explicitly,

$$\begin{aligned} & -\hbar^2 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi(r) \\ & = [(\varepsilon - V(r))^2 - m_0^2 c^4] \psi(r). \end{aligned} \quad (2)$$

For the wave function $\psi(\mathbf{r})$ we make the following separation ansatz

$$\psi(r) = u(r)Y(\theta, \phi).$$

This leads to

$$\hbar^2 c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + \{ (\varepsilon - V(r))^2 - m_0^2 c^4 - \frac{\lambda}{r^2} \} u = 0,$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0,$$

where λ is the separation constant. The solutions of the last equation are the spherical harmonics Y_{lm} with $\lambda = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \dots$ and $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ¹² With this the radial differential equation follows as

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u(r) \\ & = \frac{(\varepsilon - V)^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2} u(r). \end{aligned} \quad (5)$$

Hence, using the common ansatz $u(r) = R(r)/r$, follows the transformation of (5) into

¹² See Vol. 1 of this series: Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right] R(r) = 0, \quad (6)$$

where

$$k^2 = \frac{(\epsilon - V(r))^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2}.$$

1.11 Pionic Atom with Point-Like Nucleus

Problem. Find the solution of the Klein-Gordon equation for the π^- meson in a Coulomb potential and discuss the energy eigenvalues. The pion has the mass $m_\pi c^2 = 139.577$ MeV and spin 0. It obeys the Klein-Gordon equation.

Solution

We use the result of the previous Exercise 1.10. The attractive Coulomb potential $A_0(r) = -Ze/r$ is coupled as the 0 component of the four-potential in the Klein-Gordon equation ($\alpha = e^2/\hbar c^2 = 1/137.03602$ is the fine structure constant, giving

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1) - (Z\alpha)^2}{r^2} + \frac{2\epsilon Z\alpha}{\hbar c r} - \frac{m_0^2 c^4 - \epsilon^2}{\hbar^2 c^2} \right] R_l(r) = 0 \quad (1)$$

Now the energies and the wave functions for the bound states in the energy range $-m_0 c^2 < \epsilon < m_0 c^2$ are to be calculated. Therefore, we first transform the above differential equation with the help of the substitutions

$$\begin{aligned} \beta &= 2 \frac{[m_0^2 c^4 - \epsilon^2]^{1/2}}{\hbar c}, \\ \varrho &= \beta r \text{ with } 0 < \varrho < \infty, \\ \mu &= \sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2} \quad \text{and} \quad \lambda = \frac{2Z\alpha\epsilon}{\hbar c\beta} \text{ and obtain} \end{aligned}$$

$$\left[\frac{d^2}{d\varrho^2} - \frac{\mu^2 - 1/4}{\varrho^2} + \frac{\lambda}{\varrho} - \frac{1}{4} \right] R_l(\varrho) = 0. \quad (3)$$

In order to find an ansatz for the solution it is useful to first study the limits $\varrho \rightarrow \infty$ and $\varrho \rightarrow 0$. In the case $\varrho \rightarrow \infty$ we can neglect the terms proportional to ϱ^{-1} and ϱ^{-2} in (3) and, therefore,

$$\left(\frac{d^2}{d\varrho^2} - \frac{1}{4} \right) R_l(\varrho) = 0 \quad (4)$$

Its solution can easily be determined with the help of the exponential function

$$R_l(\varrho) \underset{\varrho \rightarrow \infty}{=} a e^{-\varrho/2} + b e^{+\varrho/2}.$$

$b = 0$ follows from the requirement of normalization of the wave function. In the case $\varrho \rightarrow 0$ one can neglect the last two terms in the above radial equation and is led to

$$\left(\frac{d^2}{d\varrho^2} - \frac{\mu^2 - 1/4}{\varrho^2} \right) R_l(\varrho) = 0 \quad (\text{for } \varrho \rightarrow 0) \quad (6)$$

With

$$R(\varrho) = a \varrho^\nu,$$

it follows that

$$a\nu(\nu-1)\varrho^{\nu-2} - a\left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right)\varrho^{\nu-2} = 0,$$

which is a determining equation for the power ν , given by

$$\nu_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \mu^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \pm \mu.$$

Since μ can, in principle, take all positive values, and the wave function must not have any nonintegrable divergence at the origin, this unambiguously fixes ν ,¹³

$$\nu = \frac{1}{2} + \mu.$$

Furthermore, we see that the radial function $u(r) = R(r)/r$ has a singularity at the origin ($r = 0$) when $l = 0$, though this singularity can be integrated; therefore, the wave function can be normalized in spite of the singularity. This behaviour of the wave function for $r \rightarrow 0$ is quite novel compared to the Schrödinger wave function and characteristic of relativistic s wave functions in the Coulomb potential. Because of the definition of μ we further see that, for $l = 0$, only real wave functions can be found for $Z\alpha < 1/2$. For larger values of Z the parameter μ becomes imaginary.

Because of (5) and (7) we now choose

$$R_l(\varrho) = N\varrho^{1/2+\mu}e^{-\varrho/2}f(\varrho)$$

as an ansatz for the full radial equation, where the still unknown function $f(\varrho)$ should be constant for $\varrho \rightarrow 0$ and should guarantee the normalization for $\varrho \rightarrow \infty$. Inserting (11) into the radial equation (3) we find the following differential equation for $f(\varrho)$:

$$\frac{d^2f}{d\varrho^2} + \left(\frac{2\mu+1}{\varrho} - 1\right)\frac{df}{d\varrho} - \frac{\mu+1/2-\lambda}{\varrho}f(\varrho) = 0.$$

For simplification let us introduce the new abbreviations

$$2\mu+1 = c, \quad \mu + \frac{1}{2} - \lambda = a,$$

so that

$$\frac{d^2f}{d\varrho^2} + \left(\frac{c}{\varrho} - 1\right)\frac{df(\varrho)}{d\varrho} - \frac{a}{\varrho}f = 0$$

results.

Now we try to solve the differential equation for $f(\varrho)$ with the help of a power series expansion,

$$f(\varrho) = \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'}\varrho^{n'}.$$

Inserting (14) into (13) yields

$$\begin{aligned} & \sum_{n'=2}^{\infty} a_{n'}n'(n'-1)\varrho^{n'-2} + c \sum_{n'=1}^{\infty} n'a_{n'}\varrho^{n'-2} \\ & - \sum_{n'=1}^{\infty} n'a_{n'}\varrho^{n'-1} - a \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'}\varrho^{n'-1} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

A comparison of coefficients of equal powers in ϱ gives

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{aa_0}{c} \\ a_2 &= \frac{a_1(a+1)}{2(c+1)}, \end{aligned} \quad (16)$$

or, generally

$$a_m = \frac{a_{m-1}}{m} \frac{a+m-1}{c+m-1}.$$

¹³ This is not true in the special case $l = 0$. Here the solution with ν_- can also be normalized, and one must set another criterion in order to exclude this case. For example, one can demand that an expectation value of the kinetic energy should exist. See exercises 9.8 and 9.9 in which the analogue problem for the Coulomb-solutions of the Dirac equation is carefully discussed.

Therefore, $f(\varrho)$ can be written as

$$\begin{aligned} f(\varrho) &= a_0 \left(1 + \frac{a}{c} \varrho + \frac{a}{c} \frac{a+1}{c+1} \frac{\varrho^2}{2} + \dots \right) \\ &= a_0 \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{(a)_{n'}}{(c)_{n'}} \frac{\varrho^{n'}}{n'!} \end{aligned} \quad (18)$$

The function defined by the series (18) is called a confluent hypergeometric function ${}_1F_1(a, c; \varrho)$. Note, there is always a generalized faculty function in the nominator and denominator of each term of the sum. However, the confluent hypergeometric function diverges for $\varrho \rightarrow \infty$ as

$${}_1F_1(a, c; \varrho \rightarrow \infty) \Rightarrow \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \varrho^{a-c} e^{\varrho}.$$

Thus, the normalization condition can only be fulfilled if it is certain that the series breaks off at a fixed value of n' . If $a + n' = 0$ holds, i.e., if a is a negative integer, then all terms of higher order, $m > n'$, are also equal to zero.

The energy eigenvalue for bound spin-0 particles in a Coulomb potential can be calculated from (13). Starting from

$$\lambda = \mu + \frac{1}{2} + n' = \frac{Z\alpha\varepsilon}{(m_0^2 c^4 - \varepsilon^2)^{1/2}},$$

it follows that

$$\varepsilon_{n'l} = -m_0 c^2 \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n' + \frac{1}{2} + \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - (Z\alpha)^2 \right]^{1/2} \right)^2} \right]^{-1/2}$$

Thereby, we have chosen the negative square root, because in the case of no fields ($Z\alpha \rightarrow \infty$) the free solutions, i.e. the negative time evolution factors for negatively charged particles, must be obtained. The energy itself is given by

$$\begin{aligned} E_{nl} &= \int T_{00} d^3x \\ &= m_0 c^2 \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n' + \frac{1}{2} + \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - (Z\alpha)^2 \right]^{1/2} \right)^2} \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (21)$$

(see Exercise 1.12). Defining the principal quantum number as

$$n = n' + l + 1,$$

(21) may be rewritten in the following form;

$$\begin{aligned} E_{nl} &= m_0 c^2 \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n - l - \frac{1}{2} + \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - (Z\alpha)^2 \right]^{1/2} \right)^2} \right]^{-1/2} \\ n &= 1, 2, 3, \dots, \quad l = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \end{aligned} \quad (21a)$$

Setting $N' = Na_0$, the eigenfunction can be written as

$$\begin{aligned}
 R_l(\varrho) &= N' \varrho^{\mu+1/2} e_1^{-\varrho/2} F_1 \left(\mu + \frac{1}{2} - \lambda, 2\mu + 1; \varrho \right) \\
 &= N' W_{\lambda, \mu}(\varrho),
 \end{aligned} \tag{23}$$

where $W_{\lambda, \mu}(\varrho)$ are called Whittaker functions. Expanding, finally, the above eigenvalue in a series of powers of Z yields

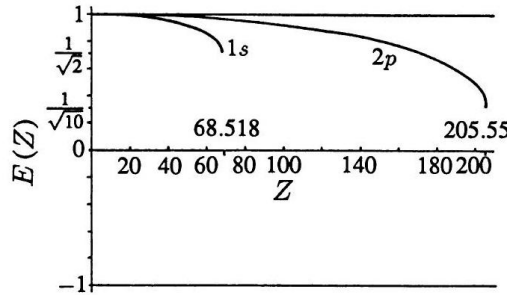
$$E_{nl} = m_0 c^2 \left\{ \underbrace{1}_{\text{rest-energy}} - \underbrace{\frac{Z^2 \alpha^2}{2n^2}}_{\text{schrodinger eigenvalue}} - \underbrace{\frac{Z^4 \alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4} \right)}_{\text{relat correction}} + \dots \right\}.$$

The binding energy of a bound Klein-Gordon particle is defined as $E_b = E - m_0 c^2$. Some numerical values for the binding energy of $1s$ pions ($n = 1, l = 0$) with mass $m_\pi c^2 = 139.577 \text{ MeV}$ are listed in the following table.

Binding energies of $1s$ pions for various central charges Z

Z	$E_b [\text{MeV}]$	Z	$E_b [\text{MeV}]$
10	-0.374	50	-11.51
20	-1.528	60	-19.391
30	-3.568	65	-26.34
40	-6.725		

From the energy relation (21), one learns that for $Z\alpha > 1/2$, there is no energy eigenvalue for the $1s$ state ($n = 1, l = 0$), because the energy becomes imaginary. The energy eigenvalue for $1s$ -pions at $Z = \alpha^{-1}/2 \approx 68$ are $E_{nl} = m_\pi c^2 (2)^{-1/2}$ (see next figure). The corresponding binding energy is about $E_b \sim -40 \text{ MeV}$.



Solution of the Klein-Gordon equation for a central Coulomb potential. The energy is given in units of the rest energy $m_\pi c^2$. For the $1s$ level there are no solutions for $Z > 68$, and, similarly, for the $2p$ level when $Z > (3/2)(1/\alpha) \approx 205$. This changes if the finite size of the central nucleus is taken into account (Example 1.13)

To determine the energy eigenvalues for s states for which $Z\alpha > 1/2$, we must investigate the relativistic case of extended atomic nuclei. Therefore, in Exercise 1.13 we will solve the Klein-Gordon equation for the Coulomb potential rounded off by an oscillator potential. Furthermore, one has to take into account that pions and the nucleus interact strongly. Since the pion is 270 times more massive than an electron, its wave function already has a considerable overlap with the nucleus. Therefore, corrections to equation (21) are to be expected, based on the strong interaction, which can be quite massive.

10.2.6 1.11 The Nonrelativistic Limit With Fields 1

Theory

We can study the nonrelativistic limit of the Klein-Gordon equation in the form of (1.122) with the help of the transformation

$$\psi(x, t) = \varphi(x, t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right). \quad (1.138)$$

$\varphi(x, t)$ characterizes the nonrelativistic part of the wave function, for which the relations

$$\left| i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \ll m_0 c^2 |\varphi|, \quad |eA_0 \varphi| \ll m_0 c^2 |\varphi| \quad (1.139)$$

must be valid. The first expresses the smallness of the nonrelativistic energy ($i\hbar(\partial/\partial t)$ is the energy operator) compared to the rest energy; the second condition means that the potentials involved have to be flat compared to the rest energy: potentials which are too deep would lead to increased binding energies and, finally, to spontaneous pair creation (see Chaps. 12 and 13). This would make the nonrelativistic limit impossible. Next we find that

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right) \psi = \left(i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} - eA_0 \varphi + m_0 c^2 \varphi \right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right)$$

and

$$\begin{aligned} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 \right)^2 \psi &= \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - i\hbar e \frac{\partial A_0}{\partial t} \varphi - i\hbar e A_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + i\hbar m_0 c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. - i\hbar e \frac{\partial \varphi}{\partial t} A_0 + eA_0^2 \varphi - eA_0 m_0 c^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. + i\hbar m_0 c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - eA_0 \varphi m_0 c^2 + m_0^2 c^4 \right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right) \\ &\approx \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right) \left(m_0^2 c^4 - 2m_0 c^2 eA_0 + 2m_0 c^2 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. - i\hbar e \frac{\partial A_0}{\partial t} \right) \varphi. \end{aligned}$$

With regard to (1.139), the small quadratic terms have been omitted in the last step. Inserting this into 1.122) yields

$$\begin{aligned} &\exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right) \left(m_0^2 c^2 - 2m_0 eA_0 + 2m_0 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar e}{c^2} \frac{\partial A_0}{\partial t} \right) \varphi \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right) \left[\left(+i\hbar \nabla + \frac{e}{c} A \right)^2 + m_0^2 c^2 \right] \varphi \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \left[\frac{1}{2m_0} \left(+i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + eA_0 + \frac{i\hbar e}{2m_0 c^2} \frac{\partial A_0}{\partial t} \right] \varphi \\ &= \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} - \frac{e}{m_0 c} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}} + eA_0 + \frac{i\hbar e}{2m_0 c} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{i\hbar e}{2m_0 c^2} \frac{\partial A_0}{\partial t} \right] \varphi. \end{aligned} \quad (1.140)$$

This is the Schrödinger equation for electromagnetic potentials. But be careful: In studying radiation problems we generally choose the Coulomb gauge, defined by

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

In this case the term proportional to $\partial A_0 / \partial t$ must be included. Only in the Lorentz gauge, for which

$$\frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

is valid, do both of the last terms in (1.140) vanish.

1.12 Lagrange Density and Energy-Momentum Tensor for a Klein-Gordon Particle in an Electromagnetic Field

Problem. Specify the Lagrange density for a Klein-Gordon particle in the electromagnetic field A_μ . Determine the canonical energy-momentum tensor.

Solution

The Lagrange density for the coupled system of the Maxwell field and the Klein-Gordon field is

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m_0} \left[\left(i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \psi^* \right. \\ & \times \left. \left(-i\hbar \partial^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \psi - m_0^2 c^2 \psi^* \psi \right], \\ F_{\mu\nu} = & \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \end{aligned} \quad (1)$$

The variation of $I = \int \mathcal{L} d^4x$ with respect to ψ^* yields the Klein-Gordon equation for a ψ field, minimally coupled to the electromagnetic field, i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta \psi^*} = 0 \Rightarrow \\ \int \left\{ \delta \left(i\hbar \partial_\mu \psi^* - \frac{e}{c} A_\mu \psi \right) \right\} \left(-i\hbar \partial^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \psi \\ - m_0^2 c^2 \psi \delta \psi^* \} d^4x = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Using $\delta \partial_\mu \psi^* = \partial_\mu \delta \psi^*$ and with partial integration of the first term, we obtain under the assumption that $\delta \psi^*$ vanishes at the boundaries of integration,

$$\begin{aligned} \int \left\{ \left(-i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(-i\hbar \partial^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \psi \right. \\ \left. - m_0^2 c^2 \psi \right\} \delta \psi^* d^4x = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Due to the free choice of $\delta \psi^*$, this yields the Klein-Gordon equation

$$\left(\hat{p}^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \left(\hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) \psi = m_0^2 c^2 \psi \quad (4)$$

Variation of I with respect to A_μ yields the Maxwell equation in an analogous way

$$\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu = \frac{ie\hbar}{2m_0} \left\{ \psi^* \left(\partial_\nu + \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \right) \psi \right. \\ \left. - \psi \left(\partial_\nu - \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \right) \psi^* \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

The canonical energy-momentum tensor is calculated according to (1) from

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \partial_\nu \psi^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\varrho)} \partial_\nu A_\varrho - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \quad (6)$$

giving

$$T^\mu{}_\nu = \frac{1}{2m_0} (-i\hbar \partial_\nu \psi) \left(i\hbar \partial^\mu \psi^* - \frac{e}{c} A^\mu \psi^* \right) + \frac{1}{2m_0} (i\hbar \partial_\nu \psi^*) \left(-i\hbar \partial^\mu \psi - \frac{e}{c} A^\mu \psi \right) - \partial_\nu A_\varrho F^{\varrho\mu} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{4} \delta^\mu_\nu F_{\sigma\varrho} F^{\sigma\varrho} - \partial_\nu A_\varrho F^{\varrho\mu} + \frac{1}{2m_0} \times \left[\left(i\hbar \partial^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \psi^* (-i\hbar \partial_\nu \psi) + (i\hbar \partial_\nu \psi^*) \times \left(-i\hbar \partial^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \right) \psi - \delta^\mu_\nu \left(i\hbar \partial_\varrho - \frac{e}{c} A_\varrho \right) \psi^* \times \left(-i\hbar \partial^\varrho - \frac{e}{c} A^\varrho \right) \psi + \delta^\mu_\nu m_0^2 c^2 \psi^* \psi \right] \quad (8)$$

$$\equiv \frac{1}{4} \delta^\mu_\nu F_{\sigma\varrho} F^{\sigma\varrho} - \partial_\nu A_\varrho F^{\varrho\mu} + (T^\mu{}_\nu)_\psi \quad (9)$$

Here $(T^\mu{}_\nu)_\psi$ represents the energy-momentum tensor for a Klein-Gordon particle with the minimal coupled electromagnetic field [last three terms of Eq. (1)], while the first two terms are standing for the free electromagnetic field.

1.13 Solution of the Klein-Gordon Equation for the Potential of an Homogeneously Charged Sphere

We solve the Klein-Gordon equation for a sphere with radius a since we consider this model to be an improved approximation for a realistic pionic atom. The results are subsequently discussed. Inside the sphere the corresponding potential is given by

$$eA_0(r) = -\frac{Ze^2}{2a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad \text{for } r \leq a.$$

This is an oscillator potential which yields, after insertion into the radial Klein-Gordon equation [see Exercise 1.10, (6) and (7)],

$$\left[\frac{d^3}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \left(\frac{E}{\hbar c} + \frac{3Z\alpha}{2a} \right)^2 - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} - 2 \left(\frac{E}{\hbar c} + \frac{3Z\alpha}{2a} \right) \frac{Z\alpha}{2a} \frac{r^2}{a^2} + \left(\frac{Z\alpha}{2a^3} \right)^2 r^4 \right] R(r) = 0 \quad (2)$$

This may be further simplified by introducing the following abbreviations:

$$A = \frac{E}{\hbar c} + \frac{3Z\alpha}{2a}, \quad B = A^2 - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}, \quad C = \frac{Z\alpha}{2a^3}.$$

For the total radial wave function, the following ansatz in the form of an infinite series is introduced:

$$R = r^{l+1} \sum_{n'=0}^{\infty} b_{n'} r^{2n'}.$$

Insertion into the differential equation leads to

$$\begin{aligned} & \sum_{n'} b_{n'} (2n' + l + 1) (2n' + l) r^{2n'+l-1} \\ & - \sum_{n'} l(l+1) b_{n'} r^{2n'+l-1} + B \sum_{n'} b_{n'} r^{2n'+l+1} \\ & - 2AC \sum_{n'} r^{2n'+l+3} + C \sum_{n'} b_{n'} r^{2n'+l+5} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Ordering with respect to equal powers in r and comparing the coefficients, we find

$$b_1 = -\frac{Bb_0}{2(2l+3)},$$

$$b_2 = -\frac{Bb_1 - 2ACb_0}{2(4l+10)},$$

$$b_3 = -\frac{Bb_2 - 2ACb_1 + C^2b_0}{2(6l+21)}$$

or, generally,

$$b_{n'} = -\frac{Bb_{n'-1} - 2ACb_{n'-2} + C^2b_{n'-3}}{4n'l + (2n'+1)2n'}.$$

The energy is determined by specifying that the wave functions and their first derivatives should be continuous at $r = a$. In the region $r \geq a$ the wave functions are given by the Whittaker function $W_{\lambda\mu}(\varrho)$ with $\varrho = \beta r$ [see Exercise 1.11, (23)]. Thus, and by using (4), the energy can be fixed by

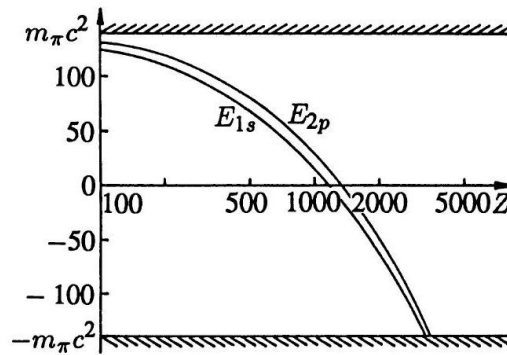
$$\frac{W'_{\lambda,\mu}(\beta a)}{W_{\lambda,\mu}(\beta a)} = \frac{\sum_{n'} b_{n'} (2n' + l + 1) a^{2n'+l}}{\sum_{n'} b_{n'} a^{2n'+l+1}}, \text{ where}$$

$$\beta = 2(m_0^2 c^4 - E^2)^{1/2} / \hbar c,$$

$$\lambda = Z\alpha E (m_0^2 c^4 - E^2)^{-1/2},$$

$$\mu = \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - (Z\alpha)^2 \right]^{1/2}.$$

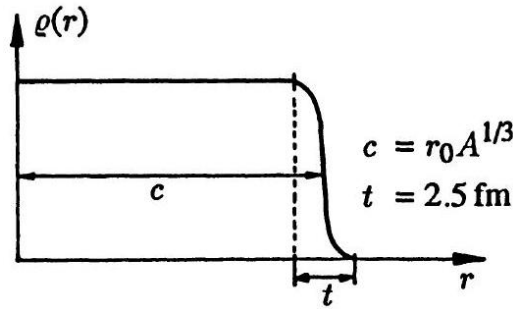
For the point nucleus there exist bound solutions (for $l = 0$) only up to $Z = 1/2\alpha \approx 68$. In contrast to this, equation (8), containing the finite extension of the nucleus, also yields solutions for larger values of Z (see figure below). Choosing



Energy eigenvalues for a π^- meson in the Coulomb potential of an extended nucleus. The charge distribution of the nucleus is assumed to be a Fermi distribution [see (10)] the nuclear radius to be $a \sim 10\text{fm} = 10^{-12}\text{ cm}$, we get a nearly parabolic growth with Z for the binding energy.

At $Z \sim 1500$ the energy eigenvalue for a 1 s pion approaches $E = 0$. For larger Z this value even becomes negative. At $Z \approx Z_{\text{critical}} \sim 3000$ we find $E = -m_\pi c^2$. An extrapolation of this behaviour for still larger Z would make the state dive into the lower continuum of $E < -m_\pi c^2$. But at this point at least the single particle interpretation collapses totally because the new

degree of freedom of pair creation has to be considered (see the later discussion, together with the Dirac equation, Chap. 12). One also has to take into account that, for pions (being bosons), the Pauli principle is not valid; thus, in principle, a state may be occupied by any number of pions. This is only true as far as the pion-pion interaction is neglected.



Fermi charge distribution of a nucleus

The interaction among the pions will, in fact, inhibit the infinite spontaneous $\pi^+\pi^-$ -production. That this critical region, in which spontaneous pion production is possible, can be reached only for very large Z values may at once be estimated by considering the condition $|V| > |E_0| > 2m_\pi c^2$. Only for $Z \sim 1500$ does the depth of the potential reach the value $|V| \sim 2m_\pi c^2 \sim 280\text{MeV}$. In the above figure the energies for $1s$ and $2p$ pions, calculated for the potential of a Fermi charge distribution, are shown. The Fermi charge distribution has the form

$$\rho_{\text{nucleus}}(r) = \frac{N}{1 + \exp(4 \ln 3 [(r-c)/t])},$$

with the constant of normalization N given by

$$4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr = Z,$$

and is shown in the second figure. Here c is the half-density radius. The surface thickness t characterizes the region in which the density drops from 90% to 10% of its value at the origin ($r = 0$). This also determines the constant, $4 \ln 3$. The potential results as a solution of the Poisson equation and is given by

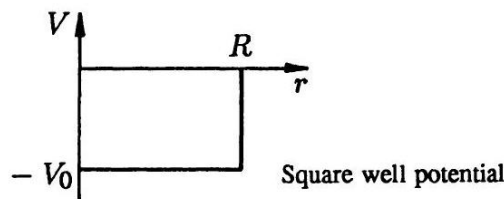
$$V(r) = -4\pi e^2 \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \right\}.$$

The value $E = -m_\pi c^2$ is reached at $Z = 3280$ for the $1s$ state and at $Z = 3425$ for the $2p$ state.

1.14 The Solution of the Klein-Gordon Equation for a Square Well Potential

This situation corresponds to minimal coupling for V , which is described by (see Figure below)

$$V = \begin{cases} -V_0 & \text{for } r \leq R \\ 0 & \text{for } r > R \end{cases}.$$



We set

$$k_i = \frac{1}{\hbar c} \sqrt{(\varepsilon + V_0)^2 - m_0^2 c^4} \text{ for } r \leq R$$

and

$$k_0 = \frac{1}{\hbar c} \sqrt{\varepsilon^2 - m_0^2 c^4} \text{ for } r > R.$$

With this the Klein-Gordon-equation reads

$$\left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - l(l+1) + k^2 r^2 \right] u(r) = 0.$$

The substitution $\varrho = kr$ leads to

$$\frac{d}{dr} = k \frac{d}{d\varrho} \text{ and } \frac{d^2}{dr^2} = k^2 \frac{d^2}{d\varrho^2}.$$

Hence, one finally arrives at Bessel's equation

$$\left(2\varrho \frac{d}{d\varrho} + \varrho^2 \frac{d^2}{d\varrho^2} - l(l+1) + \varrho^2 \right) u(\varrho) = 0. \quad (3)$$

The solution for $r \leq R$ is $u(\varrho) = N j_l(k_i r)$. The Neumann function $n_l(k_i r)$ must be excluded as a solution because it is irregular at $\varrho = 0$. For $V = 0$, we always get

$$u(\varrho) = N j_l(kr) \quad \text{with} \quad k = \frac{1}{\hbar c} \sqrt{\varepsilon^2 - m_0^2 c^4}$$

and where N is the normalization factor. Obviously, the solution is symmetric for positive and negative values of ε . The Bessel functions can easily be calculated, and one gets

$$j_0(\varrho) = \frac{\sin \varrho}{\varrho}, \quad j_1(\varrho) = \frac{\sin \varrho}{\varrho^2} - \frac{\cos \varrho}{\varrho}.$$

Furthermore, one can use the general recurrence relation

$$f_{n-1}(\varrho) + f_{n+1}(\varrho) = (2n+1)\varrho^{-1} f_n(\varrho),$$

where f_n stands for the Bessel function j_n , the Neumann function $n_n(\varrho)$ or the Hankel functions

$$h_n^{(1)}(\varrho) = j_n(\varrho) + i n_n(\varrho) \text{ or}$$

$$h_n^{(2)}(\varrho) = j_n(\varrho) - i n_n(\varrho).$$

In the outer region we set

$$k^2 = \frac{m_0^2 c^4 - \varepsilon^2}{\hbar^2 c^2} = -k_0^2.$$

With the substitution $\varrho = ikr$ the differential equation (3) becomes

$$\frac{d^2 u}{d\varrho^2} + 2\varrho \frac{du}{d\varrho} \left[1 - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} \right] u(\varrho) = 0,$$

and the general solution of this differential equation is

$$h_l^{(1)}(\varrho) = j_l(\varrho) + i n_l(\varrho).$$

We see that $h_n^{(2)}$ can not be a solution for $r > R$, since that function increases exponentially and so can not be normalized. For an imaginary argument the Hankel function of the first kind is given by ¹⁴

$$h_0^{(1)}(i\beta r) = -\frac{1}{\beta r} e^{-\beta r},$$

$$h_1^{(1)}(i\beta r) = i \left(\frac{1}{\beta r} + \frac{1}{\beta^2 r^2} \right) e^{-\beta r},$$

$$h_2^{(1)}(i\beta r) = \left(\frac{1}{\beta r} + \frac{3}{\beta^2 r^2} + \frac{3}{\beta^3 r^3} \right) e^{-\beta r}.$$

Higher orders can be calculated by use of the above recurrence relation (4), and the derivative can in general be calculated to yield

$$(2n+1) \frac{d}{dz} f_n(z) = n f_{n-1}(z) - (n+1) f_{n+1}(z).$$

The determination of the energy value ε requires the equality of the logarithmic derivatives of the solutions at $r = R$, so that

$$\frac{1}{u_i} \frac{du_i}{dr} = \frac{1}{u_0} \frac{du_0}{dr} \text{ for } r = R,$$

where the normalization constants cancel. The eigenvalues ε can be derived from

$$\frac{j_l'(k_i R)}{j_l(k_i R)} = \frac{h_l^{(1)'}(ikR)}{h_l^{(1)}(ikR)}.$$

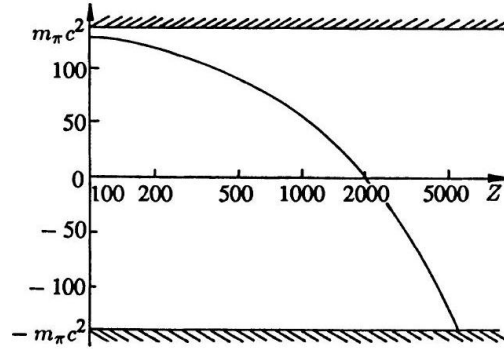
Now consider the special case of s states for the determination of ε . For this case one obtains after insertion of the definitions of j_0 and $h_0^{(1)}$ and calculation of (11)

$$k_i \cot(k_i R) = -k.$$

¹⁴ See M. Abramowitz, I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York 1965), p. 438.

From this transcendent equation one can iteratively determine the eigenvalue ε . Numerical solutions of that problem are shown in the following three figures.

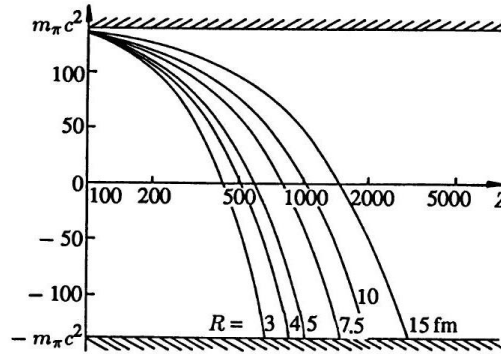
In the first figure the depth of the potential is set to $V_0 = -Ze^2/R$, where the nuclear radius is $R = r_0 A^{1/3}$



The energy of a π^- meson in the 1s state as a function of the nuclear charge Z . The radius of the nucleus is increased according to $R = r_0 A^{1/2}$ where $A = 2.5Z$ is the number of nucleons in the nucleus

with $r_0 = 1.2\text{fm}$ and the number of nucleons $A = 2.5Z$. At $Z = 5150$, ε reaches the critical value $\varepsilon_{\text{crit}} = -m_\pi c^2$. There the bound pion level dives into the lower (negative energy) continuum.

In the second figure R was fixed (independent of Z). For smaller radii $\varepsilon_{\text{crit}}$ is shifted to smaller values of Z .



The energy of a π^- meson in the 1s state as a function of the nuclear charge Z . The radius was fixed at $R = 3, 4, 5\text{fm}$, etc.

In the final figure the radius is compressed to $R = 0.25\text{fm}$. Furthermore, the charge symmetric solutions to the potential are plotted. These curves show reflection symmetry about the $\varepsilon = 0$ axis. It is essential in this case that the curves exhibit "critical points" for $R \ll 1\text{fm}$, characterized by the infinite slope of the binding energy as a function of Z . The first critical value is at $\varepsilon \approx -0.8m_0 c^2$.

Here the solutions coming from the lower continuum into the region of bound states (π^+ states) meet with the solutions from the upper continuum (π^- states). This leads to the possibility of the spontaneous production of many $\pi^+ - \pi^-$ pairs (a true pion condensate). The deeper meaning of the phenomenon will be more clearly understood after the discussion of the phase transition of the electronpositron vacuum in supercritical fields. It is remarkable that a given short-range potential is able to simultaneously bind π^- as well as π^+ particles. This Schiff-Snyder-Weinberg effect has its physical basis in the pionic charge density $\varrho'(r)$, the definition of which includes positive as well as negative frequencies. Therefore, the pion is not a particle with a charge distribution of only one sign [see our discussion in connection with (1.129)].

1.15 Solution of the Klein-Gordon Equation for an Exponential Potential

Problem. Solve the Klein-Gordon equation for an exponential potential of the form

$$V(r) = -Z\alpha e^{-r/a}$$

with $\alpha = m_0 c^2 e^2 / \hbar c$. In natural units ($\hbar = c = m_0 = 1$) α is equivalent to the Sommerfelds fine structure constant, i.e. $\alpha \simeq 1/137$. α characterizes the range of the potential. Restrict yourself to s states ($l = 0$) only.

Solution

Under the restriction to s states, and, thus, the neglect of the centrifugal term, the Klein-Gordon equation assumes a very simple form. From (6) and (7) in Exercise 1.10 we have

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right) R(r) = 0$$

with

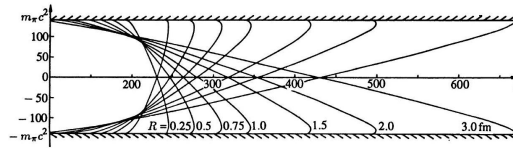
$$k^2 = \frac{[\varepsilon - V(r)]^2 - m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2}.$$

With the aid of the separation ansatz

$$R(r) = e^{r/2a} w(t)$$

and the substitution

$$t = 2iZ\alpha \frac{a}{\hbar c} e^{-r/a},$$



The energy of π mesons as a function of the nuclear charge Z , if the radius R of the nucleus is compressed

we can transform the differential equation (2) into

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \left\{ -\frac{1}{4} - \frac{i\varepsilon a}{\hbar c t} + \frac{1/4 - p^2 a^2}{t^2} \right\} w = 0$$

with

$$p^2 = \frac{m_0^2 c^4 - \varepsilon^2}{\hbar^2 c^2}.$$

Equation (6) corresponds to the Whittaker differential equation¹⁵ for which the regular solution for $r \rightarrow \infty$ (i.e. $t = 0$) is, thus,

$$w(t) = N W_{\lambda, \mu}(t) = N e^{-t/2} t^{1/2 + \mu} {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda, 1 + 2\mu; t \right) \quad (8)$$

with

$$\lambda = -\frac{i\varepsilon a}{\hbar c}, \text{ and}$$

$$\mu = pa.$$

N is the normalization constant. For the radial $1s$ -wave function we can write, in summary,

$$R(r) = N e^{r/2a} W_{\lambda, \mu} \left(2iZ\alpha \frac{a}{\hbar c} e^{-r/a} \right).$$

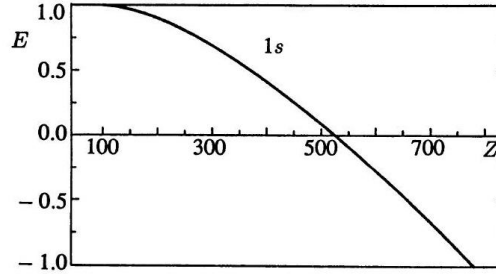
To obtain the energy eigenvalues we demand that $R(r)$ vanishes at the origin ($r = 0$). This is the only way to guarantee the normalization of the radial wave functions. This condition leads to the eigenvalue equation

$${}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda, 1 + 2\mu; 2iZ\alpha \frac{a}{\hbar c} \right) = 0$$

which is an implicit equation for the determination of the energy eigenvalues ε for s states. ε can be obtained from (12) only by using numerical methods. The calculated energy eigenvalue

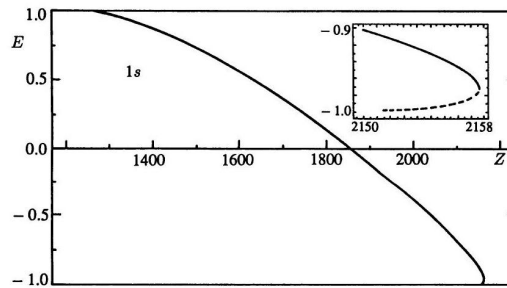
ε of an $1s$ pion in an exponential potential are shown in the above figure as a function of the coupling strength Z . The range constant α of the potential is chosen to be $a = 1 \cdot \lambda_\pi$, where $\lambda_\pi = \hbar/m_\pi c$ denotes the Compton wavelength of the pion. At $Z_{\text{cr}} \simeq 778$ the $1s$ state reaches the boundary ($\varepsilon = -m_\pi c^2$) of the negative energy continuum. In a second numerical calculation the range constant is changed to $a = 0.2 \cdot \lambda_\pi$.

15 M. Abramowitz, I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York 1965).



The energy eigenvalue of a $1s$ pion in an exponential potential as a function of the coupling strength parameter Z . The constant a characterizing the range of the potential is $a = 1\lambda_\pi$. The critical charge is $Z_{\text{cr}} \simeq 778$. E is given in units of the rest-energy $m_\pi c^2$.

This causes a rise in the critical value to $Z \simeq 2158$, which can be seen in the next figure. Additionally, we find here, for the domain $2150 < Z < 2158$, a bound state for the antiparticle. The corresponding energy eigenvalues can be taken from the dashed line in the insert to the figure. The appearance of these bound antiparticle states is correlated with the short range of the potential and the fact that the radial density ϱr^2 is not positive definite. The radial densities are depicted in Fig. 1.3 following (1.131).



The same as in the foregoing figure for $a = 0.2\lambda_\pi$. The energy eigenvalues of bound antiparticles are also calculated. $Z_{\text{cr}} \simeq 2158$. The insert in the figure shows ε for the domain $2150 \leq Z \leq 2158$. The dashed line characterizes the energy of the antiparticle state

EXERCISE

10.2.7 1.11 The Nonrelativistic Limit With Fields 2

1.16 Solution of the Klein-Gordon Equation for a Scalar $1/r$ Potential

Problem. Solve the Klein-Gordon equation for a scalar interaction of the form $W(r) = -Z\alpha/r$

which is coupled to the square of the mass. For the present let α be an arbitrary constant, the coupling strength is determined by Z .

Solution

As an example of scalar coupling, we want to solve the Klein-Gordon equation for a long-range $1/r$ interaction. We introduced the Coulomb potential into the Klein-Gordon equation by minimal coupling ($\hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu - (e/c)A_\mu$). In contrast to this we now couple a scalar interaction $U(r)$ to the square of the mass in the equation of motion, i.e. we perform the substitution $m_0^2 c^4 \rightarrow m_0^2 c^4 + U^2(r)$. A direct coupling to the mass would yield mixing terms of the form $2m_0 c^2 U(r)$; however, we do not want to investigate this case in greater detail here. Thus, the radial Klein-Gordon equation with an arbitrary scalar interaction reads

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\epsilon^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{U^2(r)}{\hbar^2 c^2} \right) R(r) = 0.$$

The scalar interaction is independent of the charge of the spin-0 particle considered, i.e. it has the same effect on particles and antiparticles respectively. However, since there is no experimental evidence for such a long-range interaction, our calculations are only of academic interest. Nevertheless, it is instructive to pursue the formal solution of the Klein-Gordon equation for this unusual type of potential and to determine possible critical values of the coupling strength. So we divide (2) by $m_0^2 c^4 / \hbar^2 c^2$ and substitute

$$r' = r \frac{m_0 c^2}{\hbar c},$$

r' is a dimensionless quantity. This yields

$$\left(\frac{d^2}{dr'^2} - \frac{l(l+1)}{r'^2} + \frac{\epsilon^2}{m_0^2 c^4} - 1 - \frac{U^2(r')}{m_0^2 c^4} \right) R(r') = 0.$$

Now we specify the interaction by

$$\frac{U^2(r')}{m_0^2 c^4} = W(r') = -\frac{Z\alpha}{r'}$$

and, further, by

$$b^2 = 1 - \frac{\epsilon^2}{m_0^2 c^4}.$$

$$\text{Thus, we get } \left(\frac{d^2}{dr'^2} - \frac{l(l+1)}{r'^2} - b^2 + \frac{Z\alpha}{r'} \right) R(r') = 0.$$

Substituting again with

$$\varrho = 2br'$$

we now have

$$\left(\frac{d^2}{d\varrho^2} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} - \frac{1}{4} + \frac{g}{c} \right) R(\varrho) = 0,$$

with

$$c = \frac{Z\alpha}{2b}.$$

Now consider the asymptotics $\varrho \rightarrow \infty$ and $\varrho \rightarrow 0$. For $\varrho \rightarrow \infty$ it follows from (9) that

$$\left(\frac{d^2}{d\varrho^2} - \frac{1}{4} \right) R(\varrho) = 0$$

which yields immediately

$$R(\varrho) \propto e^{-\varrho/2}.$$

Analogously for $\varrho \rightarrow 0$,

$$\left(\frac{d^2}{d\varrho^2} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} \right) R(\varrho) = 0$$

with the solution

$$R(\varrho) \propto \varrho^{l+1}$$

that may be normalized. Thus, for the solution we choose

$$R(\varrho) = N \varrho^{l+1} F(\varrho) e^{-\varrho/2},$$

where $F(\varrho)$ must still be determined. Putting (15) into the differential equation (9), we get

$$\varrho \frac{d^2 F(\varrho)}{d\varrho^2} + [(2l+2) - \varrho] \frac{dF(\varrho)}{d\varrho} [c - (l+1)] F(\varrho) = 0.$$

This is Kummer's differential equation¹⁶, with the solution

$$F(\varrho) = {}_1F_1(l+1-c, 2l+2, \varrho).$$

The confluent hypergeometric series only allows normalization if the first arguments equals a negative integer or zero. Hence, the condition for the determination of the energy eigenvalue

16 M. Abramowitz, I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York 1965).

is

$$l + 1 - c = -n_r \quad \text{with}$$

$$n_r = 0, 1, 2, \dots$$

With the definition of the principal quantum number

$$n = l + 1 + n_r,$$

we get from (18)

$$\varepsilon = \pm \left\{ 1 - \frac{(Z\alpha)^2}{4n^2} \right\}^{1/2} m_0 c^2.$$

In analogy to Schrödinger's equation for a Coulomb potential the energy eigenvalue ε does not depend on the orbital angular momentum quantum number l . Additionally, ε is symmetric for particle and antiparticle states, as expected. The critical value for the coupling strength Z is easily determined: it follows that

$$Z_{\text{cr}} = \frac{2n}{\alpha}.$$

Inserting the value $1/137$ for Sommerfeld's fine structure constant, we get $Z_{\text{cr}}(1s) \simeq 274.07$ and $Z_{\text{cr}}(2s) = Z_{\text{cr}}(2p) \simeq 548.14$, and for these values the derivative of the energy as a function of the coupling strength is

$$\left. \frac{d\varepsilon}{dZ} \right|_{Z=Z_{\text{cr}}} = \pm \infty.$$

In summary, the complete radial wave function has the form

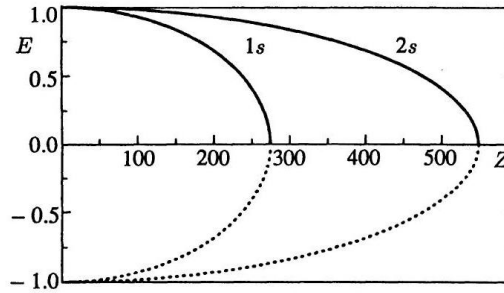
$$R(\varrho) = N \varrho^{l+1} {}_1F_1(-n+l+1, 2l+2, \varrho) e^{-\varrho/2}$$

where $R(\varrho)$ can be expressed by the generalized Laguerre polynomials

$$\begin{aligned} R(\varrho) = & N \varrho^{l+1} \frac{(n-l-1)!}{(n+l)!} (2l+1)! \\ & \times L_{n-l-1}^{(2l+1)}(\varrho) e^{-\varrho/2}. \end{aligned} \quad (25)$$

The normalization factor N of the radial wave function is determined by

$$\int_0^\infty \varrho(r) r^2 dr = \pm 1,$$



$1s$ and $2s$ energies of the Klein-Gordon particles (straight lines) and antiparticles (dashed lines) in a scalar $1/r$ potential

with the radial density

$$\varrho(r) r^2 = \varepsilon R^2(r).$$

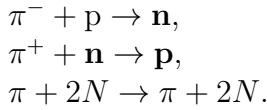
The plus sign in (26) is valid for those states which with decreasing coupling strength enter from the upper continuum ($\varepsilon > m_0 c^2$) into the energy domain of the bound states, while the minus sign is valid for antiparticles which enter from the lower continuum ($\varepsilon < -m_0 c^2$) into the domain of bound states. The evaluation of the normalization integral yields

$$N = \sqrt{\frac{(n+l)!}{2|\varepsilon|n(n-l-1)!}} \frac{1}{(2l+1)!} (2p)^{3/2}.$$

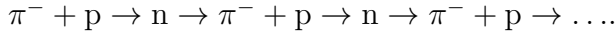
The above figure shows the energy eigenvalue of the $1s$ state and the $2s$ state as a function of $Z\alpha \simeq 1/137$. The values for particle (straight line) and antiparticle (dashed line) states are given. $\varepsilon(Z)$ shows the square root behaviour due to (21).

1.17 Basics of Pionic Atoms

Pionic atoms consist of a nucleus and one (or more) π^- mesons which "circle" around it. The pions are generated in an inelastic proton scattering process (e.g.: $p + p \rightarrow p + p + \pi^- + \pi^+$), slowed down, filtered out of the beam and are incident on the elements under investigation as slow pions. Passing near an atom, the pion is captured by a simultaneous emission of electrons (Auger capture). The probability that two or more pions are simultaneously captured is extremely low. Thus, in general pionic atoms have only one pion, as occurs similarly with muonic atoms. Since pions have spin 0, they are described by the Klein-Gordon equation. The interaction of a pion with a nucleus consists of two essential parts: first the electromagnetic interaction, which is described by the Coulomb potential $A_0(x)$, and second the strong interaction. The latter consists of a real and an imaginary potential. A pion interacts with the nucleons in the nucleus according to the reactions:



For example, a π^- can completely disappear in a nucleus if it is caught in the conversion of a proton into a neutron. This capture process leads to an imaginary potential, by which it is globally simulated. Another possibility is a kind of "chain reaction" of the form:



We abbreviate this - as above - by $\pi + 2N \rightarrow \pi + 2N$. This chain reaction leads to an effective, real, optical potential for the pion, which is known as the Kisslinger potential,

$$V_{\pi}^{\text{Kissl.}}(\mathbf{x}) = A_0 \varrho(\mathbf{x}) - A_1 \nabla \cdot (\varrho(\mathbf{x}) \nabla).$$

An improved form of this potential, the Ericson-Ericson potential, is given by

$$V_{\pi}^{\text{Kissl.-Er-Er}}(\mathbf{x})A = A_0 \varrho(\mathbf{x}) - A_1 \nabla \cdot \left(\frac{\varrho(\mathbf{x})}{1 + \alpha \varrho(\mathbf{x})/3} \nabla \right),$$

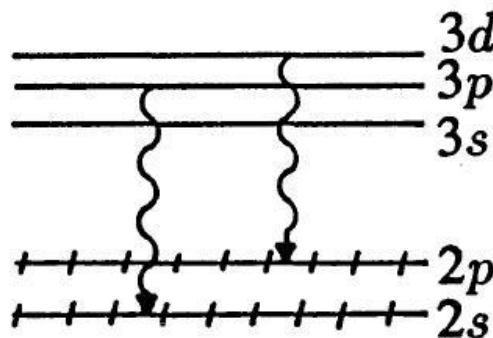
where $\varrho(x)$ denotes the nucleon density and A_0, A_1 and α are constants which are fitted to a large number of nuclei (π atoms). The imaginary potential is also a function of the nucleon density, namely,

$$V_{\pi}^{\text{Imag.}}(\mathbf{x}) = i(B_0 \varrho^2(\mathbf{x}) B_1 \nabla \cdot (\varrho^2(\mathbf{x}) \nabla)),$$

where B_0 and B_1 are again constants.¹⁷

Because of these nuclear potentials, which we derive and confirm more rigorously in Examples 1.22-24, there are deviations from the spectrum of a pionic atom, calculated on the basis of the Coulomb potential for a point nucleus in Exercises 1.11 and 1.13. Since the Kisslinger

¹⁷ See, for example, Y.N. Kim,; Mesonic Atoms and Nuclear Structure (North-Holland, Amsterdam 1971); J.M. Eisenberg, W. Greiner: Nuclear Theory, Vol. 2: Reaction Mechanisms, 3rd ed. (North-Holland, Amsterdam 1987). potential is short range [its range is reduced to the nucleus because of the dependence on $\varrho(x)$], then mainly the $1s$, $2s$ and $2p$ states are influenced, because only the wave functions of these inner states overlap considerably with the nucleus. Finally, the imaginary potential generates a broadening of these inner states, which expresses the pion capture by the nucleus. The figure below illustrates the situation qualitatively.



HHHHHH' 1s

Schematic spectrum of a pionic atom. The hatching indicates the broadening of the inner levels due to pion capture by the nucleus. The $3p \rightarrow 1s$ - and $3d \rightarrow 1s$ - radiative transitions are also shown

Behaviour of Solutions of the Klein-Gordon Equation under Lorentz Transformation

Our acceptance of the special theory of relativity requires that relativistic wave equations have to be form invariant under Lorentz transformations, i.e.

$$x^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu,$$

with $a^\mu{}_\nu a^\nu{}_\sigma = \delta^\mu_\sigma$. For further investigations of the wave function ψ it is convenient to use the covariant notation (1.21) of the Klein-Gordon equation (see Exercise 1.5). Since the square of the four-vector $\hat{p}^\mu$, i.e. $\hat{p}^2 = \hat{p}^\mu \hat{p}_\mu$, does not change under Lorentz transformations, one can see that the wave function is just multiplied by a factor of absolute value 1 in these transformations. In other words, in the case of the coordinate transformations (6), which are simply abbreviated by

$$x \rightarrow x' = \hat{a}x,$$

the transformation law of the wave function of the Klein-Gordon equation (1.21) reads as

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \lambda \psi(x),$$

with $|\lambda| = 1$. If the Lorentz transformation is a continuous one (rotation through an arbitrary angle in the fourdimensional space), i.e. if the transformation matrix $a^\mu{}_\nu$ depends continuously on variable parameters $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, then the factor λ is equal to one, because $\lambda = 1$ holds for the identity transformation characterized by $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$.

Let us now consider space inversion, which is a discrete Lorentz transformation:

$$x^i = -x^i,$$

$$x^0 = x^0.$$

Two-fold performance of space inversion leads to the identical transformation. Since the wave function should be unique, one has

$$\lambda^2 = 1 \text{ or } \lambda = \pm 1.$$

This means that in the case $\lambda = 1$ (8) yields

$$\psi'(\mathbf{x}', t') = \psi'(-\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t).$$

Thus, the ψ function is then a scalar. For $\lambda = -1$ is

$$\psi'(\mathbf{x}', t') = \psi'(-\mathbf{x}, t) = -\psi(\mathbf{x}, t),$$

and one is dealing with a pseudoscalar wave function. We conclude: solutions $\psi(\mathbf{x})$ of the Klein-Gordon equation are either scalar or pseudoscalar functions, i.e. functions which are both invariant under spatial rotations and proper Lorentz transformations and also which are invariant (scalars) or change sign (pseudoscalars) under space inversions.

The transformation laws of the wave functions (8) are an essential characteristic for the properties of particles described by the Klein-Gordon equation (the same is true for particles which satisfy other wave equations). Wave functions which do not change under spatial rotations describe particles with spin 0, which is, so to say, a group theoretical argument¹⁸ for the fact that the Klein-Gordon equation describes particles with spin 0. The absence of level splitting due to spin interactions in pionic atoms (no $2p_{1/2} - 2p_{3/2}$, $3d_{3/2} - 3d_{5/2}, \dots$ splitting, but only $2p-$, $3d-$, $\dots$ levels) uniquely leads to the conclusion that pions have spin zero. It has turned out that the K mesons also ($m_K \approx 960m_e$) have spin zero. The question whether pions are described by scalar or pseudoscalar wave functions has to be decided experimentally.

¹⁸ See the detailed discussion of this point in Vol. 2 of this series: Quantum Mechanics - Symmetries (Springer, Berlin, Heidelberg 1989), Chap. 1.

The Pion's Pseudoscalar Character

To complete our knowledge of the pion inner wave function, people have searched for the creation of two neutrons in the capture of a slow π^- -meson by a deuteron and this reaction has, indeed, been observed. We now show that this proves the pseudoscalar character of the pionic wave function. The first phase of the process is the creation of a π -mesic deuterium atom in the $1s$ state. The spins of the deuteron and the π^- -meson are 1 and 0, respectively. Therefore, the total angular momentum of this starting state, i.e. the pionic deuteron atom in its ground state, is 1. Its parity is equal to the inner parity of the pion, because the inner parities of both nucleons (which make up the deuteron) can be assumed to be equal, and the parity of the $1s$ relative wave function equals 1. In the final state two neutrons have been created and the pion has been absorbed. Due to Pauli's principle a system of two neutrons can only be in the following antisymmetrical states (pay attention to the spin!):

$$^1S_0\ ^3P_0\ ^3P_1\ ^3P_2\ ^1D_2\ \dots$$

During this reaction parity and total angular momentum are conserved. Since the total angular momentum in the starting state was 1, only those states shown in (13) which have spin 1 can appear in the final state. The only one satisfying this demand is $^3P_1$ with $L = S = J = 1$ and, because of $L = 1$, this state is of negative parity P . Consequently, the starting state of the reaction is of negative parity too. This is only possible with a negative inner parity of the pion. Panofsky et al.¹⁹ verified this with the observation of the reaction

$$\pi^- + d \rightarrow 2n.$$

10.2.8 1.12 Interpretation of One-Particle Operators in Relativistic QM 1

This is a rather general subject. However, in this section we want to study the possibilities of measuring eigenvalues of one-particle operators, especially for the case of spin-zero particles described by the Klein-Gordon equation. This point is rather important, because we will see that the naive one-particle interpretation encounters problems. We have already seen this fact in the charge distribution (1.131) of a pionic atom. Nevertheless, we shall try to maintain the one-particle interpretation as far as possible.

Let us return to the Schrödinger form of the free Klein-Gordon equation,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_f \Psi \quad (1.141)$$

with

$$\Psi(x, t) = \begin{pmatrix} \phi(x, t) \\ \chi(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \quad (1.142)$$

and the Hamiltonian

$$\hat{H}_f = (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} + m_0 c^2 \hat{\tau}_3 \quad (1.143)$$

With the help of (1.141), the column vector $\Psi(x, t)$ may be evaluated at any later time t , if the values $\Psi(x, 0)$ are known at $t = 0$. This may be expressed by the transformation

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \hat{S}(t) \Psi(\mathbf{x}, 0) \quad (1.144)$$

The transformation operator reads

¹⁹ W.K.H. Panofsky, R.L. Adenot, J. Halley, Phys. Rev. 81, 565

$$\hat{S}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_f t\right) = 1 + \left(\frac{-i\hat{H}_f}{\hbar 1!}\right)t + \left(\frac{-i\hat{H}_f}{\hbar 2!}\right)^2 t^2 + \dots \quad (1.145)$$

and is Φ unitary because of the property

$$\hat{S}^H(t) = \hat{\tau}_3 \hat{S}^\dagger(t) \hat{\tau}_3 = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_f t\right) = \hat{S}^{-1} \quad (1.146)$$

As in nonrelativistic quantum mechanics, time dependence in the relativistic case need not be expressed by the state vectors $\Psi(x, t)$ (Schrödinger picture) but can also be incorporated in the operators. This picture, where the operators and not the state vectors are time dependent, is referred to as the Heisenberg picture. The change from the Schrödinger to Heisenberg picture is performed by the transformations

$$\Psi_H(\mathbf{x}) = \hat{S}^{-1}(t)\Psi(\mathbf{x}, t) \quad (1.147)$$

and

$$\hat{F}_H(t) = \hat{S}^{-1}(t)\hat{F}(0)\hat{S}(t) \quad (1.148)$$

For the scalar products it yields

$$\begin{aligned} \langle \Psi(\mathbf{x}, t) | \hat{F}(0) | \Psi'(\mathbf{x}, t) \rangle &= \langle \hat{S}(t)\Psi_H(\mathbf{x}) | \hat{F}(0) | \hat{S}(t)\Psi'_H(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle \Psi_H(\mathbf{x}) | \hat{S}^H(t)\hat{F}(0)\hat{S}(t) | \Psi'_H(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle \Psi_H(\mathbf{x}) | \hat{F}_H(t) | \Psi'_H(\mathbf{x}) \rangle \end{aligned} \quad (1.149)$$

i.e. the change from the Schrödinger to the Heisenberg picture leaves the Φ scalar product invariant. In doing so we have made use of (1.146). From (1.148), it follows directly that for time independent $\hat{H}_f$,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\hat{F}}{dt} &= i\hbar \frac{d}{dt} \left\{ e^{i\hat{H}_f t/\hbar} \hat{F}(0) e^{-i\hat{H}_f t/\hbar} \right\} \\ &= -\hat{H}_f \hat{F} + \hat{F} \hat{H}_f = [\hat{F}, \hat{H}_f]_- , \end{aligned} \quad (1.150)$$

in analogy to nonrelativistic quantum mechanics²⁰. From this relation it follows that the physical observables F , whose corresponding operator $\hat{F}$ commutes with $\hat{H}_f$, are constants of motion. This means that the expectation values of these operators are constant in time. One of the basic postulates in nonrelativistic quantum mechanics states that the eigenvalues of an operator describe the measurable values of the corresponding classical observable (physical quantity) in a state of the system. To satisfy this postulate in the relativistic theory we must modify the definitions of some of the operators.

We illustrate this for the well-known example of energy. The eigenvalues and eigenstates of the operators $\hat{H}_f$ (1.143) are determined - in the case of free motion with momentum $\mathbf{p}$ - by the equation

$$\hat{H}_f \Psi = E \Psi \quad (1.151)$$

We know from our earlier discussions [see (1.74-79 and 114)] and from Exercise 1.9, that (1.151) has two solutions

$$\Psi_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \begin{pmatrix} \varphi_{0\lambda} \\ \chi_{0\lambda} \end{pmatrix} e^{ip \cdot x/\hbar}, \lambda = \pm 1 \quad (1.152)$$

for the corresponding "energies"

$$E_\lambda = \lambda E_p = \lambda c \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2}. \quad (1.153)$$

E_{-1} is negative and, therefore, we cannot interpret it as a one-particle energy, which must always be positive. Here we have to remember the double meaning of the energy eigenvalues of the Hamiltonian in nonrelativistic quantum mechanics: first they represent the energy of stationary states and second they characterize the time-dependence (time evolution) of the wave functions. We have already learned that the eigenvalues E_λ of $\hat{H}_f$ also represent the time-dependence of the wave functions in the relativistic theory [the time factors $\exp(\pm i E_p t/\hbar)$ in (1.78) and (1.79)]:

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(x, t) &= \exp(-i \hat{H}_f t/\hbar) \Psi_\lambda(x) = \exp(-i \lambda E_p t/\hbar) \Psi_\lambda(x) \\ &= \Psi_\lambda(x) \exp(-i \lambda E_p t/\hbar) \end{aligned} \quad (1.154)$$

The energy of these states is always positive and, hence, λ -independent. Previously, we derived this result by using the canonical formalism [see (1.61)]. We can also see this from the following statement: The energy ε of a system in a stationary state is identical with the mean value of the energy, i.e.

$$\varepsilon_\lambda = \int \Psi_\lambda^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{H}_f \Psi_\lambda d^3x \quad (1.155)$$

We proved this in Exercise 1.7 by making use of the canonical formalism. Now with

$$\hat{H}_f = E_\lambda \Psi_\lambda = \lambda E_p \Psi_\lambda \quad \text{and} \quad \int \Psi_\lambda^\dagger \hat{\tau}_3 \Psi_\lambda d^3x = \lambda$$

we have

$$\varepsilon_\lambda = \lambda E_p \int \Psi_\lambda^\dagger \hat{\tau}_3 \Psi_\lambda d^3x = \lambda^2 E_p = E_p \quad (1.156)$$

The energy is always positive and independent of λ . Thus, the problem of the energy is solved. To resume: The dual character of the eigenvalues of $\hat{H}_f$, i.e. as a characteristic factor of the time evolution and as an energy, evolves quite naturally in the relativistic quantum theory. We can give the correct interpretation of the energies of the states by making use of the canonical formalism. Hence, the energy operator is not $\hat{H}_f$ but $\hat{\tau}_3 \hat{H}_f$ [see (1.155)].

In nonrelativistic quantum mechanics there is always a correspondence between a relation of operators and that of classical objects (measurable values). For example, Newton's classical equation of motion corresponds to the operator equation

$$\frac{d\hat{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\mathbf{p}}, \hat{H}] = -\nabla U$$

with $\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2/2m + U(\mathbf{x})$ (Ehrenfest's theorem). Another example is given by the operator relation

20 See Vol. 1 of this series: Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989), Chap. 15.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\mathbf{x}, \hat{H}] = \frac{\hat{\mathbf{p}}}{m_0}, \quad (1.157)$$

which corresponds to the classical relation between the velocity and linear momentum. Because these operator-equations are of the same form as the classical equations, it is certain that the quantum mechanical mean values satisfy the classical equations of motion ²¹. In relativistic quantum theory the situation is different. For instance, in the last example the expression for the "velocity operator" of a relativistic spin- 0 particle was

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\mathbf{x}, \hat{H}_f] = (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \frac{\hat{\mathbf{p}}}{m_0} \quad (1.158)$$

while the classical relativistic velocity is given by

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{M} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{Mc^2} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{E} \quad (1.159)$$

where $M = m_0 / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ denotes the relativistic mass, i.e.

$$\begin{aligned} E = Mc^2 &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \sqrt{\frac{v^2}{c^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \\ &= c \sqrt{\frac{m_0^2 v^2 + m_0^2 c^2 (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2}} \\ &= c \sqrt{\left(\frac{m_0 v}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right)^2 + m_0^2 c^2} = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \end{aligned}$$

is the total energy of a free particle with rest mass m_0 . Obviously, the rhs of (1.158) and (1.159) are different. Furthermore, we notice that the eigenvalues of the matrix

$$\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

are zero! This also means that the eigenvalues of the velocity operator (1.158) are zero too. Hence, we again notice that, in general within a relativistic theory, the eigenvalues (expectation values) of a reasonably constructed operator are not the same as the values of the corresponding classical quantity. Therefore, we conclude that not all operators of the nonrelativistic theory can be transferred to the relativistic one-particle theory. The reason for this is the restriction to the one-particle concept. In relativistic quantum mechanics the consistency of the one-particle description is limited. This may be specified more precisely: From a mathematical point of view the formulation of the relativistic theory within a one-particle concept implies the condition that the only valid operators are those which do not mix different charge states. Such operators are called even operators or true one-particle operators. More formally, an operator $[\hat{F}]$ is called even, if

$$[\hat{F}]\Psi^{(+)} = \Psi'^{(+)} \quad , \quad [\hat{F}]\Psi^{(-)} = \Psi'^{(-)} \quad (1.160)$$

is valid. $\Psi'^{(\pm)}$ are functions with positive and negative frequencies, respectively. Similarly, an operator $\{\hat{F}\}$ is called odd if it satisfies the conditions

$$\{\hat{F}\}\Psi^{(+)} = \Psi'^{(-)} \quad , \quad \{\hat{F}\}\Psi^{(-)} = \Psi'^{(+)} \quad (1.161)$$

²¹ See Vol. 1 of this series: Quantum Mechanis - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

Therefore, the Hamiltonian of the free Klein-Gordon equation in the Schrödinger representation $\hat{H}_f$ and the momentum operator $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ are even operators. This means that

$$\hat{H}_f = [\hat{H}_f], \quad \hat{\mathbf{p}} = [\hat{\mathbf{p}}]. \quad (1.162)$$

Any operator can generally be split into an even and an odd part, e.g.

$$\hat{F} = [\hat{F}] + \{\hat{F}\} \quad (1.163)$$

Therefore, one can separate from any given operator $\hat{F}$ a true one-particle operator $[\hat{F}]$.

The investigation of even and odd operators can be simplified in the Feshbach-Villars representation, especially if one uses momentum eigenfunctions ($\hat{\mathbf{p}}$ representation). In the Φ representation the wave functions of the two charge states are given by (1.99) and (1.100), i.e.

$$\begin{aligned} \Phi^{(+)}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E_p t) \right], \\ \Phi^{(-)}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + E_p t) \right]. \end{aligned} \quad (1.164)$$

In this representation an even operator is diagonal because of the column vectors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ for the two charge states. Therefore, we can deduce that $\hat{H}_\Phi$ is an even operator, because

$$\hat{H}_\Phi = \hat{\tau}_3 E_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} E_p = [\hat{H}_\Phi] \quad (1.165)$$

Also, for $\Phi(p)$ (1.164), the momentum operator $\hat{\mathbf{p}}$ is diagonal, since with (1.96) and (1.112), we find that

$$\hat{\mathbf{p}}_\Phi = \hat{U} \hat{\mathbf{p}} \hat{U}^{-1} = \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{p}} = [\hat{\mathbf{p}}] \quad (1.166)$$

An even operator has to be a diagonal matrix in the Φ representation; therefore, it will be especially simple to separate the even part of any operator $\hat{F}$,

$$\hat{F}_\Phi = \begin{pmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} \\ \hat{F}_{21} & \hat{F}_{22} \end{pmatrix} \quad (1.167)$$

according to

$$\hat{F}_\Phi = \begin{pmatrix} \hat{F}_{11} & 0 \\ 0 & \hat{F}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \hat{F}_{12} \\ \hat{F}_{21} & 0 \end{pmatrix} \equiv [\hat{F}_\Phi] + \{\hat{F}_\Phi\}$$

Having completed the introduction to odd and even operators, we now apply this method to the $\hat{\mathbf{x}}$ operator which caused problems in (1.158) and (1.159). In the $\mathbf{p}$ representation the $\hat{\mathbf{x}}$ operator is given by

$$\hat{\mathbf{x}} = i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial p_z}, \frac{\partial}{\partial p_y}, \frac{\partial}{\partial p_x} \right\} = i\hbar \nabla_p \quad (1.168)$$

which can be calculated to be

$$\hat{x}_\Phi = \hat{U} i\hbar \nabla_p \hat{U}^{-1} = i\hbar \nabla_p \mathbb{1} - \frac{i\hbar p \hat{\tau}_1}{2(p^2 + m_0^2 c^2)} \quad (1.169)$$

in Φ representation (cf. Exercise 1.18). Since $\hat{\tau}_1$ is non-diagonal, the true one-particle position operator in Φ representation reads

$$[\hat{x}_\Phi] = i\hbar \nabla_p \mathbb{1}. \quad (1.170)$$

Clearly, this is the canonical conjugate operator of the momentum operator since, due to (1.166),

$$[[\hat{x}_\Phi]_i, [\hat{p}]_j]_- = i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial p_i}, p_j \right]_- = i\hbar \delta_{ij} \quad (1.171)$$

as it should according to quantum mechanics 22. With the help of the true position operator (1.170) we can calculate the velocity operator:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\hat{x}_\Phi] &= \frac{1}{i\hbar} [i\hbar \nabla_p \mathbb{1}, \hat{H}_\Phi]_- = [\nabla_p \mathbb{1}, \hat{\tau}_3 E_p]_- \\ &= \hat{\tau}_3 \left[\nabla_p, c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2} \right]_- = \hat{\tau}_3 \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2}} = \hat{\tau}_3 \frac{c^2 \mathbf{p}}{E_p}, \end{aligned} \quad (1.172)$$

with eigenvalues

$$+\frac{c^2 \mathbf{p}}{E_p} \quad \text{and} \quad -\frac{c^2 \mathbf{p}}{E_p} \quad (1.173)$$

We have already stated the corresponding eigenfunctions in (1.164); therefore, we get

$$\frac{d[\hat{x}_\Phi]}{dt} \Phi^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \frac{c^2 \mathbf{p}}{E_p} \hat{\tau}_3 \Phi^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \pm \frac{c^2 \mathbf{p}}{E_p} \Phi^{(\pm)}(\mathbf{p}) \quad (1.174)$$

1.18 Calculation of the Position Operator in the Φ Representation

Problem. Show that the x operator in Φ representation is given by

$$\hat{x}_\Phi = i\hbar \nabla_p \mathbb{1} - \frac{i\hbar p \hat{\tau}_1}{2(p^2 + m_0^2 c^2)}.$$

Solution

We know that in the Schrödinger picture the position operator in momentum space is just the derivative with respect to p , i.e.

$$\hat{x} = i\hbar \nabla_p.$$

By substituting the Feshbach-Villars representation, all operators change according to (1.112); hence,

$$\begin{aligned} \hat{x}_\Phi &= \hat{U} (i\hbar \nabla_p) \hat{U}^{-1}, \text{ where} \\ \hat{U} &= \frac{(m_0 c^2 + E_p) \mathbb{1} - (m_0 c^2 - E_p) \hat{\tau}_1}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}}. \end{aligned}$$

Therefore, we get

22 See Vol. 1 of this series: Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

$$\hat{\mathbf{x}}_\Phi = \left[\frac{(m_0 c^2 + E_p) 11 - (m_0 c^2 - E_p) \hat{\tau}_1}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} \right] (i\hbar \nabla_p) \\ \times \left[\frac{(m_0 c^2 + E_p) 11 - (m_0 c^2 - E_p) \hat{\tau}_1}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} \right].$$

Since

$$E_p = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}, \text{ and}$$

$$\nabla_p E_p = \frac{c^2}{E_p} (\mathbf{p} \cdot \nabla_p) \mathbf{p} = \frac{\mathbf{p} c^2}{E_p},$$

we get
 $\nabla_p \hat{U}^{-1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} (11 - \hat{\tau}_1) \nabla_p E_p \\ - \hat{U}^{-1} \frac{1}{2(4m_0 c^2 E_p)} 4m_0 c^2 \nabla_p E_p \\ = \frac{1}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} (11 - \hat{\tau}_1) \frac{\mathbf{p} c^2}{E_p} \\ - \frac{1}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} \{ (11 + \hat{\tau}_1) m_0 c^2 + (11 - \hat{\tau}_1) E_p \} \frac{\mathbf{p} c^2}{2E_p^2} \\ = - \frac{\mathbf{p} c^2}{2E_p^2} \{ (11 + \hat{\tau}_1) m_0 c^2 - (11 - \hat{\tau}_1) E_p \} \frac{1}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} \\ = - \frac{\mathbf{p} c^2 \hat{\tau}_1}{2E_p^2} \left\{ \frac{(m_0 c^2 + E_p) 11 + (m_0 c^2 - E_p) \hat{\tau}_1}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} \right\} \\ = - \hat{U}^{-1} \frac{\mathbf{p} c^2 \hat{\tau}_1}{2E_p^2}.$$

If $\mathbf{x}_\Phi$ acts on Φ the result is

$$\hat{\mathbf{x}}_\Phi \Phi = \hat{U} (i\hbar \nabla_p) \hat{U}^{-1} \Phi \\ = \hat{U} \left[i\hbar \nabla_p \hat{U}^{-1} \right] \Phi + \hat{U} \hat{U}^{-1} i\hbar \nabla_p \Phi \\ = -\hat{U} \hat{U}^{-1} i\hbar \frac{\mathbf{p} c^2 \hat{\tau}_1}{2E_p^2} + \hat{U} \hat{U}^{-1} i\hbar \nabla_p \Phi \\ = \left\{ i\hbar \nabla_p - \frac{i\hbar p \hat{\tau}_1}{2(m_0^2 c^2 + p^2)} \right\} \Phi$$

as required.

For states of positive charge (time evolution factor $E = +E_p$) the same relation between velocity and momentum holds as in classical relativistic mechanics, (1.159). For states of negative charge this is true only for the absolute values. Antiparticles with momentum $\mathbf{p}$ move in the direction opposite to $\mathbf{p}$. This is not unreasonable, especially if we think of the current density of the charge, $e(d[x_\Phi/dt]) = e(c^2 p/E_p) \hat{\tau}_3$, which must change its sign for antiparticles because of their negative charges. Therefore, the operator $[\hat{\mathbf{x}}_\Phi]$ fulfills a number of plausible conditions and can be accepted as a true one-particle operator. Since the position operator $[\hat{\mathbf{x}}_\Phi]$

and the charge operator $\hat{Q}_\Phi = e\hat{\tau}_3$ commute, there exists a set of simultaneous eigenfunctions $\Phi_x^{(\pm)}(p)$ with

$$\begin{aligned} [\hat{x}_\Phi] \Phi_x^{(\pm)}(p) &= i\hbar \nabla_p \Phi_x^{(\pm)}(p) = x \Phi_x^{(\pm)}(p), \quad \text{and} \\ \hat{Q}_\Phi \Phi_x^{(\pm)}(p) &= \pm e \Phi_x^{(\pm)}(p) \end{aligned} \quad (1.175)$$

The $\Phi_x^{(\pm)}(p)$, which are normalized to δ functions, are given by

$$\begin{aligned} \Phi_x^{(+)}(p) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-ip \cdot x/\hbar), \\ \Phi_x^{(-)}(p) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-ip \cdot x/\hbar). \end{aligned} \quad (1.176)$$

This is the $\Phi-p$ representation. In order to derive the $\Psi-p$ representation (i.e. the unusual Schrödinger momentum representation) we must apply $\hat{U}^{-1}$ to $\Phi_x^{(\pm)}(p)$ according to (1.95), so that

$$\begin{aligned} \Psi_x^{(\pm)}(\mathbf{p}) &= \hat{U}^{-1} \Phi_x^{(\pm)}(\mathbf{p}) \\ &= \frac{(m_0 c^2 + E_p) 11 + (m_0 c^2 - E_p) \hat{\tau}_1}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} \Phi_x^{(\pm)}(\mathbf{p}) \\ &= \frac{(m_0 c^2 + E_p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (m_0 c^2 - E_p) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} \Phi_x^{(\pm)}(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (1.177)$$

where $\hat{U}^{-1}$ is given by (1.97). This can immediately be calculated, yielding the explicit form

$$\Psi_x^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} \frac{1}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} \begin{pmatrix} m_0 c^2 \pm E_p \\ m_0 c^2 \mp E_p \end{pmatrix} \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}/\hbar). \quad (1.178)$$

As we have already noted these are the eigenfunctions (1.176) in Schrödinger momentum representation. We perform the transition from p representation to x representation by ²³

$$\begin{aligned} \Psi_x^{(\pm)}(\mathbf{x}') &= \int \langle \mathbf{x}' | \mathbf{p} \rangle \Psi_x^{(\pm)}(\mathbf{p}) d^3 p \\ &= \int \frac{\exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}'/\hbar)}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} \Psi_x^{(\pm)}(\mathbf{p}) d^3 p \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\sqrt{4m_0 c^2}} \int \begin{pmatrix} m_0 c^2 \pm E_p \\ m_0 c^2 \mp E_p \end{pmatrix} \frac{\exp(i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})/\hbar)}{\sqrt{E_p}} d^3 p \end{aligned} \quad (1.179)$$

A lengthy calculation, which we shall perform in Exercise 1.20, yields

$$\Psi_x^{(\pm)}(\mathbf{x}') = \begin{pmatrix} A \pm B \\ A \mp B \end{pmatrix} \underset{z \gg 1}{\sim} \begin{pmatrix} 1/z^{7/4} \pm 1/z^{9/4} \\ 1/z^{7/4} \mp 1/z^{9/4} \end{pmatrix} e^{-z}, \quad (1.180)$$

where

$$z = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{\hbar/m_0 c}.$$

The meaning of this result is that the eigenfunctions of the true position operator $[\hat{x}]$ in Schrödinger position representation are not $\delta(x - x')$, as we would have expected from nonrelativistic quantum mechanics, but a kind of smeared-out δ function. According to (1.180) the functions are smeared out over a region of the order

$$z \sim 1, \text{ implying } |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \sim \frac{\hbar}{m_0 c}, \quad (1.181)$$

i.e. the dimension of the Compton wavelength of the particle. ²³ See Vol. 1 of this series: Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989), Chap. 15

1.19 Calculation of the Current Density in the Φ Representation for Particles and Antiparticles

Problem. Calculate the current density (1.36) in the Φ representation for particles and antiparticles.

Solution

By means of the Klein-Gordon field the current density reads

$$\begin{aligned} j &= -\frac{ie\hbar}{2m_0} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \\ \Psi &= \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \varphi + \chi = \psi, \\ j &= -\frac{ie\hbar}{2m_0} \{ \Psi^\dagger \hat{\tau}_3 (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \nabla \Psi - (\nabla \Psi^\dagger) \hat{\tau}_3 (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \Psi \}, \end{aligned}$$

which can be verified by direct calculation,

$$\begin{aligned} &\Psi^\dagger \hat{\tau}_3 (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \nabla \Psi - (\nabla \Psi^\dagger) \hat{\tau}_3 (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) \Psi \\ &= (\varphi^*, \chi^*) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &\quad - [\nabla (\varphi^*, \chi^*)] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= (\varphi^* + \chi^*) \nabla (\varphi + \chi) - \nabla (\varphi^* + \chi^*) \cdot (\varphi + \chi) \\ &= \psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*. \end{aligned}$$

Using $\Psi = \hat{U}^{-1} \Phi$, $\Psi^\dagger = \Phi^\dagger = \Phi^\dagger (\hat{U}^\dagger)^{-1}$,

where $\hat{U}$ is given by (1.96), and, because of $(\hat{U}^\dagger)^{-1} = (\hat{\tau}_3 \hat{U}^{-1} \hat{\tau}_3)^{-1} = \hat{\tau}_3^{-1} \hat{U} \hat{\tau}_3^{-1} = \hat{\tau}_3 \hat{U} \hat{\tau}_3$,

$$\Psi^\dagger (1 + \hat{\tau}_1) \nabla \Psi = \Phi^\dagger \hat{\tau}_3 \hat{U}_3 (1 + \hat{\tau}_3) \hat{U}^{-1} \nabla \Phi.$$

Furthermore, $\hat{\tau}_3 (\hat{\tau}_3 + i\hat{\tau}_2) = \mathbb{1} + \hat{\tau}_1$ is valid. We commute $\hat{U}$ with $\hat{\tau}_3$ to give

$$\begin{aligned} \hat{U} \hat{\tau}_3 &= \frac{(E_p + m_0 c^2) \mathbb{1} + \hat{\tau}_1 (E_p - m_0 c^2)}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} \hat{\tau}_3 \\ &= \hat{\tau}_3 \frac{(E_p + m_0 c^2) \mathbb{1} - (E_p - m_0 c^2) \hat{\tau}_1}{\sqrt{4m_0 c^2 E_p}} \hat{\tau}_3 \\ &= \hat{\tau}_3 \hat{U}^{-1}, \end{aligned}$$

and we get

$$\Psi^\dagger (11 + \hat{\tau}_1) \nabla \Psi = \Phi^\dagger (11 + \hat{\tau}_1) \left(\hat{U}^{-1} \right)^2 \nabla \Phi,$$

because $\hat{U}^{-1}$ commutes with $1 + \hat{\tau}_1$. Since

$$\begin{aligned} & \left(\hat{U}^{-1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4m_0c^2E_p} \left((E_p + m_0c^2) 11 - (E_p - m_0c^2) \hat{\tau}_1 \right)^2 \\ &= \frac{1}{4m_0c^2E_p} \left((E_p + m_0c^2)^2 11 + (E_p - m_0c^2)^2 11 \right. \\ &\quad \left. - 2(E_p^2 - m_0^2c^4) \hat{\tau}_1 \right) \\ &= \frac{1}{4m_0c^2E_p} \left(2(E_p^2 + m_0^2c^4) 11 - 2(E_p^2 - m_0^2c^4) \hat{\tau}_1 \right) \\ &= \frac{1}{2m_0c^2E_p} \left(m_0^2c^4 (11 + \hat{\tau}_1) + E_p^2 (11 - \hat{\tau}_1) \right), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & (1 + \hat{\tau}_1) \hat{U}^{-2} \\ &= \frac{1}{2m_0c^2E_p} \left\{ m_0^2c^4 (11 + \hat{\tau}_1)^2 + E_p^2 (11 - \hat{\tau}_1) (11 - \hat{\tau}_1) \right\} \\ &= \frac{m_0c^2}{E_p} (11 + \hat{\tau}_1) \end{aligned}$$

then the current density is

$$\begin{aligned} j &= -\frac{ie\hbar}{2m_0} \left\{ \Phi^\dagger \frac{m_0c^2}{E_p} (11 + \hat{\tau}_1) \nabla \Phi - \nabla \Phi^\dagger \frac{m_0c^2}{E_p} (11 + \hat{\tau}_1) \Phi \right\} \\ &= -\frac{ie\hbar c^2}{2E_p} \left\{ \Phi^\dagger (11 - \hat{\tau}_1) \nabla \Phi - \nabla \Phi^\dagger (11 + \hat{\tau}_1) \Phi \right\}. \end{aligned}$$

For a free particle solution $\Phi_{\mathbf{p}}^{(+)} = 1/\sqrt{V} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E_p t)/\hbar]$ we, thus, get for the current density

$j^{(+)} = \frac{1}{V} \frac{epc^2}{E_p}$, and the current

$$\mathbf{J}^{(+)} = \int j^{(+)} d^3r = e \frac{c^2 \mathbf{p}}{E_p}.$$

For a free antiparticle solution with momentum p , $\Phi_{\mathbf{p}}^{(-)} = 1/\sqrt{V} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + E_p t)]$ the current is then given by

$$\mathbf{J}^{(-)} = \int d^3r \left(\frac{1}{V} e \frac{c^2 \mathbf{p}}{E_p} \right) = e \frac{c^2 \mathbf{p}}{E_p} = \mathbf{J}^{(+)}.$$

Thus, we see at once that

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{(\pm)} &= \int d^3r \Phi_{\mathbf{p}}^{(\pm)\dagger} \hat{\tau}_3 e \frac{d[\hat{\mathbf{x}}_\Phi]}{dt} \Phi_{\mathbf{p}}^{(\pm)} \\ &= \int d^3r \Phi_{\mathbf{p}}^{(\pm)\dagger} e \frac{c^2 \mathbf{p}}{E_p} \Phi_{\mathbf{p}}^{(\pm)} \end{aligned}$$

i.e. the current is equal to the expectation value of the operator $e \frac{d[\hat{\mathbf{x}}_\Phi]}{dt} \equiv e \hat{\mathbf{v}}$.

But why are the currents for particle and antiparticle with energy E_p and momentum $\mathbf{p}$ equal although the charges are different? The reason is that for antiparticles with momentum p the velocity operator is $-c^2 p/E_p$, i.e. velocity and momentum have opposite directions. The expectation value of the operator, however, has the same direction as p because the norm or "charge" of the wave function is included. To get the physical velocity we have to divide the expectation value of v by the norm of the state. This velocity again has opposite direction to the momentum. One says that the antiparticles move "backwards in time".

10.2.9 1.12 Interpretation of One-Particle Operators in Relativistic QM 2

1.20 Calculation of the Position Eigenfunctions in the Coordinate Representation

Problem. Carry out explicitly the calculation leading from the exact expression (1.179) for the eigenfunctions of position

$$\Psi_{x(\pm)}(\mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\sqrt{4m_0c^2}} \int \left(\frac{m_0c^2 \pm E_p}{m_0c^2 \mp E_p} \right) \frac{\exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar]}{\sqrt{E_p}} d^3p$$

to the approximation (1.180).

Solution

In the analysis of (1.179) we face, in particular, two integrals:

$$I_1 = \int \sqrt{E_p} \exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar] d^3p,$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{E_p}} \exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar] d^3p. \text{ With}$$

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = |\mathbf{p}| |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cos \vartheta \equiv pr \cos \vartheta, p = |\mathbf{p}|,$$

and ϑ being the angle between p and $(x - x')$, we can introduce polar coordinates. With the z axes in the direction of $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, the volume element is given by $d^3p = d\varphi d(\cos \vartheta) p^2 dp$, and we have

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sqrt[4]{m_0^2c^4 + p^2c^2} e^{(i/\hbar)pr \cos \vartheta} d\varphi d(\cos \vartheta) p^2 dp \\ &= 2\pi \int_0^\infty \int_{-1}^1 \sqrt[4]{m_0^2c^4 + p^2c^2} e^{(i/\hbar)pr \cos \vartheta} d \cos \vartheta p^2 dp \\ &= 2\pi \int_0^\infty \sqrt[4]{m_0^2c^4 + p^2c^2} \frac{e^{(i/\hbar)pr} - e^{-(i/\hbar)pr}}{i pr/\hbar} p^2 dp \\ &= -i \frac{2\pi\hbar}{r} \int_0^\infty \sqrt[4]{m_0^2c^4 + p^2c^2} 2i \sin(pr/\hbar) p dp \\ &= \frac{4\pi\hbar}{r} \int_0^\infty \sqrt[4]{m_0^2c^4 + p^2c^2} \sin(pr/\hbar) p dp. \end{aligned}$$

We write

$$\begin{aligned}(m_0^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/4} &= \sqrt{m_0 c^2} \left(1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}\right)^{1/4} \\ &= \sqrt{m_0 c^2} (1 + q^2)^{1/4} \text{ with}\end{aligned}$$

$q = \frac{p}{m_0}, \frac{pr}{\hbar} = qz$ and $z = \frac{m_0 c}{\hbar} r \equiv k_0 r$,
and thus obtain

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{4\pi (m_0)^3}{z} \sqrt{m_0 c^2} \int_0^\infty (1 + q^2)^{1/4} q \sin(qz) dq \\ &\equiv 16\pi^3 \hbar^3 \sqrt{m_0 c^2} B\end{aligned}$$

with

$$B = \frac{k_0^3}{4\pi^2 z} \int_0^\infty q (1 + q^2)^{1/4} \sin(qz) dq.$$

In an analogous way we find

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{4\pi \hbar}{r} \int_0^\infty (m_0^2 c^4 + p^2 c^2)^{-1/4} \sin(pr/\hbar) p dp \\ &= \frac{4\pi (m_0 c)^3}{z} \frac{1}{\sqrt{m_0 c^2}} \int_0^\infty (1 + q^2)^{-1/4} q \sin(qz) dq \\ &\equiv 16\pi^3 \hbar^3 \frac{1}{\sqrt{m_0 c^2}} A\end{aligned}$$

with

$$A = \frac{k_0^3}{4\pi^2 z} \int_0^\infty q (1 + q^2)^{-1/4} \sin(qz) dq.$$

Thus,

$$\begin{aligned}\Psi_{x(\pm)}(x') &= \frac{1}{(2\pi \hbar)^3} \frac{1}{\sqrt{4m_0 c^2}} \begin{pmatrix} m_0 c^2 I_2 \pm I_1 \\ m_0 c^2 I_2 \mp I_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8\pi^3 \hbar^3} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 16\pi^3 \hbar^3 (A \pm B) \\ 16\pi^3 \hbar^3 (A \mp B) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A \pm B \\ A \mp B \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

The integrals A and B can be expressed by modified spherical Bessel functions (see Mathematical Supplement 1.21), giving

$$\begin{aligned}A &= \frac{k_0^3}{4\pi^2 z} \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2}{dz^2} - 1 \right) \left\{ \frac{z^{3/4} \sqrt{\pi}}{\Gamma(5/4)} K_{3/4}(z) \right\}, \\ B &= \frac{k_0^3}{4\pi^2 z} \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2}{dz^2} - 1 \right) \left\{ \frac{z^{1/4} \sqrt{\pi}}{\Gamma(3/4)} K_{1/4}(z) \right\}.\end{aligned}$$

Here we have used the Basset formula

$$\int_0^\infty \frac{\cos(qz) dq}{(q^2 + 1)^{\nu+1/2}} = \frac{z^\nu \sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+1/2)} K_\nu(z).$$

These expressions for A and B can at once be verified by substitution. For large z the modified Bessel functions can be expanded as

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + \dots \right).$$

For $\nu = 3/4$ it follows immediately that

$$\begin{aligned}
K_{3/4}(z) &\xrightarrow{z \gg 1} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{5}{32z} + \dots \right), \\
\frac{d}{dz} (z^{3/4} K_{3/4}(z)) &\xrightarrow{z \gg 1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dz} \left[e^{-z} \left(z^{1/4} + \frac{5}{32} z^{-3/4} + \dots \right) \right] \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-z} \left(-z^{1/4} + \frac{3}{32} z^{-3/4} \dots \right), \\
\frac{d^2}{dz^2} (z^{3/4} K_{3/4}(z)) &\xrightarrow{z \gg 1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-z} \left(z^{1/4} - \frac{11}{32} z^{-3/4} \dots \right), \\
\frac{d^3}{dz^3} (z^{3/4} K_{3/4}(z)) &\xrightarrow{z \gg 1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-z} \left(-z^{1/4} + \frac{19}{32} z^{-3/4} \dots \right).
\end{aligned}$$

Thus, we have

$$A \xrightarrow{z \gg 1} \frac{k_0^3}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi^2}{2}} \frac{1}{\Gamma(5/4)} \frac{1}{2} z^{-7/4} e^{-z}$$

For $\nu = 1/4$ we get

$$\begin{aligned}
K_{1/4}(z) &\xrightarrow{z \gg 1} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 - \frac{3}{32} \frac{1}{z} + \dots \right), \\
\frac{d}{dz} (z^{1/4} K_{1/4}(z)) &\xrightarrow{z \gg 1} \frac{\pi}{2} \frac{d}{dz} \left[e^{-z} \left(z^{-1/4} - \frac{3}{32} z^{-5/4} + \dots \right) \right] \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-z} \left(-z^{-1/4} - \frac{5}{32} z^{-5/4} + \dots \right), \\
\frac{d^2}{dz^2} (z^{1/4} K_{1/4}(z)) &\xrightarrow{z \gg 1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[e^{-z} \left(z^{-1/4} + \frac{13}{32} z^{-5/4} + \dots \right) \right], \\
\frac{d^3}{dz^3} (z^{1/4} K_{1/4}(z)) &\xrightarrow{z \gg 1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-z} \left(-z^{-1/4} - \frac{21}{32} z^{-5/4} + \dots \right),
\end{aligned}$$

and, therefore,

$$B \xrightarrow{z \gg 1} \frac{k_0^3}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi^2}{2}} \frac{1}{\Gamma(3/4)} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-z} z^{-9/4}$$

with the result that

$$\begin{aligned}
\psi_{x(\pm)}(x') &\xrightarrow{|x-x'| \gg \hbar/m_0 c} \frac{k_0^3}{8\sqrt{2}\pi} \\
&\times e^{-z} \left(\frac{1}{\Gamma(5/4)} z^{-7/4} \mp \frac{1}{\Gamma(3/4)} z^{-9/4} \right).
\end{aligned}$$

1.21 Mathematical Supplement: Modified Bessel Functions of the Second Type, $K_\nu(z)$

The modified Bessel functions are defined by the differential equation

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - (z^2 + \nu^2) y = 0,$$

while the ordinary Bessel functions obey

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - \nu^2) y = 0.$$

(1) can be transformed into (2) by the substitution $z \rightarrow iz$, that is the modified Bessel functions are identical to the ordinary Bessel functions with imaginary arguments.

Let us denote the solutions of (2) by $J_\nu(z)$ and $J_{-\nu}(z)$, and the solutions of (1) by $I_\nu(z)$ and $I_{-\nu}(z)$. For $z \rightarrow 0$, I_ν , J_ν are the regular, and $J_{-\nu}$, $I_{-\nu}$ the irregular solutions. Then the following relation

$$I_\nu(z) = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(z)$$

holds. $J_\nu(z)$ and $I_\nu(z)$ are real functions of z , whereas $J_\nu(iz)$ is not. This is the reason for the special choice of the phase factor in (3). The second type of functions K_ν are defined by

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}.$$

The limit $\nu \rightarrow n$ ($n \in \mathbb{N}$) exists (though will not be proved here) and is

$$K_n(z) = \frac{\pi}{2} \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A few examples are:

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \frac{\sin z}{z},$$

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \frac{\cos z}{z},$$

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left(\frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z} \right),$$

$$J_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left(-\frac{\cos z}{z^2} - \frac{\sin z}{z} \right),$$

$$J_{5/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left[\left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z} \right) \sin z - \frac{3}{z^2} \cos z \right],$$

$$J_{-5/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left[\left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z} \right) \cos z + \frac{3}{z^2} \sin z \right].$$

One may express the Bessel functions $J_{n+1/2}(z)$ in terms of the spherical Bessel functions $j_n(z)$. The relation ²⁴ is given by

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+1/2}(z).$$

In analogy to (7) also the following relations hold for the $I_\nu(z)$ and $K_\nu(z)$:

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \frac{\sinh z}{z},$$

$$I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \frac{\cosh z}{z},$$

$$I_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left(-\frac{\sinh z}{z^2} + \frac{\cosh z}{z} \right),$$

$$I_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left(+\frac{\sinh z}{z} - \frac{\cosh z}{z^2} \right),$$

$$I_{5/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left[\left(\frac{3}{z^3} + \frac{1}{z} \right) \sinh z - \frac{3}{z^2} \cosh z \right],$$

$$I_{-5/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left[-\frac{3}{z^3} \sinh z + \left(\frac{3}{z^3} + \frac{1}{z} \right) \cosh z \right],$$

²⁴ See, e.g. Afken, G.: Mathematical Methods for Physicists, 2nd edition (Academic, New York 1970), p. 522. For a more extensive discussion of Bessel functions, see Watson, G.N.: Theory of Bessel Functions (Cambridge University Press, Cambridge 1966).

$$\begin{aligned}
K_{1/2}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \\
K_{3/2}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{z}\right), \\
K_{5/2}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{3}{z} + \frac{3}{z^2}\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

10.2.10 1.12 Interpretation of One-Particle Operators in Relativistic QM 3

1.22 The Kisslinger Potential

The calculation of bound states of pions in atomic nuclei or the scattering of pions at atomic nuclei are complicated many-body problems which can not be solved without simplifications. However, we will now derive a kind of effective potential to describe the strong interaction between the pion and the nucleus. The Lagrangian of the nonrelativistic pion-nucleon interaction (i.e. the interaction between pion and nucleon describing the processes $\pi^- + p \rightarrow n$ and $\pi^+ + n \rightarrow p$) is

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int}} &= g \bar{\psi}_{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \phi \psi_{\mathbf{p}} + \text{h.c.} \\
&= g (\bar{\psi}_{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma} \psi_{\mathbf{p}}) \cdot (\nabla \phi) + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{1}$$

where $\psi_{\mathbf{n}}$ and $\psi_{\mathbf{p}}$ are the neutron and the proton wave functions. The spin vector which is proportional to σ acts on the nucleon wave function, whereas the gradient acts on the pion wave function ϕ . This so called Chew-Low interaction describes quite well the low energy pion-nucleon experiments. The π^- -meson (described by the wave function ϕ) creates the transition of a proton into a neutron; the Hermitian conjugate term of (1) describes the transition of a neutron into a proton by a π^+ -meson (described by the wave function ϕ^*). g is the coupling constant for these reactions. The operator product $\sigma \cdot \nabla$ is rotationally invariant but not parity invariant. The parity invariance of the whole interaction is ensured by the pseudoscalar $\phi(\mathbf{r})$.

In the following we discuss the problem of how to describe the interaction between one pion and many bound nucleons, starting with this free pion-nucleon interaction (1). The simplest approximation is to describe the interaction between the pion and nucleon by the free interaction between them. This is called the impulse approximation and is reasonable for pions interacting with only one of the nucleons inside the nucleus, i.e. the other nucleons just appear in kinematic factors (e.g. altered energy-momentum balance of the nucleon). Since the $\pi - N$ interaction is of

short range ($\sim 1\text{fm}$), and the mean distance λ between the nucleons is larger than 1fm , the impulse approximation should be applicable at least for low energies. To estimate the potential energy we assume that, on its way through the nucleus, the pion has several interactions in series, but that every interaction is only between the pion and one "free" nucleon. The model based on these assumptions is called the multiple scattering model.²⁵ We shall now study the multiple scattering of pion and nucleus according to this model. The incoming state $|\text{in}\rangle$ and the outgoing state $|\text{out}\rangle$ of the pion-nucleus system are related by the S matrix $\hat{S}$ via

$$|\text{out}\rangle = \hat{S} |\text{in}\rangle.$$

It is convenient to introduce a matrix $\hat{R} = \hat{S} - 11$, i.e. the case for no interaction ($|\text{out}\rangle = |\text{in}\rangle$) is subtracted. We consider the scattering of a particle with momentum $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$. Then, because of energy conservation, we have

$$\langle \mathbf{p}' | \hat{R} | \mathbf{p} \rangle = \delta(E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{p}}) t(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'),$$

where

$$t(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \mathbf{p}' | \hat{T}(E_p + i\varepsilon) | \mathbf{p} \rangle.$$

The T matrix (transition-matrix) has a complex argument $z = E_p + i\varepsilon$. To understand the intention behind this for the present, purely mathematical, manipulation, we consider the theory of Hermitian operators:

Let $\hat{H}_0 = \hat{\mathbf{p}}^2/2m_0$ and $\hat{H} = \hat{H}_0 + V$. The corresponding Green operators or resolvents are defined by

$$\hat{G}_0(z) = (z - \hat{H}_0)^{-1},$$

$$\hat{G}(z) = (z - \hat{H})^{-1},$$

provided the inverse exists. The name is easily understood since

$$(z - \hat{H}_0) \hat{G}_0(z) = 11.$$

Taking the matrix elements of $\hat{H}_0$ in coordinate space, we have, since $\hat{H}_0 = -\hbar^2 \nabla^2 / 2m_0$,

$$\langle x | \hat{H}_0 | \psi \rangle = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_0} \langle x | \psi \rangle.$$

Equation (4a) yields

25 K.M. Watson: Phys. Rev. 89, 575 (1953).

$$\langle x | (z - \hat{H}_0) \hat{G}_0(z) | x' \rangle = \langle x | 11 | x' \rangle \quad (5b)$$

and, after insertion of a complete set $|x'\rangle$,

$$\int d^3 x'' \langle x | (z - \hat{H}_0) | x'' \rangle \langle x'' | \hat{G}_0(z) | x' \rangle = \delta^{(3)}(x - x')$$

or

$$\begin{aligned} & \int d^3 x'' (z - \hat{H}_0(x)) \langle x | x'' \rangle \langle x'' | \hat{G}_0(z) | x' \rangle \\ &= (z - \hat{H}_0(x)) \langle x | \hat{G}_0(z) | x' \rangle = \delta^{(3)}(x - x'). \end{aligned}$$

Since z is a complex number, (5b) results, using (5a) (with

$|\psi\rangle = |\mathbf{x}\rangle$), in

$$(z - \hat{H}_0) \langle \mathbf{x} | \hat{G}_0(z) | \mathbf{x}' \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

and, thus,

$$\left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_0} + z \right) \langle x | \hat{G}_0(z) | x' \rangle = \delta^{(3)}(x - x').$$

In conventional notation (6a) reads

$$\left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_0} + z \right) G_0(z; x, x') = \delta^{(3)}(x - x').$$

Thus $\hat{G}_0$ is indeed a Green's function, i.e. the solution of a differential equation where the inhomogeneity is a pointlike source (δ function). From the definition (4a) we see that $\hat{G}_0$ and $\hat{G}$ do not exist for all values of z : If, say, E_n is an eigenvalue of $\hat{H}$, i.e. $(E_n - \hat{H})|n\rangle = 0$, then $\hat{G}$ does not exist for $z = E_n$! Obviously, the poles of $\hat{G}$ signal the eigenvalues of the system. Addition of an imaginary term to E , i.e. $z = E + i\varepsilon$ defines the movement of the integration around the pole.²⁶ In particular it may be shown how, thereby, perturbations (waves) propagate into the future, thus ensuring causality. If $\hat{H}$ has a purely discrete spectrum, E_n are the eigenenergies and $\{|n\rangle\}$ the orthonormal basis of eigenvectors, then, because of $11 = \sum_n |n\rangle \langle n|$, we obtain

$$\begin{aligned}\hat{G}(z) &= (z - \hat{H})^{-1} = \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{z - E_n} \\ &= \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{E - E_n + i\epsilon}.\end{aligned}\quad (7)$$

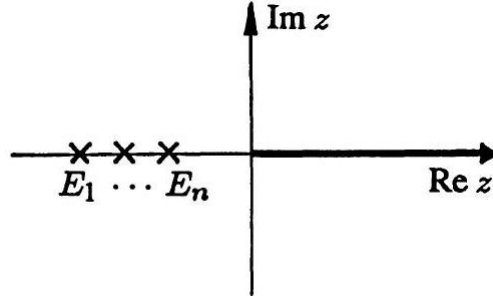


Illustration of a typical distribution of the eigenvalues of a Hamiltonian with discrete and continuous spectrum

If, in addition to the discrete spectrum, $\hat{H}$ also has a continuous spectrum, then a branch cut appears in the z plane from $E = 0$ to $E = \infty$, because every $E > 0$ is an eigenvalue. The branch cut runs along the whole z axis (see above figure). The operator identity

$$\hat{A}^{-1} = \hat{B}^{-1} + \hat{B}^{-1}(\hat{B} - \hat{A})\hat{A}^{-1},$$

where $\hat{A} = z - \hat{H}$ and $\hat{B} = z - \hat{H}_0$, yields

$$\hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z)V\hat{G}(z)$$

which relates $\hat{G}$ and $\hat{G}_0$.

If $\hat{A}$ and $\hat{B}$ are exchanged, the following relation can also be derived:

$$\hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \hat{G}(z)V\hat{G}_0(z).$$

Equations (9) and (10) are called the Lippmann-Schwinger equations.

Next we define the operator

$$\hat{T}(z) = V + V\hat{G}(z)V.$$

Multiplication with $\hat{G}_0$ from the lhs yields

$$\hat{G}_0\hat{T} = (\hat{G}_0 + \hat{G}_0V\hat{G})V$$

or, because of (9),

$$\hat{G}_0(z)\hat{T}(z) = \hat{G}(z)V.$$

Inserting this result into (11), one arrives at the Lippmann-Schwinger equation for $\hat{T}(z)$, namely,

$$\hat{T}(z) = V + V\hat{G}_0(z)\hat{T}(z).$$

For sufficiently small values of V this equation can be solved iteratively, starting with the so-called Born approximation $\hat{T} \approx V$. Substituting this approximation into (14a) we obtain $\hat{T} \approx V + V\hat{G}_0V$. Continuation of this procedure yields the infinite Born series given by

$$\hat{T} = V + V\hat{G}_0V + V\hat{G}_0V\hat{G}_0V + \dots$$

We should bear in mind that this series does not necessarily converge for all V ! However, further considerations of specific examples are based on the assumption of proper convergence of the Born series (14b), with which we have a method to handle the pion-nucleus problem: Let the Hamiltonian be of the form

$$\hat{H} = \hat{T}_\pi + \hat{H}_{\text{nuc}} + \sum_{\alpha=1}^A v_\alpha = \hat{H}_0 + V.$$

26 A discussion of this subject may be found in Vol. 4 of this series, Quantum Electrodynamics (Springer, Berlin, Heidelberg, to be published), Chap. 2.

Here $\hat{T}_\pi$ is the free-pion Hamiltonian and $\hat{H}_{\text{nuc}}$ describes the nucleus, which we assume to be known. The LippmannSchwinger equation for $\hat{T}$ is now given by (14b), using (4) for $G_0(E)$, so that

$$\hat{G}_0 = \left(E - \hat{H}_0 + i\varepsilon\right)^{-1}, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

As we have introduced $\hat{T}$ as a scattering operator, we can write the multiple scattering solution (14b) as follows

$$\begin{aligned} \hat{T} = & \sum_{\alpha} \hat{t}'_{\alpha} + \sum'_{\alpha_1, \alpha_2} \hat{t}'_{\alpha_1} \hat{G}_0 \hat{t}'_{\alpha_2} \\ & + \sum'_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \hat{t}'_{\alpha_1} \hat{G}_0 \hat{t}'_{\alpha_2} \hat{G}_0 \hat{t}'_{\alpha_3} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

The first term corresponds to the scattering at a single nucleon (summed over all nucleons), the second term describes the scattering at two nucleons, etc. The notation $\sum'$ means that $\alpha_2 \neq \alpha_1, \alpha_3 \neq \alpha_2$, etc. so that we exclude multiple scattering at the same nucleon. These terms are already contained in the definition of the $\hat{t}'$ matrix for the scattering of a pion at a bound nucleon, which, according to (14), reads

$$\hat{t}'_{\alpha} = v_{\alpha} + v_{\alpha} \hat{G}_0 \hat{t}'_{\alpha}.$$

$\hat{t}'_{\alpha}$ contains the total nuclear Hamiltonian through $\hat{G}_0$, and the free pion-nucleon amplitude $\hat{t}_{\alpha}$ obeys an equivalent equation, in which $\hat{H}_{\text{nuc}}$ in $\hat{G}_0$ is replaced by a free onenucleon Hamiltonian. Thus, $\hat{t}'_{\alpha}$ is a complicated manybody operator, whereas $\hat{t}_{\alpha}$ is not! The elastic scattering is given by

$$T_{\text{el}} = \langle 0 | \hat{T} | 0 \rangle.$$

Here $|0\rangle$ represents the ground state of the nucleus. In (19)

the integration over the coordinates of the nucleus has to be performed. Therefore, T_{el} depends only on the coordinates of the pion. Analogously to (14), we define the optical potential of the pion as

$$\hat{T}_{\text{el}} = V_{\pi} + V_{\pi} \hat{G}_0 \hat{T}_{\text{el}}$$

for which, according to (17),

$$\hat{T}_{\text{el}} = \sum_{\alpha} (\hat{t}'_{\alpha})_{\text{el}} + \sum'_{\alpha_1, \alpha_2} (\hat{t}'_{\alpha_1} \hat{G}_0 \hat{t}'_{\alpha_2})_{\text{el}} + \dots$$

follows. Consequently, the pion wave function obeys the one-particle equation

$$\left(\hat{T}_{\pi} + V_{\pi}\right) \phi = \hat{H}_{\pi} \phi = \hat{E} \phi.$$

In principle this optical potential always exists, but in general it is energy-dependent and non-local, as we will see in the following.

In order to proceed with our calculation, we have to make a number of approximations, which we shall now discuss:

1. The Impulse Approximation. According to our previous considerations, the scattering inside the nucleus is the same as free scattering and, therefore,

$$\hat{t}'_{\alpha} = \hat{t}_{\alpha},$$

i.e. the complicated many-particle operator for the bound nucleon will be replaced by the one-particle operator $\hat{t}_{\alpha}$.

2. The Approximation of an Uncorrelated Nucleus. Nucleons are fermions. Thus, the wave function of the nucleus has to be antisymmetrical with respect to the coordinates of the nucleons. Instead, we use here products of the one particle wave functions which are not

antisymmetrized (i.e. uncorrelated). For different nucleons ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) this means that the nucleon, which is excited from the groundstate $|0\rangle$ to the state $|n\rangle$ by $\hat{t}_{\alpha_2}$ and then propagates freely through the action of $\hat{G}_0$, cannot be scattered back from the state $|n\rangle$ into the groundstate by $\hat{t}_{\alpha_1}$, i.e.

$$\langle 0 | \hat{t}_{\alpha_1} | n \rangle \hat{G}_0 \langle n | \hat{t}_{\alpha_2} | 0 \rangle = 0.$$

Only for $|n\rangle = |0\rangle$ (no scattering) is this equation not valid. At the same time this means that, for an elastic final amplitude, all the intermediate processes must be elastic too, so that the double scattering term in (21) becomes

$$\sum_{\alpha_1 \neq \alpha_2} \left(\hat{t}_{\alpha_1} \hat{G}_0 \hat{t}_{\alpha_2} \right)_{\text{el}} = \sum_{\alpha_1 \neq \alpha_2} \hat{t}_{\alpha_1 \text{el}} \hat{G}_0 \hat{t}_{\alpha_2 \text{el}}. \quad (24)$$

3. Assumption of Coherence. This assumption implies that the nucleus remains in the groundstate the whole time during the scattering process, or, in other words, intermediate states of the excited nucleus do not exist; the assumption of an uncorrelated nucleus (24) implies for $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \dots$

$$\begin{aligned} & \left(\hat{t}_{\alpha_1} \hat{G}_0 \hat{t}_{\alpha_2} \hat{G}_0 \hat{t}_{\alpha_3} \dots \right)_{\text{el}} \\ &= \hat{t}_{\alpha_1 \text{el}} \hat{G}_0 \hat{t}_{\alpha_2 \text{el}} \hat{G}_0 \hat{t}_{\alpha_3 \text{el}} \hat{G}_0 \hat{t}_{\alpha_4 \text{el}} \dots \end{aligned} \quad (25)$$

In this sense coherence means that, though the pion scatters from nucleon 1 at the space point x_1 , the probability of colliding again with the same nucleon at x'_1 is still given by the ground-state wave function. However, the slowly moving nucleon will stay close to x_1 . The probability of colliding with the nucleon twice without exciting the nucleus is very small, because the consequence would be a large momentum transfer to the nucleon in the intermediate state. Nevertheless, we also assume that for repeated scattering at the same nucleon ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$, not all α_i are different) (25) is still valid, and

$$\left(\hat{t}_{\alpha_1} \hat{G}_0 \hat{t}_{\alpha_2} \hat{G}_0 \hat{t}_{\alpha_1} \right)_{\text{el}} \approx \hat{t}_{\alpha_1 \text{el}} \hat{G}_0 \hat{t}_{\alpha_2 \text{el}} \hat{G}_0 \hat{t}_{\alpha_1 \text{el}}.$$

According to previous statements, this assumption must be used with care, because one would actually expect that the backward scattering terms (connected with large momentum transfer) are negligible. With these three assumptions, (17) reads as

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\text{el}} &= \sum_{\alpha} \hat{t}_{\alpha \text{el}} + \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \hat{t}_{\alpha_1 \text{el}} \hat{G}_0 \hat{t}_{\alpha_2 \text{el}} \\ &+ \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \hat{t}_{\alpha_1 \text{el}} \hat{G}_0 \hat{t}_{\alpha_2 \text{el}} \hat{G}_0 \hat{t}_{\alpha_3 \text{el}} + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

4. Assumption of a Heavy Nucleus: If the number A of nucleons is very large, we abandon the restrictions in the sums (27) i.e. we allow $\alpha_i = \alpha_k$ (coherence). Furthermore, the number of the excited states is then very large, since the sums over α_i can separately be performed, with the result

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\text{el}} &= \left(\sum \hat{t}_{\alpha \text{el}} \right) + \left(\sum \hat{t}_{\alpha \text{el}} \right) \hat{G}_0 \left(\sum \hat{t}_{\alpha \text{el}} \right) \\ &+ \left(\sum \hat{t}_{\alpha \text{el}} \right) \hat{G}_0 \left(\sum \hat{t}_{\alpha \text{el}} \right) \hat{G}_0 \left(\sum \hat{t}_{\alpha \text{el}} \right) + \dots \\ &\times \left(\sum \hat{t}_{\alpha \text{el}} \right) + \left(\sum \hat{t}_{\alpha \text{el}} \right) \hat{G}_0 \hat{T}_{\text{el}} \end{aligned} \quad (28)$$

Comparing the result with the definition of V_π in (20), $\hat{T}_{\text{el}} = V_\pi + V_\pi \hat{G}_0 \hat{T}_{\text{el}}$, it follows that $V_\pi = \sum \hat{t}_{\alpha\text{el}} \equiv \langle 0 | \sum \hat{t}_\alpha | 0 \rangle$,

because the elastic amplitude of the groundstate expectation value is $\hat{T}_{\text{el}} = \langle 0 | \hat{T} | 0 \rangle$. The expression (29) is called the optical potential of the lowest order, and is the first term of an infinite series for V_π .

5. Absence of Recoil: The final approximation is to take the position of the nucleon after scattering a pion as unchanged (no recoil), i.e. if $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ are the pion coordinate and $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}'_1$ the coordinates of the first nucleon, we assume that

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{r}', \mathbf{R}'_1 | \hat{t}_1 | \mathbf{r}, \mathbf{R}_1 \rangle \\ & \cong \langle \mathbf{r}' - \mathbf{R}_1 | \hat{t}_1 | \mathbf{r} - \mathbf{R}_1 \rangle \delta^{(3)}(\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}_1) \\ & = \delta^{(3)}(\mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}_1) \iint \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \\ & \quad \times e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_1)} \langle \mathbf{k}' | \hat{t}_1 | \mathbf{k} \rangle e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_1)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Here $\langle \mathbf{k}' | \hat{t} | \mathbf{k} \rangle$ is the Fourier amplitude of the scattering of a pion at a free nucleon. From this we can now derive the optical potential of the lowest order, and, for that purpose, we integrate over $\mathbf{R}_1$ and $\mathbf{R}'_1$ to obtain

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{r}' | \hat{t}_{1\text{el}} | \mathbf{r} \rangle \\ & = \iint d^3 R_1 d^3 R'_1 \psi_1^*(R'_1) \langle \mathbf{r}', \mathbf{R}'_1 | \hat{t}_1 | \mathbf{r}, \mathbf{R}_1 \rangle \psi_1(\mathbf{R}_1) \\ & = \iint \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{+i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \langle \mathbf{k}' | \hat{t}_1 | \mathbf{k} \rangle \\ & \quad \times e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \int d^3 R_1 |\psi_1(\mathbf{R}_1)|^2 e^{+i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{R}_1}. \end{aligned}$$

Summing over all nucleons for the calculation of

$$\sum_\alpha \langle \mathbf{r}' | \hat{t}_{\alpha\text{el}} | \mathbf{r} \rangle = \left\langle \mathbf{r}' \left| \sum_\alpha \hat{t}_{\alpha\text{el}} \right| \mathbf{r} \right\rangle,$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^A \int |\psi_\alpha(\mathbf{R}_\alpha)|^2 e^{+i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{R}_\alpha} d^3 R_\alpha \\ & = A \int \varrho(\mathbf{R}) e^{+i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{R}} d^3 R = A \varrho(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (32)$$

Here $\varrho(R)$ is the nuclear density distribution per nucleon (therefore, the factor A for the number of nucleons), and $\varrho(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ its Fourier transform (form factor). Thereby, results the generally non-local potential according to (29),

$$\begin{aligned} V_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & = \langle \mathbf{r}' | V_\pi | \mathbf{r} \rangle = \left\langle \mathbf{r}' \left| \sum_\alpha \hat{t}_{\alpha\text{el}} \right| \mathbf{r} \right\rangle \\ & = A \iint \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{+i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \\ & \quad \times \varrho(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle \mathbf{k}' | \hat{t} | \mathbf{k} \rangle e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ & = \iint \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{+i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \langle \mathbf{k}' | V_\pi | \mathbf{k} \rangle e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (33)$$

Conversely, in momentum representation it clearly follows that

$$\langle \mathbf{k}' | V_\pi | \mathbf{k} \rangle = A \varrho(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle \mathbf{k}' | \hat{t} | \mathbf{k} \rangle.$$

For a better understanding of this result, first consider the simplest case: Let the incoming pion wave function be a plane wave with the momentum $\mathbf{k}_0$. Then the total wave function within the nucleus is a wave packet, centred at k_0 , which we call $\psi_{k_0}(\mathbf{k})$. The form factor of the nucleus $A\varrho(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ has an extension of $\approx 1/R_{\text{nucleus}}$ in momentum space, while the scattering amplitude for scattering at one nucleon is $\langle \mathbf{k}' | \hat{t} | \mathbf{k} \rangle \approx 1/R_{\text{nucleon}}$. By multiplication of $\psi_{k_0}(\mathbf{k})$ with $\varrho(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, whose width is given by $1/R_{\text{nucleus}} \ll 1/R_{\text{nucleon}}$, only the momenta $k \sim k' \sim k_0$ contribute to the scattering amplitude, because the pion wave function $\psi_{k_0}(\mathbf{k})$ is centred at $\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_0$. Therefore, in (34) we can put

$$\langle \mathbf{k}' | V_\pi | \mathbf{k} \rangle \cong A \langle \mathbf{k}_0 | \hat{t} | \mathbf{k}_0 \rangle \varrho(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (35a)$$

According to (33), in coordinate space the Fourier-transformed expression follows as

$$\begin{aligned} V_\pi &= A \langle \mathbf{k}_0 | \hat{t} | \mathbf{k}_0 \rangle \iint \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \\ &\quad \times e^{+i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \varrho(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ &= A \langle \mathbf{k}_0 | \hat{t} | \mathbf{k}_0 \rangle \iint \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \\ &\quad \times e^{+i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \varrho(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ &= A \langle \mathbf{k}_0 | \hat{t} | \mathbf{k}_0 \rangle \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{+i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\ &\quad \times \int \frac{d^3 K}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} \varrho(\mathbf{K}) \\ &= A \langle \mathbf{k}_0 | \hat{t} | \mathbf{k}_0 \rangle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (35b)$$

The nonlocal potential acts on the pion wave function $\psi_\pi(\mathbf{r}')$ in coordinate space so that, e.g. the stationary Schrödinger equation for nonrelativistic pions reads

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \psi_\pi(\mathbf{r}) + \int d^3 r' V_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_\pi(\mathbf{r}') = E \psi_\pi(\mathbf{r}),$$

or the Klein-Gordon equation,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \nabla^2 + m_0^2 c^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t) \\ &+ m_0 \int d^3 r' V_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', t) = 0 \end{aligned} \quad (36b)$$

Clearly, the simple approximation (35a) has the effect that the generally non-local potential of the pion-nucleus interaction is approximated by a local one. The δ function in (35b) naturally ensures this. Furthermore, the $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ function disappears by integrating over r' , which has to be done in (36a, b). The result is a "common" Schrödinger or Klein-Gordon equation, with a local potential that reads

$$V_\pi(\mathbf{r}) = A \langle \mathbf{k}_0 | \hat{t} | \mathbf{k}_0 \rangle \varrho(\mathbf{r}).$$

The resulting potential is local, and proportional to the so called pion-nucleon forward scattering amplitude

$$a_0 = \langle k_0 | \hat{t} | k_0 \rangle.$$

However, the potential $V_\pi(r) = A a_0 \varrho(r)$ gives an insufficient description of the pion-nucleus scattering experiments and it is a small step to assume, analogously to (38a)²⁷, that

$$\langle \mathbf{k}' | \hat{t} | \mathbf{k} \rangle = a_0 + a_1 (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}).$$

This is the next best generalization to (38a), keeping rotational invariance. Insertion into (34) results (after Fouriertransformation into coordinate space, see next Exercise 1.23) in

$$V_\pi^k \psi = A a_0 \varrho \psi - A a_1 \nabla \cdot (\varrho \nabla \psi),$$

which represents the so called Kisslinger potential. It is obviously non-local because it contains momentum operators which are proportional to ∇ . In view of a term proportional to $\nabla \varrho$ one may deduce a strong surface sensitivity in pion-nucleon-scattering, since the gradient of the nuclear density contributes mainly at the surface of the nucleus. By means of the Kisslinger potential most of the data of pion-nucleus scattering is quite well described, although further evaluation is still plagued with certain difficulties (divergencies in the wave functions).

1.23 Evaluation of the Kisslinger Potential in Coordinate Space

Problem. Evaluate the Kisslinger potential in coordinate space, starting with

$$\langle \mathbf{k}' | V_\pi | \mathbf{k} \rangle = A \varrho(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle \mathbf{k}' | \hat{t} | \mathbf{k} \rangle,$$

together with (see previous Example 1.22)

$$\langle \mathbf{k}' | \hat{t} | \mathbf{k} \rangle = a_0 + a_1 (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}).$$

Solution

In coordinate space one has

$$\begin{aligned} V \psi_\pi = & A \int (a_0 + a_1 \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) \varrho(\mathbf{z}_\alpha) \psi_\pi(\mathbf{z}') e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_\alpha)} \\ & \times e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{z}' - \mathbf{z}_\alpha)} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} d^3 z' d^3 z_\alpha \end{aligned}$$

where z_α denote the space vectors of a single nucleon [see (31) and (32) of the previous Example 1.22]. Evaluating the first term a_0 leads to (37) of the previous Example. Considering the second term we reexpress the momenta $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ by $\mathbf{k} = i\nabla_{\mathbf{z}'}$, and $\mathbf{k}' = -i\nabla_{\mathbf{z}}$, where the gradients act on z and z' , respectively:

$$\begin{aligned} V' \psi_\pi = & A a_1 \int \varrho(\mathbf{z}_\alpha) \psi_\pi(\mathbf{z}') \nabla_{\mathbf{z}} e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_\alpha)} \\ & \cdot \nabla_{\mathbf{z}'} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{z}' - \mathbf{z}_\alpha)} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} d^3 z' d^3 z_\alpha \end{aligned}$$

Since there is no integration over z , we can take $\nabla_{\mathbf{z}}$ out of the integrand and substitute $\nabla_{\mathbf{z}'} = -\nabla_{\mathbf{z}_\alpha}$,

$$\begin{aligned} V' \psi_\pi = & A a_1 \nabla_{\mathbf{z}} \cdot \int \varrho(\mathbf{z}_\alpha) \psi_\pi(\mathbf{z}') e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_\alpha)} \\ & \times (-\nabla_{\mathbf{z}_\alpha}) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{z}' - \mathbf{z}_\alpha)} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} d^3 z' d^3 z_\alpha. \end{aligned}$$

Evaluating the integral over $\mathbf{k}'$,

27 L.S. Kisslinger: Phys. Rev. 98, 761 (1955).

$$\begin{aligned}
V'\psi_\pi &= Aa_1 \nabla_z \cdot \int \varrho(z_\alpha) \psi_\pi(z') (-1) \delta(z - z_\alpha) (-\nabla_{z_\alpha}) \\
&\times e^{-ik \cdot (z' - z_\alpha)} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^3 z' d^3 z_\alpha \\
&= Aa_1 \nabla_z \cdot \int \varrho(z) \psi_\pi(z') (+\nabla_z) \\
&\times e^{-ik \cdot (z' - z)} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^3 z' \\
&= Aa_1 \nabla_z \cdot \left(\varrho(z) \int \psi_\pi(z') (+\nabla_z) \right. \\
&\left. \times e^{-ik \cdot (z' - z)} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^3 z' \right).
\end{aligned}$$

Next, performing the integration over $\mathbf{k}$, one obtains
 $V'\psi_\pi = Aa_1 \nabla_z \cdot (\varrho(z) \int \psi_\pi(z') (+\nabla_z) \delta(z - \mathbf{z}') d^3 z')$,
and, after partial integration,

$$\begin{aligned}
V'\psi_\pi &= a_1 A \nabla_z \cdot \left(\varrho(z) \left\{ + \int_{\text{surface}} \psi_\pi(z') \delta(z - z') d^3 z' \right. \right. \\
&\left. \left. - \int (\nabla \psi_\pi(z')) \delta(z - \mathbf{z}') d^3 z' \right\} \right).
\end{aligned}$$

The surface term vanishes if the surface tends to infinity, and we are left with

$$V'\psi_\pi = -a_1 A \nabla \cdot (\varrho \nabla \psi_\pi),$$

i.e. altogether

$$V\psi_\pi = Aa_0 \varrho(\mathbf{r}) \psi_\pi(\mathbf{r}) - Aa_1 \nabla \cdot (\varrho(\mathbf{r}) \nabla \psi_\pi(\mathbf{r})).$$

1.24 Lorentz-Lorenz Effect in Electrodynamics and Its Analogy in Pion-Nucleon Scattering (the Ericson-Ericson Correction)

In order to understand our motivation and the physical nature here, let us first recall the electrodynamical LorentzLorenz effect. For this reason we consider the propagation of light in a dielectric medium. The electric polarization $\mathbf{P}$ is related to the electric field $\mathbf{E}$ via $\mathbf{E} = \alpha \mathbf{P}$, α being the polarizability. Accordingly, the $\mathbf{D}$ field is given by $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} = (1 + 4\pi/\alpha) \mathbf{E}$. Considering the propagation along the z axis only, the fields $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ and $\mathbf{H}$ are proportional to $\exp[i(qz - \omega t)]$. The fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ have only the components E_x and D_x , i.e. the magnetic field consists only of the component H_y . Maxwell's equations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \nabla \times \hat{H} \quad \text{and} \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}
\end{aligned}$$

imply

$$-i\frac{\omega}{c} D_x = -iq H_y,$$

$$iq E_x = i\frac{\omega}{c} H_x,$$

and elimination of the component H_y produces

$$D_x = c^2 \frac{q^2}{\omega^2} E_x.$$

Using the relation $D_x = (1 + 4\pi/\alpha) E_x$ one thus obtains the refractive index as

$$n^2 = \frac{c^2}{v^2} = \varepsilon = 1 + \frac{4\pi}{\alpha}.$$

Also the phase velocity in a medium $v = \omega/q$ is obtained from (3). In order to determine α we must have a closer look at the details of the scattering process. We choose electrons as

the centres of the scattering process, assuming that they are harmonically bound by means of a restoring force f . The classical equation of motion of an electron moving in the z direction thus reads

$$m_0 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -f \xi$$

where ξ denotes the elongation of the electron from its equilibrium position. The frequency of this harmonic oscillator is then given by $\omega_R^2 = f/m_0$, and the electric dipole moment per electron, $p_z = e\xi$, leads to a moment per unit volume of

$$P_x = e \varrho \xi,$$

where ϱ stands for the electric charge density of the electron. Under the influence of the external oscillating field $E = \alpha P$, the electron performs forced oscillations, i.e. the total force acting on the electron is not given by the external field E alone, but by the resulting local field²⁸ $\mathbf{E} + (4\pi/3)\mathbf{P}$. This local field is the origin of the LorentzLorenz correction!

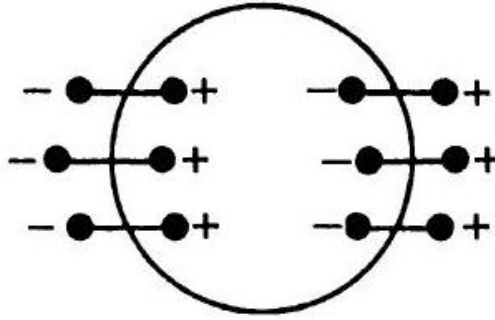


Illustration of the polarization in the surrounding of an electron under consideration

To make this more evident let us assume that the oscillating electron be surrounded by a small sphere (see above figure). The surface cuts some polarization vectors, which causes a charge per surface element $d\sigma$. The surface charge can be written as $\varrho_\sigma = \mathbf{P} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$. Since $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ is valid if real external charges are absent. One can conclude, in accord with Gau's law, that the surface charges on the inner and outer side of the sphere are equal, i.e. $(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S})_{\text{inside}} = [(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S}]_{\text{outside}}$. Averaging over all directions $P \cos^2 \theta = P/3$ leads to $(E_x)_{\text{inside}} = (E_x)_{\text{outside}} + (4\pi/3)P_x$ in the x -direction. Accordingly, the equation of motion of the electron becomes

$$m_0 d^2 \xi / dt^2 = e (E_x + (4\pi/3)P_x) f \xi,$$

which can be written in a more convenient form using the relation $P_x = e \varrho \xi$ [see (6)]:

$$\frac{m_0}{\varrho e^2} \frac{d^2 P_x}{dt^2} = E_x + \frac{4\pi}{3} P_x - \frac{f}{\varrho e^2} P_x.$$

The requirement that the electrons should oscillate harmonically, i.e.

$$\ddot{P}_x + \omega^2 P_x = 0,$$

leads to the condition

$$E_x = \left(\frac{f}{\varrho e^2} - \frac{m_0 \omega^3}{\varrho e^3} - \frac{4\pi}{3} \right) P_x = \alpha P_x$$

which determines the polarizability α as

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{f}{\varrho e^2} - \frac{m_0 \omega^2}{\varrho e^2} - \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= \left(\frac{m_0 \omega_R^2}{\varrho e^2} - \frac{m_0 \omega^2}{\varrho e^2} - \frac{4\pi}{3} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

For the harmonic case the frequency is given by $\omega_R^2 = f/m_0$. Considering $n^2 = 1 + 4\pi/\alpha$ we, further, obtain

²⁸ See J.D. Jackson: Classical Electrodynamics 2nd edition (Wiley, New York 1975).

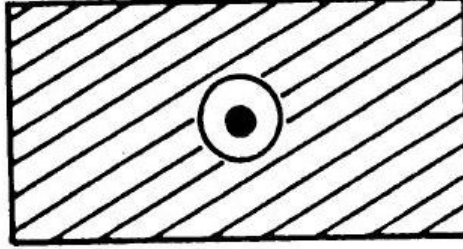
$$n^2 - 1 = \frac{4\pi\rho e^2/m_0}{(\omega_R^2 - \omega^2) - (4\pi/3)\rho e^2/m_0}.$$

In the above derivation the radiative damping, which leads to a complex refractive index, has been neglected. If polarization corrections [2nd terms in the denominator of (9)] are ignored, the refractive index diverges when the frequency of the external field reaches the resonance frequency (resonance catastrophe), i.e. $n^2 \rightarrow \infty$ for $\omega \rightarrow \omega_R$. Thus the Lorentz-Lorenz correction prevents this catastrophe for $\omega = \omega_R$.

Relation (9) is of the form used in optics,

$$n^2 - 1 = -\frac{4\pi\rho}{k_0^2} f(k, \omega),$$

where $f(k, \omega)$ represents the forward-scattering amplitude of particles with momentum k and frequency ω propagating in a medium which is characterized by a density of scattering centers ρ . The momentum of the incoming particle (light) is denoted by k_0 . This formulation suggests, in analogy to light scattering inside a medium with density ρ , the consideration of the scattering of a pion (initial momentum k_0) at a nucleus with density ρ by means of optical methods.



Nucleon surrounded by a sphere free of nuclear matter

In analogy to the Lorentz-Lorenz correction $-4\pi\rho e^2/3m_0^2$ in (9), let us now derive the higher order correction in ρ of the "optical" potential of a pion²⁹. For this purpose we assume that a nucleon - as a scatterer - pushes off all other nucleons in its vicinity, with the effect that, in a sphere with radius R enclosing the particular nucleon, there is no other nuclear matter in it (see above figure). In what follows we have to show, as in the electrostatic case, that the result is independent of R . Therefore, we first rewrite the Klein-Gordon equation for the pion containing the Kisslinger potential ($\partial/\partial t \rightarrow i\omega$),

$$(\omega^2 - m_\pi^2 + \nabla^2 - \bar{a}_1 \nabla \cdot \rho \nabla) \phi_\pi = 0 \quad (\alpha > 0) \quad (11)$$

where $\bar{a}_1 = Aa_1$ according to (39) of example (1.22). The first, less important term of the Kisslinger potential (39) has been neglected altogether. This can be expressed as

$$\nabla \cdot (1 - \bar{a}_1 \rho) \nabla \phi_\pi = -(\omega^2 - m_\pi^2) \phi_\pi.$$

The field ϕ_π must be continuous on each boundary. Thus, we can conclude that the rhs of (12) must be continuous at a boundary. In analogy to the continuity of D in the electromagnetic case, the normal component of

$$(1 - \bar{a}_1 \rho) \nabla \phi_\pi$$

must also be continuous. To make this explicit we enclose each boundary by a (cylindrical) volume, as in the following figure. In the limiting case of the vanishing height of the cylinder, i.e. $\Delta h \rightarrow 0$,

$$\int_r \nabla \cdot (1 - \bar{a}_1 \rho) \nabla \phi_\pi d\tau = (1 - \bar{a}_1 \rho) \int \nabla \phi_\pi \cdot d\mathbf{F} \rightarrow 0.$$

Since the rhs of (12) is continuous at the boundary, the expression $(1 - \bar{a}_1 \rho) \nabla \phi_\pi \cdot d\mathbf{F}$ has to be equal on both sides of the boundary. There exists a direct analogy between

$$(1 - \bar{a}_1 \rho) \nabla \phi_\pi \leftrightarrow \mathbf{D} \text{ and}$$

$$\nabla \phi_\pi \leftrightarrow \mathbf{E}.$$

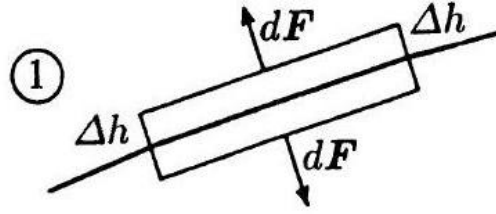


Illustration of the cylinder with faces dF and height Δh surrounding the boundary. The different media at both sides are indicated by (1) and (2) respectively

In order to pursue this further, we discuss the ChewLow model which is based on the Lagrangian [see Example 1.22, (1)]

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g\psi\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\psi\phi_\pi.$$

For the pion it leads to the equation of motion

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - m_\pi^2\right)\phi_\pi(\mathbf{r}, t) = g\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$$

where

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \bar{\psi}\boldsymbol{\sigma}\psi(\mathbf{r}), \quad (\hbar = c = 1).$$

Accordingly, the pion field couples to the spin-density $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$, and the ϕ_π field should be stationary, i.e.

$$\phi_\pi(\mathbf{r}, t) = \phi_\pi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}.$$

We further assume that $\omega \sim m_\pi$, i.e. we study the case where nuclear effects may represent only a small correction to the binding. This is realized in pionic atoms; thus,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_\pi(r, t) = (-im_\pi)^2\phi_\pi(r, t) = -m_\pi^2\phi_\pi(r, t).$$

Inserted into (17) this leads to the Laplace equation

$$\Delta\phi_\pi = g\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}).$$

As known from electrostatics³⁰, the Laplace equation (17a) can be solved by means of the Green function with the result

$$\phi_\pi(\mathbf{r}) = -\frac{g}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}') d^3r'.$$

$\nabla_{\mathbf{r}'}$ is the gradient acting on $\mathbf{r}'$. This shows explicitly that $(g/4\pi)\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}')$ plays the role of a charge density as in the electrostatic case. Analogously to the electric field $\mathbf{E}$ Eq. (14) yields

$$(\nabla\phi_\pi - \bar{a}_1\varrho\nabla\phi_\pi)_{\text{exterior}} \cdot d\mathbf{F} = (\nabla\phi_\pi)_{\text{interior}} \cdot d\mathbf{F},$$

which implies a surface charge

$\varrho_s = -\bar{a}_1\varrho(\nabla\phi_{\pi\perp})_{\text{exterior}}$. $\nabla\phi_{\pi\perp}$ represents the component of $\nabla\phi_\pi$ perpendicular to the boundary and gives rise to a contribution to $\nabla\phi_\pi(r \in \text{surface})$, which we denote by $(\nabla\phi_\pi)_{\text{local}}$,

$$\begin{aligned} \delta(\nabla\phi_\pi)_{\text{local}} &\equiv \langle \nabla\phi_{\pi\text{interior}} - \nabla\phi_{\pi\text{exterior}} \rangle \\ &= -\frac{1}{3}\bar{a}_1\varrho(\nabla\phi_\pi)_{\text{exterior}} \end{aligned} \quad (22)$$

where the averaging $\langle \rangle$ over all angles, i.e. over the small sphere around the nucleon, has already been carried out. This term corresponds to the $(4\pi/3)P$ term in electrostatics. Equation (22) is correct to the lowest order in $\bar{a}_1\varrho$. However, note that if $(\nabla\phi_\pi)_{\text{local}}$ has to be corrected by the term (22), then the same has to be done for the Kisslinger term $-\bar{a}_1\varrho\nabla\phi_\pi$, i.e. we must write

$$\delta(\nabla\phi_\pi)_{\text{local}} = -\frac{1}{3}\bar{a}_1\varrho(\nabla\phi_\pi)_{\text{local}}.$$

The influence of the nucleon on the optical potential of the pion happens locally at the nucleon. From (23),

$$(\nabla\phi_\pi)_{\text{local}} = (\nabla\phi_\pi) - \frac{1}{3}\bar{a}_1\varrho(\nabla\phi_\pi)_{\text{local}}$$

³⁰ See J.D. Jackson: Classical Electrodynamics, 2nd ed. (Wiley, New York 1975) or W. Greiner: Theoretische Physik III, Klassische Elektrodynamik (Harri Deutsch, Frankfurt 1989), Chap. 1.

and thus

$$(\nabla\phi_\pi)_{\text{local}} = \frac{\nabla\phi_\pi}{1+\bar{a}_1\varrho/3}.$$

Here we have renamed $(\nabla\phi_\pi)_{\text{exterior}} = \nabla\phi_\pi$, because this is just the pion field inside a medium. Furthermore the corrections of the correction, etc. have summed up in terms of a geometrical series. The expression (25) represents the Ericson-Ericson correction³¹ to the gradient of the pion field. Replacing $(\nabla\phi_\pi)_{\text{Kisslinger}}$ by $(\nabla\phi_\pi)_{\text{local}}$ in the Kisslinger potential leads to

$$\begin{aligned} V_\pi^{\text{K-E.-E.}} \phi_\pi(r, t) \\ = A \left(a_0\varrho - \nabla \cdot \left\{ \frac{a_1\varrho}{1+\bar{a}_1\varrho/3} \nabla \right\} \right) \phi_\pi(r, t) \end{aligned} \quad (26)$$

as the new optical potential for pions inside a nucleus; and thereby, $\bar{a}_1 = Aa_1$ is proportional to a_1 . A more detailed analysis shows that the potential (26) is valid only in the limiting case $k \rightarrow 0$, because in the above derivation we restricted ω of $\omega \sim m_\pi$. The dependence of ω and k on a_0 is quite complicated, and for this reason $\bar{a}_1$ is fitted to experimental data. Until now no unique fit has been found³², because the corresponding experimental effects represent very small corrections.

11 Vector Fields

11.1 Properties of Vector Fields

Обсудим подробно векторные поля.

(??? наверное, сюда из ЭД перенесу потом про свойства ЭМ поля, но пока о них там пишу)

11.1.1 Construction of Electrodynamics

(по идее именно тут это подробно и обсуждаем...)

Построение электродинамики из опытных фактов

Построение электродинамики из группы Пуанкаре

(выпишу потом из прошлой главы)

Получении уравнений движения из принципа экстремального действия по Киселеву Осипову КТП

Если теперь перейти к вопросу о получении уравнений движения из принципа экстремального действия, то в качестве исходной точки можно записать лагранжиан $\mathcal{L}$ с использованием множителей Лагранжа $\mathcal{F}^{*\mu\nu}$,

$$\mathcal{L} \sim \mathcal{F}^{*\mu\nu} \left\{ (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) - i\frac{1}{2} \lambda \hat{e}_{\mu\nu\mu'\nu'} (\partial^{\mu'} \mathcal{A}^{\nu'} - \partial^{\nu'} \mathcal{A}^{\mu'}) \right\} + \text{c.c.}$$

или в краткой записи

$$\mathcal{L} \sim \mathcal{F}^{*\mu\nu} (F_{\mu\nu} - i\lambda \tilde{F}_{\mu\nu}) + \mathcal{F}^{\mu\nu} (F_{\mu\nu}^* + i\lambda \tilde{F}_{\mu\nu}^*).$$

³¹ M. Ericson, T.E.O. Ericson: Ann. of Physics 36, 323 (1966).

³² E. Friedman, A. Gal, V.B. Mandelzweig: Phys. Rev. Lett. 41, 794 (1978).

Здесь мы учли, что, вообще говоря, исходно мы рассматриваем комплекснозначное поле $\mathcal{A}_\mu$, так что к лагранжиану необходимо добавить комплексно сопряженное выражение, которое мы обозначили латинскими буквами с.с. как аббревиатуру от complex conjugated. Тогда, конечно, уравнения Эйлера-Лагранжа для множителей Лагранжа сводятся к тождеству, эквивалентному уравнениям движения (8.1),

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}^{*\mu\nu}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_{\mu\nu} - i\lambda \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$$

Однако необходимо, чтобы и уравнения Эйлера-Лагранжа для векторного поля $\mathcal{A}_\nu$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \mathcal{A}_\nu} = 0$$

удовлетворялись автоматически! Это значит, что должно иметь место тождество для вспомогательного поля $\mathcal{F}^{*\mu\nu}$

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{*\mu\nu} - i\frac{1}{2}\lambda \epsilon^{\mu\nu\mu'\nu'} \partial_\mu \mathcal{F}_{\mu'\nu'}^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu \mathcal{F}^{*\mu\nu} = i\lambda \partial_\mu \tilde{\mathcal{F}}^{*\mu\nu},$$

причем, не как дополнительные уравнения движения для вспомогательного поля, а как следствие уравнений движения векторного безмассового поля с $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$ в виде

$$F^{\mu\nu} = i\lambda \tilde{F}^{\mu\nu} \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = i\lambda \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0.$$

В противном случае вместо вспомогательного поля мы вводили бы новое динамическое поле $\mathcal{F}^{*\mu\nu}$ с независимыми уравнениями движения для этого поля. Требование автоматического удовлетворения равенства (8.12) элементарно достигается, если положить, что ¹

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \Rightarrow \partial_\mu \mathcal{F}^{*\mu\nu} = i\lambda \partial_\mu \tilde{\mathcal{F}}^{*\mu\nu} = 0$$

Дополнительная связь $\mathcal{F}_{\mu\nu} - F_{\mu\nu} = 0$ означает введение еще одного множителя Лагранжа, скажем, $\mathcal{C}^{*\mu\nu}$, так что добавка к лагранжиану примет вид

$$\mathcal{L}_C \sim \mathcal{C}^{*\mu\nu} (F_{\mu\nu} - \mathcal{F}_{\mu\nu}) + \mathcal{C}^{\mu\nu} (F_{\mu\nu}^* - \mathcal{F}_{\mu\nu}^*) - \mathcal{C}^{*\mu\nu} \mathcal{C}_{\mu\nu}$$

где последний член добавлен просто для удобства последующего исключения множителей Лагранжа из уравнений движения ².

В итоге, лагранжиан, дающий искомые уравнения движения, должен иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \sim & \mathcal{F}^{*\mu\nu} (F_{\mu\nu} - i\lambda \tilde{F}_{\mu\nu}) + \mathcal{F}^{\mu\nu} (F_{\mu\nu}^* + i\lambda \tilde{F}_{\mu\nu}^*) + \\ & + \mathcal{C}^{*\mu\nu} (F_{\mu\nu} - \mathcal{F}_{\mu\nu}) + \mathcal{C}^{\mu\nu} (F_{\mu\nu}^* - \mathcal{F}_{\mu\nu}^*) - \mathcal{C}^{*\mu\nu} \mathcal{C}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

где, конечно, имеется ввиду, что тензор напряженности поля $F_{\mu\nu}$ записан в терминах векторного поля $\mathcal{A}_\mu$.

Связи в этом лагранжиане можно разрешить, поскольку по принципу экстремального действия вариации по множителям Лагранжа $\mathcal{F}^{*\mu\nu}, \mathcal{C}^{*\mu\nu}$ и по полю $\mathcal{A}_\nu^*$ соответственно дают

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} - i\lambda \tilde{F}_{\mu\nu} - \mathcal{C}_{\mu\nu} &= 0, \\ F_{\mu\nu} - \mathcal{F}_{\mu\nu} - \mathcal{C}_{\mu\nu} &= 0, \\ \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} + i\lambda \partial_\mu \tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} + \partial_\mu \mathcal{C}^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда легко устанавливаем, что множители Лагранжа выражаются через динамическое поле,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = i\lambda \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad \mathcal{C}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - i\lambda \tilde{F}_{\mu\nu}$$

И тогда дифференциальное уравнение воспроизводит (8.9) - равенство нулю 4-дивергенции тензора напряженности свободного поля $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$. Напомним, что это уравнение вместе с тождеством (8.10) воспроизводит в качестве решений моды поля с обоими допустимыми значениями спиральности. Подстановка вспомогательных полей в лагранжиан (8.13) дает

$$\mathcal{L} \sim F^{*\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

где мы учли, что все вклады с $C_{\mu\nu}$ обращаются в нуль, к примеру,

$$\begin{aligned} C^{*\mu\nu} C_{\mu\nu} &= \left(F^{*\mu\nu} + i\lambda \tilde{F}^{*\mu\nu} \right) \left(F_{\mu\nu} - i\lambda \tilde{F}_{\mu\nu} \right) = \\ &= F^{*\mu\nu} F_{\mu\nu} + \tilde{F}^{*\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} + i\lambda \left(\tilde{F}^{*\mu\nu} F_{\mu\nu} - F^{*\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right) = \\ &= F^{*\mu\nu} F_{\mu\nu} - F^{*\mu\nu} F_{\mu\nu} + i\lambda \left(\tilde{F}^{*\mu\nu} F_{\mu\nu} - \tilde{F}^{*\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = 0 \end{aligned}$$

В итоге, для комплексного безмассового векторного поля получаем квадратичный по производным первого порядка лагранжиан, который еще называют лагранжианом в формализме второго порядка, поскольку при выводе уравнений Эйлера-Лагранжа в них входят производные поля второго порядка,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F^{*\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

где мы выбрали нормировочную константу отрицательной, чтобы получить в лагранжиане положительный вклад от квадрата скорости изменения поля: $+(\partial_0 \mathcal{A}_\alpha)^2$, - а также зафиксировали абсолютное значение константы выбором единиц измерения поля, а именно, выбором системы единиц Хевисайда. Для вещественных полей $\mathcal{B}_\mu$ и $\mathcal{Z}_\mu$ в той же системе единиц можно считать, что

$$\mathcal{B}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{A}_\mu + \mathcal{A}_\mu^*), \quad \mathcal{Z}_\mu = \frac{i}{\sqrt{2}} (\mathcal{A}_\mu - \mathcal{A}_\mu^*),$$

откуда, как легко сообразить,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \hat{B}^{\mu\nu} \hat{B}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \hat{Z}^{\mu\nu} \hat{Z}_{\mu\nu}$$

где

$$\hat{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{B}_\nu - \partial_\nu \mathcal{B}_\mu, \quad \hat{Z}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{Z}_\nu - \partial_\nu \mathcal{Z}_\mu$$

Подчеркнем еще раз, что этот лагранжиан оказался одинаковым для обоих значений спиральности поля! В случае, если поле $\mathcal{Z}_\mu$ отсутствует, мы приходим к действию с одним вещественным безмассовым векторным полем. К тем же уравнениям движения можно прийти, если использовать лагранжиан (8.13) в формализме первого порядка. Для этого опять подставим в лагранжиан решения для вспомогательного поля $C_{\mu\nu}$ в (8.15), что опять даст нулевые значения в (8.13) для всех слагаемых с $C_{\mu\nu}$. А затем воспользуемся

выражением (8.15), чтобы исключить дуальный тензор напряженности поля $\tilde{F}_{\mu\nu}$, оставив вспомогательное поле $\mathcal{F}_{\mu\nu}^*$. Тогда вещественный лагранжиан примет вид

$$\mathcal{L} \sim \mathcal{F}^{*\mu\nu} F_{\mu\nu} + \mathcal{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* - \mathcal{F}^{*\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}$$

Вариация по $\mathcal{F}^{*\mu\nu}$ задает алгебраическую связь

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu},$$

а вариация по $\mathcal{A}_\nu^*$ приводит к уравнению

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

В системе Хевисайда

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \{ \mathcal{F}^{*\mu\nu} (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) + \mathcal{F}^{\mu\nu} (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^* - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^*) - \mathcal{F}^{*\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} \}$$

Говорят, что лагранжиан (8.19) со вспомогательным полем записан в формализме первого порядка, так как частные производные в нем входят только в первом порядке. Напомним, что для вспомогательного поля уравнения движения алгебраические (без дифференцирования этого поля).

При переходе от комплексного поля к вещественному, как мы уже делали выше, получим в формализме первого порядка лагранжиан вида

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \{ 2\mathcal{F}^{\mu\nu} (\partial_\mu \mathcal{B}_\nu - \partial_\nu \mathcal{B}_\mu) - \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} \}$$

Не стоит забывать также, что при обсуждении физических степеней свободы мы использовали калибровку Лоренца, $\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0$, что, конечно, можно учесть добавлением вклада, фиксирующего эту калибровку,

$$\mathcal{L}_{\text{g.fix.}} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu \mathcal{B}^\mu)^2,$$

где ξ - множитель Лагранжа, который не ограничен какими либо условиями и может выбираться произвольным вещественным числом. При этом, естественно, вариация действия по ξ приводит к условию

$$\partial_\mu \mathcal{B}^\mu = 0.$$

Считая далее, что поле является вещественным, и сохраняя привычное обозначение $\mathcal{A}_\mu$ (вместо $\mathcal{B}_\mu$), определим электрическое поле

$$\mathcal{E}^\alpha = F_{0\alpha}$$

и магнитное поле

$$\mathcal{H}^\gamma = -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta}, \quad F_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}^\gamma.$$

Подставляя определение тензора напряженности поля, находим

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathcal{A} \Rightarrow \text{div } \mathcal{H} = 0$$

Кроме того, в силу того, что для свободного поля $\text{div } \mathcal{A} = 0$ и $\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \partial \mathcal{A} / \partial t$

$$\text{div } \mathcal{E} = 0.$$

Использование уравнения волнового уравнения $\square \mathbf{A} = 0$ в купе с определением электрического и магнитного полей приводит к

$$\text{rot } \mathcal{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

В итоге мы получили уравнения Максвелла для свободного электромагнитного векторного поля, которые, как мы выяснили, могут быть записаны ковариантно

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0.$$

Эти уравнения, как известно, как раз и описывают две поперечных поляризации безмассового векторного поля.

Построение электродинамики через инварианты тензора ЭМ поля

Как бы могло наблюдаться нарушение инвариантности поля относительно пространственной четности?

Второй инвариант является псевдоскаляром, он меняет знак при зеркальной инверсии пространства, а следовательно, зависимость действия от этого релятивистского инварианта приводила бы к нарушению инвариантности поля относительно пространственной четности, чего не наблюдается.

(?? а??)

О другом про электродинамику

О квантовании поля (?)

(просто чтобы связь с КТП лучше была видна укажу суть этого.)

Почему разными способами можно вывести одни и те же уравнения электродинамики (????)

Вот можно калибровочным способом, заметив, что у должно быть векторное поле для локальных калибровочных преобразований. А можно через представление группы Пуанкаре. Экспериментальный способ вывода электродинамики меня не интересует здесь. (??? как-то еще можно?) Почему так, что совершенно разные методы дают один и тот же результат?

(пока слишком глубокий для меня вопрос, в будущем подумаю.)

11.1.2 Main Properties of Maxwell Equations

Основные свойства

(напишу потом, см. пока Вики)

Как запомнить уравнения Максвелла?

(подумаю потом про это)

Мнемонически: у нас есть электрические заряды и нет магнитных. Мы сперва изучаем электрическое поле, из непостоянного него создается ротор магнитного с плюсом, также есть ток смещения; обратно, к ротору электрического поля - с минусом.

11.1.3 Energy-Momentum Tensor of a Vector Field

Теория

Несложно проверить, что тензор энергии-импульса, построенный по функции Лагранжа свободного электромагнитного поля (2.12) в соответствии с определением (2.69), представляется в виде

$$T_{\mu\nu} = -\partial_\nu A^\alpha F_{\mu\alpha} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^2.$$

Однако это выражение (а, следовательно, энергия и импульс) не является калибровочно инвариантным. Наличие калибровочной зависимости у наблюдаемых величин энергии и импульса абсолютно недопустимо. На первый взгляд может показаться, что мы пришли к

противоречию. Однако, это не так. Действительно, заметим, что если определить новый тензор энергии-импульса $\Theta_{\mu\nu}$ равенством

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\alpha t^{\alpha\mu\nu}.$$

где $t^{\alpha\mu\nu}$ антисимметричен относительно перестановки индексов μ и α , то из уравнения $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ будет автоматически следовать закон сохранения

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0.$$

Специальным выбором $t^{\alpha\mu\nu}$ можно достичь калибровочной инвариантности нового тензора энергии-импульса $\Theta^{\mu\nu}$, который, кроме того, оказывается симметричным по своим индексам. Поэтому $\Theta^{\mu\nu}$ часто называют симметризованным тензором энергии-импульса, в то время как $T^{\mu\nu}$, описываемый с помощью (2.69), - каноническим.

Для электромагнитного поля симметризованный тензор энергии-импульса определяется как

$$\Theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \partial^\alpha (A_\nu F_{\mu\alpha}).$$

При использовании уравнений движения $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ он может быть переписан в виде

$$\Theta_{\mu\nu} = -F_\nu{}^\alpha F_{\mu\alpha} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^2.$$

Последнее выражение с очевидностью является симметричным и калибровочно инвариантным и поэтому может быть использовано для построения энергии и импульса. Как показано в Задаче 2,

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \Theta^{00} = \frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2); \\ P^n &= \int d^3x \Theta^{0n} = \int d^3x [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_n, \end{aligned}$$

что с точностью до обозначений совпадает с известными выражениями для свободного электромагнитного поля.

Симметризованный тензор энергии-импульса может быть построен и в других моделях.

С-2.3.3.1 Сохранения канонического тензора энергии-импульса

Явным вычислением проверить закон сохранения канонического тензора энергии-импульса при $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_2)$. Используя уравнения Лагранжа (1.23), получаем, что

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^\mu{}_\nu &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) \partial_\nu \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu \partial_\nu \phi_i - \frac{d\mathcal{L}}{dx^\nu} = \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \partial_\nu \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_2)} \partial_\mu \partial_\nu \phi_i - \frac{d\mathcal{L}}{dx^\nu} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = 0. \end{aligned}$$

С-2.3.3.2. Энергии и импульс электромагнитного поля

Получить выражения для энергии и импульса электромагнитного поля исходя из симметризованного тензора энергии-импульса.

Поскольку $\Theta^\mu{}_\nu = -F_{\nu\alpha}F^{\mu\alpha} + \delta^\mu_\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}/4$, в то время как пространство имеет сигнатуру $(+ - \dots)$, то

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \left(-F_{0\alpha}F^{0\alpha} + \frac{1}{4} (2F_{0\alpha}F^{0\alpha} + F_{ij}F^{ij}) \right) = \\ &= \int d^3x \left(F_{0i}^2 + \frac{1}{4} (-2F_{0i}^2 + F_{ij}^2) \right) = \frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2), \end{aligned}$$

где было принято во внимание, что $E_i = F_{0i}$ и $H_i = -\varepsilon_{ijk}F_{jk}/2$.

$$\begin{aligned} P^1 &= \int d^3x \Theta^{01} = -F^1{}_\alpha F^{0\alpha} = F_{12}F^{02} + F_{13}F^{03} = \\ &= -F_{12}F_{02} - F_{13}F_{03} = H_2E_y - H_yE_z = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]_x. \end{aligned}$$

Остальные компоненты импульса рассматриваются аналогично. Поэтому окончательно получаем, что

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}].$$

11.1.4 Dynamics of a Massless Vector Field in the General Case

(тут теорфизный вывод пропагатора фотона)

Закон Кулона как обмен фотонами (!?!?!?!?!?!?!?)

(пропишу, как это конкретно??)

11.1.5 Formalism of Differential Forms for Field Theory 1

(по Болибруху напишу, одновременно диффгем качать нужно.)

Напоминание сути некоторых тем диффгема в контексте электромагнитного поля

1

Напомним, как определяются ротор и дивергенция:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Но действительно ли величины $\vec{E}, \vec{H}$ и го $\vec{v}$ являются векторами? Как они меняются при замене координат? Скоро мы увидим, что они не очень похожи на векторы и что есть другая, более удобная форма записи тех же самых уравнений, которая возникла позднее, когда появилась теория дифференциальных форм, введенная Пуанкаре и Эли Картаном.

Чтобы лучше понять, как меняются компоненты вектора при замене координат, рассмотрим несколько примеров.

Пример

1. Рассмотрим n -мерное пространство $\mathbb{R}^n$ (можно считать для простоты, что $n = 3$) и гладкую кривую $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, задаваемую в некоторой системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ уравнениями $x^i = \varphi^i(t)$. При $t = 0$ касательный вектор к этой кривой в выбранной системе координат имеет компоненты $\xi^i = \dot{\varphi}^i(0)$ (точкой обозначается дифференцирование по t). Теперь рассмотрим новую систему координат $(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$, связанную со старой при помощи гладких функций $\hat{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$. Компоненты касательного вектора в новой системе координат будем обозначать $\hat{\xi}$. Тогда

$$\hat{\xi}^i = \left. \frac{d\hat{x}^i}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{df^i(\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right|_{t=0} \xi^j$$

по формуле производной сложной функции. Вот как, оказывается, связаны координаты касательного вектора в новой и старой системах координат.

Пример 2. Рассмотрим функцию φ от n переменных: $\varphi = \varphi(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$. Зачем мы записали ее сразу в новых координатах, станет ясно чуть позже. Рассмотрим градиент этой функции (который также часто называют вектором)

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}^1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}^n} \right) = (\hat{\eta}^1, \dots, \hat{\eta}^n)$$

Теперь попробуем сделать замену координат и вычислить компоненты градиента, только на этот раз уже не в новой, а в старой системе координат:

$$\eta^i = \frac{\partial \varphi(f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, f^n(x^1, \dots, x^n))}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}^j} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \hat{\eta}^j \frac{\partial f^j}{\partial x^i}$$

Сравним формулы, полученные в этих двух примерах. В обеих этих формулах участвуют выражения вида $\partial f^i / \partial x^j$, но между ними есть существенное отличие. В первом случае мы выражаем новые координаты через старые, а во втором - наоборот. Мы приходим к выводу, что при замене координат компоненты градиента меняются совсем по другому закону, чем компоненты касательного вектора. Градиент скорее напоминает не вектор, а дифференциал функции:

$$d\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}^j} d\hat{x}^j$$

И градиент функции, и касательный вектор являются тензорами, но тензорами разного типа.

2

Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ пространство векторных полей $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Под векторным полем мы будем понимать выражение

$$\vec{v}(x^1, \dots, x^n) = \sum_{j=1}^n v_j(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

где $v_j(x^1, \dots, x^n)$ - гладкие функции, а через $\partial / \partial x^j$ обозначен вектор e_j стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$ (эти обозначения оказываются очень удобными

при рассмотрении векторных полей на многообразиях). Такие поля еще иногда называют касательными. Множество гладких функций на $\mathbb{R}^n$ мы будем обозначать $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Множество векторных полей является линейным пространством: векторные поля можно складывать (покоординатно) и умножать на числа. Более того, их можно умножать на любые гладкие функции, заданные на всем пространстве

$\mathbb{R}^n$. К сожалению, гладкие функции образуют не поле, а кольцо, поэтому говорят не о линейном пространстве векторных полей, а о модуле векторных полей над кольцом гладких функций. Рассмотрим сопряженное пространство к $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ - пространство $\mathcal{F}$ - линейных функционалов $\alpha : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$, т. е.

таких отображений, что $\alpha(f\vec{v}) = f\alpha(\vec{v})$ для любой гладкой функции $f(x)$ и любого

векторного поля $\vec{v}$ и $\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha(\vec{v}_1) + \alpha(\vec{v}_2)$. Это сопряженное пространство также является модулем над кольцом гладких функций. Оно называется пространством дифференциальных 1-форм и обозначается $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$.

У этого модуля есть образующие, сопряженные к образующим $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, которые мы будем обозначать через dx^j :

$$dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Любая 1-форма может быть представлена в виде $\mathcal{F}$ -линейной комбинации этих образующих:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x^1, \dots, x^n) dx^i$$

где $\alpha_i(x^1, \dots, x^n)$ - гладкие функции из $\mathcal{F}$. При изменении координат в исходном пространстве соответственно меняются координаты и в сопряженном пространстве. Компоненты 1-формы при этом меняются по тому же закону, что и компоненты дифференциала. Это означает, что

дифференциал функции $\int$ является частным случаем 1-формы (что оправдывает введение таких обозначений для базиса сопряженного пространства), т.е. у нас имеется отображение $d: \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$.

Не всякая дифференциальная 1-форма является образом некоторой функции при взятии дифференциала, но имеет место включение: образ d лежит в пространстве 1-форм. Таким образом, дифференциал является не вектором, а ковектором - так принято называть дифференциальные 1-формы.

Можно ли расширить это определение, т. е. рассмотреть не только 1-формы, но и, например, 2-формы? Оказывается, это сделать совсем

нетрудно. Для этого нужно лишь вместо векторного поля рассмотреть пару векторных полей, и каждой паре векторных полей поставить в соответствие гладкую функцию. И если это отображение является $\mathcal{F}$ -линейным по каждому аргументу, то мы приходим к понятию 2-ковектора на множестве векторных полей: это просто $\mathcal{F}$ -билинейное отображение $\alpha: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

Пример 3. Рассмотрим два векторных поля $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в $\mathbb{R}^3$ и отображение, сопоставляющее паре векторов их скалярное произведение:

$$r: \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \quad r(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos \gamma$$

Легко проверить что это отображение $\mathcal{F}$ -билинейно; к тому же оно еще и симметрическое: если поменять местами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, то результат не изменится. Это отображение можно записать и в матричной форме:

$$r(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (x^1 y^1 z^1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$$

где x^i, y^i, z^i - координаты вектора $\vec{v}_i$. Получаем симметрическую 2-форму, которая называется евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$.

Пример 4. А вот пример (тоже хорошо всем известный) антисимметрического 2-ковектора, или внешней формы. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^2$ два векторных поля $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ и поставим им в соответствие ориентированную площадь (т) $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ параллелограмма, построенного на этих векторах. В координатах эта площадь равна определителю

$$\begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix} = x^1 y^2 - x^2 y^1$$

Это отображение также является линейным по каждому из аргументов, но уже обладает свойством

антикоммутативности: $\tau(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\tau(\vec{v}_2, \vec{v}_1)$. Именно такие 2-ковекторы (их еще называют кососимметрическими) представляют для нас особый интерес. Определение 1. Отображение $\alpha : \underbrace{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}_k \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ называется внешней дифференциальной формой степени k , если оно $\mathcal{F}$ -линейно по каждому аргументу и

$$\alpha(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_n) = -\alpha(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n)$$

Для любых i, j .

Пространство $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ внешних дифференциальных форм степени k и станет объектом нашего дальнейшего изучения. Естественно, что всякий 1-ковектор можно рассматривать как внешнюю дифференциальную форму (впрочем, точно так же его можно рассматривать и как симме-

трическую форму). Для того, чтобы записывать формы в координатах, мы введем новую операцию на дифференциальных формах - внешнее произведение. Сначала определим ее для пары 1-форм. Эта операция будет тоже $\mathcal{F}$ -линейной, поэтому мы определим ее только на базисных 1-ковекторах, а затем распространим

на все 1-формы по $\mathcal{F}$ -линейности. Каждой паре 1-форм эта операция ставит в соответствие 2-форму, причем на базисных ковекторах она определяется следующим образом:

$$(dx^i \wedge dx^j)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = dx^i(\vec{v}_1) dx^j(\vec{v}_2) - dx^i(\vec{v}_2) dx^j(\vec{v}_1)$$

Легко проверить, что полученная форма кососимметрична. Замечательно, что таким образом можно получить весь базис в пространстве 2-форм. Поэтому любой элемент из $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ записывается очень просто:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \alpha_{i_1 i_2}(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$$

Аналогично можно определить внешнее произведение для форм произвольной степени. Пусть α и $\beta - p$ - и q -формы соответственно. Тогда внешним произведением форм α и β называется $(p+q)$ -форма

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p+q}) &= \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum \varepsilon(s) \alpha(\vec{v}_s - 1_{(1)}, \dots, \vec{v}_s - 1_{(p)}) \times \beta(\vec{v}_s - 1_{(p+1)}, \dots, \vec{v}_s - 1_{(p+q)}) \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам $p+q$ элементов, а $\varepsilon(s)$ - знак перестановки S .

Приведенное определение инвариантно, т. е. не зависит от выбора системы координат. Но если система координат фиксирована, то из него сразу следует, что базис в пространстве k -форм состоит из элементов вида $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Поэтому произвольная форма α имеет вид

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k}(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Отметим еще одно замечательное свойство операции внешнего дифференцирования: $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$.

Отсюда, в частности, следует, что если степень α нечетна, то $\alpha \wedge \alpha = 0$.

3

Заметим, что операция дифференцирования каждой функции сопоставляет 1-форму. А можно ли определить операцию дифференцирования для произвольной формы?

Оказывается, это очень легко сделать. По определению полагаем

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\alpha_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Видно, что дифференциал повышает на единицу степень формы. Кроме того, из этого определения сразу следует, что $d^2\alpha = 0$. Действие дифференциала на внешние формы можно представить следующей диаграммой:

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \dots$$

Этот объект называется комплексом де Рама, и в нем содержится большой объем информации о пространстве, на котором заданы дифференциальные формы.

В данном случае мы имеем дело с $\mathbb{R}^n$, которое устроено довольно просто, но если бы мы стартовали с другого пространства, скажем, со сферы, то по этому комплексу мы бы узнали очень многое о топологии пространства.

Нетрудно проверить, что введенная с помощью координат операция внешнего дифференцирования на самом деле от координат не зависит, т. е. является инвариантной (проверьте это самостоятельно).

Наконец, последняя операция, которую нам осталось ввести - операция внутреннего произведения. Пусть у нас есть векторное поле $\vec{v}$ и внешняя форма α порядка p .

Тогда мы можем построить форму степени $p-1$, которая называется внутренним произведением формы α и поля $\vec{v}$

$$(i_v\alpha)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p-1}) = \alpha(\vec{v}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p-1})$$

Это определение также не зависит от выбора системы координат.

4

Попробуем теперь понять, что означают операторы ротора и дивергенции на инвариантном языке дифференциальных форм. Хотя мы часто писали дифференциальные формы в координатах, определение их было инвариантным, от координат не зависящим. А вот определения ротора и дивергенции зависят от выбора системы координат. Так давайте выясним, в чем же состоит эта зависимость.

Разберемся сначала с дивергенцией. Мы начинаем с векторного поля $\vec{v}$ на $\mathbb{R}^3$. По этому векторному полю мы построим 2-форму следующим образом. Возьмем форму объема $\tau = dx \wedge dy \wedge dz$ и рассмотрим внутреннее произведение $i_v\tau$ - это и есть обещанная 2-форма. Из нее мы получим 3-форму путем взятия внешнего дифференциала. Но пространство 3-форм на $\mathbb{R}^3$ имеет единственный базисный вектор, и это в точности форма объема $dx \wedge dy \wedge dz$. Значит, полученная нами форма есть некоторая гладкая функция, помноженная на форму объема. Проверим, что эта гладкая функция и будет дивергенцией векторного поля $\vec{v}$. Пусть поле $\vec{v}$ имеет вид

$$\vec{v} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}(i_v \tau) \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) &= (dx \wedge dy \wedge dz) \left(\vec{v}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = v_x, \\(i_v \tau) \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \right) &= (dx \wedge dy \wedge dz) \left(\vec{v}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \right) = v_y, \\(i_v \tau) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) &= (dx \wedge dy \wedge dz) \left(\vec{v}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = v_z.\end{aligned}$$

Отсюда

$$i_v \tau = v_x dy \wedge dz + v_y dz \wedge dx + v_z dx \wedge dy.$$

Теперь возьмем дифференциал:

$$\begin{aligned}d(i_v \tau) &= \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \\&= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

Мы получили в точности дивергенцию, помноженную на форму объема. Таким образом, дивергенцию можно записать в очень компактном виде:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{d(i_v \tau)}{\tau}.$$

Что же здесь зависит от выбора системы координат? Внутреннее произведение и дифференциал инвариантны относительно замен координат, от координат зависит только форма объема. Выясним, при каких заменах дивергенция не меняется.

При замене координат $\hat{x}^i = f^i(x^1, x^2, x^3)$ получаем

$$\hat{\tau} = d\hat{x}^1 \wedge d\hat{x}^2 \wedge d\hat{x}^3 = J(f)\tau,$$

где $J(f)$ - определитель матрицы (df^i/dx^j) , называемый якобианом замены. Поэтому

$$\frac{d(i_v \hat{\tau})}{\hat{\tau}} = \frac{d(J(f)i_v \tau)}{J(f)\tau} = \frac{dJ(f) \wedge i_v \tau}{J(f)\tau} + \frac{d(i_v \tau)}{\tau}.$$

В силу произвольности поля $\vec{v}$ получаем, что дивергенция не меняется лишь при таких заменах, для которых

$$dJ(f) = 0, \quad \text{т. е.} \quad J(f) = \text{const}.$$

Если же под дивергенцией поля с компонентами v_x, v_y, v_z понимать компоненту внешнего дифференциала 2-формы с компонентами v_x, v_y, v_z (это форма $i_v \tau$, выписанная выше), то такое определение инвариантно полностью, т. е. при этом дивергенция никак от выбора координат не зависит.

Рассмотрим теперь ротор векторного поля $\vec{v}$. Для этого введем отображение

$$\sigma : \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^3), \quad \sigma \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) = v_x dx + v_y dy + v_z dz.$$

Заметим, что

$$(d \circ \sigma)(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx.$$

Рассмотрим отображение $x : \Lambda^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, «обратное» к внутреннему произведению, т. е. такое, что $i_{x(\alpha)}\tau = \alpha$ для всех $\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, где τ по-прежнему форма объема в $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$\text{rot } \vec{v} = (x \circ d \circ \sigma)(\vec{v}).$$

Проверка полученного соотношения сводится к проверке тождества $i_{\text{rot}} \tau = d(\sigma(\vec{v}))$, которая проводится точно так же, как вычисление формы $i_v \tau$ в случае дивергенции.

Проанализируем эту конструкцию. Нетрудно видеть, что задание σ равносильно определению отображения

$$r : \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \quad r(\vec{v}, \vec{w}) = (\sigma(\vec{v}))(\vec{w}).$$

Но из формулы для σ вытекает, что r совпадает с симметрической 2-формой из примера 3, т. е. r является евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$.

Заметим, что в определении отображения x существенную роль играет трехмерность пространства $\mathbb{R}^3$, так как степень формы $i_{x(\alpha)}\tau$ на единицу меньше размерности пространства, а форма α имеет степень два.

Отсюда следует вывод: операция взятия ротора векторного поля может быть определена инвариантно лишь на ориентированном трехмерном многообразии, снабженном евклидовой метрикой (проверьте самостоятельно этот вывод, вычислив те замены координат, при которых компоненты ротора векторного поля действительно преобразуются как компоненты векторного поля).

Этот вывод показывает, что ротор лучше определять не как векторное поле, а инвариантным образом: как внешний дифференциал ковекторного поля $v_x dx + v_y dy + v_z dz$.

\$5.

Перейдем теперь непосредственно к анализу уравнений Максвелла. Если следовать традиционному взгляду, что составляющие электромагнитного поля - поля $\vec{E}, \vec{H}$ - это векторные поля, то анализ структуры операторов ротора и дивергенции показывает, что уравнения Максвелла могут быть записаны корректно лишь в трехмерном ориентированном пространстве, снабженном евклидовой метрикой.

Но тот факт, что ротор и дивергенция могут меняться при каких-то заменах координат, не отражает физику уравнений Максвелла, потому что природа этих уравнений никак не связана с наличием, скажем, метрики в пространстве или с выбором системы координат. Поэтому нам хотелось бы иметь какое-то инвариантное описание уравнений Максвелла. Все вышеперечисленное позволяет предположить, что электромагнитное поле есть дифференциальная форма степени два¹.

Эта 2-форма Ω , называемая тензором электромагнитного поля, определена на четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами (x, y, z, t) , где t - время, и имеет вид:

$$\begin{aligned} \Omega = & cE_x dx \wedge dt + cE_y dy \wedge dt + cE_z dz \wedge dt + \\ & + H_x dy \wedge dz + H_y dz \wedge dx + H_z dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Вычислим дифференциал этой формы и приравняем его к нулю.

$$\begin{aligned}
d\Omega = & c \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dt + c \frac{\partial E_x}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dt + c \frac{\partial E_y}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dt + \\
& + c \frac{\partial E_y}{\partial z} dz \wedge dy \wedge dt + c \frac{\partial E_z}{\partial x} dx \wedge dz \wedge dt + c \frac{\partial E_z}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dt + \\
& + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial H_x}{\partial t} dt \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \\
& + \frac{\partial H_y}{\partial t} dt \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial H_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial H_z}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy = 0
\end{aligned}$$

Соберем коэффициенты при $dx \wedge dy \wedge dz$:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

и мы получим второе уравнение Максвелла. Теперь соберем коэффициенты при $dx \wedge dy \wedge dt$:

$$c \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) = 0.$$

Это есть z -компонента первого уравнения Максвелла. Собирая коэффициенты при $dy \wedge dz \wedge dt$ и $dz \wedge dx \wedge dt$, мы получим x - и y -компоненты этого уравнения соответственно.

Итак, первые два уравнения Максвелла мы можем записать очень просто:

$$d\Omega = 0.$$

В чем преимущество этой записи? Мы записали уравнения в инвариантной форме: ни дифференциальные формы, ни внешнее дифференцирование не зависят ни от координат, ни от ориентации, ни от метрики.

Вспомним теперь, что $d^2 = 0$. Отсюда следует, что $\text{Im } d \subset \text{Ker } d$. Но в пространстве $\mathbb{R}^4$ имеет место лемма Пуанкаре: $\text{Im } d = \text{Ker } d$. Из этой леммы следует, что всякая замкнутая форма (дифференциал от которой равен 0) является точной (т. е. является дифференциалом некоторой

1 Здесь уместно еще раз отметить, что традиционная форма записи уравнений Максвелла появилась до создания теории дифференциальных форм. формы). В частности, $\Omega = d\omega$, где ω есть 1-форма на пространстве $\mathbb{R}^4$:

$$\omega = A_x dx + A_y dy + A_z dz + A_t dt.$$

Эта форма называется 4-потенциалом электромагнитного поля. Введем, как это обычно делается в физике, координаты $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^4 = ct$. Тогда мы можем записать наши формы в виде

$$\Omega = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad \omega = A_\mu dx^\mu$$

(знак суммирования по повторяющимся верхнему и нижнему индексам опущен). Тот факт, что $\Omega = d\omega$, можно записать совсем просто:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \quad \mu < \nu.$$

Именно так выглядят уравнения Максвелла во всех современных учебниках физики.

Заметим, что форма ω определяется по форме Ω неоднозначно: мы можем всегда прибавить к этой форме точную 1-форму, т. е. дифференциал функции: $\omega' = \omega + dS$.

И вновь мы получим, что $d\omega' = \Omega$, так как квадрат дифференциала равен нулю. Это означает, что 4-потенциал определяется, как говорят, с точностью до калибровочных преобразований: $A'_\mu = A_\mu + \partial S / \partial x_\mu$. А поскольку в уравнения Максвелла входят только элементы $F_{\mu\nu}$, то, стало быть, выбор 4-потенциала не влияет на уравнения Максвелла.

Так обстоят дела в классической электродинамике. Но уже в квантовом случае движение частицы зависит не только от тензора электромагнитного поля, но и от 4-потенциала, и там калибровки имеют более важное значение.

11.1.6 Formalism of Differential Forms for Field Theory 2

Лекция 2

Мы уже записали фарадееву часть уравнений Максвелла (т. е. первые два уравнения) в виде

$$d\Omega = 0,$$

где $\Omega = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, $\mu < \nu$ (знак суммирования по повторяющимся индексам здесь и ниже, как правило, опускается) — тензор электромагнитного поля.

Затем, используя тот факт, что для пространства $\mathbb{R}^4$ имеет место лемма Пуанкаре (каждая замкнутая форма на этом пространстве является точной), мы переписали полученное уравнение в виде

$$\Omega = d\omega, \quad \omega = A_\mu dx^\mu$$

или

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \quad \mu < \nu.$$

Форма ω называется 4-потенциалом электромагнитного поля и определяется с точностью до калибровочных преобразований $A'_\mu = A_\mu + \partial S / \partial x_\mu$.

Так обстоит дело, если пространство, на котором разворачиваются события, $-\mathbb{R}^4$. Но не всегда ареной физических событий бывает $\mathbb{R}^4$. Например, уравнение магнитного диполя Дирака описывает ситуацию, когда в одной точке пространства расположен магнитный заряд. Тогда все уравнения пишутся в пространстве $(\mathbb{R}^3 \setminus \{x\}) \times \mathbb{R}$. В качестве такого пространства может также выступать произведение трехмерного тора на $\mathbb{R}$ и т. д.

В этих случаях лемма Пуанкаре уже не всегда имеет место, т. е. глобальный 4-потенциал может не существовать. Однако, поскольку локально каждое многообразие устроено как евклидово пространство, в каждой карте свой 4-потенциал может быть построен. Но как связать вместе все эти локальные 4-потенциалы, как записать в инвариантной форме уравнения электромагнитного поля, заданного на всем пространстве и не зависящего от выбора карт (т. е. локальных систем координат)? Для этого и существует язык расслоений и связностей, к знакомству с которым мы теперь и приступаем.

§6.

Мы начнем с простого примера расслоения, который вам очень хорошо знаком.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ее можно представить в виде графика в пространстве $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$. Это множество точек $s = (x, f(x))$, где $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$. Имеется естественная проекция π пространства $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$, состоящего из точек (x, y) , на $\mathbb{R}^4 : (x, y) \mapsto x$ (рис. 1). Наша функция есть не что иное, как отображение s из базы - пространства $\mathbb{R}^4$ - в пространство $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$; при этом $\pi \circ s = \text{id}$. Всякое отображение

s , обладающее таким свойством, называется сечением. А сама конструкция, которую мы построили, называется (тривиальным) расслоением или прямым произведением. Теперь мы обобщим приведенную в примере конструкцию. Рассмотрим покрытие $\mathbb{R}^4$ открытыми множествами U_i . Пусть для каждого непустого пересечения $U_i \cap U_j$ задана некоторая функция со значениями в группе невырожденных матриц размера 2×2 :

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(2; \mathbb{R}).$$

Если набор функций $\{g_{ij}\}$ обладает свойствами

1. $g_{ji}(x) = (g_{ij}(x))^{-1}$,
2. $g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) \cdot g_{ki}(x) = I$ (если $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$),

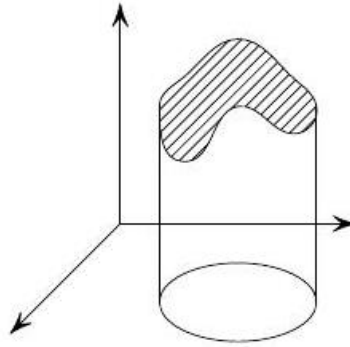


Рис. 1

то этот набор называют склеивающим коциклом (здесь $(g_{ij}(x))^{-1}$ - это матрица, обратная к $g_{ij}(x)$; I - единичная матрица). При помощи склеивающего коцикла можно построить новый объект, который локально похож на сконструированное в предыдущем примере прямое произведение.

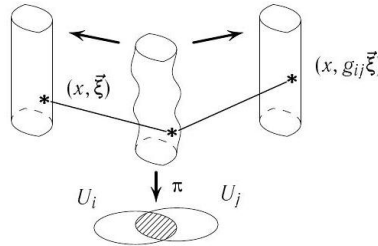


Рис. 2 «Кирпичиками» в нашей конструкции будут пространства $U_i \times \mathbb{R}^2$, которые мы будем склеивать по множествам $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^2$. Есть очень простой способ склейки: точка $(x, \vec{\xi})$ из $U_i \times \mathbb{R}^2$ склеивается (отождествляется) с точкой $(x, \vec{\xi})$ из $U_j \times \mathbb{R}^2$. Тогда интуитивно ясно, что мы получим в точности прямое произведение. Давайте поступим иначе - склеим цилиндры «с подкруткой»: точку $(x, \vec{\xi})$ отождествим с точкой $(x, g_{ij}\vec{\xi})$ (рис. 2). Ограничения, наложенные на функции g_{ij} , обеспечивают корректность такой склейки. Свойство 1) означает, что если точка $(x, \vec{\xi})$ склеивается с некоторой точкой $(x, \vec{\eta})$, то точка $(x, \vec{\eta})$ склеивается с точкой $(x, \vec{\xi})$. Если у нас имеется пересечение трех цилиндров, то мы склеиваем точку из первого цилиндра с точкой из второго цилиндра, ту, в свою очередь, — с точкой из третьего цилиндра, а ее с точкой из первого цилиндра. Свойство 2) гарантирует нам, что после таких склеек точка первого цилиндра перейдет в себя.

После склейки мы получим некоторое пространство P , сконструированное из этих цилиндров, у которого будет естественная проекция π на базу $\mathbb{R}^4$. Причем эта проекция корректно определена для всех цилиндров, и склейка ее не портит.

Полученный объект называют векторным расслоением с базой $\mathbb{R}^4$, пространством расслоения P , слоем $\mathbb{R}^2$ и структурной группой $GL(2; \mathbb{R})$. Возьмем теперь другой склеивающий коцикл и построим соответствующее ему векторное расслоение P' с отображением проектирования π' . Если существует взаимно-однозначное гладкое в обе стороны линейное на каждом слое отображение F из P в P' , такое что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{F} & P' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & \mathbb{R}^4 & \end{array}$$

коммутативна (т. е. $\pi' \circ F = \pi$), то говорят, что расслоения P и P' эквивалентны. Расслоения, эквивалентные прямому произведению, называют тривиальными. Можно доказать, что если в качестве базы выступает пространство $\mathbb{R}^4$, то все расслоения будут тривиальными. Но ясно, что в приведенной конструкции конкретный вид базы (в качестве которой мы выбрали для простоты пространство $\mathbb{R}^4$) и размерность слоя (пространства $\mathbb{R}^2$ в нашем случае) ни при чем. В качестве базы может выступать любое многообразие, а в качестве слоя — евклидово пространство любой размерности.

Приведем пример нетривиального расслоения с базой S^1 (окружность).

Пример 2. Рассмотрим два экземпляра цилиндра $S^1 \times \mathbb{R}$ и выбросим из первого цилиндра прямую $\{x\} \times \mathbb{R}$, а из второго — прямую $\{y\} \times \mathbb{R}$, где x и y — различные точки окружности S^1 . Получим два кирпичика $U_1 \times \mathbb{R}$ и $U_2 \times \mathbb{R}$, где $U_1 = S^1 \setminus \{x\}$, а $U_2 = S^1 \setminus \{y\}$. Пересечение $U_1 \cap U_2$ состоит из двух компонент V_1 и V_2 . Если $z \in V_1$, то склеим точки (z, t) и (z, t) . Если же $z \in V_2$, то склеим наши кирпичики следующим образом: точка (z, t) первого кирпичика склеится с точкой $(z, -t)$ второго, т. е. в нашем случае склеивающий коцикл состоит из одного элемента g_{12} , тождественно равного единице на V_1 и равного -1 , если $z \in V_2$. Структурная группа является группой $GL(1; \mathbb{R})$, т. е. группой ненулевых действительных чисел с операцией умножения.

Пространство этого расслоения — поверхность, похожая на лист Мёбиуса, только бесконечная. Она не гомеоморфна цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$, поскольку цилиндр — ориентируемое многообразие, а полученное нами пространство расслоения — нет. Значит, это расслоение нетривиально.

Сечение произвольного расслоения определяется точно так же, как и в разобранным случае прямого произведения: это такое отображение s из базы в пространство расслоения, что $\pi \circ s = id$. Сечения расслоения образуют модуль над кольцом гладких функций базы: их можно складывать (покоординатно и поточечно) и умножать на функции.

§7.

У прямого произведения есть следующее замечательное свойство: сечение прямого произведения можно дифференцировать вдоль любого векторного поля $\vec{v}$ базы. А именно, возьмем сечение $(x, f(x))$ и поставим ему в соответствие новое сечение $(x, \partial_v f)$, где $\partial_v f = df(\vec{v})$. Выражение df есть векторнозначная 1-форма вида $(df^1, \dots, df^4)$; ее значение на векторном поле $\vec{v}$ — гладкая вектор-функция $((df^1(\vec{v}), \dots, df^4(\vec{v})))$. А ее

график (т. е. сечение $(x, df(\vec{v}))$) и будет искомой производной $(x, \partial_v f)$ исходного сечения вдоль $\vec{v}$.

Можно ли похожим образом научиться дифференцировать сечения произвольного расслоения? На сечение расслоения можно смотреть как на согласованную совокупность (x, f_i) сечений кирпичиков $U_i \times \mathbb{R}^2$. Условие согласованности состоит в том, что эти локальные сечения склеиваются в глобальное, т. е. для любой точки $x \in U_i \cap U_j$ имеет место тождество $f_i(x) = g_{ij}(x)f_j(x)$.

Давайте продифференцируем каждое такое элементарное сечение обычным образом вдоль векторного поля. Нужно только проверить, что полученные локальные сечения вновь корректно склеиваются:

$$\partial_v f_i = \partial_v (g_{ij} f_j) = (\partial_v g_{ij}) f_j + g_{ij} \partial_v f_j.$$

Если бы члена $(\partial_v g_{ij}) f_j$ не было, сечения бы склеивались и при склеивании давали глобально определенное, без разрывов, сечение. Но если функции g_{ij} зависят от x , то это определение ни к чему хорошему не приводит. Заметим, что невязка этой формулы — член, линейный по f_j . Давайте чуть-чуть подправим определение производной вдоль векторного поля, добавив такую линейную по f часть, чтобы новые сечения склеились. А именно, определим новую производную, которая будет называться ковариантной производной вдоль векторного поля $\vec{v}$:

$$\nabla_v f_i = \partial_v f_i + A_v^i f_i$$

где A_v^i - матрица размера 2×2 (здесь суммирование по индексу i не производится). Мы постараемся подобрать матрицы A_v^i (свою для каждого кирпичика) так, чтобы в итоге после применения ковариантной производной все локальные сечения склеились в одно.

Распишем определение ∇_v :

$$\begin{aligned} \nabla_v f_i &= \partial_v f_i + A_v^i f_i = \partial_v (g_{ij} f_j) + A_v^i (g_{ij} f_j) = (\partial_v g_{ij}) f_j + g_{ij} \partial_v f_j + A_v^i g_{ij} f_j = \\ &= g_{ij} (g_{ij}^{-1} (\partial_v g_{ij}) f_j + \partial_v f_j + g_{ij}^{-1} A_v^i g_{ij} f_j) = g_{ij} \nabla_v f_j. \end{aligned}$$

Последнее равенство необходимо для того, чтобы локальные сечения склеились. Выражение $\nabla_v f_j$ должно содержать член $\partial_v f_j$, следовательно, сумма остальных членов должна равняться $A_v^j f_j$:

$$A_v^j = g_{ij}^{-1} \partial_v g_{ij} + g_{ij}^{-1} A_v^i g_{ij}$$

Отсюда

$$A_v^i = -\partial_v g_{ij} g_{ij}^{-1} + g_{ij} A_v^j g_{ij}^{-1}.$$

Итак, если удастся найти матричные функции A_v^i , удовлетворяющие полученному условию, то можно ввести операцию дифференцирования сечений вдоль векторного поля $\vec{v}$.

Но как быть, если надо продифференцировать сечения вдоль другого векторного поля? Искать каждый раз подходящие матричные функции было бы довольно затруднительно. Кроме того, естественно было бы ожидать, что $\nabla_{v_1} f + \nabla_{v_2} f = \nabla_{v_1+v_2} f$, как в случае обычных функций. Поэтому давайте потребуем, чтобы на каждой окрестности U_i была задана матричная дифференциальная форма (т. е. матрица размера 2×2 , все элементы которой являются 1-формами) ω_i так, что

$$\omega_i = -dg_{ij} g_{ij}^{-1} + g_{ij} \omega_j g_{ij}^{-1}$$

для любых пересекающихся U_i и U_j .

Тогда оказывается, что мы можем дифференцировать любое сечение вдоль любого векторного поля. Для этого нужно лишь положить

$$A_v^i = \omega_i(\vec{v})$$

Определение 2. Говорят, что в векторном расслоении задана связность, если для любого набора окрестностей и склеивающих коциклов, по которым можно построить это расслоение, задан набор дифференциальных матричных 1-форм $\{\omega_i\}$, удовлетворяющих свойству (*). Связность обозначается обычно значком ∇ . Форма ω_i называется локальной формой связности.

Связность соотносится с ковариантной производной примерно так же, как дифференциал функции с частной производной. Если s - сечение расслоения, имеющее в цилиндре $U_i \times \mathbb{R}^2$ вид $(x, f_i(x))$, то

$$\nabla s = (x, df_i + \omega_i f_i)$$

Другими словами, если мы применим к сечению не ковариантное дифференцирование, а оператор связности, то мы получим сечение с коэффициентами в 1-формах. Проиллюстрируем это диаграммой:

$$\nabla : \{ \text{сечение} \} \rightarrow \{ \text{сечение} \} \otimes \Lambda^1(\mathbb{R}^4).$$

Итак, связность в векторном расслоении — это просто возможность дифференцировать сечения. Связность является линейным отображением (т. е. $\nabla(s_1 + s_2) = \nabla s_1 + \nabla s_2$) и удовлетворяет правилу Лейбница: для любого $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^4)$ и для любого сечения s имеем $\nabla(fs) = (df)s + f\nabla s$.

Это инвариантное определение связности: говорят, что на расслоении задана связность, если любому сечению ставится в соответствие $\{ \text{сечение} \} \{ \text{дифференциальная форма} \}$, и это отображение линейно и удовлетворяет правилу Лейбница. Легко показать что такое определение связности эквивалентно данному выше «координатному».

Рассмотрим снова цилиндр $U_i \times \mathbb{R}^2$. В нем есть стандартный базис сечений $\xi_1 = (x, e_1), \xi_2 = (x, e_2)$ (где e_1 и e_2 образуют стандартный базис в $\mathbb{R}^2$). Любое сечение $s = (x, f_i(x))$ над U_i может быть записано в виде $s = f_i^1 \xi_1 + f_i^2 \xi_2 = (\xi_1, \xi_2) f_i$ (где последнее выражение понимается как произведение строки на столбец). Для построенных сечений имеем

$$\nabla \xi_j = (x, \nabla e_j) = (x, \omega_i e_j) = (x, \omega_i^j),$$

где через ω_i^j обозначен j -й столбец матричной дифференциальной формы ω_i .

Следовательно, $(\nabla \xi_1, \nabla \xi_2) = (\xi_1, \xi_2) \omega_i$ (вектор-строка умножается на матрицу), поэтому на матрицу ω_i можно смотреть как на матрицу связности в базисе (ξ_1, ξ_2) .

Теперь делается более понятным смысл выражения (**). Его можно переписать в виде

$$\nabla f_i = df_i + \omega_i f_i.$$

Это действие связности на координатах сечения s (по отношению к базисным сечениям ξ_1, ξ_2).

Во всяком ли векторном расслоении можно ввести связность? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение, которое мы оставляем читателю в качестве упражнения.

В любом гладком векторном расслоении можно ввести связность.

(Указание: Рассмотрите гладкое разбиение единицы $\{\lambda_i\}$, подчиненное покрытию $\{U_i\}$; так как над каждым U_i расслоение имеет вид прямого произведения, в ограничении расслоения на U_i можно ввести некоторую связность ∇_i ; покажите, что

линейная комбинация $\sum \lambda_i \nabla_i$ является корректно определенной связностью в исходном расслоении.)

Сечение s называется горизонтальным (по отношению к связности ∇), если $\nabla s = 0$.

Из (**) следует, что в базисе ξ_1, ξ_2 локальных сечений расслоения над U_i координаты горизонтальных сечений удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$df_i = -\omega_i f_i$$

Если расслоение тривиально, то в базисе ξ_1, ξ_2 глобальных сечений расслоения координаты горизонтальных сечений удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$df = -\omega f.$$

В другом базисе сечений (при другой тривиализации расслоения) ξ'_1, ξ'_2 согласно (*) уравнение горизонтальных сечений принимает вид

$$df' = -\omega' f', \quad \text{где} \quad f' = \Gamma y, \quad \omega' = -d\Gamma\Gamma^{-1} + \Gamma\omega\Gamma^{-1}$$

(и где в свою очередь $(\xi_1, \xi_2) = (\xi'_1, \xi'_2)\Gamma$). Заметим, что такие преобразования называются калибровочными преобразованиями формы связности.

Итак, связность в тривиальном расслоении задает систему дифференциальных уравнений с точностью до калибровочных преобразований.

Если же расслоение нетривиально, то связность задает согласованное (в смысле соотношений (*)) семейство систем дифференциальных уравнений.

§8.

Попробуем продолжить диаграмму дифференцирования сечений:

$$\{ \text{сечение} \} \xrightarrow{\nabla} \{ \text{сечение} \} \otimes \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\tilde{\nabla}} \{ \text{сечение} \} \otimes \Lambda^2(\mathbb{R}^n),$$

где отображение $\tilde{\nabla}$ каждому сечению с коэффициентами в 1-формах ставит в соответствие сечение с коэффициентами в 2-формах. Мы также потребуем, чтобы для него выполнялось правило Лейбница:

$$\tilde{\nabla}(f\alpha) = df \wedge \alpha + f\tilde{\nabla}\alpha, \quad \tilde{\nabla}(\beta s) = (d\beta)s - \beta \wedge \nabla s$$

для произвольной функции f , сечения s и 1-формы β . Определим сквозное отображение $K = \tilde{\nabla} \circ \nabla$.

Лемма. Отображение K является $\mathcal{F}$ -линейным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f - функция, s - сечение. Тогда

$K(fs) = \tilde{\nabla}(\nabla(fs)) = \tilde{\nabla}((df)s + f\nabla s) = (d^2f)s - df \wedge \nabla s + df \wedge \nabla s + fK(s) = fK(s)$, поскольку $d^2f = 0$, а второй и третий члены сокращаются. Отображение K называется тензором кривизны связности. Локально над U_i в базисе ξ_1, ξ_2 тензор кривизны можно записать в виде

$$K(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_2) \Omega_i,$$

где Ω_i - матрица дифференциальных 2-форм.

Вычислим эту матрицу в нашем базисе через ω_i :

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}(\nabla(\xi_1, \xi_2)) &= \tilde{\nabla}((\xi_1, \xi_2)\omega_i) = (\nabla\xi_1, \nabla\xi_2) \wedge \omega_i + (\xi_1, \xi_2) d\omega_i = \\ &= (\xi_1, \xi_2)(\omega_i \wedge \omega_i) + (\xi_1, \xi_2) d\omega_i = (\xi_1, \xi_2)(\omega_i \wedge \omega_i + d\omega_i).\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при базисных векторах слева и справа, мы получаем уравнение $\Omega_i = d\omega_i + \omega_i \wedge \omega_i$. (Внешнее произведение $\omega_i \wedge \omega_i$ не обязано равняться нулю, поскольку ω_i - матричная форма.) Полученное уравнение называется структурным уравнением. Дифференцируя это уравнение, мы получим $d\Omega_i = \Omega_i \wedge \omega_i - \omega_i \wedge \Omega_i$. Это равенство носит название тождество Бьянки. Введя новый оператор $D\Omega_i = d\Omega_i - \Omega_i \wedge \omega_i + \omega_i \wedge \Omega_i$ (его называют ковариантной производной формы), данное выражение можно переписать в виде

$$D\Omega_i = 0.$$

§9.

По аналогии с конструкцией векторного расслоения рассмотрим теперь главное расслоение. Для этого вместо $\mathbb{R}^2$ в наших кирпичиках возьмем $GL(2; \mathbb{R})$, т. е. в качестве элементарных цилиндров будем рассматривать цилиндры $U_i \times GL(2; \mathbb{R})$. Склеивать мы их будем точно так же, с помощью коцикла $\{g_{ij}\}$:

$$(x, G) \sim (x, g_{ij}G), \quad \text{если } x \in U_i \cap U_j.$$

Только умножать матрицу g_{ij} нам придется уже не на вектор, а на другую матрицу G . Расслоение, у которого структурная группа и слой — это одно и то же пространство, называют главным расслоением.

В главном расслоении также можно ввести связность, формально воспользовавшись данным ранее определением (как совокупность согласованных с помощью соотношения (*) матричных дифференциальных форм). Но ее уже нельзя будет рассматривать как дифференцирование вектор-сечений. Геометрическая интерпретация связности в главном расслоении состоит в том, что связность выделяет в касательном пространстве к каждой точке пространства расслоения подпространство так называемых горизонтальных векторов, гладко зависящее от точки. Объем данной брошюры не позволяет нам познакомиться подробнее с этой интерпретацией. Отметим лишь еще раз, что аналогично случаю векторного расслоения в главном расслоении можно ввести кривизну связности и выписать структурное уравнение и тождество Бьянки.

§10.

Вернемся вновь к уравнениям Максвелла. Оказывается, на электромагнитное поле можно смотреть как на связность в главном расслоении над $\mathbb{R}^4$ со структурной группой и слоем $U(1) \subset GL(1; \mathbb{C})$ ($U(1)$ - это группа комплексных чисел, равных по модулю 1, т. е. геометрически это окружность S^1).

В этом расслоении функции склейки g_{ij} принимают значение в группе $U(1)$, а формы связности и кривизны становятся скалярными, а не матричными. Поэтому для локальных форм связности и кривизны связности получаем: $\omega_i \wedge \omega_i = 0$ и $\Omega_i \wedge \omega_i - \omega_i \wedge \Omega_i = 0$. Структурное уравнение принимает при этом вид $\Omega_i = d\omega_i$, а тождество Бьянки $-d\Omega_i = 0$.

Поэтому локальную форму связности $\omega_i = A_\mu^i dx^\mu$ мы будем интерпретировать как локальный 4-потенциал в данной калибровке, т. е. в данной локальной тривиализации расслоения над U_i , локальную форму кривизны Ω_i - как тензор электромагнитного поля в данной калибровке, а тождество Бьянки превратится в фарадееву часть уравнений Максвелла.

При переходе от одной локальной формы связности к другой (т. е. при замене калибровки) получим согласно соотношению (*) (и согласно тому, что функции склейки - скалярные):

$$\omega_i = -dg_{ij}g_{ij}^{-1} + g_{ij}\omega_j g_{ij}^{-1} = \omega_j + dS_{ij},$$

где $S_{ij} = d \log(-g_{ij})$, или в терминах компонент формы ω_i :

$$A_\mu^i = A_\mu^j + \frac{\partial S_{ij}}{\partial \mu}$$

Согласно этой формуле, компоненты локальной формы связности преобразуются точно так же, как компоненты 4-потенциала электромагнитного поля при калибровочных преобразованиях, что еще раз подтверждает правильность нашей интерпретации.

Итак, в случае главного расслоения все наши формулы могут быть описаны на двух языках: геометрическом и физическом. Составим соответствующий словарь:

Выбор локального цилиндра (локальная тривиализация)	$U_i \times G$ ($U_i \times S^1$)	Калибровка
Локальная форма связности	$\omega_i = A_\mu^i dx^\mu$	4-потенциал электромагнитного поля в данной калибровке
Связность	∇	Электромагнитное поле
Локальная форма кривизны связности	Ω_i	Тензор электромагнитного поля в данной калибровке
Тензор кривизны связности	K	Тензор электромагнитного поля
Тождество Бьянки	$D\Omega_i = 0$	Фарадеева часть уравнений Максвелла
Пространство расслоения	$P(\mathbb{R}^4 \times S^1)$	Фазовое пространство физической системы
База расслоения	$B(\mathbb{R}^4)$	Пространство-время
Структурная группа расслоения	$G(U(1))$	Группа «вращений» в зарядовом пространстве.

Последняя строчка словарика требует пояснения. Дело в том, что структурная группа $U(1)$ появляется в описании электромагнитного поля в связи с тем, что физическая ситуация не должна зависеть от выбора фазы (выбора направления в зарядовом пространстве), что соответствует инвариантности относительно калибровочных преобразований вида $g_{ij} = \exp(is(x))$ со значениями в $U(1)$.

§11.

Случай электромагнитного поля — в каком-то смысле простейший из возможных, так как структурная группа расслоения в этом случае очень проста. Однако этим примером не исчерпывается описание физических полей в терминах расслоений и связностей.

Другой известный пример - это знаменитые поля Янга-Миллса, служащие для описания поведения нуклонов (протонов и нейтронов). Эти поля интерпретируются как связности в главном расслоении со структурной группой $G = SU(2)$ (так обозначается группа всех невырожденных комплексных матриц размера 2×2 , определитель которых равен 1). В этом случае все формы связности и кривизны являются матричными, и те упрощения, которые были возможны в случае электромагнитного поля, здесь не проходят. Однако выписанный нами словарь «работает» и для этих полей.

Исследуя подобного рода модели, физики научились вычислять такие величины, как масса протона и масса нейтрона, просто решая с помощью компьютера соответствующие уравнения. Но это тема совсем другой лекции.

Обзор приложений электромагнитное поле а дифференциальных формах

(очень многие укажу, но сперва дорасти до таких задач нужно, скорее всего только в ОТО они и используются, я хз, где еще?)

Другое про электромагнитное поле а дифференциальных формах**11.1.7 Mode Decomposition of a Vector Field**

(чисто теоретический вопрос, который особо не нужно помнить для задач)

Основные формулы собственных колебаний (??)

(скоро уже выпишу, на этом по сути и стою!)

В случае произвольной формы те же самые колебания

(тут пока верю, потом мб явно это поисследую.)

Колебания в конечном объеме пространства

Рассмотрим свободное (без зарядов) электромагнитное поле, находящееся в некотором конечном объеме пространства, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами, равными соответственно A, B, C .

Мы можем тогда разложить все величины, характеризующие поле в этом параллелепипеде, в тройной ряд Фурье по трем координатам, то есть в виде

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

Суммирование производится здесь по всем возможным значениям вектора $\mathbf{k}$, компоненты которого пробегает значения

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{C}$$

где n_x, n_y, n_z - положительные или отрицательные целые числа.

В силу вещественности $\mathbf{A}$ коэффициенты разложения (52.1) связаны друг с другом равенствами $\mathbf{A}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*$.

Из уравнения $\text{div } \mathbf{A} = 0$ следует, что для каждого $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0$$

т.е. комплексные векторы $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ «поперечны» к соответствующим волновым векторам $\mathbf{k}$.

Векторы $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ являются, конечно, функциями времени;

В силу волнового уравнения (46.7) каждый из них удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + c^2 k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0$$

Если размеры A, B, C выбранного объема достаточно велики, то соседние значения k_x, k_y, k_z очень близки друг к другу.

Можно говорить тогда о числе возможных значений k_x, k_y, k_z в небольших интервалах $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$.

Поскольку соседние значения, скажем k_x , соответствуют значениям n_x , отличающимся на единицу, то число Δn_x возможных значений k_x в интервале Δk_x равно просто соответствующему интервалу значений n_x .

Таким образом, находим:

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi} \Delta k_x, \quad \Delta n_y = \frac{B}{2\pi} \Delta k_y, \quad \Delta n_z = \frac{C}{2\pi} \Delta k_z$$

Полное число Δn значений вектора $\mathbf{k}$ с компонентами в заданных интервалах равно произведению

$$\Delta n = \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$$

где $V = ABC$ - объем поля.

Легко определить отсюда число значений волнового вектора с абсолютной величиной в интервале Δk и направлением в элементе телесных углов $\Delta \phi$.

Для этого надо перейти к сферическим координатам в « $\mathbf{k}$ -пространстве» и написать вместо $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ элемент объема в этих координатах.

Таким образом,

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \Delta k \Delta \phi$$

Заменив здесь $\Delta \phi$ на 4π , получим число значений $\mathbf{k}$ с величиной в интервале Δk и любыми направлениями: $\Delta n = V k^2 \Delta k / 2\pi^2$.

Электрическое и магнитные поля

Для электрического и магнитного полей имеем:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = i \sum_{\mathbf{k}} [\mathbf{k} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

При вычислении квадратов этих сумм замечаем, что все произведения членов с волновыми векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, такими, что $\mathbf{k}' \neq -\mathbf{k}$, дают нуль при интегрировании по всему объему.

Действительно, такие члены содержат множители $e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}}$, а интеграл, например,

$$\int_0^A e^{i \frac{2\pi}{A} n_x x} dx$$

с целым отличным от нуля n_x равен нулю.

В членах же с $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ экспоненциальные множители выпадают и интегрирование по dV дает просто объем V .

Энергия поля

Вычислим полную энергию поля

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dV$$

выразив ее через величины $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$.

В результате найдем:

$$\mathcal{E} = \frac{V}{8\pi} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* + [\mathbf{k} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}] [\mathbf{k} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*] \right\}$$

(??) Но ввиду (52.3) имеем:

$$[\mathbf{k}\mathbf{A}_\mathbf{k}][\mathbf{k}\mathbf{A}_\mathbf{k}^*] = k^2 \mathbf{A}_\mathbf{k}\mathbf{A}_\mathbf{k}^*$$

так что

$$\mathcal{E} = \frac{V}{8\pi c^2} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \dot{\mathbf{A}}_\mathbf{k} \dot{\mathbf{A}}_\mathbf{k}^* + k^2 c^2 \mathbf{A}_\mathbf{k} \mathbf{A}_\mathbf{k}^* \right\}$$

Разложения на осцилляторы

(далее совсем мало смотрел еще, хотя вроде и не так сложно)

Каждый член этой суммы соответствует одному из членов разложения (52.1)

В силу уравнения (52.4) векторы $\mathbf{A}_\mathbf{k}$ являются гармоническими солитонной величины волнового вектора.

В зависимости от выбора этих функций члены разложения (52.1) могут представлять собой стоячие Или бегущие плоские волны.

Представим разложение поля в таком виде, чтобы его члены изображали бегущие волны.

Для этого запишем его в форме

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{a}_\mathbf{k}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}})$$

явным образом выражающей вещественность $\mathbf{A}$, причем каждый из векторов $\mathbf{a}_\mathbf{k}$ зависит от времени по закону

$$\mathbf{a}_\mathbf{k} \propto e^{-i\omega_k t}, \quad \omega_k = ck$$

Тогда каждый отдельный член в сумме (52.9) будет функцией только от разности $\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t$, что соответствует волне, распространяющейся в направлении $\mathbf{k}$.

Сравнив разложения (52.9) и (52.1), находим, что их коэффициенты связаны равенствами

$$\mathbf{A}_\mathbf{k} = \mathbf{a}_\mathbf{k} + \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*$$

а в силу (52.10) производные по времени

$$\dot{\mathbf{A}}_\mathbf{k} = -ick (\mathbf{a}_\mathbf{k} - \mathbf{a}_\mathbf{k}^*)$$

Подставив это в (52.8), выразим энергию поля через коэффициенты разложения (52.9).

Члены с произведениями вида $\mathbf{a}_\mathbf{k}\mathbf{a}_{-\mathbf{k}}$ или $\mathbf{a}_\mathbf{k}^*\mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*$ взаимно сокращаются; заметив также, что суммы $\sum \mathbf{a}_\mathbf{k}\mathbf{a}_\mathbf{k}^*$ и $\sum \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}\mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*$ отличаются лишь обозначением переменной суммирования и потому совпадают друг с другом, получим окончательно:

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_\mathbf{k}, \quad \mathcal{E}_\mathbf{k} = \frac{k^2 V}{2\pi} \mathbf{a}_\mathbf{k} \mathbf{a}_\mathbf{k}^*$$

явным образом выражающей вещественность $\mathbf{A}$, причем каждый из векторов $\mathbf{a}_\mathbf{k}$ зависит от времени по закону

$$\mathbf{a}_\mathbf{k} \propto e^{-i\omega_k t}, \quad \omega_k = ck$$

Тогда каждый отдельный член в сумме (52.9) будет функцией только от разности $\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t$, что соответствует волне, распространяющейся в направлении $\mathbf{k}$.

Сравнив разложения (52.9) и (52.1), находим, что их коэффициенты связаны равенствами

$$\mathbf{A}_\mathbf{k} = \mathbf{a}_\mathbf{k} + \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*$$

а в силу (52.10) производные по времени

$$\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = -ick (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*)$$

Подставив это в (52.8), выразим энергию поля через коэффициенты разложения (52.9).

Члены с произведениями вида $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\mathbf{a}_{-\mathbf{k}}$ или $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*\mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*$ взаимно сокращаются; заметив также, что суммы $\sum \mathbf{a}_{\mathbf{k}}\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*$ и $\sum \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}\mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^*$ отличаются лишь обозначением переменной суммирования и потому совпадают друг с другом, получим окончательно:

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}}, \quad \mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \frac{k^2 V}{2\pi} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = -i\omega_k \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*) = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}$$

Функция Гамильтона поля получается подстановкой этих выражений в энергию (52.11):

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{H}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2 + \omega_k^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2)$$

При этом уравнения Гамильтона $\partial \mathcal{H} / \partial \mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}$ совпадают с равенствами $\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}$, которые, таким образом, действительно оказываются следствием уравнений движения (это достигнуто надлежащим выбором коэффициента в преобразовании (52.13)).

Уравнения же $\partial \mathcal{H} / \partial \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = -\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ приводят к уравнениям

$$\ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}} + \omega_k^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = 0$$

т.е. тождественны с уравнениями поля.

Каждый из векторов $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ перпендикулярен к волновому вектору $\mathbf{k}$, т.е. имеет по две независимые компоненты.

Направление этих векторов определяет направление поляризации соответствующей бегущей волны.

Обозначив две компоненты вектора $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ (в плоскости,

перпендикулярной $\mathbf{k}$) посредством $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}j}, j = 1, 2$, имеем $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2 = \sum_j Q_{\mathbf{k}j}^2$, и аналогично для

$\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$.

Тогда

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}j} \mathcal{H}_{\mathbf{k}j}, \quad \mathcal{H}_{\mathbf{k}j} = \frac{1}{2} (P_{\mathbf{k}j}^2 + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k}j}^2)$$

Мы видим, что функция Гамильтона распадается на сумму независимых членов, каждый из которых содержит только по одной паре величин $Q_{\mathbf{k}j}, P_{\mathbf{k}j}$.

Каждый такой член соответствует бегущей волне с определенными волновым вектором и поляризацией.

При этом $\mathcal{H}_{\mathbf{k}j}$ имеет вид функции Гамильтона одномерного «осциллятора», совершающего простые гармонические колебания.

Поэтому о полученном разложении говорят иногда как о разложении поля на осцилляторы.

Выпишем формулы, выражающие в явном виде поле через переменные $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}, \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$. Из (52.13) имеем:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\pi}{V}} (\mathbf{P}_{\mathbf{k}} - i\omega_k \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}), \quad \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* = -\frac{i}{k} \sqrt{\frac{\pi}{V}} (\mathbf{P}_{\mathbf{k}} + i\omega_k \mathbf{Q}_{\mathbf{k}})$$

Подставляя эти выражения в (52.1), найдем векторный потенциал поля:

$$\mathbf{A} = \sqrt{\frac{4\pi}{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k} (ck \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \cos \mathbf{k}\mathbf{r} - \mathbf{P}_{\mathbf{k}} \sin \mathbf{k}\mathbf{r})$$

Для электрического и магнитного полей получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= - \sqrt{\frac{4\pi}{V}} \sum_{\mathbf{k}} (ck \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \sin \mathbf{k}\mathbf{r} + \mathbf{P}_{\mathbf{k}} \cos \mathbf{k}\mathbf{r}) \\ \mathbf{H} &= - \sqrt{\frac{4\pi}{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k} (ck [\mathbf{k} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}] \sin \mathbf{k}\mathbf{r} + [\mathbf{k} \mathbf{P}_{\mathbf{k}}] \cos \mathbf{k}\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Интерпретация разложения на осцилляторы

(пока так)

У нас в каждой точке пространства есть свой осциллятор (??)

(??? пока не знаю, как это интерпретировать.)

О случаях применения

хз вообще, но чем-то напоминает квантование, потом разберусь, когда усвою это.

О применениях в методе квантования поля (?)

(вроде тут как раз переход к квантовому полю можно увидеть.)

О применениях в волноводах

(до туда пока не дошел, тем не менее, слышал, что там это нужно)

11.1.8 Laws of Dynamics of a Vector Field in a Medium

(тоже типичная заготовка для электродинамики.)

11.2 Main Modifications of the Electromagnetic Field

11.2.1 Construction of a Massive Vector Field

(эта теория во всю будет использоваться в ЭМ поле, там будет меньше теории, тут - меньше применений)

применения векторных полей

Электромагнитное поле как раз векторное.

Теория массивного поля

Релятивистское волновое уравнение для массивного векторного поля, то есть уравнение Прока, имеет вид

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} - m^2 \varphi^{\mu} = 0$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \varphi_{\nu} - \partial_{\nu} \varphi_{\mu}$.

Наша цель состоит в нахождении лагранжиана, ведущего к этому уравнению.

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2\varphi_\mu\varphi^\mu$$

и покажем, что он действительно ведет к уравнению Прока.

Запишем действие

$$S_0[\varphi] = \int_{\Omega} d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2\varphi_\mu\varphi^\mu \right\}$$

и вычислим его вариацию.

Имеем

$$\delta S_0[\varphi] = \int_{\Omega} d^4x \left\{ \delta \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2}m^2\delta\varphi_\mu\varphi^\mu + \frac{1}{2}m^2\varphi_\mu\delta\varphi^\mu \right\}$$

Вариацию первого слагаемого мы уже вычисляли, Она имеет вид

$$- \int_{\Omega} d^4x (\partial_\nu F^{\mu\nu}) \delta\varphi_\mu$$

Поэтому

$$\delta S_0[\varphi] = \int_{\Omega} d^4x (-\partial_\nu F^{\mu\nu} + m^2\varphi^\mu) \delta\varphi_\mu$$

Следовательно

$$\frac{\delta S_0[\varphi]}{\delta\varphi_\mu} = -\partial_\nu F^{\mu\nu} + m^2\varphi^\mu$$

И тогда уравнение движения есть

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} - m^2\varphi^\mu = 0$$

(получается, выше - вся теория наша)

посмотрим далее на свойства массивных векторных полей.

Лагранжиан (53) называется лагранжианом Прока.

Заметим, что этот Лагранжиан не является калибровочно инвариантным.

Действительно

$$\delta\mathcal{L}_0 = \delta \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2}m^2\delta(\varphi_\mu\varphi^\mu) = m^2\varphi^\mu\delta\varphi_\mu = m^2\varphi^\mu\partial_\mu\xi \neq 0$$

11.2.2 Equations of the Electromagnetic Field in Other Dimensions (??)

Уравнения электромагнитного поля в 2D (??)

(по идее выше теория должна про это давать этот раздел, скорее всего её переделать нужно, потому что пока гуглить это приходится, благо оно гуглится.)

(см. Two, Three and Four-Dimensional Electromagnetics Using Differential Forms Karl F. WARNICK1, Peter RUSSER)

Электромагнитное поле в 4D (!!!!!)

(погуглю статьи про это, впишу!!!)

11.2.3 Other Theoretical Properties of the Electromagnetic Field

Общие свойства в зависимости от размерности (??)

(на ютубе раз выпалов видео, не понял, но потом могу посмотреть его еще раз.)

Dirac-like form of Maxwell equations (??)

(я хз, что это такое, но Варламов много статей про это пишет, так что мб подумаю про это когда-то.)

12 Spinor Fields

(очень большая тема, так что части на нее будет достаточно.)

12.1 Dirac Field

12.1.1 Fundamentals of Spinor Field

Уравнение Дирака по Степаньянцу

Выясним теперь, каким образом можно описать электрон, который представляет собой частицу со спином $1/2$. (В этой части мы будем рассматривать только случай четырехмерного пространства-времени.) Оказывается [1], что для этого необходимо построить четырехкомпонентный столбец

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix},$$

который некоторым специальным образом преобразуется под действием преобразований Лоренца (закон преобразования спинора при преобразованиях Лоренца будет построен в Части 3.1.3). Такой столбец называется дираковским спинором. (Почему для описания электрона необходимо строить именно такой объект, станет понятно несколько далее.)

Кроме того, компоненты ψ_1, ψ_2, ψ_3 и ψ_4 , строго говоря, являются не числами, а антикоммутирующими переменными, произведение которых меняет знак при перестановке местами любых двух сомножителей. Например, справедливыми являются следующие равенства:

$$\psi_1\psi_2 = -\psi_2\psi_1; \quad \psi_1^2 = -\psi_1^2 = 0; \quad c\psi_1 = \psi_1c,$$

где c - произвольное комплексное число. Несмотря на то, что на классическом уровне антикоммутация спинорных компонент далеко не всегда существенно влияет на физические результаты, о ней всегда необходимо помнить при работе со спинорными полями.

Динамика свободного электрона описывается уравнением Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0,$$

где γ^μ - некоторые матрицы размера 4×4 , удовлетворяющие антикоммутационному соотношению

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \cdot 1$$

а m - некоторый вснественный числовой параметр, физический смысл которого будет ныяснен далее. Поскольку в наших обозначениях $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, то можно выбрать γ -матрицы в виде ¹⁾

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}.$$

где кажлый элемент является блоком размера 2×2 , а σ_i представляют собой матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выполнение соотношения (3.4) может быть легко проверено с помощью непосредственного перемножения матриц (см. Задачу 2). При провсдении этого вычисления (как и во многих других случаях) особенно удобным оказывается использование блочной формы записи γ -уатриц (3.5) и свойств матриц Паули, наиболее важными из которых являются эрмитовость $\sigma_i^+ = \sigma_i$ и тождество

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \cdot 1 + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

проверенное в Задаче 1. Заметим также, что построенные выше γ -матрицы удовлетворяют соотношению

$$\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = (\gamma^\mu)^+,$$

которое доказано в Задаче 2. Благодаря условию (3.4) при умножении уравнения Дирака (3.3) на $(i\gamma\partial_\nu|m)$ получается (Задача 3) уравнение Клейна-Гордона-Фока

$$(\partial^2 + m^2) \dot{\psi} = 0.$$

Поэтому аналогично случаю скалярного поля, детально рассмотренного в Части 2.1. мы находим, что в импульсном представлении

$$\psi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik_\nu x^\nu} \delta(k_\alpha^2 - m^2) \psi(k).$$

причем после подстановки (3.10) в уравнение Дирака (3.3) оказывается, что

$$(\gamma^\mu k_\mu - m) \psi(k) = 0$$

Как обычно, из формулы (3.10) мы заключаем, что параметр m представляет собой массу поля ψ . С использованием приведенных рансе выражений для γ -матриц, в Задаче 4 получено, что в явном виде решение уравнения (3.11) при $m \neq 0$ записывается как

$$\psi(k) = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_{12} \\ \frac{1}{m} (k_0 + \sigma \mathbf{k}) \psi_{12} \end{pmatrix},$$

где $\dot{\psi}_{12}$ - произвольный двухкомпонентный комплексный столбец. Таким образом, независимыми являются только две компоненты спинора $\psi(k)$. Другими словами, на массовой позерхности (т.е. при использовании свободных уравнений движения) дираковское спинорное поле имеет 2 комплексные (или 4 вещественные) степени свободы. В Задаче 4 также найдено выражение для $\dot{\psi}(k)$ в случае, если $m = 0$, и показано, что это решение также имеет две комплексные степени свободы.

С использованием тождества (3.8) уравнение Дирака (3.3) после применения операции эрмитова сопряжения может быть записано как

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m \bar{\psi} = 0,$$

где $\bar{\psi} \equiv v^{-}\gamma^0$ - т.н. дираковски сопряженный спинор. Подробный вывод уравнения (3.13) приведен в Задаче 5.

В Задаче 6 показано, что уравнение Дирака (3.3) может быть получено из лагранжиана

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu v - m\bar{\psi}v.$$

При этом, как и в случае скалярного поля, поля $\bar{v}$ и ψ рассматриваются как независимые полевые переменные. При варьировании по $\bar{\psi}$ получается обычное уравнение Дирака (3.3), а при варьировании по ψ - эрмитово сопряженное уравнение (3.13).

Лагранжиан (3.14) является инвариантным относительно глобальных калибровочных преобразований

$$\psi \rightarrow e^{-i\kappa\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} = \psi^+\gamma^0 \rightarrow \psi^+e^{ie\alpha}\gamma^0 = \bar{v}e^{ie\alpha},$$

причем $\alpha \neq \alpha(x)$. Сохраняющийся ток, соответствующий этим преобразованиям, может быть легко получен по теореме Нетер или с помощью метода Нетер. В Задаче 7 показано, что этот ток записывается в виде

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu v.$$

Закон его сохранения $\partial_\mu j^\mu = 0$ может быть легко проверен явным вычислением (Задача 7).

В заключение обратим внимание, что при преобразованиях $\gamma^\mu \rightarrow M\gamma^\mu M^{-1}$, где $M \neq M(x)$ - некоторая постоянная матрица, свойство (3.4) с очевидностью сохраняется. Кроме того мы будем дополнительно требовать унитарность матрицы M ($M^{-1} = M^+$), так что свойство (3.8) также сохраняется. Поэтому выбор γ -матрицы в форме (3.5) не является единственным. Тем не менее, большинство свойств γ -матриц от их конкретного вида не зависят. Как мы увидим далее, физические результаты также не зависят от конкретного выбора формы или, как говорят, представления γ -матриц. Пока же заметим, что если спинор ψ_M удовлетворяет уравнению

$$(iM\gamma^\mu M^{-1}\partial_\mu - m)\psi_M = 0,$$

то после замены $\psi_M = M\psi$, для спинора ψ получается обычное уравнение Дирака (3.3). Функция Лагранжа (3.14) также с очевидностью является инвариантной относительно преобразований $\gamma^\mu \rightarrow M^\mu M^{-1}$, $v \rightarrow M\psi$. Задачи 1. Проверить, что для матриц Паули справедливо тождество

$$\sigma_1\sigma_j = \delta_{ij} \cdot 1 + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

Рассмотрим, например, случай $i = j = 1$. Тогда, после перемножения матриц, получаем, что

$$\sigma_1^2 = 1 = \delta_{11} \cdot 1 + i\epsilon_{11k}\sigma_k$$

Если же $i \neq j$. скажем, $i = 1, j = 2$, то

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = \delta_{12} \cdot 1 + i\epsilon_{12k}\sigma_k$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Поскольку $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$, а $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, то из доказанного тождества получаем, что

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}; \quad \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

2. Убедиться в справедливости равенств $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \cdot 1$ и $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = (\gamma^\mu)'$ для γ -матриц, определяемых с помощью (3.5). В явной форме γ -матрицы Дирака запишутся

как

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

откуда видно, что $(\gamma^0)^\top = \gamma^0$, а $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$.

Проверим теперь антикоммутационное соотношение $\gamma^{\mu\nu}\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \times \times 1$. Для этого более удобно использовать блочную форму γ -матриц и доказанное в предыдущей задаче тождество

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij} \cdot 1.$$

Тогда, перемножая матрицы (3.5), легко получаем, что

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= 1 = \eta^{00} \cdot 1 \\ \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 &= 0 \\ \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i &= -2\delta_{ij} = 2\eta^{ij} \cdot 1, \end{aligned}$$

поскольку $\eta^{ij} = -\delta_{ij}$. Это и доказывает тождество $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \cdot 1$, из которого следует, что

$$\begin{aligned} \gamma^0\gamma^0\gamma^0 &= \gamma^0 = (\gamma^0)^+ \\ \gamma^0\gamma^i\gamma^0 &= -\gamma^i\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^i = (\gamma^4)^-. \end{aligned}$$

Умножая равенство $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = (\gamma^\mu)^+$ слева и справа на γ^0 , получаем эквивалентное тождество $\gamma^\mu(\gamma^\mu)^+\gamma^0 = \gamma^\mu$. 3. Получить уравнение Клейна-Гордона-Фока из уравнения Дирака. Умножая уравнение Дирака $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$ на $(-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)$, получаем, что

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = (\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu + m^2)\psi = \\ &= \left(\frac{1}{2}(\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu)\partial_\nu\partial_\mu + m^2\right)\psi = (\partial_\mu^2 + m^2)\psi \end{aligned}$$

поскольку $\gamma^\nu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu = \gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu = \gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu$.

4. Найти решение свободного уравнения Дирака в импульсном представлении.

В Задаче 3 показано, что при умножении на $(-i\gamma^\nu\partial_\nu - m)$ уравнение Дирака переходит в уравнение Клейна-Гордона-Фока

$$(\partial^2 + m^2)\psi = 0$$

Как было выяснено в Части 2.1, его решением является функция

$$\psi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik_\nu x^\nu} \delta(k_\alpha^2 - m^2) \psi(k).$$

При подстановке этого решения в уравнение Дирака $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$ мы находим, что $\psi(k)$ должно удовлетворять уравнению

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)\psi(k) = 0$$

Представляя спинор $\downarrow(k)$ как

$$v = \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{34} \end{pmatrix}.$$

где ψ_{12} и ψ_{34} - некоторые двухкомпонентные столбцы. и используя явные выражения для γ -матриц, получаем, что

$$\begin{cases} (k_0 - \sigma \mathbf{k}) \psi_{34} - m \psi_{12} = 0; \\ (k_0 + \sigma \mathbf{k}) \psi_{12} - m \psi_{34} = 0. \end{cases}$$

где мы положили $k^{3*} = (k_0, \mathbf{k})$. Умножая второе из уравнений (3.31) на $(k_0 - \sigma \mathbf{k})$ и учитывая, что $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$, имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= (k_0^2 - \sigma_i \sigma_j k_i k_j) \psi_{12} - m (k_0 - \sigma \mathbf{k}) \psi_{34} = \\ &= (k_0^2 - \mathbf{k}^2) \psi_{12} - m (k_0 - \sigma \mathbf{k}) \psi_{34} = m^2 \psi_{12} - m (k_0 - \sigma \mathbf{k}) \psi_{34}. \end{aligned}$$

Это означает, что уравнения (3.31) являются линейно зависимыми. Поэтому с их помощью мы можем только связать между собой столбцы ψ_{12} и ψ_{34} . Выражая, например, ψ_{34} из второго из уравнений (3.31), получаем, что

$$\psi(k) = \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \frac{1}{m} (k_0 + \sigma \mathbf{k}) \psi_{12} \end{pmatrix}.$$

Компоненты столбца ψ_{12} при этом не определяются и могут принимать произвольные значения. В случае $m = 0$ из уравнений (3.31) получается, что

$$\begin{pmatrix} k^0 + k^3 & k^1 - ik^2 \\ k^1 + ik^2 & k^0 - k^3 \end{pmatrix} \psi_{12} = 0; \quad \begin{pmatrix} k^0 - k^3 & -k^1 + ik^2 \\ -k^1 - ik^2 & k^0 + k^3 \end{pmatrix} \psi_{34} = 0$$

Благодаря условию $k_0^2 = \mathbf{k}^2$ определители обеих матриц равны 0 и, следовательно, в каждой системе будет только одно независимое уравнение. При этом решение запишется в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} (-k^1 + ik^2) \xi_1 \\ (k^0 + k^3) \xi_1 \\ (k^1 - ik^2) \xi_2 \\ (k^0 - k^3) \xi_2 \end{pmatrix}$$

и вновь будет зависеть от двух произвольных величин ξ_1 и ξ_2 . 5. Получить эрмитово сопряженное уравнение Дирака. Применяя к уравнению Дирака операцию эрмитова сопряжения, с использованием равенства $(\gamma^0)^2 = 1$, следующего из (3.4), получаем, что

$$0 = -i\partial_\mu \psi^- (\gamma^\mu)^+ - m\psi^+ = - (i\partial_\mu (\psi^+ \gamma^0) (\gamma^0 (\gamma^\mu)^+ \gamma^0) + m\psi^+ \gamma^0) \gamma^0. \quad (3.36)$$

Обозначая $\bar{\psi} \equiv \psi^+ \gamma^0$ и принимая во внимание тождество $\gamma^0 (\gamma^{\beta 1})^+ \gamma^0 = \gamma^{\mu i}$, мы приходим к уравнению

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

6. Получить уравнения движения, следующие из лагранжиана

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi$$

Как и в случае комплексного скалярного поля, ψ и $\bar{\psi}$ могут рассматриваться как независимые полевые переменные. Поскольку лагранжиан (3.38) не содержит производных поля $\bar{\psi}$, то соответствующим уравнением Лагранжа будет

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi,$$

которое совпадает с уравнением Дирака. При варьировании по полю ψ имеем:

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m \bar{\psi}.$$

При этом необходимо обратить внимание на появление дополнительного знака минус в последнем равенстве, который связан с антикоммутиацией спинорных полей.

7. Найти сохраняющийся ток, соответствующий глобальным калибровочным преобразованиям $\psi \rightarrow e^{-ie\alpha} \psi$. Проверить его сохранение явным вычислением.

Очевидно, что при бесконечно малых глобальных калибровочных преобразованиях $\delta x^\mu = 0$, в то время как $\delta \psi = -ie\alpha \psi$ и $\delta \bar{\psi} = ie\alpha \bar{\psi}$. Поскольку в соответствии с теоремой Нетер ')

$$0 = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta \psi - \delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = -\alpha \partial_\mu (e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi),$$

сохраняющийся ток запишется как

$$j^\mu = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi.$$

То же самое выражение может быть получено с помощью метода Нетер. Проверим теперь сохранение тока (3.42) явным вычислением. Имеем:

$$\partial_\mu j^\mu = -e (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - e \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi.$$

Выражая $\gamma^\mu \partial_\mu \psi$ и $(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu$ из уравнения Дирака и сопряженного ему уравнения (3.13), мы находим, что

$$\partial_\mu j^\mu = -ime \bar{\psi} \psi + ime \bar{\psi} \psi = 0.$$

3.1.2. Алгебра γ -матриц.

Наряду с γ^μ в теории поля широко используются некоторые другие связанные с ними матрицы, которые будут подробно описаны в этой части. Определим матрицы $\gamma^{\mu\nu}$ и γ_5 как (Напомним, что $\varepsilon_{0123} = -\varepsilon^{0123} = -1$.) С использованием свойства (3.7) несложно проверить, что в явном виде матрицы (3.45) и (3.46) записываются как

$$\gamma^{0i} = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}; \quad \gamma^{ij} = -i\varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix};$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В Задаче 1 показано, что матрица γ_5 антикоммутирует со всеми матрицами γ^μ :

$$\gamma_5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma_5 = 0$$

откуда легко убедиться, что γ_5 будет антикоммутировать с произвольными произведениями нечетного числа γ -матриц и коммутировать с произвольными произведениями четного числа γ -матриц (например, с $\gamma^{\mu\nu}$). Также в Задаче 1 доказано выполнение тождеств $\gamma_5^2 = 1$ и $\gamma_5^+ = \gamma_5$

Как мы уже отмечали, переход от одной формы (представления) γ -матриц к другой осуществляется с помощью преобразования

$$\gamma^\mu \rightarrow M \gamma^\mu M^{-1},$$

при котором, с очевидностью, $\gamma_5 \rightarrow M\gamma_5M^{-1}$ и $\gamma^{\mu\nu} \rightarrow M\gamma^{\mu\nu}M^{-1}$. Однако, все перечисленные выше свойства этих матриц, так же, как и γ^μ , не зависят от выбора конкретного представления.

Еще одной важной конструкцией является матрица зарядового сопряжения C , определяемая при помощи условий

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T; \quad C^{-1} = C^+ = -C^*.$$

Несложно проверить (Задача 2), что в представлении (3.5) таким свойствам удовлетворяет матрица

$$C = i\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание (Задача 2), что при переходе к другому представлению для γ -матриц $C \rightarrow M^*CM^{-1}$, благодаря чему равенство $C = i\gamma^0\gamma^2$ имеет место не во всех представлениях. Несложно понять, что оно будет справедливо только в том случае, если матрица M является вещественной.

Построенные выше матрицы γ_5 и $\gamma^{\mu\nu}$, как и γ^μ , представляют собой некоторые (комплексные) матрицы размера 4×4 . Очевидно, что такие матрицы образуют линейное пространство над полем комплексных чисел, размерность которого равна 16. В этом пространстве можно ввести скалярное произведение как

$$(A, B) = \frac{1}{4} \text{tr}(AB)$$

Такое скалярное произведение билинейно, не зависит от выбора представления для γ -матриц, однако не является положительно определенным (Задача 4). Имеет место важное утверждение. След произвольного произведения нечетного числа матриц γ^μ равен 0. (Доказательство приведено в Задаче 3.) С учетом того, что матрица γ_5 является произведением четырех γ матриц, а $\gamma^{\mu\nu}$ - линейной комбинацией произведений двух γ -матриц, это утверждение может быть использовано и при исследовании следов от более сложных произведений.

Несложно понять, что в качестве базиса в пространстве матриц 4×4 можно выбрать $1, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, \gamma^{\mu\nu}$. Действительно, как показано в Задаче 4, эти матрицы являются взаимно ортогональными по отношению к скалярному произведению (3.53), т.е. скалярное произведение двух различных матриц оказывается равным 0. Нетривиальными являются только произведения одинаковых матриц, которые сводятся к

$$\begin{aligned} \text{tr}(1) &= 4; \quad \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu} \\ \text{tr}(\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}) &= 4(\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}) \end{aligned}$$

(Доказательство этих тождеств дано в Задаче 4.) Кроме того, необходимо отметить еще три полезные тождества, которые выведены в Задаче 4:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta) &= 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}) \\ \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5) &= 0; \quad \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_5) = -4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \end{aligned}$$

В Задаче 5 показано, что из условия ортогональности следует линейная независимость матриц $1, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, \gamma^{\mu\nu}$, число которых есть $1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16$ и равно размерности пространства матриц 4×4 . Поэтому такие матрицы действительно образуют некоторый

базис. С помощью равенств (3.54) несложно проверить, что условие полноты запишется как

$$(1)_a^b (1)_c^d + (\gamma_5)_a^b (\gamma_5)_c^d + (\gamma^\mu)_a^b (\gamma_\mu)_c^d - (\gamma^\mu \gamma_5)_a^b (\gamma_\mu \gamma_5)_c^d - \frac{1}{2} (\gamma^{\mu\nu})_a^b (\gamma_{\mu\nu})_c^d = 4\delta_a^d \delta_c^b$$

Данное соотношение обычно называется тождеством Фирца. В его справедливости легко убедиться, умножая обе части равенства на $(1)_b^a$, $(\gamma_5)_b^a$ и т.д. При умножении тождества (3.56) на χ_d слева и $\bar{\psi}^c$ справа, с учетом антикоммутации спинорных полей получаем, что

$$\begin{aligned} \chi_a \bar{\psi}^b = & -\frac{1}{4} \delta_a^b (\bar{\psi} \chi) - \frac{1}{4} (\gamma_5)_a^b (\bar{\psi} \gamma_5 \chi) - \frac{1}{4} (\gamma^\mu)_a^b (\bar{\psi} \gamma_\mu \chi) + \\ & + \frac{1}{4} (\gamma^\mu \gamma_5)_a^b (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \chi) + \frac{1}{8} (\gamma^{\mu\nu})_a^b (\bar{\psi} \gamma_{\mu\nu} \chi). \end{aligned}$$

Еще одно полезное следствие тождества Фирца получается при его умножении на элементы M_b^a некоторой матрицы M :

$$\begin{aligned} M = & \frac{1}{4} \text{tr } M + \frac{1}{4} \gamma_5 \text{tr } (M \gamma_5) + \frac{1}{4} \gamma^\mu \text{tr } (M \gamma_\mu) - \\ & - \frac{1}{4} \gamma^\mu \gamma_5 \text{tr } (M \gamma_\mu \gamma_5) - \frac{1}{8} \gamma^{\mu\nu} \text{tr } (M \gamma_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Для того чтобы функция Лагранжа дираковского поля и ток j^μ были бы вещественными, операция комплексного сопряжения для антикоммутирующих величин должна быть определена следующим образом (Задача 6):

$$(\psi_1 \psi_2)^* \equiv \psi_2^* \psi_1^*.$$

При этом будут иметь место равенства (Задача 6)

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \chi)^* &= \bar{\chi} \psi; & (\bar{\psi} \gamma_5 \chi)^* &= -\bar{\chi} \gamma_5 \psi \\ (\bar{\psi} \gamma^\mu \chi)^* &= \bar{\chi} \gamma^\mu \psi; & (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \chi)^* &= \bar{\chi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \\ (\bar{\psi} \gamma^{\mu\nu} \chi)^* &= -\bar{\chi} \gamma^{\mu\nu} \psi \end{aligned}$$

Поэтому выражения $\bar{\psi} \psi$, $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ и $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ являются вещественными, а выражения $\bar{\psi} \gamma_5 \psi$ и $\bar{\psi} \gamma^{\mu\nu} \psi$ - чисто мнимыми.

С-?.1

Доказать тождества $\gamma_5^2 = 1$, $\gamma_5^+ = \gamma_5$ и $\gamma_5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma_5 = 0$. В используемом нами представлении для γ -матриц первые два свойства с очевидностью следуют из (3.48). Последнее тождество также легко проверяется прямой подстановкой приведенных ранее выражений для матриц γ^μ и γ_5 . При переходе к другому представлению для γ -матриц, получаем, что (с учетом унитарности матрицы M)

$$\begin{aligned} M \gamma_5 M^{-1} M \gamma^\mu M^{-1} + M \gamma^\mu M^{-1} M \gamma_5 M &= M (\gamma_5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma_5) M^{-1} = 0 \\ M \gamma_5 M^{-1} M \gamma_5 M^{-1} &= M \gamma_5^2 M^{-1} = M M^{-1} = 1 \\ (M \gamma_5 M^{-1})^+ &= (M \gamma_5 M^{-1})^+ = M \gamma_5^+ M^{-1} = M \gamma_5 M^{-1} \end{aligned}$$

Это означает, что рассматриваемые тождества имеют место вне зависимости от конкретного выбора представления γ -матриц.

С-?.2

Убедиться, что для матрицы $C = i\gamma^0\gamma^2$ в представлении (3.5) справедливы тождества

$$C^{-1} = C^+ = -C^*; \quad C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^\top$$

Найти, как меняется матрица C при переходе к другому представлению для γ -матриц. Рассмотрим сначала случай, когда γ -матрицы выбраны в форме (3.5). Ранее было доказано, что $(\gamma^0)^+ = \gamma^0$, а $(\gamma^i)^+ = -\gamma^i$. Поэтому с использованием тождества $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$ и явного вида матрицы C мы находим, что

$$\begin{aligned} C^- &= -i(\gamma^2)^*(\gamma^0)^+ = i\gamma^2\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^2 = -C = -C^* \\ CC^+ &= -\gamma^0\gamma^2\gamma^2\gamma^0 = 1 \end{aligned}$$

что доказывает первое тождество.

Для доказательства второго мы замечаем, что матрицы γ^0 и γ^2 являются симметричными, а матрицы γ^1 и γ^3 - антисимметричными. Тогда, используя антикоммутационные соотношения для γ -матриц, получаем, что

$$\begin{aligned} C\gamma^0 C^{-1} &= \gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^0\gamma^2 = -\gamma^0 = -(\gamma^0)^\top \\ C\gamma^1 C^{-1} &= \gamma^0\gamma^2\gamma^1\gamma^0\gamma^2 = \gamma^1 = -(\gamma^1)^\top \\ C\gamma^2 C^{-1} &= \gamma^0\gamma^2\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = -\gamma^2 = -(\gamma^2)^\top \end{aligned}$$

Случай матрицы γ^3 исследуется аналогично матрице γ^1 . Теперь с помощью преобразования $\gamma^\mu \rightarrow M\gamma^\mu M^{-1}$ перейдем к другому представлению для γ -матриц. Несложно понять, что требуемые свойства матрицы C сохраняются, если $C \rightarrow M^*CM^{-1}$. Действительно, в силу унитарности матрицы M

$$\begin{aligned} (M^*CM^{-1})^{-1} &= MC^{-1}M^\top = (M^*CM^{-1})^+ = -(M^*CM^+)^\top \\ M^*CM^{-1}M\gamma^\mu M^{-1}MC^{-1}M^\top &= M^*C\gamma^\mu C^{-1}M^\top = \\ &= -M^*(\gamma^\mu)^\top M^\top = -(M\gamma^\mu M^{-1})^\top \end{aligned}$$

С-?.3 След произвольного произведения нечетного числа γ -матриц

Доказать, что след произвольного произведения нечетного числа γ -матриц равен 0.

Поскольку $(\gamma_5)^2 = 1$, а след произведения матриц не меняется при циклических перестановках сомножителей, то

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n-1}}) &= \text{tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n-1}}\gamma_5\gamma_5) = \\ &= \text{tr}(\gamma_5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n-1}}\gamma_5) \end{aligned}$$

Затем, используя антикоммутацию γ_5 и γ^μ , мы можем вернуть первую из матриц γ_5 в конец, совершив $(2n-1)$ перестановку. Поскольку при каждой перестановке меняется знак, то мы получаем, что

$$\text{tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n-1}}) = 0$$

что и требовалось доказать.

4.

Проверить, что матрицы $1, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5$ и $\gamma^{\mu\nu}$ взаимно ортогональны и удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned} \text{tr}(1) &= 4; \quad \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}; \quad \text{tr}(\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}) = 4(\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}) \\ \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5) &= 0; \quad \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_5) = -4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \end{aligned}$$

Используя приведенные ранее явные выражения для рассматриваемых матриц и утверждение Задачи 3, легко убедиться, что след произведения двух любых (из вышеперечисленных) различных матриц равен 0. Поскольку

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \div \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = \eta^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu},$$

то с учетом легко проверяемых равенств $\text{tr } 1 = 4$ и $\text{tr } \gamma^{\mu\nu} = 0$ находим, что

$$\text{tr } (\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}.$$

Как следствие, заключаем, что скалярное произведение $\text{tr}(AB)/4$ не является положительно определенным. Для доказательства тождества

$$\text{tr } (\gamma^{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta\gamma}) = 4 (\eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta})$$

рассмотрим выражение $\text{tr } (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta)$. Будем последовательно антикоммутировать γ^μ со всеми остальными γ -матрицами, используя соотношение (3.4). Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr } (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) &= 2\eta^{\mu\nu} \text{tr } (\gamma^\alpha \gamma^\beta) - \text{tr } (\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = \\ &= 2\eta^{\mu\nu} \text{tr } (\gamma^\alpha \gamma^\beta) - 2\eta^{\mu\alpha} \text{tr } (\gamma^\nu \gamma^\beta) + \text{tr } (\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta) = \\ &= 2\eta^{\mu\nu} \text{tr } (\gamma^\alpha \gamma^\beta) - 2\eta^{\mu\alpha} \text{tr } (\gamma^\nu \gamma^\beta) + 2\eta^{\mu\beta} \text{tr } (\gamma^\nu \gamma^\alpha) - \text{tr } (\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta) \end{aligned}$$

Принимая во внимание инвариантность следа относительно циклических перестановок, получаем, что

$$\text{tr } (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - 4\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + 4\eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}.$$

А поскольку из определения матриц $\gamma^{\alpha\beta}$ следует равенство

$$\text{tr } (\gamma^{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta}) = \frac{1}{4} \text{tr } ((\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) (\gamma^\alpha \gamma^\beta - \gamma^\beta \gamma^\alpha)).$$

мы легко получаем требуемое тождество после элементарных арифметических операций. Заметим также, что

$$\text{tr } (\gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu \gamma_5) = -\text{tr } (\gamma^\mu \gamma^\nu) = -4\eta^{\mu\nu}.$$

Докажем теперь тождества, в которые входит матрица γ_5 . Используя инвариантность следа при циклических перестановках, а также антикоммутацию γ_5 и γ^μ , имеем:

$$\text{tr } (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5) = \text{tr } (\gamma^\nu \gamma_5 \gamma^\mu) = -\text{tr } (\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_5) = \frac{1}{2} \text{tr } ((\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma_5) = \text{tr } \gamma_5 = 0.$$

Рассмотрим затем величину $\text{tr } (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5)$. В силу предыдущего тождества она антисимметрична по всем своим индексам. Действительно, например,

$$\text{tr } (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5) = \text{tr } ((\gamma^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}) \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5) = \text{tr } (\gamma^{\mu\nu} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5),$$

откуда очевидна антисимметрия по индексам μ и ν . Антисимметрия по всем остальным индексам проверяется аналогично. Как следствие, рассматриваемая величина отлична от 0 только если индексы всех γ -матриц различны. Это означает, что она будет пропорциональна $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$. Для того, чтобы найти коэффициент пропорциональности, вычислим

$$\text{tr } (\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma_5) = -i \text{tr } (\gamma_5)^2 = -i \text{tr } (1) = -4i.$$

Поэтому, окончательно,

$$\text{tr } (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5) = -4i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}.$$

В заключение заметим, что все доказанные соотношения не зависят от выбора представления γ -матриц, поскольку

$$\text{tr } (MAM^{-1}MBM^{-1}) = \text{tr } (M^{-1}MAB) = \text{tr } (AB),$$

где было учтено, что след произведения матриц не меняется при циклических перестановках сомножителей.

5.

Доказать линейную независимость матриц $1, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5$ и $\gamma^{\mu\nu}$. Предположим, что рассматриваемые матрицы линейно зависимы, т.е. существуют нетривиальные коэффициенты $a, a_5, a_\mu, a_{5\mu}, a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}$, такие, что

$$a + a_5 \gamma_5 + a_\mu \gamma^\mu + a_{5\mu} \gamma^\mu \gamma_5 + a_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} = 0.$$

Тогда, вычисляя след от уравнения (3.82), получаем, что $a = 0$. Затем, умножая (3.82) на γ_5 и беря след, получаем, что $a_5 = 0$. Совершая аналогичную операцию для $\gamma^\alpha, \gamma^\alpha \gamma_5$ и $\gamma^{\alpha\beta}$ и используя тождества, полученные в Задаче 4, заключаем, что все коэффициенты в уравнении (3.82) должны быть равны 0, что и доказывает линейную независимость матриц $1, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5$ и $\gamma^{\mu\nu}$.

6.

Доказать тождества (3.60) и убедиться, что из них следует вещественность действия для дираковского спинора.

Вычислим в качестве примера $(\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \chi)^+$. Принимая во внимание, что $(\psi_a \chi_b)^* = \chi_b^* \psi_a^*$, учитывая эрмитовость матриц γ^0 и γ_5 , а также тождество $\gamma^0 (\gamma^\mu)' \gamma^0 = \gamma^\mu$, имеем:

$$(\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \chi)^* = (\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma_5 \chi)^h = \chi^\dagger \gamma_5 (\gamma^\mu) \gamma^0 \psi = \bar{\chi} \gamma^0 (\gamma^\mu)^- \gamma^0 \gamma_5 \psi = \bar{\chi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$$

Остальные тождества доказываются аналогичным образом.

Используя тождества (3.60) и совершая интегрирование по частям, получаем, что

$$\begin{aligned} \int d^4x (i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi)^* &= \int d^4x (-i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - m\bar{\psi} \psi) = \\ &= \int d^4x (i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi) \end{aligned}$$

Напряженность от электрона с точки зрения теории Дирака (??)

(оставшийся вопрос, не знаю, вроде никакого вообще ЭМ поля вокруг поля дирака нет, так что можно выкидывать теорию.)

Solution to Dirac equation by Mandl Shawl (?)

(очень важная теория)

The Dirac equation (A.4) possesses plane wave solutions

$$\psi(x) = \text{const.} \begin{Bmatrix} u_r(\mathbf{p}) \\ v_r(\mathbf{p}) \end{Bmatrix} e^{\pm i p x / \hbar}$$

where $p = (E_{\mathbf{p}}/c, \mathbf{p})$ and $E_{\mathbf{p}} = + (m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2)^{1/2}$. In the single-particle theory, $u_r(\mathbf{p})$ corresponds to a particle of momentum $\mathbf{p}$ and positive energy $E_{\mathbf{p}}$, $v_r(\mathbf{p})$ to momentum $-\mathbf{p}$ and negative energy $-E_{\mathbf{p}}$. The index $r = 1, 2$ labels two independent solutions for each four-momentum p , which we shall choose to be orthogonal. The constant four-spinors $u_r(\mathbf{p})$ and $v_r(\mathbf{p})$, and their adjoints

$$\bar{u}_r(\mathbf{p}) = u_r^\dagger(\mathbf{p}) \gamma^0, \quad \bar{v}_r(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p}) \gamma^0$$

satisfy the equations

$$\begin{aligned} (\not{p} - mc)u_r(\mathbf{p}) &= 0 & (\not{p} + mc)v_r(\mathbf{p}) &= 0 \\ \bar{u}_r(\mathbf{p})(\not{p} - mc) &= 0 & \bar{v}_r(\mathbf{p})(\not{p} + mc) &= 0. \end{aligned}$$

With the normalization of these spinors defined by

$$u_r^\dagger(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{mc^2},$$

one derives the following orthonormality relations from Eqs. (A.25) and (A.26):

$$\left. \begin{aligned} u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) &= v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{mc^2}\delta_{rs} \\ u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(-\mathbf{p}) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

and

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) &= -\bar{v}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs} \\ \bar{u}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) &= \bar{v}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = 0 \end{aligned} \right\}.$$

The spinors $u_r(\mathbf{p})$ and $v_r(\mathbf{p})$, $r = 1, 2$, satisfy the completeness relation

$$\sum_{r=1}^2 [u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}) - v_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p})] = \delta_{\alpha\beta}.$$

This relation can be established by showing that it holds for the four basis states $u_s(\mathbf{p})$ and $v_s(\mathbf{p})$, $s = 1, 2$

Ток из поля Дирака

The Dirac Lagrangian has what is commonly called an 'internal vector symmetry'; if we perform a transformation on the Dirac spinor field given by,

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi$$

the corresponding conserved current by Noether's theorem is given by, $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. We can explicitly verify it is conserved:

$$\partial_\mu j^\mu = (\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) = im\bar{\psi}\psi - im\bar{\psi}\psi = 0$$

where, as the OP noted, we have used the equations of motion:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\psi \quad i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu = -m\bar{\psi}$$

which arise by varying the Lagrangian with respect to ψ and $\bar{\psi}$ respectively. The conserved charge due to the conserved current is given by,

$$Q = \int d^3x \psi^\dagger\psi$$

which may be interpreted as electric charge, or after quantization, fermion number.

Energy Projection Operators

The energy projection operators are defined by

$$\Lambda^\pm(\mathbf{p}) = \frac{\pm\not{p} + mc}{2mc}.$$

They have the properties, which follow from Eqs. (A.25) and (A.26), of projecting out the positive/negative energy solutions from a linear combination of the four plane wave states $u_r(\mathbf{p})$ and $v_r(\mathbf{p})$, i.e.

$$\left. \begin{aligned} \Lambda^+(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) &= u_r(\mathbf{p}), & \Lambda^-(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) &= v_r(\mathbf{p}) \\ \bar{u}_r(\mathbf{p})\Lambda^+(\mathbf{p}) &= \bar{u}_r(\mathbf{p}), & \bar{v}_r(\mathbf{p})\Lambda^-(\mathbf{p}) &= \bar{v}_r(\mathbf{p}) \end{aligned} \right\}$$

and

$$\Lambda^+(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) = \Lambda^-(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) = 0, \quad \bar{v}_r(\mathbf{p})\Lambda^+(\mathbf{p}) = \bar{u}_r(\mathbf{p})\Lambda^-(\mathbf{p}) = 0.$$

From Eqs. (A.31) one verifies directly the property characteristic of projection operators

$$[\Lambda^\pm(\mathbf{p})]^2 = \Lambda^\pm(\mathbf{p})$$

(since $\not{p} = p^2 = m^2c^2$), as well as

$$\Lambda^\pm(\mathbf{p})\Lambda^\mp(\mathbf{p}) = 0, \quad \Lambda^+(\mathbf{p}) + \Lambda^-(\mathbf{p}) = 1.$$

Using the completeness relation (A.30), one easily shows that the projection operators $\Lambda^\pm(\mathbf{p})$ can be written

$$\Lambda_{\alpha\beta}^+(\mathbf{p}) = \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}), \quad \Lambda_{\alpha\beta}^-(\mathbf{p}) = -\sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p}).$$

Helicity and Spin Projection Operators

(?? пока тут, потом мб в СТО более подробно занесу, все-таки идея в том, что там эти методы изучаются более подробно, тут лишь применение к самому полю.)

In Section 4.2 we chose the plane wave solutions $u_r(\mathbf{p})$ and $v_r(\mathbf{p})$ of the Dirac equation as eigenstates of the 4×4 spin matrix

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|},$$

satisfying the equations

$$\sigma_{\mathbf{p}}u_r(\mathbf{p}) = (-1)^{r+1}u_r(\mathbf{p}), \quad \sigma_{\mathbf{p}}v_r(\mathbf{p}) = (-1)^rv_r(\mathbf{p}), \quad r = 1, 2.$$

Correspondingly, we now define the operators

$$\Pi^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_{\mathbf{p}})$$

The Dirac Equation 457 which are easily seen to have the properties

$$[\Pi^\pm(\mathbf{p})]^2 = \Pi^\pm(\mathbf{p}), \quad \Pi^\pm(\mathbf{p})\Pi^\mp(\mathbf{p}) = 0, \quad \Pi^+(\mathbf{p}) + \Pi^-(\mathbf{p}) = 1$$

and

$$[\Lambda^+(\mathbf{p}), \Pi^\pm(\mathbf{p})] = [\Lambda^-(\mathbf{p}), \Pi^\pm(\mathbf{p})] = 0.$$

It follows from Eqs. (4.35) and (A.37) that the spinors $u_r(\mathbf{p})$ and $v_r(\mathbf{p})$ satisfy the equations

$$\left. \begin{aligned} \Pi^+(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) &= \delta_{1r}u_r(\mathbf{p}), & \Pi^+(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) &= \delta_{2r}v_r(\mathbf{p}) \\ \Pi^-(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) &= \delta_{2r}u_r(\mathbf{p}), & \Pi^-(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) &= \delta_{1r}v_r(\mathbf{p}) \end{aligned} \right\} \quad r = 1, 2.$$

We see from Eqs. (A.38) that the operators $\Pi^\pm(\mathbf{p})$ are projection operators of mutually orthogonal states. From the first of Eqs. (4.35), it follows that $u_1(\mathbf{p})[u_2(\mathbf{p})]$ represents a positive energy electron with spin parallel [antiparallel] to its direction of motion $\mathbf{p}$, i.e. it is a positive [negative] helicity state, as defined in Section 4.3, following Eq. (4.48). Hence the operators $\Pi^\pm(\mathbf{p})$ are called helicity projection operators.

The corresponding interpretation for the spinors $v_r(\mathbf{p})$ is also possible in the singleparticle theory, either in terms of negative energy states of electrons or in terms of hole theory. Although our discussion of positrons in the quantized field theory in Chapter 4 does not depend on hole theory, a reader familiar with the latter may like to see the connection. Consider, for example,

the spinor $v_1(\mathbf{p})$. In the language of negative energy states, $v_1(\mathbf{p})$ represents a negative-energy electron with momentum $-\mathbf{p}$ and, according to Eqs. (4.35), spin parallel to $-\mathbf{p}$, so that $v_1(\mathbf{p})$ is a positive helicity state of the negative-energy electron. Translated into hole theory language, the absence of this negative-energy electron represents a positron with momentum $+\mathbf{p}$ and spin parallel to $+\mathbf{p}$, i.e. it continues to be a positive helicity state of the positron.

For a zero-mass Dirac particle, we can express the helicity projection operators in terms of the γ^5 matrix. For $m = 0$, we have $p_0 = |\mathbf{p}|$, and Eqs. (A.25) become

$$\gamma'|\mathbf{p}|w_r(\mathbf{p}) = -\gamma^k p_k w_r(\mathbf{p}) = \gamma^k p^k w_r(\mathbf{p})$$

where $w_r(\mathbf{p})$ stands for either $u_r(\mathbf{p})$ or $v_r(\mathbf{p})$. Premultiplying the last equation by $\gamma^5 \gamma^0$ and using Eq. (A.11), we obtain

$$\gamma^5 w_r(\mathbf{p}) = \sigma_{\mathbf{p}} w_r(\mathbf{p})$$

i.e. the helicity projection operators (A.37) become, for $m = 0$,

$$\Pi^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5)$$

For particles of non-zero mass m , this result holds to $O(m/p_0)$ in the high-energy limit. So far we have considered helicity projection operators only. For a Dirac particle, the spin component in an arbitrary direction is a good quantum number in the rest frame of the particle only. We shall see that in the rest frame one can define spin projection operators for an arbitrary axis of quantization in a covariant way, and by carrying out a Lorentz transformation to an arbitrary coordinate frame one can then define spin projection operators in this frame. 458 Quantum Field Theory With the axis of quantization in the rest frame of the particle specified by the unit vector $\mathbf{n}$, we define the unit vector n^μ to be given in the rest frame by

$$n^\mu = (0, \mathbf{n}).$$

From the invariance of scalar products, it follows that in any other frame also

$$n^2 = -1, \quad np = 0,$$

where p is the four-momentum of the particle in this frame. The required spin projection operators are then given by

$$\Pi^\pm(n) = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5 \mathcal{K}).$$

$$\Pi^\pm(n) = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5 \mathcal{K}).$$

One verifies easily that these operators satisfy equations like Eqs. (A.38), characteristic of projection operators, and that they commute with the energy projection operators $\Lambda^\pm(\mathbf{p})$ for all vectors $\mathbf{p}$ satisfying Eq. (A.45). It is left to the reader to verify that, in the rest frame of the particle, the operators (A.46) have the desired properties. A matrix representation suitable for this purpose is given below, Eqs. (A.63)-(A.66).

Relativistic Properties

The Dirac equations for $\psi(x)$ and its adjoint $\bar{\psi}(x)$,

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu} - mc\psi(x) = 0, \quad i\hbar\frac{\partial\bar{\psi}(x)}{\partial x^\mu} \gamma^\mu + mc\bar{\psi}(x) = 0$$

are Lorentz covariant, provided the spinors $\psi(x)$ and $\bar{\psi}(x)$ transform appropriately. We shall consider homogeneous orthochronous Lorentz transformations

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu,$$

i.e. $\Lambda^0_0 > 0$ and $\det \Lambda^\mu_\nu = \pm 1$, so that the sense of time is not reversed, but the transformation may or may not involve spatial inversion. It can be shown ³ that corresponding to each such transformation one can construct a non-singular 4×4 matrix $S = S(\Lambda)$ with the properties

$$\gamma^v = \Lambda^\mu_v S \gamma^\mu S^{-1}$$

and

$$S^{-1} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0.$$

If the transformation properties of the Dirac spinor $\psi(x)$ are defined by

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S\psi(x),$$

then the covariance of the Dirac equations (A.47) is easily established.

From Eqs. (A.50) and (A.51) one derives the corresponding transformation property of the adjoint spinor $\bar{\psi}(x)$ as

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1}.$$

From Eqs. (A.49), (A.51) and (A.52), one obtains the five basic bilinear covariants of the Dirac theory. Under a Lorentz transformation

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\psi}\psi \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \\ \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \\ \bar{\psi}\gamma^5\psi \end{array} \right\} \text{ transforms as a } \left\{ \begin{array}{l} \text{scalar} \\ \text{vector} \\ \text{antisymmetric second - rank tensor} \\ \text{pseudo-vector} \\ \text{pseudo-scalar} \end{array} \right\}$$

Finally, we obtain the explicit form of the transformation (A. 51) for an infinitesimal Lorentz rotation (2.46), i.e.

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x^\nu = (g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}) x^\nu$$

where $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$. Eq. (2.47) now becomes

$$\psi_\alpha(x) \rightarrow \psi'_\alpha(x') = S_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) = \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \right) \psi_\beta(x)$$

or in matrix form

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S\psi(x) = \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right) \psi(x)$$

where $S^{\mu\nu}$ is antisymmetric. Using the orthogonality relation (2.6) for $\Lambda_{\mu\nu}$, we can rewrite Eq. (A.49) as

$$S\gamma^\lambda S^{-1} = \gamma^\nu \Lambda_\nu{}^\lambda$$

Using Eq. (A.55) we can write the left-hand side of Eq. (A.56), to first order in $\varepsilon_{\mu\nu}$, as

$$\gamma^\lambda + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} [S^{\mu\nu}, \gamma^\lambda].$$

From (A.54) the right-hand side of Eq. (A.56) can be written

$$\gamma^v (g_v{}^\lambda + \varepsilon_v{}^\lambda) = \gamma^\lambda + \gamma^v g^{\lambda\mu} \varepsilon_{v\mu} = \gamma^\lambda + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (\gamma^\mu g^{\lambda\mu} - \gamma^v g^{\lambda\mu}).$$

Equating the last two expressions, we obtain

$$\begin{aligned}[S^{\mu\nu}, \gamma'] &= \gamma^\mu g'^\nu - \gamma^\nu g'^\mu, \\ [S^{\mu\nu}, \gamma^\lambda] &= \gamma^\mu g^{\lambda\nu} - \gamma^\nu g^{\lambda\mu},\end{aligned}$$

and one verifies directly that this equation has the solution

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu.$$

Hence, from Eqs. (A.55) and (A.59), and the definition (A.9) of $\sigma^{\mu\nu}$, one finds that under Lorentz rotations a Dirac spinor transforms as

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x) - \frac{i}{4} \varepsilon_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \psi(x).$$

Particular Representations of the γ -Matrices

So far we have developed the Dirac theory in a representation-free way, relying only on the anticommutation relations (A.5) and the Hermiticity conditions (A.6) of the γ -matrices. There are many ways of writing $\gamma^\mu, \mu = 0, \dots, 3$, as 4×4 matrices such that Eqs. (A.5) and (A.6) hold. If $\gamma^\mu, \mu = 0, \dots, 3$, and $\tilde{\gamma}^\mu, \mu = 0, \dots, 3$, are two such sets of matrices, i.e. each set satisfies Eqs. (A.5) and (A.6), then Pauli's fundamental theorem⁴ states that

$$\tilde{\gamma}^\mu = U \gamma^\mu U^\dagger,$$

where U is a unitary matrix. We shall state two particular representations which are useful in practice.

(i) Dirac-Pauli representation.

This representation has a simple non-relativistic limit. In terms of the Pauli 2×2 spin matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

the Dirac matrices can in this representation be written as

$$\left. \begin{aligned} \gamma^0 &= \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \alpha_k &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, & k &= 1, 2, 3 \\ \gamma^k &= \beta \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, & k &= 1, 2, 3 \end{aligned} \right\}$$

whence

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}, & i, j, k &= 1, 2, 3 \text{ in cyclic order,} \\ \sigma^{0k} &= i \alpha_k = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, & k &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

and

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A complete set of plane wave states is now easily constructed. With the two component non-relativistic spinors defined by

$$\chi_1 \equiv \chi'_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 \equiv \chi'_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

the positive and negative energy solutions of the Dirac equation for a particle at rest can be written

$$u_r(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_r(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi'_r \end{pmatrix}, \quad r = 1, 2.$$

Since

$$(mc \pm \not{p})(mc \mp \not{p}) = (mc)^2 - p^2 = 0,$$

it follows that

$$u_r(\mathbf{p}) = \frac{(mc + \not{p})}{\sqrt{(2mE_{\mathbf{p}} + 2m^2c^2)}} u_r(0), \quad r = 1, 2,$$

and

$$v_r(\mathbf{p}) = \frac{(mc - \not{p})}{\sqrt{(2mE_{\mathbf{p}} + 2m^2c^2)}} v_r(0), \quad r = 1, 2,$$

are solutions of the Dirac equation with energy-momentum vectors $\pm p = (\pm E_{\mathbf{p}}/c \pm \mathbf{p})$ respectively. The denominators in Eqs. (A.69) and (A.70) ensure the normalization (A.27). From the representation (A.63) we can write Eq. (A.69) as

$$u_r(\mathbf{p}) = A \begin{pmatrix} \chi_r \\ B\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi_r \end{pmatrix}, \quad r = 1, 2,$$

where

$$A \equiv \left(\frac{E_{\mathbf{p}} + mc^2}{2mc^2} \right)^{1/2}, \quad B \equiv \frac{c}{E_{\mathbf{p}} + mc^2}$$

Using Eqs. (A.62) and (A.67) we finally obtain from (A.71)

$$u_1(\mathbf{p}) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ Bp^3 \\ B(p^1 + ip^2) \end{pmatrix}, \quad u_2(\mathbf{p}) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ B(p^1 - ip^2) \\ -Bp^3 \end{pmatrix}$$

In the same way, the negative energy spinors (A.70) can be written as and

$$v_r(\mathbf{p}) = A \begin{pmatrix} B\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi'_r \\ \chi'_r \end{pmatrix}, \quad r = 1, 2$$

$$v_1(\mathbf{p}) = A \begin{pmatrix} B(p^1 - ip^2) \\ -Bp^3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2(\mathbf{p}) = A \begin{pmatrix} Bp^3 \\ B(p^1 + ip^2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

We see that the spinors (A.73) and (A.75) are, in general, not helicity eigenstates, but eigenstates of the z -component of spin in the rest frame of the particle.

The behavior of these solutions for non-relativistic velocities v (i.e. $v/c \approx |\mathbf{p}|/mc \ll 1$) is easily seen. For the positive energy solutions u_r , the upper two components are very large compared to the lower two components, while for the negative energy solutions it is the lower two components which dominate.

(ii) Majorana representation.

We showed in Section 4.3 that the symmetry of the quantized Dirac field between particles and antiparticles becomes particularly obvious if one works in a Majorana representation, distinguished by the property that the four γ -matrices are pure imaginary, i.e. using a subscript M to denote a Majorana representation we require

$$\gamma_M^{\mu*} = -\gamma_M^\mu, \quad \mu = 0, \dots, 3.$$

A particular Majorana representation γ_M^μ is obtained from the Dirac-Pauli representation, Eqs. (A.63)-(A.66), by the unitary transformation [see Eq. (A.61)]

$$\gamma_M^\mu = U \gamma^\mu U^\dagger,$$

with

$$U = U^\dagger = U^{-1} = \frac{1}{2} \gamma^0 (1 + \gamma^2).$$

Explicitly, the matrices in this Majorana representation are given by

$$\left. \begin{aligned} \gamma_M^0 &= \gamma^0 \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^1 = \gamma^2 \gamma^1 = i\sigma^{12} = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix} \\ \gamma_M^2 &= -\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^3 = \gamma^2 \gamma^3 = -i\sigma^{23} = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix} \\ \gamma_M^5 &= -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 = \gamma^0 \sigma^{31} = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

We see that in this representation all five γ -matrices are pure imaginary, since the Pauli matrices σ_1 and σ_3 are real and σ_2 is purely imaginary.

мотивация изучать спинорные поля

О применениях (?)

Почему векторных полей мало??

Таблицы преобразования по Степаньянцу (в другое место вставлю)

Величина	P	T	C
$\Lambda^\alpha{}_\beta$	$\text{diag}(1, -1, -1, -1)$	$\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$	$\text{diag}(1, 1, 1, 1)$
x'	$(t, -\mathbf{x})$	$(-t, \mathbf{x})$	$(t, \mathbf{x})$
$\bar{\psi}\chi$	$\bar{\psi}\chi$	$\bar{\chi}\psi$	$\bar{\chi}\psi$
$\bar{\psi}\gamma_5\chi$	$-\bar{\psi}\gamma_5\chi$	$-\bar{\chi}\gamma_5\psi$	$\bar{\chi}\gamma_5\psi$
$\bar{\psi}\gamma^\alpha\chi$	$\Lambda^\alpha{}_\beta\bar{\psi}\gamma^\beta\chi$	$-\Lambda^\alpha{}_\beta\bar{\chi}\gamma^\beta\psi$	$-\Lambda^\alpha{}_\beta\bar{\chi}\gamma^\beta\psi$
$\bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma_5\chi$	$-\Lambda^\alpha{}_\beta\bar{\psi}\gamma^\beta\gamma_5\chi$	$-\Lambda^\alpha{}_\beta\bar{\chi}\gamma^\beta\gamma_5\psi$	$\Lambda^\alpha{}_\beta\bar{\chi}\gamma^\beta\gamma_5\psi$
$\bar{\psi}\gamma^{\alpha\beta}\chi$	$\Lambda^\alpha{}_\gamma\Lambda^\beta{}_\delta\bar{\psi}\gamma^{\gamma\delta}\chi$	$-\Lambda^\alpha{}_\gamma\Lambda^\beta{}_\delta\bar{\chi}\gamma^{\gamma\delta}\psi$	$-\Lambda^\alpha{}_\gamma\Lambda^\beta{}_\delta\bar{\chi}\gamma^{\gamma\delta}\psi$

Преобр.	P	T	C	CPT
$\bar{\psi}\chi$	+	+	+	+
$\bar{\psi}\gamma_5\chi$	−	−	+	+
$\bar{\psi}\gamma^\mu\chi$	+	−	−	+
$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\chi$	−	−	+	+
$\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\chi$	+	−	−	+
Прим.		$\psi \leftrightarrow \chi$	$\psi \leftrightarrow \chi$	
$\Lambda^\alpha{}_\beta$	(+, −, −, −)	(−, +, +, +)	(+, +, +, −)	(−, −, −, −)

Начальные условия для поля Дирака (???)

(вот я вообще не уверен, разбираться буду!! пока ответ как из Гугла: типа мы раскладываем на плоские волны, и по ним берем коэффициенты какими-то константами.)

(?? мб как и в случае УМФ для скалярной функции, только теперь у нас их 4??? пока так думаю.)

12.1.2 Chiral Invariance and Chiral Fermions (???)

Киральные фермионы по Степаньянцу

В Задаче 1 показано, что безмассовая функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi$$

является инвариантной относительно киральных преобразований

$$\psi \rightarrow e^{i\gamma_5\alpha} \psi, \quad \alpha \neq \alpha(x).$$

(Обратим внимание, что при таких преобразованиях $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5}$. см. Задачу 1.)

Соответствующий сохраняющийся ток также получен в Задаче 1 и записывается как

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi.$$

Массовый член в лагранжиане (3.136) нарушает киральную инвариантность, поскольку $\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}e^{2i\alpha\gamma_5}\psi \neq \bar{\psi}\psi$. Как показано в Задаче 2, в случае $m \neq 0$ на классическом уровне

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2imj_5,$$

где $j_5 \equiv \bar{\psi}\gamma_5\psi$. Однако, оказывается, что равенство (3.196) и, в частности, закон сохранения кирального тока в безмассовом случае нарушается квантовыми поправками и не имеет место при переходе к квантовой теории. Такое явление называется квантовой аномалией [8].

Киральные преобразования сводятся к умножению на фазовый множитель для т.н. киральных или вейлевских спиноров [9], которые определяются как собственные векторы матрицы γ_5 :

$$\gamma_5\psi = \lambda\psi.$$

Умножая уравнение (3.197) на γ_5 и учитывая, что $\gamma_5^2 = 1$, получаем, что $\lambda^2 = 1$ и, следовательно, $\lambda = \pm 1$. Соответствующие собственные векторы могут быть легко построены. Действительно, возьмем произвольный спинор ψ и рассмотрим

$$\psi_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi \quad \text{и} \quad \psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$$

Тогда мы немедленно получаем, что

$$\gamma_5\psi_R = \psi_R; \quad \gamma_5\psi_L = -\psi_L.$$

Киральные спиноры широко используются при построении реалистичных моделей теории поля. При этом спинор ψ_R часто называется правым, а спинор ψ_L - левым. Легко проверить (Задача 3), что для киральных спиноров ψ_R и ψ_L имеют место следующие тождества:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\psi &= \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R.\end{aligned}$$

причем

$$\bar{\psi}_R = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 - \gamma_5); \quad \bar{\psi}_L = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 + \gamma_5).$$

С использованием тождеств (3.200) лагранжиан классической электродинамики (3.136) может быть записан как

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi_R - m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$$

В следующей главе это выражение будет получено как низкоэнергетический предел некоторой единой теории, описывающей электромагнитное и слабое взаимодействия.

Замстим, что при P -преобразованиях $P : \psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow i\gamma^0\psi(t, -\mathbf{x})$ левые спиноры переходят в правые, а правые в левые:

$$\psi_L(t, \mathbf{x}) \rightarrow \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)i\gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}) = i\gamma^0\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi = (i\gamma^0\psi')_L = i\gamma^0\psi_R.$$

Тем не менее, действие электродинамики является инвариантным относительно P -преобразований, поскольку левые и правые спиноры входят в него симметрично. Это можно легко доказать, используя законы преобразований квадратичных комбинаций спинорных полей, которые приведены в таблице 3.1.

Задачи

1. Доказать, что в безмассовом случае лагранжиан классической электродинамики инвариантен относительно киральных преобразований $\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\psi$, $\alpha \neq \alpha(x)$ и найти соответствующий сохраняющийся ток j_5^μ . Поскольку $\gamma_5^- = \gamma_5$, то при киральных преобразованиях $\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\psi$, $\alpha \neq \alpha(x)$ и найти соответствующий сохраняющийся ток j_5^μ . Поскольку $\gamma_5^- = \gamma_5$, то при киральных преобразованиях $\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\psi$,

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \rightarrow \psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma_5}\gamma^0 = \psi^\dagger(\cos\alpha - i\gamma_5\sin\alpha)\gamma^0.$$

(При выводе последнего равенства мы формально разложили экспоненту в ряд Тейлора и приняли во внимание, что $\gamma_5^2 = 1$.) Учитывая, что $\gamma_5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma_5$, находим, что

$$\bar{\psi} \rightarrow \psi^\dagger\gamma^0(\cos\alpha + i\gamma_5\sin\alpha) = \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5}.$$

Для проверки инвариантности действия классической электродинамики и нахождения соответствующего сохраняющегося тока воспользуемся методом Нетер. При киральных

преобразованиях $\alpha \neq \alpha(x)$. Положим теперь формально $\alpha = \alpha(x)$. Поскольку $A_\mu \rightarrow A_\mu$, то

$$i\psi\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi \rightarrow i\bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu(e^{2\alpha\gamma_5}\psi) = i\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - \partial_\mu\alpha\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi,$$

где мы приняли во внимание, что

$$e^{i\alpha\gamma_5}\gamma^\mu = (\cos\alpha - i\alpha\gamma_5\sin\alpha)\gamma^\mu = \gamma^\mu(\cos\alpha - i\alpha\gamma_5\sin\alpha) = \gamma^\mu e^{-i\alpha\gamma_5}$$

Таким образом, окончательно получаем, что в безмассовом случае

$$\delta S = - \int d^4x \partial_\mu \alpha \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$$

Это, во-первых, означает, инвариантность лагранжиана квантовой электродинамики относительно киральных преобразований с $\alpha \neq \alpha(x)$ в безмассовом случае и, во-вторых, в соответствии с предписанием (2.113) дает выражение для сохраняющегося тока

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi.$$

2. Вычислить $\partial_\mu j_5^\mu$ при $m \neq 0$. В массивном случае киральная инвариантность нарушается, поскольку

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}e^{2i\alpha\gamma_5}\psi \neq \bar{\psi}\psi.$$

Как следствие нарушается и закон сохранения соответствующего тока. Действительно, при $m \neq 0$

$$\partial_\mu j_5^\mu = (\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu\gamma_5\psi - \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi.$$

Выражая $\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ и $(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu$ из уравнения Дирака и сопряженного ему уравнения, получаем, что

$$\partial_\mu j_5^\mu = \bar{\psi}(-ie\gamma^\mu A_\mu + im)\gamma_5\psi - \bar{\psi}\gamma_5(ie\gamma^\mu A_\mu - im)\psi = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi$$

3. Доказать тождества (3.200). Поскольку $\bar{\psi} = \psi'\gamma_\gamma\gamma^0 \cdot \gamma_z^+ = \gamma_5$ и. кроме. того. $\gamma_5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma_5$.

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_R &= \frac{1}{2}\psi^+(1+\gamma_5)\gamma^0 = \frac{1}{2}\psi^+\gamma^0(1-\gamma_5) = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1-\gamma_5); \\ \bar{\psi}_L &= \frac{1}{2}\psi^+(1-\gamma_5)\gamma^0 = \frac{1}{2}\psi^+\gamma^0(1+\gamma_5) = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1+\gamma_5).\end{aligned}$$

Используя эти соотношения, получаем, что

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L &= \frac{1}{4}(\bar{\psi}(1+\gamma_5)^2\psi + \bar{\psi}(1-\gamma_5)^2\psi) = \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}(1-\gamma_5)\psi + \bar{\psi}(1+\gamma_5)\psi) = \bar{\psi}\psi \\ \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R &= \\ &= \frac{1}{4}(\bar{\psi}(1+\gamma_5)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi + \bar{\psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu(1+\gamma_5)\psi) = \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}(1+\gamma_5)\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}(1-\gamma_5)\gamma^\mu\psi) = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi,\end{aligned}$$

где было учтено, что $(1 \pm \gamma_5)^2 = 2(1 \pm \gamma_5)$.

Майорановские спиноры и их свойства по Степаньянцу

Во многих моделях теории поля необходимо использовать не дираковские, а Т.н. майорановские спиноры [10]. По определению майорановский спинор совпадает со своим зарядово сопряженным:

$$\bar{\psi} = \psi^T C,$$

где C - матрица зарядового сопряжения, определенная в Части 3.1.2. В соответствии с результатами Задачи 5 Части 3.1.4 это условие является инвариантным относительно преобразований Лоренца. В Задаче 1 показано, что произвольный майорановский спинор записывается в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}$$

и характеризуется четырьмя независимыми вещественными параметрами. (Напомним, что дираковский спинор имеет 4 комплексные компоненты, которые эквивалентны 8 независимым вещественным параметрам.) Поэтому можно считать, что дираковский спинор является аналогом комплексного скалярного поля, а майорановский спинор аналогом вещественного скалярного поля. В частности, существует представление для γ -матриц, в котором все компоненты майорановского спинора являются вещественными:

$$\psi_M = M\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ -i & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}.$$

Поэтому произведение майорановского спинора на комплексное число с нетривиальной мнимой частью майорановским спинором уже не будет. Как показано в Задаче 2, если - майорановский спинор, то майорановскими спинорами также будут

$$i\gamma_5\psi; \quad i\gamma^\mu\psi; \quad \gamma^\mu\gamma_5\psi; \quad \gamma^{\mu\nu}\psi$$

Как следствие, условие майорановости будет инвариантно относительно определенных ранее P - и T -преобразований. (Инвариантность этого условия относительно C -преобразований очевидна.)

Необходимо отметить, что произведения майорановских спиноров удовлетворяют следующим тождествам, которые доказаны в Задаче 3, исходя из свойств γ -матриц и с учетом антикоммутации спинорных полей:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\chi) &= (\bar{\chi}\psi); & (\bar{\psi}\gamma_5\chi) &= (\bar{\chi}\gamma_5\psi) \\ (\bar{\psi}\gamma^\mu\chi) &= -(\bar{\chi}\gamma^\mu\psi); & (\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\chi) &= (\bar{\chi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) \\ (\bar{\psi}\gamma_{\mu\nu}\chi) &= -(\bar{\chi}\gamma_{\mu\nu}\psi) \end{aligned}$$

В частности, если оба спинора совпадают и равны ψ , то нетривиальными квадратичными комбинациями окажутся только $(\bar{\psi}\psi)$, $(\bar{\psi}\gamma_5\psi)$ и $(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi)$.

В Задаче 4 показано, что произвольный дираковский спинор ψ всегда можно единственным образом составить из двух майорановских спиноров ψ_- и ψ_+ :

$$\psi = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_- + \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_+.$$

Зарядово сопряженный спинор к (3.220) оказывается равным

$$\psi^C = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_+ + \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_-.$$

откуда следует, что операция зарядового сопряжения переводит спиноры ψ_- и ψ_+ друг в друга. В терминах ψ_+ дираковский лагранжиан может быть записан в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = \\ &= \frac{i}{2}\bar{\psi}_-\gamma^\mu\partial_\mu\psi_- + \frac{i}{2}\bar{\psi}_+\gamma^\mu\partial_\mu\psi_+ - m\bar{\psi}_-\psi_+ + \\ &\quad + \text{полные производные.}\end{aligned}$$

Как уже отмечалось ранее, этот лагранжиан является инвариантным относительно калибровочных преобразований $\psi \rightarrow e^{-i\kappa\kappa}\psi$, которые, как показано в Задаче 5, в терминах полей ψ_+ записываются в виде

$$\psi_- \rightarrow e^{ie\alpha\gamma_5}\psi_-; \quad \psi_+ \rightarrow e^{-ie\alpha\gamma_5}\psi_-.$$

В принципе, можно рассмотреть и более общий случай теории, описываемой лагранжианом

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{i}{2}\bar{\psi}_- - \gamma^\mu\partial_\mu\psi_- + \frac{i}{2}\bar{\psi}_+\gamma^\mu\partial_\mu\psi_- - \\ &- m\bar{\psi}_-\psi_- - \frac{1}{2}m_-\bar{\psi}_-\psi_- - \frac{1}{2}m_+\bar{\psi}_+\psi_+.\end{aligned}$$

в котором два последние слагаемые уже не будут инвариантны относительно преобразований (3.223). Как мы узнаем далее, функция Лагранжа подобного типа может использоваться, например, для описания нейтрино. Соответствующие уравнения движения построены в Задаче 6 и записываются в виде

$$\begin{aligned}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_- - m_-\psi_- - m\psi_+ &= 0 \\ i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_+ - m\psi_- - m_+\psi_+ &= 0\end{aligned}$$

(Заметим, что благодаря условию майорановости (3.215) при выводе уравнений движения уже нельзя считать, что ψ_- и ψ_+ являются независимыми полями.)

1.

Доказать, что майорановский спинор имеет 4 вещественные степени свободы и найти для него явное выражение.

В явном виде условие майорановости $\psi^\top\gamma^0 = \psi^\top C$ может быть записано как

$$\begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & \psi_2 & \psi_3 & v_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

что приводит к системе уравнений

$$\psi_1 = -\psi_4^*; \quad \psi_2 = \psi_3^*,$$

из которой следует, что ψ_1 и ψ_2 могут рассматриваться как 2 независимых комплексных числа, в то время как

$$\dot{\psi} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_2^* \\ -\dot{\psi}_1^* \end{pmatrix}$$

2.

Доказать, что если ψ - майорановский спинор, то спиноры $i\gamma_5\psi$, $i\gamma^\mu\psi$, $\gamma^\mu\gamma_5\psi$ и $\gamma^{\mu\nu}\psi$ также являются майорановскими.

Докажем, например, что $\gamma^\mu\gamma_5\psi$ является майорановским спинором. Используя эрмитовость матрицы γ_5 , а также тождество $\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu$, дираковски сопряженный спинор может быть записан в виде

$$(\gamma^\mu\gamma_5\psi)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0\gamma_5\gamma^\mu(\gamma^0)^\dagger = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5$$

С другой стороны, в силу майорановости ψ , симметрии матрицы γ_5 , а также тождеств $C^\dagger(\gamma_j^\mu)^\dagger C = -\gamma_j^\mu$ и $C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5$, зарядово сопряженный спинор оказывается равным

$$(\gamma^\mu\gamma_5\psi)^T C = \psi^T C \gamma_5^{-1} \gamma^\mu C^{-1} (\gamma^\mu)^T C = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5$$

и совпадает с дираковски сопряженным. Это и означает выполнение условия майорановости для $\gamma^\mu\gamma_5\psi$.

Аналогичным образом проверяется майорановость всех остальных выражений.

3.

Доказать, что для произведений майорановских спиноров выполняются тождества (3.2|9).

С учетом антикоммутации спинорных полей первое тождество может быть доказано следующим образом:

$$\bar{\psi}\chi = \psi^T C \chi = (\psi^T C \chi)^T = -\chi^T C^T \psi = \chi^T C \psi = \bar{\chi}\psi$$

Аналогично доказываются и другие тождества, например,

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\chi = -\chi^T (C\gamma^\mu)^T \psi = \chi^T C C^{-1} (\gamma^\mu)^T C \psi = -\bar{\chi}\gamma^\mu\psi$$

4.

Доказать, что произвольный дираковский спинор может быть единственным образом представлен в виде (3.220).

В терминах ψ_- и ψ_+ найти выражения для зарядово сопряженного спинора, дираковски сопряженного спинора и дираковского лагранжиана. Представим произвольный дираковский спинор ψ в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

После этого в соответствии с формулой (3.216) построим два майорановских спинора

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} -\psi_4^* \\ \psi_3^* \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}; \quad \psi_- = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

формула (3.233) может быть записана в виде

$$\psi = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi_- + \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi_+.$$

При этом, поскольку все выполненные операции были однозначны, то и разложение (3.236) является однозначным.

Применяя к спинору ψ операцию зарядового сопряжения, получаем, что

$$\bar{\psi}^C = \psi^\top C = \frac{1}{2} \bar{\psi}_- (1 - \gamma_5) + \frac{1}{2} \bar{\psi}_+ (1 + \gamma_5).$$

А поскольку $\dot{\psi}^C = \gamma^0 C^+ \dot{\psi}^* = \gamma^0 (\bar{\psi}^C)^+$, то, окончательно, зарядово сопряженный спинор примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi^C &= \gamma^0 \left(\frac{1}{2} \psi_-^+ \gamma^0 (1 - \gamma_5) + \frac{1}{2} \psi_+^+ \gamma^0 (1 + \gamma_5) \right)^+ = \\ &= \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi_+ + \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi_- \end{aligned}$$

Так же легко может быть найдено выражение для дираковски сопряженного спинора:

$$\bar{\psi} = \frac{1}{2} \psi_-^+ (1 - \gamma_5) \gamma^0 + \frac{1}{2} \psi_+^+ (1 + \gamma_5) \gamma^0 = \frac{1}{2} \bar{\psi}_- (1 + \gamma_5) + \frac{1}{2} \bar{\psi}_+ (1 - \gamma_5)$$

Подставляя выражения для ψ и $\bar{\psi}$ через $\psi_\pm$ в дираковский лагранжиан, после несложных преобразований получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi = \\ &= \frac{i}{2} \bar{\psi}_- \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \partial_\mu \psi_- + \frac{i}{2} \bar{\psi}_+ \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \partial_\mu \psi_+ - \frac{m}{2} (\bar{\psi}_- (1 + \gamma_5) \psi_- + \bar{\psi}_+ (1 - \gamma_5) \psi_+) \end{aligned}$$

Заметим, что некоторые слагаемые в этом выражении представляют собой полные производные, которые не влияют на уравнения движения и могут быть отброшены. Действительно, в силу тождеств (3.219)

$$\bar{\psi}_+ \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \psi_+ = \partial_\mu \bar{\psi}_+ \gamma^\mu \gamma_5 \psi_+ = \frac{1}{2} \partial_\mu (\bar{\psi}_+ \gamma^\mu \gamma_5 \psi_+)$$

Кроме того, из тождеств (3.219) следует, что

$$\bar{\psi}_- (1 - \gamma_5) \psi_- = \bar{\psi}_- (1 - \gamma_5) \psi_+$$

Поэтому, окончательно (с точностью до полных производных), дираковский лагранжиан может быть записан в виде

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi}_- \gamma^\mu \partial_\mu \psi_- + \frac{i}{2} \bar{\psi}_+ \gamma^\mu \partial_\mu \psi_+ - m \bar{\psi}_- \psi_+$$

5.

Найти, каким образом поля $\psi_\pm$ в формуле (3.220) меняются при калибровочных преобразованиях $\psi \rightarrow e^{-ie\alpha} \psi$.

При калибровочных преобразованиях $\psi^c = \psi^\top C \gamma \rightarrow e^{-ie\alpha} \psi^c$ и, следовательно, $\dot{\psi}^C = \gamma^0 (\bar{\psi}^C)^- \rightarrow e^{ie\alpha} \dot{\psi}^C$. Вспоминая, что в соответствии с результатами Задачи 4

$$\psi = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi_- + \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi_+$$

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi + \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_+ \\ \psi^C &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi + \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_1.\end{aligned}$$

после несложных преобразований получаем, что

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi^i - \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)v^c \rightarrow (\cos(e\alpha) - i\gamma_5 \sin(e\alpha))\psi^c = \\ &= e^{ie \cos \gamma_5} \psi_- \\ \psi_+ &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi - \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi^C \rightarrow (\cos(e\alpha) - i\gamma_5 \sin(e\alpha))\psi_{::} = \\ &= e^{-ie(\gamma_5^c)} \psi_+.\end{aligned}$$

6. Построить уравнения движения для лагранжиана (3.224). В данном случае при построении уравнений движения наиболее просто использовать принцип наименьшего действия. Вычисляя вариацию действия, легко получаем, что

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{i}{2} \bar{\psi}_- \gamma^\mu \partial_\mu \delta \psi + \frac{i}{2} \delta \bar{\psi}_- \gamma_\mu \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi}_+ \gamma^\mu \partial_\mu \delta \psi_+ + \right. \\ &+ \frac{i}{2} \delta \bar{\psi}_+ \gamma_\mu \partial_\mu \psi_+ - m \left(\delta \psi_- \psi_- + \bar{\psi}_- \delta \psi_- \right) - \\ &\left. - \frac{1}{2} m_- \left(\bar{\psi}_- \delta \psi_- + \delta \bar{\psi}_- \psi_- \right) - \frac{1}{2} m_+ \left(\bar{\psi}_- \delta \psi_+ + \delta \bar{\psi}_+ \psi_+ \right) \right\}.\end{aligned}$$

При этом вариации полей $\bar{\psi}_\pm$ и $\psi_\pm$ уже нельзя считать независимыми в силу условий майорановости $\bar{\psi}_\pm = \psi_\pm^\top C$. Однако, принимая во внимание тождества (3.219), выражение для δS с точностью до поверхностных членов можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left(i \delta \bar{\psi}_- \gamma^\mu \partial_\mu \psi_- + i \delta \bar{\psi}_- \gamma^\mu \partial_\mu \psi_- - \right. \\ &\left. - m \left(\delta \bar{\psi}_- \psi_- + \delta \bar{\psi}_- \psi_+ \right) - m_- \delta \bar{\psi}_- \psi_- - m_+ \delta \bar{\psi}_+ \psi_- \right)\end{aligned}$$

В соответствии с принципом наименьшего действия, на уравнениях движения должно выполняться равенство $\delta S = 0$, из которого следует, что

$$\begin{aligned}i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_- - m_- \psi_- - m_+ \psi_+ &= 0 \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_+ - m_+ \psi_+ - m_- \psi_- &= 0\end{aligned}$$

Как догадаться до майорановских спиноров (???????)

(остался вопрос, хз)

12.1.3 Plane Waves in the Dirac Theory

Теория по Степаньянцу

Вернемся еще раз к рассмотрению решения свободного уравнения Дирака. Как и в Части 2.4, мы вновь будем предполагать, что система помещена в куб очень большого объема L^3 . Тогда решение уравнения Дирака (3.10) можно переписать несколько по-другому:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}, a=\pm} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} L^3}} \left(a_{\mathbf{k}, a} u_{\mathbf{k}, a} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}, a}^* v_{\mathbf{k}, a} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right),$$

где, как обычно, $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. При этом мы будем предполагать, что $a_{\mathbf{k},a}$ и $b_{\mathbf{k},a}$ антикоммутируют, причем $a_{\mathbf{k},a}^* a_{\mathbf{k},a}$ и $b_{\mathbf{k},a}^* b_{\mathbf{k},a}$ - положительно определенные величины. В безмассовом случае $u_{\mathbf{k},\pm}$ и $v_{\mathbf{k},\mp}$, построенные в Задаче 1, являются собственными векторами оператора $\mathbf{nS}$, где $\mathbf{S}$ - генераторы группы пространственных вращений с собственными значениями $\pm 1/2$. (Чему равна спиральность соответствующих состояний, мы выясним несколько далее.) Если для γ -матриц используется представление (3.5), то в явном виде

$$u_{\mathbf{k},+} = v_{\mathbf{k},-} = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} \begin{pmatrix} 0 \\ w_+ \end{pmatrix}; \quad u_{\mathbf{k},-} = v_{\mathbf{k},+} = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} \begin{pmatrix} w_- \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $w_{\pm}$ - собственные векторы оператора $(\mathbf{n}\sigma)$ (где $\mathbf{n} \equiv \mathbf{k}$) с собственными значениями ± 1 соответственно. Если единичный вектор $\mathbf{n}$ задается сферическими координатами ϑ и φ , то, как показано в Задаче 1,

$$w_+ = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\vartheta/2) \end{pmatrix}; \quad w_- = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \sin(\vartheta/2) \\ -\cos(\vartheta/2) \end{pmatrix}.$$

Несложно убедиться, что $u_{\mathbf{k},+}$ и $v_{\mathbf{k},-}$ являются правыми спинорами, а $u_{\mathbf{k},-}$ и $v_{\mathbf{k},+}$ - левыми.

В массивном случае $u_{\mathbf{k},\pm}$ и $v_{\mathbf{k},\mp}$ выбираются таким образом, чтобы в системе отсчета, где частица покоится, они были бы собственными векторами оператора S_3 с собственными значениями $\pm 1/2$. В Задаче 2 показано, что в системе покоя можно положить

$$u_{0,+} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u_{0,-} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$v_{0,+} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v_{0,-} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы получить выражения для этих величин в произвольной системе отсчета, достаточно совершить преобразование Лоренца, которое переводит систему покоя в рассматриваемую систему отсчета. В явном виде оно построено в Задаче 2, где также приведены выражения для $u_{\mathbf{k},\pm}$ и $v_{\mathbf{k},\pm}$. Заметим (Задача 3), что как в массивном, так и в безмассовом случае они удовлетворяют условиям

$$u_{\mathbf{k},a}^\dagger u_{\mathbf{k},b} = 2\omega_{\mathbf{k}} \delta_{ab}; \quad v_{\mathbf{k},a}^\dagger v_{\mathbf{k},b} = 2\omega_{\mathbf{k}} \delta_{ab}; \quad u_{\mathbf{k},a}^\dagger v_{-\mathbf{k},b} = 0.$$

В Задаче 4 вычислены энергия и импульс, которые соответствуют полевой конфигурации (3.249):

$$P^\mu = \sum_{\mathbf{k},a=\pm} k^\mu (a_{\mathbf{k},a}^* a_{\mathbf{k},a} - b_{\mathbf{k},a}^* b_{\mathbf{k},a}).$$

Это выражение позволяет объяснить антикоммутацию спинорных полей в рамках классической теории поля. Если бы величины $b_{\mathbf{k},a}$ были бы коммутирующими, то энергия не была бы положительно определена. Но благодаря антикоммутации (в классической теории) мы получаем, что

$$P^\mu = \sum_{\mathbf{k},a=\pm} k^\mu (a_{\mathbf{k},a}^* a_{\mathbf{k},a} + b_{\mathbf{k},a}^* b_{\mathbf{k},a}),$$

где $k^\mu = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$. Это равенство позволяет интерпретировать величину $u_{\mathbf{k},a} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ как волновую функцию электрона с импульсом $\mathbf{k}$, а величину $a_{\mathbf{k},a}^* a_{\mathbf{k},a}$ - как вероятность обнаружить электрон в этом состоянии. Аналогичным образом, величина $b_{\mathbf{k},a}^* b_{\mathbf{k},a}$ представляет собой вероятность обнаружить позитрон в состоянии с волновой функцией (см. Часть 3.1.4) $(v_{\mathbf{k},a} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}})^C = (v_{\mathbf{k},a})^C e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}$.

Используя рассуждения, проведенные в Части 2.4, легко убедиться, что в безмассовом случае состояния, которые отмечены индексом "+" имеют спиральность $+1/2$, а состояния, которые отмечены индексом «-» - спиральность $-1/2$. Действительно, в Части 2.4 мы видели, что для положительно частотных состояний спиральность равна собственному значению генератора группы Лоренца, который соответствует вращениям вокруг направления импульса. В Части 3.1.3 было показано, что генераторами группы Лоренца в спинорном представлении являются матрицы $T_{\alpha\beta} = i\gamma_{\alpha\beta}/2$. В частности,

$$T_{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Совершенно очевидно, что собственные значения этой матрицы равны $\pm 1/2$. При этом легко видеть, что состояния с $u_{\mathbf{k},+}$ и $u_{\mathbf{k},-}$ имеют соответственно положительную и отрицательную спиральность. Для отрицательно частотных состояний спиральность равна собственному значению оператора $-T_{12}$, благодаря чему состояния с $v_{\mathbf{k},+}$ и $v_{\mathbf{k},-}$ также имеют положительную и отрицательную спиральность соответственно. В этом можно убедиться и по-другому, используя равенства

$$u_{\mathbf{k},+}^C = v_{\mathbf{k},+}; \quad u_{\mathbf{k},-}^C = v_{\mathbf{k},-},$$

которые легко проверить с помощью формулы (3.150). Из них видно, что состояния $v_{\mathbf{k},\perp}^C$ являются собственными векторами оператора T_{12} с собственными значениями $\pm 1/2$.

Еще раз подчеркнем, что появление коэффициента $1/2$ в этом выражении не является случайным, а определяется представлением группы Лоренца, по которому преобразуется рассматриваемое поле.

В массивном случае в системе отсчета, где частица покоится, аналогичные рассуждения показывают, что

$$S_3 = \frac{1}{2} (a_{0,+}^* a_{0,+} - a_{0,-}^* a_{0,-} + b_{0,+}^* b_{0,+} - b_{0,-}^* b_{0,-}).$$

(При этом из всей суммы по импульсам мы оставили только слагаемые, которые соответствуют $k^\mu = (k^0, 0, 0, 0)$.)

В Задаче 4 также вычислен электрический заряд, который соответствует полю (3.249):

$$q = -e \sum_{\mathbf{k}, a} (a_{\mathbf{k},a}^* a_{\mathbf{k},a} + b_{\mathbf{k},a} b_{\mathbf{k},a}^*).$$

При учете антикоммутации b и b^* (в классической теории поля) это равенство означает, что электрический заряд электрона равен $-e$, а позитрона равна $+e$.

Все приведенные выше формулы в безмассовом случае будут справедливы и для киральных спиноров, если для правых спиноров положить $a_{\mathbf{k},-} = b_{\mathbf{k},+} = 0$, а для левых $-a_{\mathbf{k},+} = b_{\mathbf{k},-} = 0$. Поэтому частицы, описываемые правыми спинорами, будут иметь положительную спиральность (т.е. спин направлен вдоль импульса), а их античастицы отрицательную (т.е. направление спина противоположно направлению импульса). Частицы, описываемые левыми спинорами, имеют отрицательную спиральность, а их античастицы - положительную.

В случае, если спинор является майорановским, несложно убедиться, что его разложение по плоским волнам записывается в виде

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}, a=\pm} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}L^3}} \left(a_{\mathbf{k},a} u_{\mathbf{k},a} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k},a}^* (u_{\mathbf{k},a})^C e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right)$$

Это равенство показывает, что в определенном смысле майорановский спинор является аналогом вещественного скалярного поля, тогда как дираковский спинор аналогичен комплексному скалярному полю.

Задачи 1. Найти состояния с определенной спиральностью, которые удовлетворяют уравнению Дирака в безмассовом случае.

Оператор спиральности представляет собой проекцию спина на направление импульса. При этом оператором спина являются генераторы группы пространственных вращений в том представлении, где находится рассматриваемое поле. В частности, для дираковского спинорного поля этими генераторами будут $i\gamma_{cj}/2$, благодаря чему (см. формулу (3.47)) оператор спиральности может быть записан в виде

$$\mathbf{n}S = \frac{i}{4} \varepsilon_{ijk} n_i \gamma^{jk} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{n}\sigma & 0 \\ 0 & \mathbf{n}\sigma \end{pmatrix}.$$

При этом единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ удобно задавать с помощью сферических координат ϑ и φ . Тогда в декартовых координатах его компоненты оказываются равными

$$\mathbf{n} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta).$$

Поэтому матрица $\mathbf{n}\sigma$ будет записываться в виде

$$\mathbf{n}\sigma = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & e^{-i\varphi} \sin \vartheta \\ e^{i\varphi} \sin \vartheta & -\cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Достаточно очевидно, что собственные значения этой матрицы равны ± 1 , поскольку $(\mathbf{n}\sigma)^2 = 1$. Соответствующие собственные векторы также можно легко построить. Обозначая собственный вектор, соответствующий собственному значению 1, через w_+ , а вектор, соответствующий собственному значению -1 , через w_- , получаем, что

$$w_+ = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\vartheta/2) \end{pmatrix}; \quad w_- = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \sin(\vartheta/2) \\ -\cos(\vartheta/2) \end{pmatrix}.$$

Нам необходимо найти состояния, которые являются решениями безмассового уравнения Дирака $\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0$. Если представить спинор ψ в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{34} \end{pmatrix} e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\mathbf{x})}$$

где $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$, то уравнение Дирака может быть переписано в виде следующей системы уравнений:

$$(\omega_{\mathbf{k}} + (\mathbf{k}\sigma)) \psi_{12} = 0; \quad (\omega_{\mathbf{k}} - (\mathbf{k}\sigma)) \psi_{34} = 0,$$

решением которой будут произвольные линейные комбинации столбцов

$$u_{\mathbf{k},+} = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} \begin{pmatrix} 0 \\ w_+ \end{pmatrix}; \quad u_{\mathbf{k},-} = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} \begin{pmatrix} w_- \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Множитель $\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}$ добавлен для удобства обозначений.) Применяя к этим столбцам оператор спиральности, получаем, что спиральность первого состояния будет равна $+1/2$, а второго $-1/2$.

2. Для случая массивного дираковского поля построить состояния, которые являются собственными векторами оператора S_3 .

Рассмотрим вначале систему отсчета, в которой рассматриваемая частица покоится. Тогда в соответствии с формулой (3.12) решением уравнения Дирака будут спиноры

$$\psi = e^{-imt} \begin{pmatrix} b_{12} \\ \psi_{12} \end{pmatrix} \quad ? \quad \psi_i = e^{imt} \begin{pmatrix} w'_{12} \\ -b_{12} \end{pmatrix},$$

где ψ_{12} - произвольный двухкомпонентный столбец, не зависящий от координат. Ело улобно выбирать таки.и образом, чтобы получивниесе состояния имелии бы определенное значсиис проскици спина на ось z, т.е. были бы собственлгыми векторами олератора

$$S_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Используя явное выраженис для матрицы σ_3 , получаеи, что в системе покоя решения уравнения Дирака с определенным значением S_3 можно занеать в виде $\psi = u_{0,\alpha} e^{-imt}$ или $v = v'_{0,\alpha} e^{3mt}$, где индекс α может пробегать заачсызь =,

$$\begin{aligned} u_{0,-} &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u_{0,+} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ v_{0,-} &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v_{0,+} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Множитель $\sqrt{m}$ добавлен для того, чтобы восстановить правильную размерность.

Для того чтобы получить выражения Для спинора в произвольной систсме отсчета, необходимо совериить преобразование Лоренца, параметр которого опредслыгется из услвия

$$k^\mu = (e^\alpha)^{\mu 0} m$$

причсм мы будсм преднолагать, что $k^0 > 0$. (Это равсиество представляет собой закои гпреобразования вектора k^μ от системы покоя, в которой $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$, к некоторой другой системе отсчета.) Несложно убедиться, что оно будст выполняться, если единственными отличными от 0 компонентами α будут

$$\alpha^{i0} = -\alpha^{0i} = \eta n^i,$$

где η - некоторая постоянная, $\mathbf{n} \equiv \mathbf{k}/k$, $k \equiv |\mathbf{k}|$. Действитсльно, в этом случае

$$(e^\alpha)^{i0} = \alpha^{i0} - \frac{1}{6} \alpha^{i0} \alpha^{0j} \alpha^{j0} + \dots = n^i (\eta + \eta^3/6 + \dots) = n^i \operatorname{sh} \eta$$

Поэтому из пространственлтых компонентт уравнения (3.271) следует, ито постоянная α определяется из условия

$$\operatorname{sh} \eta = \frac{k}{m}.$$

Нулевая компонента уравнения (3.271) также удовлетворяется, поскольку полностью аналогичным образом получается, что

$$(e^\alpha)^{00} = \operatorname{ch} \eta = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{m}.$$

При преобразованиях Лоренца спинорное поле меняется в соответствии с формулой (3.87). Применяя эту формулу к рассматриваемому случаю, получаем, что

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \exp(-\alpha^{i0}\gamma^{i0}/2)\psi_0 = \exp\left(\frac{\eta}{2}\begin{pmatrix} -\mathbf{n}\sigma & 0 \\ 0 & \mathbf{n}\sigma \end{pmatrix}\right)\psi_0 = \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\eta}{2} - (\mathbf{n}\sigma)\operatorname{sh}\frac{\eta}{2} & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}\frac{\eta}{2} + (\mathbf{n}\sigma)\operatorname{sh}\frac{\eta}{2} \end{pmatrix}\psi_0, \quad (3.276)\end{aligned}$$

где через ψ_0 обозначено спинорное поле в системе покоя. При этом несложно убедиться, что

$$\operatorname{ch}\frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{ch}\eta}{2}} = \sqrt{\frac{m + \omega_{\mathbf{k}}}{2m}}; \quad \operatorname{sh}\frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\eta - 1}{2}} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}} - m}{2m}}$$

Поэтому окончательно получаем, что

$$u_{\mathbf{k},a} = \left\{ \sqrt{\frac{m + \omega_{\mathbf{k}}}{2m}} + \begin{pmatrix} -\mathbf{n}\sigma & 0 \\ 0 & \mathbf{n}\sigma \end{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}} - m}{2m}} \right\} u_{0,a}.$$

Для $v_{\mathbf{k},a}$ справедлива точно такая же формула.

3. Убедиться в справедливости равенств (3.253) в безмассовом и массивном случаях.

В безмассовом случае первые два равенства легко проверяются непосредственной подстановкой $u_{\mathbf{k},\pm}$ и $v_{\mathbf{k},\pm}$. Для того чтобы убедиться в справедливости последнего равенства, необходимо заметить, что замена $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ соответствует тому, что $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta, \varphi \rightarrow \pi + \varphi$. Поэтому

$$v_{-\mathbf{k},-} = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\begin{pmatrix} -e^{-i\tau^2 w_+} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_{-\mathbf{k},-} = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}\begin{pmatrix} 0 \\ -e^{i\varphi^2 w_-} \end{pmatrix}$$

После этого равенство $u_{\mathbf{k},a}^- v_{-\mathbf{k},b} = 0$ проверяется непосредственной подстановкой.

Перейдем теперь к рассмотрению массивного случая. В системе покоя все равенства являются очевидными. При переходе в другую систему отсчета необходимо воспользоваться преобразованием (3.278). Тогда

$$u_{\mathbf{k},\Omega}^+ u_{\mathbf{k},b} = u_{0,a}^+ \left\{ \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{m} + \frac{|\mathbf{k}|}{m} \begin{pmatrix} -\mathbf{n}\sigma & 0 \\ 0 & \mathbf{n}\sigma \end{pmatrix} \right\} u_{0,b} = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{m} u_{0,\Omega}^- u_{0,b} = 2\omega_{\mathbf{k}} \delta_{ab}. \quad (3, 280)$$

Точно так же доказывается аналогичное равенство для v .

В случае, когда рассматривается произведение $u_{\mathbf{k},a}^+ v_{-\mathbf{k},b}$, в формуле (3.278) для v также необходимо произвести замену $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$. После этого несложно видеть, что

$$u_{\mathbf{k},a}^+ v_{-\mathbf{k},b} = u_{0,a}^+ v_{0,b} = \left(\frac{m + \omega_{\mathbf{k}}}{2m} - \frac{\omega_{\mathbf{k}} - m}{2m} \right) = 0.$$

Тем самым мы доказали справедливость указанных равенств также и в массивном случае. 4. Найти выражения для энергии, импульса и электрического заряда для полевой конфигурации (3.249).

Как уже говорилось в Части 2.4, при вычислении энергии и импульса полевой конфигурации можно использовать выражение для канонического тензора энергии-импульса, если предполагать, что поля достаточно быстро убывают на пространственной бесконечности. В случае свободного дираковского поля (т.е. при

отсутствии взаимодействия с калибровочным полем) канонический тензор энергии-импульса записывается в виде

$$T^{\mu\nu} = \partial_\nu \psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\nu \psi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Поскольку на уравнениях движения функция Лагранжа равна 0,

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu} = i \int d^3x \psi^\dagger \partial^\mu \psi.$$

Подставляя в эту формулу выражение для ψ , а затем выполняя интегрирование по пространственным координатам в соответствии с формулами (2.157), получаем, что

$$\begin{aligned} P^\mu &= \sum_{\mathbf{k}, a=\pm} \frac{k^\mu}{2\omega_{\mathbf{k}}} (a_{\mathbf{k},a}^* a_{\mathbf{k},a} u_{\mathbf{k},a}^- u_{\mathbf{k},a} - b_{\mathbf{k},a} b_{\mathbf{k},a}^* v_{\mathbf{k},a}^+ v_{\mathbf{k},a}) = \\ &= \sum_{\mathbf{k}, a=\pm} k^\mu (a_{\mathbf{k},a}^* a_{\mathbf{k},a} - b_{\mathbf{k},a} b_{\mathbf{k},a}^*). \end{aligned}$$

где $k^\mu = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$, а $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} > 0$. (Перекрестные слагаемые исчезают в силу равенства $v_{-\mathbf{k},a}^- u_{\mathbf{k},b} = 0$.)

Аналогичным образом вычисляется электрический заряд, который представляет собой интеграл от нулевой компоненты тока (3.161):

$$q = \int d^3x j^0 = -e \int d^3x \psi^\dagger \psi = -e \sum_{\mathbf{k}, a=\pm} (a_{\mathbf{k},a}^* a_{\mathbf{k},a} + b_{\mathbf{k},a} b_{\mathbf{k},a}^*)$$

12.1.4 Other Properties of the Dirac Field

Как догадаться до Дираковских спиноров (???????)

(остался вопрос, хз)

Почему дираковские поля должны взаимодействовать по закону Кулона? (???????)

(потому что там вообще член взаимодействия в лагранжиане есть. напишу потом четко ответ на это.)

12.1.5 Field of Nonrelativistic Spinors and Pauli Equation

Подробно изучим поле уравнения Паули.

(Редькова читать нужно, иначе в это не въеду)

12.2 Models, and Phenomena with the Dirac Field

12.2.1 Solution of the Dirac Equation in a Coulomb Potential

Теория

Одним из наиболее важных приложений уравнения Дирака является исследование спектра водородоподобных атомов [11]. (В таких Поскольку электрон описывается

дираковским спинором, то при этом должны быть объяснены все основные закономерности, которые наблюдаются в спектрах таких атомов. Мы будем считать, что тяжелое неподвижное ядро создает вокруг себя электрическое поле с потенциалом

$$\varphi = \frac{Ze}{4\pi r}; \quad \mathbf{A} = 0.$$

Динамика электрона описывается уравнением Дирака в таком электромагнитном поле:

$$(i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\psi = 0.$$

В этом параграфе мы будем записывать γ -матрицы в виде (3.170), поскольку (как мы выяснили в Части 3.1.4) в этом случае удобно сравнивать результат с нерелятивистским случаем.

Нас прежде всего будут интересовать состояния дискретного спектра с определенной энергией $E > 0$. (Как мы уже говорили выше, состояния с $E < 0$ соответствуют античастице - позитрону.) Для состояний с определенной энергией функция ψ будет пропорциональна e^{-iEt} . Это означает, что она является собственным вектором оператора $i\partial_0$ с собственным значением $E > 0$. После умножения уравнения Дирака на матрицу γ^0 его можно эквивалентно переписать в виде

$$i\partial_0\psi = \left[\gamma^0 (-i\gamma^i \partial_i - m) - \frac{Z\alpha}{r} \right] \psi$$

где $\alpha = e^2/4\pi$ - постоянная тонкой структуры. Правую часть этого уравнения можно рассматривать как оператор Гамильтона, действующий на волновую функцию ψ . Для того чтобы найти решения этого уравнения, вначале необходимо построить набор операторов, которые коммутируют с гамильтонианом и характеризуют состояния системы. Наиболее удобно исходить из сферической симметрии рассматриваемой задачи. Уравнение Дирака является инвариантным относительно преобразований Лоренца. При этом необходимо учитывать, что электромагнитное поле также нетривиальным образом преобразуется относительно этих преобразований. Однако для рассматриваемого сферически симметричного случая электромагнитное поле будет инвариантно относительно подгруппы группы Лоренца, которая соответствует пространственным вращениям. Поэтому при таких преобразованиях вид уравнения Дирака не должен измениться. Нам известно, как спинор меняется под действием группы Лоренца. В частности, генераторы преобразований, которые соответствуют пространственным вращениям, в силу формул (A.250) и (3.86) могут быть записаны в виде

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

где оператор орбитального момента $\mathbf{L}$ и оператор спина $\mathbf{S}$ даются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= -i[\mathbf{r} \times \partial] = -ie_\varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + ie_\vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \mathbf{S} &= \frac{i}{4} \varepsilon_{ijk} \gamma_{jk} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В Задаче 1 явным вычислением показано, что компоненты оператора $\mathbf{J}$ будут коммутировать с гамильтонианом (3.288). Поскольку компоненты $\mathbf{J}$ представляют собой генераторы группы вращений в некотором представлении, то они, очевидно, удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям алгебры Ли $su(2)$

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k.$$

(Явная проверка этих равенств также не вызывает никаких сложностей.) Поэтому (см. Приложение А.5) состояния можно характеризовать значениями J_z и $\mathbf{J}^2 = j(j+1)$, где число j очевидно является полуцелым. Третья компонента полного момента $J_z = m_j$ при этом может принимать значения от $-j$ до j с шагом 1. Заметим, что квадрат орбитального момента $\mathbf{L}^2$ не коммутирует с гамильтонианом, благодаря чему состояния не могут характеризоваться квантовым числом l .

Для того чтобы выяснить, как будет выглядеть решение уравнения Дирака в случае центрально симметричного поля, вначале построим общие собственные функции операторов $\mathbf{J}_0^2$ и J_{0z} , где

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{L} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}.$$

(В отличие от оператора $\mathbf{J}$, который является матрицей 4×4 , оператор $\mathbf{J}_0$ будет матрицей размера 2×2 .) Несложно убедиться, что оператор $\mathbf{J}_0$ коммутирует с квадратом вектора орбитального момента, благодаря чему общие собственные функции операторов $\mathbf{J}_0^2$ и J_{0z} также будут являться и собственными функциями оператора $\mathbf{L}^2$. Поэтому такие собственные функции будут также характеризоваться величиной $\mathbf{L}^2$. Мы будем обозначать их через Ω_{jlm_j} и называть шаровыми спинорами. В явном виде они построены в Задаче 2, где показано, что число l может принимать значения $j - 1/2$ и $j + 1/2$, причем

$$\Omega_{j,j-1/2,m_j} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m_j}{2j}} Y_{j-1/2,m_j,\dots,1/2} \\ \sqrt{\frac{j-m_j}{2j}} Y_{j-1/2,m_j,-1/2} \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{j,j+1/2,m_j} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j-m_j+1}{2j+2}} Y_{j+1/2,m_j-1/2} \\ -\sqrt{\frac{j+m_j+1}{2j+2}} Y_{j+1/2,m_j+1/2} \end{pmatrix}.$$

где $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ - сферические функции. Их определение и основные свойства приведены в Приложении А.5. В силу своего определения шаровые спиноры удовлетворяют равенствам

$$\mathbf{J}_0^2 \Omega_{jlm_j} = j(j+1) \Omega_{jlm_j}; \quad J_{0z} \Omega_{jlm_j} = m_j \Omega_{jlm_j};$$

$$\mathbf{L}^2 \Omega_{jlm_j} = l(l+1) \Omega_{jlm_j}.$$

Кроме того, для шаровых спиноров будет справедливо следующее соотношение ортогональности, доказанное в Задаче 2:

$$\int d\Omega \Omega_{j_1 l_1 m_1}^+ \Omega_{j_2 l_2 m_2} = \delta_{j_1 j_2} \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}.$$

В Задаче 3 доказано еще одно полезное свойство шаровых спиноров:

$$(\mathbf{e}_r \boldsymbol{\sigma}) \Omega_{j,l,m_j} = \Omega_{j,2j-l,m_j}.$$

Поскольку решения уравнения Дирака, которые имеют определенную энергию, также являются собственными векторами операторов $\mathbf{J}^2$ и $\mathbf{J}_z$, которые очень похожи на операторы $\mathbf{J}_0^2$ и J_{0z} , то их необходимо строить из шаровых спиноров Ω_{jlm_j} , где $\mathbf{J}^2 = j(j+1)$, $J_z = m_j$. Но поскольку состояния нельзя характеризовать квантовым числом l , то в верхней и нижней частях четырехкомпонентного дираковского спинора должны стоять различные двухкомпонентные шаровые спиноры.

Как следствие, решение уравнения Дирака можно искать в виде

$$\psi = e^{-iEt} \begin{pmatrix} R_1(r) \Omega_{j,l,m_j}(\vartheta, \varphi) \\ i R_2(r) \Omega_{j,2j-l,m_j}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

(Фазовый множитель во втором равенстве добавлен для удобства дальнейших обозначений.) В Задаче 4 показано, что после подстановки этого выражения в уравнение Дирака получается следующая система уравнений для функций R_1 и R_2 :

$$\begin{aligned} R_1' + \frac{1+k}{r} R_1 - \left(E + m + \frac{Z\alpha}{r} \right) R_2 &= 0 \\ R_2' + \frac{1-k}{r} R_2 + \left(E - m + \frac{Z\alpha}{r} \right) R_1 &= 0 \end{aligned}$$

где было использовано обозначение

$$k = -j(j+1) + l(l+1) - \frac{1}{4} = \begin{cases} j - 1/2, & \text{если } l = j + 1/2 \\ -j - 1/2, & \text{если } l = j - 1/2. \end{cases}$$

Исследование этой системы уравнений проведено в Задаче 5, где показано, что квадратично интегрируемое решение существует в случае, если энергия принимает значения

$$E_{nj} = m \left(1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{\left(n - j - 1/2 + \sqrt{(j + 1/2)^2 - Z^2 \alpha^2} \right)^2} \right)^{-1/2},$$

где m - масса частицы, n - т.н. главное квантовое число, которое пробегает целые значения от 1 до бесконечности, а квантовое число j принимает значения от $1/2$ до $n - 1/2$. При этом степень вырождения состояния (вычисленная в Задаче 6) оказывается равной $2(2j + 1)$, если $j < n - 1/2$, и $2j + 1 = 2n$, если $j = n - 1/2$.

Соответствующие волновые функции могут быть выражены через вырожденные гипергеометрические функции и здесь не приводятся. Обсудим теперь более подробно энергетический спектр. Величина постоянной тонкой структуры α приближенно равна $1/137$, благодаря чему величину $Z\alpha$ можно рассматривать как малый параметр. Раскладывая по нему формулу (3.300), получаем, что

$$E_{nj} = m \left(1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{2n^2} + Z^4 \alpha^4 \left[-\frac{1}{n^3(2j+1)} + \frac{3}{8n^4} \right] + O(\alpha^6) \right)$$

Первое слагаемое в этом выражении представляет собой энергию покоя, а второе - спектр водородоподобного атома, который получается при решении уравнения Шредингера. Таким образом, решение уравнения Дирака действительно воспроизводит этот хорошо известный результат. Заметим, что слагаемые, которые имеют порядок α^4 , можно получить по теории возмущений, если учесть спин-орбитальное взаимодействие, а также отличие кинетической энергии в релятивистском случае от $mv^2/2$.

Однако с точки зрения теории поля наиболее интересно следующее наблюдение: из формулы (3.300) следует, что энергия одинакова для состояний с одинаковыми числами n и j . Однако, на самом деле, это не так. Например, равными оказываются энергии состояний $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$, что не согласуется с экспериментальными данными. Эксперимент показывает [13], что уровень $2s_{1/2}$ имеет большую энергию, чем уровень $2p_{1/2}$. Их разность соответствует частоте излучения $1057,85$ МГц (что соответствует длине волны около 28 см). Это явление называется лэмбовским сдвигом. Оказывается, что его можно объяснить только в рамках квантовой теории поля [14]. В частности, этот факт свидетельствует о недостаточности классической теории поля для описания природы и необходимости учета квантовых поправок. Вычисление величины лэмбовского сдвига в рамках квантовой теории поля приводит к очень хорошему согласию с экспериментальными данными.

С-3.3.1.

Доказать, что оператор полного момента импульса коммутирует с гамильтонианом Дирака в кулоновском поле.

(!?!?! крутая задача, досмотрю скоро очень!!!)

Вначале вычислим коммутатор оператора орбитального момента и оператора Гамильтона:

$$[L_i, H] = \left[\dots i\varepsilon_{ijk}x^j\partial_k, -i\gamma^0\gamma^m\partial_m + \gamma^0m - \frac{Z\alpha}{r} \right] = \varepsilon_{ijk}\gamma^0\gamma^j\partial_k$$

Коммутатор гамильтониана с оператором спина вычисляется с помощью тождества $\{\gamma^{\mu\nu}, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} [S_i, H] &= \left[\frac{i}{4}\varepsilon_{ijk}\gamma^{jk} - i\gamma^0\gamma^m\partial_m + \gamma^0m - \frac{Z\alpha}{r} \right] = \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\gamma^0 \cdot \gamma^{jk}, \gamma^m \partial_m = -\varepsilon_{ijm}\gamma^0\gamma^j\partial_m \end{aligned}$$

Складывая равенства (3.302) и (3.303), убеждаемся, что оператор полного момента коммутирует с гамильтонианом. Заметим, что из приведенного вычисления следует, что по отдельности ни компоненты орбитального момента, ни компоненты оператора спина с гамильтонианом не коммутируют.

С-3.3.2.

Найти функции, которые являются одновременно собственными векторами операторов $\mathbf{J}_0^2, \mathbf{L}^2$ и J_{0z} .

Поскольку шаровые спиноры одновременно являются собственными векторами операторов $\mathbf{L}^2$ и

$$J_{0z} = L_z + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

то в силу равенств $\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}$ и $L_z Y_{lm} = mY_{lm}$ они должны строиться из сферических функций следующим образом:

$$\Omega_{jlm_j} = \begin{pmatrix} a_1 Y_{l,m_j-1/2} \\ a_2 Y_{l,m_j+1/2} \end{pmatrix},$$

где m_j - собственное значение оператора J_{0z} . После этого остается только выяснить, при каких условиях такой столбец является собственным вектором оператора

$$\mathbf{J}_0^2 = \mathbf{L}^2 + \frac{3}{4} + \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}^2 + \frac{3}{4} + \begin{pmatrix} L_z & L_- \\ L_+ & -L_z \end{pmatrix},$$

где $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$. Применяя этот оператор к столбцу (3.305) и учитывая тождества (A.211), получаем, что

$$\hat{\mathbf{J}}_0^2 \Omega_{jlm_j} = \begin{pmatrix} \left[a_1(l(l+1) + 1/4 + m_j) + a_2\sqrt{(l+1/2)^2 - m_j^2} \right] Y_{l,m_j-1/2} \\ \left[a_2(l(l+1) - 1/4 - m_j) + a_1\sqrt{(l+1/2)^2 - m_j^2} \right] Y_{l,m_j+1/2} \end{pmatrix}.$$

Как следствие, шаровой спинор Ω_{jlm_j} будет являться собственным вектором оператора $\mathbf{J}_0^2$, если справедливо уравнение

$$m_j + \frac{a_2}{a_1}\sqrt{(l+1/2)^2 - m_j^2} = -m_j + \frac{a_1}{a_2}\sqrt{(l+1/2)^2 - m_j^2}.$$

Это уравнение имеет два решения

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{l - m_j - 1/2}{l + m_j}} + 1/2; \quad \frac{a_2}{a_1} = -\sqrt{\frac{l + m_j + 1/2}{l - m_j + 1/2}}.$$

которые соответствуют собственным значениям

$$\mathbf{J}_0^2 = (l + 1/2)(l + 3/2); \quad \mathbf{J}_0^2 = (l - 1/2)(l + 1/2).$$

Этот результат находится в полном соответствии с теорией представлений алгебры Ли группы вращений, описанной в Гриложении А.5, где показано, что $\mathbf{J}_0^2 = j(j + 1)$, причем число j может быть либо целым, либо полуцелым. Мы фактически получили, что в рассматриваемом случае число j может принимать 2 возможных значения: $j = l + 1/2$ и $j = l - 1/2$, причем

$$\begin{aligned} \Omega_{l+1/2, l, m_j} &= c_{l+1/2} \begin{pmatrix} \sqrt{l + m_j + 1/2} Y_{l, m_j - 1/2} \\ \sqrt{l - m_j + 1/2} Y_{l, m_j + 1/2} \end{pmatrix}; \\ \Omega_{l-1/2, l, m_j} &= c_{l-1/2} \begin{pmatrix} \sqrt{l - m_j - 1/2} Y_{l, m_j - 1/2} \\ -\sqrt{l + m_j + 1/2} Y_{l, m_j - 1/2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При этом нормировочные постоянные $c_{l=1/2}$ определяются из условия

$$\int d\Omega \Omega \Omega_{jlm_j}^+ \Omega_{jlm_j} = 1.$$

Поскольку для сферических функций справедливо равенство (А.215), мы легко получаем, что с точностью до несущественного фазового множителя $c_{l\pm 1/2} = 1/\sqrt{2l + 1}$. Это и означает, что шаровые спиноры записываются в виде (3.293). Заметим, что из формул (3.293) и (А.215) также следует, что

$$\int d\Omega \Omega_{l+1/2, l, m_j}^+ \Omega_{l-1/2, l, m_j} = 0.$$

С учетом ортогональности различных сферических функций это равенство можно обобщить формулой (3.295).

С-3.3.3.

Доказать, что шаровые спиноры удовлетворяют равенству (3.296). Учитывая, что $\mathbf{e}_r$ - единичный вектор, направленный вдоль $\mathbf{r}$, несложно убедиться, что в сферических координатах

$$(\mathbf{e}_r \boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ \sin \vartheta e^{i\varphi} & -\cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_r \boldsymbol{\sigma}) \Omega_{j, j-1/2, m_j} &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta \sqrt{\frac{j+m_j}{2j}} Y_{j-1/2, m_j-1/2} + e^{-i\varphi} \sin \vartheta \sqrt{\frac{j-m_j}{2j}} Y_{j-1/2, m_j+1/2} \\ e^{i\varphi} \sin \vartheta \sqrt{\frac{j+m_j}{2j}} Y_{j-1/2, m_j-1/2} - \cos \vartheta \sqrt{\frac{j-m_j}{2j}} Y_{j-1/2, m_j+1/2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для того чтобы упростить это выражение, мы вначале воспользуемся явным выражением для сферических функций

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Theta_{lm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi},$$

где

$$\Theta_{lm}(x) = \frac{(-1)^l m}{2^l l!} - \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l-m}} (1-x^2)^l.$$

Используя равенство

$$\begin{aligned} \frac{d^{\alpha+1}}{dx^{\alpha+1}} (1-x^2)^{l-1} &= -2(l+1) \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} (x(1-x^2)^l) = \\ &= -2(l+1) \left(\alpha \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} (1-x^2)^l + x \cdot \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} (1-x^2)^l \right) \end{aligned}$$

и полагая в нем $\alpha = l + m + 1$, получаем следующие рекуррентные соотношения для функций $\Theta_{lm}(x)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{l+m+2}{2l+3}} \Theta_{l+1,m-1} &= -\sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} \sqrt{1-x^2} \Theta_{lm} + \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} x \Theta_{l,m+1} \\ \sqrt{\frac{l-m-2}{2l+3}} \Theta_{l-1,m} &= \sqrt{\frac{l-m+1}{2l-1}} \sqrt{1-x^2} \Theta_{lm} + \sqrt{\frac{l+m}{2l+1}} x \Theta_{l,m-1} \end{aligned}$$

(Второе равенство получается с помощью тождества $\Theta_{lm} = (-1)^m \Theta_{l,-ml}$, которое доказано в Части А.5.) Из этих рекуррентных соотношений вытекает, что

$$(\mathbf{e}_r \boldsymbol{\sigma}) \Omega_{j,j-1/2,m_j} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j-m_j+1}{2j+2}} Y_{j+1/2,m_j} 1/2 \\ -\sqrt{\frac{j+m_j+1}{2j+2}} Y_{j+1/2,m_j+1/2} \end{pmatrix} = \Omega_{j,j+1/2,m_j}.$$

Умножая это равенство на $(\mathbf{e}_r \boldsymbol{\sigma})$ и используя свойства матриц Паули, получаем еще одно аналогичное равенство $(\mathbf{e}_r \boldsymbol{\sigma}) \Omega_{j,j+1/2,m_j} = \Omega_{j,j-1/2,m_j}$. Это и доказывает требуемое утверждение.

С-3.3.4.

Подставить выражение (3.297) в уравнение Дирака и выяснять, к каким уравнениям для функций $R_1(r)$ и $R_2(r)$ оно приводит.

Запишем вначале уравнение Дирака в сферических координатах. Для этого замстим, что в сферической системе координат

$$\boldsymbol{\partial} = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r^2} [\mathbf{r} \times \mathbf{L}].$$

Действительно, используя формулу для двойного векторного произведения, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \cdots \frac{i}{r^2} \mathbf{r} \times \mathbf{L} &= \frac{\mathbf{r}}{r^2} (\mathbf{r} \boldsymbol{\partial}) - \frac{1}{r^2} [\mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\partial}]_i^i = \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r^2} (\mathbf{r} \boldsymbol{\partial}) - \frac{1}{r^2} (\mathbf{r} (\mathbf{r} \boldsymbol{\partial}) - r^2 \boldsymbol{\partial}) = \boldsymbol{\partial}. \end{aligned}$$

При вычислении произведения $\gamma^i \partial_i$ нам потребуются величина $\sigma \boldsymbol{\partial}$, которую с помощью этого равенства, а также тождеств $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$ и $\mathbf{r} \mathbf{L} = 0$, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma \boldsymbol{\partial} &= (\mathbf{e}_r \boldsymbol{\sigma}) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r^2} \varepsilon_{2jk} \sigma_l x^j L_k = \\ &= (\mathbf{e}_r \boldsymbol{\sigma}) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} (\boldsymbol{\sigma}) (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}) = (\mathbf{e}_r \boldsymbol{\sigma}) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}) \right). \end{aligned}$$

Если этот оператор действует на шаровой спинор Ω_{jlm_j} , то

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}) = \left(\mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\right)^2 - \mathbf{L}^2 - \frac{3}{4} = j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} = -k - 1,$$

где величина k определена формулой (3.299). В этом параграфе для γ -матриц мы используем представление (3.170), в котором

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому с помощью равенств (3.323) и (3.324) уравнение Дирака (3.287) может быть переписано в виде

$$\left\{ \begin{pmatrix} E + Z\alpha/r - m & 0 \\ 0 & -E - Z\alpha/r - m \end{pmatrix} + i(\mathbf{e}_r\boldsymbol{\sigma}) \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 & -1+k \\ 1+k & 0 \end{pmatrix} \right] \right\} \begin{pmatrix} R_1(r)\Omega_{j,l,m_j}(\vartheta, \varphi) \\ iR_2(r)\Omega_{j,2j-l,m_j}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix} = 0,$$

причем величина k вычисляется по числу l , которое соответствует верхнему шаровому спинору. Воспользуемся теперь равенством (3.296), которое было доказано в предыдущей задаче. С его помощью легко получаем, что уравнение Дирака сведется к следующей системе для функций $R_1(r)$ и $R_2(r)$:

$$\begin{aligned} R_1' + \frac{1+k}{r}R_1 - \left(E + m + \frac{Z(\alpha)}{r}\right)R_2 &= 0; \\ R_2' + \frac{1-k}{r}R_2 + \left(E - m + \frac{Z(\alpha)}{r}\right)R_1 &\cdots 0. \end{aligned}$$

5. Найти, при каких условиях система (3.298) имеет квадратично интегрируемое решение.

Вначале найдем асимптотику решения на пространственной бесконечности. Пренебрегая всеми слагаемыми, которые пропорциональны $1/r$, рассматриваемые уравнения могут быть приближенно записаны в виде

$$R_1' - (E + m)R_2 = 0; \quad R_2' + (E - m)R_1 = 0.$$

Их решение ищется в виде $R_1 = A_1 e^{-\omega r}$; $R_2 = A_2 e^{-\omega r}$, где A_1 и A_2 - некоторые постоянные, которые должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{pmatrix} \omega & m + E \\ m - E & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Приравнявая к 0 определитель этой системы и учитывая, что решение должно достаточно быстро убывать на пространственной бесконечности, получаем, что

$$\omega = \sqrt{m^2 - E^2}.$$

доказано в предыдущей задаче. С его помощью легко получаем, что уравнение Дирака сведется к следующей системе для функций $R_1(r)$ и $R_2(r)$:

$$\begin{aligned} R_1' + \frac{1+k}{r}R_1 - \left(E + m + \frac{Z(\alpha)}{r}\right)R_2 &= 0; \\ R_2' + \frac{1-k}{r}R_2 + \left(E - m + \frac{Z(\alpha)}{r}\right)R_1 &\cdots 0. \end{aligned}$$

C-3.3.5.

Найти, при каких условиях система (3.298) имеет квадратично интегрируемое решение.

Вначале найдем асимптотику решения на пространственной бесконечности. Пренебрегая всеми слагаемыми, которые пропорциональны $1/r$, рассматриваемые уравнения могут быть приближенно записаны в виде

$$R'_1 - (E + m)R_2 = 0; \quad R'_2 + (E - m)R_1 = 0.$$

Их решение ищется в виде $R_1 = A_1 e^{-\omega r}$; $R_2 = A_2 e^{-\omega r}$, где A_1 и A_2 - некоторые постоянные, которые должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{pmatrix} \omega & m + E \\ m - E & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Приравняв к 0 определитель этой системы и учитывая, что решение должно достаточно быстро убывать на пространственной бесконечности, получаем, что

$$\omega = \sqrt{m^2 - E^2}.$$

где необходимо полагать $a_{-1} = b_{-1} = 0$.

Подставив разложения функций R и их производных в систему (3.298), получим, что коэффициенты a_p и b_p должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} -\omega (a_p + b_p) + (p + p_0 + k + 2) a_{p+1} - Z\alpha \sqrt{\frac{m - E}{m + E}} b_{p+1} &= 0 \\ -\omega (a_p + b_p) + (p + p_0 - k + 2) b_{p+1} - Z\alpha \sqrt{\frac{m + E}{m - E}} a_{p+1} &= 0. \end{aligned}$$

В частности, рассмотрев эту систему уравнений при $p = -1$, можно определить параметр p_0 :

$$\begin{aligned} (p_0 + 1 + k) a_0 - Z\alpha \sqrt{\frac{m - E}{m + E}} b_0 &= 0 \\ Z\alpha \sqrt{\frac{m + E}{m - E}} a_0 + (p_0 + 1 - k) b_0 &= 0. \end{aligned}$$

Нетривиальное решение этой системы существует только если ее определитель равен 0, откуда следует, что

$$p_0 = \sqrt{k^2 - Z^2 \alpha^2} - 1.$$

Заметим, что знак перед корнем должен быть положительным, для того чтобы решение не имело особенностей при $r = 0$.

Если $p \neq -1$, то из системы (3.333) можно выразить коэффициенты a_{p+1} и b_{p+1} через a_p и b_p . При этом, если вычесть из первого уравнения этой системы второе, получится связь между a_{n+1} и b_{n+1} :

$$\left(p + p_0 + k + 2 - Z\alpha \sqrt{\frac{m + E}{m - E}} \right) a_{p+1} = \left(p + p_0 - k + 2 + Z\alpha \sqrt{\frac{m - E}{m + E}} \right) b_{p+1}.$$

Тем самым решение рассматриваемой системы построено с точностью до произвольной нормировочной постоянной. Однако не во всех случаях это решение будет приводить к квадратично интегрируемой волновой функции. Это будет заведомо справедливо, если вместо ряда в формулах (3.331) будут стоять конечные суммы. Другими словами, должно

существовать такое число $N \geq 0$, что $a_{N+1} = 0$. Тогда из формулы (3.336) следует, что $b_{N-1} = 0$. Подставляя эти равенства в любое из уравнений (3.333), получаем, что предыдущие коэффициенты должны удовлетворять условию

$$a_N = -b_N.$$

Вновь используя формулу (3.336), после несложных преобразований получаем, что такая ситуация может иметь место только если

$$p_0 + N + 1 = \frac{EZ\alpha}{\sqrt{m^2 - E^2}}$$

Из этого уравнения можно определить значения энергии:

$$E = m \left(1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{(\sqrt{k^2 - Z^2 \alpha^2} - N)^2} \right)^{-1/2}$$

Определим теперь главное квантовое число $n \equiv N + j + 1/2$, которое, очевидно, может пробегать значения от 1 до бесконечности. Тогда окончательное выражение для уровней энергии дискретного спектра может быть представлено в виде

$$E = m \left(1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{\left(n - j - 1/2 + \sqrt{(j + 1/2)^2 - Z^2 \alpha^2} \right)^2} \right)^{-1/2}$$

В заключение заметим, что при $N = 0$ (или, эквивалентно, $n = j + 1/2$) решение системы (3.334) $a_0 = -b_0$ существует только если $k < 0$. Поэтому в этом случае $k = -j - 1/2$. Это соответствует тому, что в дираковском спиноре сверху стоит шаровой спинор с $l = j - 1/2$. Если же $N > 0$, то возможны 2 варианта: $k = \pm(j + 1/2)$, благодаря чему $l = j \pm 1/2$.

С-3.3.6.

Найти степень вырождения состояния с квантовыми числами n и j . Зафиксируем значения n и j . В соответствии с результатами предыдущей задачи, если $n > j + 1/2$, то возможны 2 случая: в дираковском спиноре сверху стоит шаровой спинор с $l = j - 1/2$ или шаровой спинор с $l = j + 1/2$. При этом в каждом из этих случаев величина m_j может принимать значения от $-j$ до j . Таким образом всего мы получаем $2(2j + 1)$ состояний. Если же $n = j + 1/2$, то сверху в дираковском спиноре может стоять только шаровой спинор с $l = j - 1/2$. Поэтому в этом случае будет только $2j + 1 = 2n$ состояний. Заметим, что данному значению n будет соответствовать

$$\sum_{j=1/2}^{n-3/2} 2(2j + 1) + 2n = 2n^2$$

состояний. Если в формуле для E_{nj} ограничиться только членами первого порядка малости по α^2 , то такие состояния будут иметь одинаковую энергию $E \approx m - Z^2 \alpha^2 / 2n^2$. Но в общем случае состояния с n различными возможными значениями j будут иметь различную энергию.

Другое про кулоновский потенциал

О других подходах (???)

P. A. HORVATHY THE BIEDENHARN APPROACH TO RELATIVISTIC COULOMB-TYPE PROBLEMS

(есть статья про это, см. литературу, мб почитаю ее когда-то.)

12.2.2 Dirac Cone

Теория (?)

О применениях (!??.!)

О применениях в физике твердого тела (!?)

(заготовка для графена)

12.2.3 Weyl Spinors by Kiselev

Теория

Правое киральное безмассовое поле $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}(x)$, преобразующееся по представлению $(\frac{1}{2}, 0)$ группы $SL(2, \mathbb{C})$ (см. стр. 379, согласно общему формализму построения базиса релятивистских полей в группе Пуанкаре, изложенному в разделе 18.1.2 удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{s} p^{\mu} \bar{\chi} = \frac{1}{\hbar} W^{\mu} \bar{\chi}$$

где спиральность $\mathfrak{s} = \frac{1}{2}$, p^{μ} - собственные значения 4-импульса для безмассового поля, $p_{\mu} p^{\mu} = 0$, а оператор W^{μ} действует в двумерном пространстве представления и задается покомпонентно (см. раздел 18.1.2.), так что для временной компоненты (см. (18.9)

$$\frac{1}{\hbar} W^0 = \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

В явном виде уравнение (19.1) при $\mu = 0$ принимает вид

$$p_0 \bar{\chi} = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \bar{\chi},$$

или с учетом определения 4-вектора релятивистских сигма-матриц Паули, введенных в разделе 17.6.1 согласно 17.121, 17.122, (?????)

$$p_{\mu} \sigma^{\mu} \bar{\chi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_{\mu} \sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = 0.$$

Задача 10.5. Используя выражение для пространственной компоненты вектора Паули-Любанского в (18.10) и (18.17), покажите, что уравнение (19.1) при $\mu \mapsto a \in \{1, 2, 3\}$

$$\mathfrak{s} p^a \bar{\chi} = \frac{1}{\hbar} W^a \bar{\chi} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} p^a \bar{\chi} = \{p_0 \mathbf{s}^a - i(\mathbf{p} \times \mathbf{s})^a\} \bar{\chi}$$

является следствием уравнения 19.2.

Примечание. Домножьте 19.2 на матрицы Паули и воспользуйтесь их алгеброй, т.е. значениями коммутатора и антикоммутатора.

Уравнение (19.2) после перехода от импульсного представления к координатному ¹ может быть представлено как «релятивистское уравнение Шрёдингера» для правого кирального поля со спином $\frac{1}{2}$

$$i\hbar \frac{\partial \bar{\chi}(x)}{\partial t} = \mathcal{H}_R \bar{\chi}(x), \quad \mathcal{H}_R = c \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = c(-i\hbar \nabla) \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

причем «гамильтониан» $\mathcal{H}_R$ - эрмитов оператор.

Эрмитово сопряжение поля-столбца $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ согласно 17.119-это полестрока $(\bar{\chi}^{\dot{\alpha}})^{\dagger} = \chi^{\alpha}$, которое является независимой полевой переменной. Значит, уравнение (19.3) может быть получено из принципа экстремального действия, если проварьировать действие

$$S_R = \int d^4x \{ \chi \hat{p}_\mu \sigma^\mu \bar{\chi} \} = \hbar \int d^4x \{ \chi \sigma^\mu i \partial_\mu \bar{\chi} \}$$

по χ^α . Как мы видели, это действие является релятивистским инвариантом, так как $\hat{p}_\mu$ - это 4-ковектор, а $\chi \sigma^\mu \bar{\chi}$ - 4-вектор (см. раздел 17.6.1).

Выписывая обобщенный импульс $\pi_{\bar{\chi}}$ как производную лагранжиана $\mathcal{L}_R$ по скорости изменения поля $\partial_t \bar{\chi} = \dot{\bar{\chi}}$ в действии S_R (19.5, записанном в виде

$$S_R = \int dt \int d^3r \mathcal{L}_R = \int dt \int d^3r \hbar c \{ \chi \sigma^\mu i \partial_\mu \bar{\chi} \}$$

найдем

$$\pi_{\bar{\chi}} = \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial \dot{\bar{\chi}}(x)} = i \hbar \chi \sigma^0,$$

откуда гамильтониан классического поля вследствие преобразования Лежандра при переходе от скорости к импульсу

$$H_R = \int d^3r \{ \pi_{\bar{\chi}} \dot{\bar{\chi}} - \mathcal{L}_R \}$$

¹ В координатном представлении $p_0 \mapsto i \hbar \partial_0 = i \hbar / c \partial_t$, $\mathbf{p} \mapsto -i \hbar \nabla$, а спинор становится функцией координат и времени, $\bar{\chi} \mapsto \bar{\chi}(x)$. 19419

примет вид

$$H_R = \int d^3r \{ i \hbar \chi \sigma^0 \dot{\bar{\chi}} - \hbar c \chi \sigma^\mu i \partial_\mu \bar{\chi} \} = c \int d^3r \{ \chi (\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \bar{\chi} \}$$

Глобальные калибровочные преобразования

$$\bar{\chi}_u = e^{-i u \frac{e}{\hbar c}} \bar{\chi}$$

определяют сохраняющийся ток

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial \partial_\mu \bar{\chi}_u} \frac{\partial \bar{\chi}_u}{\partial u} \Big|_{u=0} = e \chi \sigma^\mu \bar{\chi}$$

и заряд

$$Q = \int d^3r j^0(x) = e \int d^3x \{ \chi \sigma^0 \bar{\chi} \} = e \int d^3x \{ \bar{\chi}^\dagger \bar{\chi} \}.$$

Найдем решение линейного уравнения для спинора (19.4) в виде волны де Бройля с фиксированным 4-импульсом с суммой по независимым модам $\bar{\chi}_{(\lambda)}(\mathbf{p})$

$$\bar{\chi}(x) = e^{-\frac{1}{\hbar} p \cdot x} \sum_{\lambda} \bar{\chi}_{(\lambda)}(\mathbf{p}),$$

где

$$p \cdot x = p_0 x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$$

Известно, что матрица

$$\frac{1}{|\mathbf{p}|} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \sigma_n$$

как удвоенная матрица проекции эрмитова оператора спина $s = 1/2$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{s}$$

на ось импульса

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{p}|}\mathbf{p}$$

имеет 2 собственных значения $\lambda_n = \pm 1$ и соответствующие им 2 собственных вектора-столбца $\bar{\chi}_{(+)}(\mathbf{p})$ и $\bar{\chi}_{(-)}(\mathbf{p})$, так что в их базисе

$$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} = |\mathbf{p}|\sigma_3 = |\mathbf{p}| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для однозначности определения мод $\bar{\chi}_{(\pm)}(\mathbf{p})$ будем считать их компоненты вещественными и положительными, а также наложим условие $\bar{\chi}^\dagger \bar{\chi} = 2|\mathbf{p}|$, при котором собственные векторы-столбцы примут следующие значения:

при $\lambda_n = +1$

$$\bar{\chi}_{(+)}(\mathbf{p}) = \sqrt{2|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\bar{\chi}_{(+)}(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|\bar{\chi}_{(+)}(\mathbf{p}),$$

и при $\lambda_n = -1$

$$\bar{\chi}_{(-)}(-\mathbf{p}) = \sqrt{2|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\bar{\chi}_{(-)}(-\mathbf{p}) = -|\mathbf{p}|\bar{\chi}_{(-)}(-\mathbf{p}),$$

20420

где мы ввели обозначение $\bar{\chi}_{(-)}(-\mathbf{p})$, чтобы указать на следующее: мода $\bar{\chi}_{(-)}(-\mathbf{p})$ имеет положительную проекцию спина на импульс $-\mathbf{p}$, поскольку

$$(-\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \bar{\chi}_{(-)}(-\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|\bar{\chi}_{(-)}(-\mathbf{p})$$

Уравнения на собственные значения для столбцов $\bar{\chi}_{(\pm)}(\mathbf{p})$ указывают на то, что для $\bar{\chi}_{(+)}(\mathbf{p})$ решение

$$\bar{\chi}_{(+)}^{\mathbf{p}}(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \bar{\chi}_{(+)}(\mathbf{p})$$

имеет положительное значение временной компоненты 4-импульса $p_0 = |\mathbf{p}|$, а для $\bar{\chi}_{(-)}(\mathbf{p})$ решение

$$\bar{\chi}_{(-)}^{-\mathbf{p}}(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \bar{\chi}_{(-)}(-\mathbf{p})$$

имеет отрицательное значение временной компоненты 4-импульса $p_0 = -|\mathbf{p}|$, так что его можно переписать в виде

$$\bar{\chi}_{(-)}^{-\mathbf{p}}(x) = e^{\frac{i}{\hbar}(|\mathbf{p}|x_0 - (-\mathbf{p}) \cdot \mathbf{r})} \bar{\chi}_{(-)}(-\mathbf{p}).$$

В итоге, мы установили, что $\bar{\chi}_{(+)}^{\mathbf{p}}(x)$ - это положительночастотная мода с положительной проекцией спина на ось импульса, и поэтому говорят, что $\bar{\chi}_{(+)}^{\mathbf{p}}(x)$ - правая положительночастотная мода. Поле $\bar{\chi}_{(-)}^{-\mathbf{p}}(x)$ - это отрицательночастотная мода с отрицательной проекцией спина на ось импульса, т.е. $\bar{\chi}_{(-)}^{-\mathbf{p}}(x)$ - левая отрицательночастотная мода.

При рассмотрении суперпозиции решений можно в интегрировании по импульсам для отрицательночастотной моды провести замену переменных $\mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}$, т.е. использовать моду

$$\bar{\chi}_{(-)}^{\mathbf{p}}(x) = e^{\frac{i}{\hbar}(|\mathbf{p}|x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \bar{\chi}_{(-)}(\mathbf{p}) = e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot x} \bar{\chi}_{(-)}(\mathbf{p}),$$

где уже временная компонента импульса положительна $p_0 = |\mathbf{p}| \geq 0$. Значит, самое общее решение уравнения движения представляет собой суперпозицию правых и левых мод

$$\bar{\chi}(x) = \int \frac{d^3 p}{2p_0(2\pi\hbar)^3} \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot x} \bar{\chi}_{(+)}(\mathbf{p}) \vartheta(\mathbf{p}) + e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot x} \bar{\chi}_{(-)}(\mathbf{p}) \bar{v}(\mathbf{p}) \right\}$$

причем мы учли в обозначениях тот факт, что при квантовании амплитуда положительночастотной моды $\vartheta(\mathbf{p})$ переходит в оператор уничтожения кванта поля, а амплитуда отрицательночастотной моды $\bar{v}(\mathbf{p})$ при квантовании переходит в оператор рождения кванта поля.

Установим преобразование, которое переводит решение $\bar{\chi}_{(+)}^{\mathbf{p}}(x)$ в решение $\bar{\chi}_{(-)}^{-\mathbf{p}}(x)$ вне зависимости от того, в каком базисе записываются эти моды, т.е. при другом соглашении о фазах $\bar{\chi}_{(+)}(\mathbf{p})$ и $\bar{\chi}_{(-)}(-\mathbf{p})$. Для этого запишем уравнение для $\bar{\chi}_{(+)}^{\mathbf{p}}(x)$

$$i\hbar\partial_0\bar{\chi}_{(+)}^{\mathbf{p}}(x) = \boldsymbol{\sigma} \cdot (-i\hbar\nabla)\bar{\chi}_{(+)}^{\mathbf{p}}(x),$$

которое дает

$$p_0\bar{\chi}_{(+)}(\mathbf{p}) = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\bar{\chi}_{(+)}(\mathbf{p})$$

21421

Затем возьмем комплексное сопряжение 19.9

$$-i\hbar\partial_0\left(\bar{\chi}_{(+)}^{\mathbf{p}}(x)\right)^* = \boldsymbol{\sigma}^* \cdot (i\hbar\nabla)\left(\bar{\chi}_{(+)}^{\mathbf{p}}(x)\right)^*,$$

откуда получим уравнение

$$p_0\bar{\chi}_{(+)}^*(\mathbf{p}) = (\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{p})\bar{\chi}_{(+)}^*(\mathbf{p}),$$

которое мы домножим на матрицу $\hat{\epsilon}$, которую мы ввели при описании сопряженных спиноров в разделе 17.6.1 (см. стр. 357), так что

$$\begin{aligned} p_0(-\hat{\epsilon}\bar{\chi}_{(+)}^*(\mathbf{p})) &= (-\hat{\epsilon})(\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{p})\bar{\chi}_{(+)}^*(\mathbf{p}) \Rightarrow \\ p_0(-\hat{\epsilon}\bar{\chi}_{(+)}^*(\mathbf{p})) &= ((\hat{\epsilon} \circ \boldsymbol{\sigma}^* \circ \hat{\epsilon}^{-1}) \cdot \mathbf{p})(-\hat{\epsilon}\bar{\chi}_{(+)}^*(\mathbf{p})) \Rightarrow \\ p_0(-\hat{\epsilon}\bar{\chi}_{(+)}^*(\mathbf{p})) &= -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(-\hat{\epsilon}\bar{\chi}_{(+)}^*(\mathbf{p})) \end{aligned}$$

где мы использовали тождества $\hat{\epsilon} \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \mathbb{1}$ и $\hat{\epsilon} \circ \boldsymbol{\sigma}^* \circ \hat{\epsilon}^{-1} = -\boldsymbol{\sigma}$. Но уравнение 19.11 - это уравнение для отрицательночастотной моды $\bar{\chi}_{(-)}(-\mathbf{p})$, и следовательно, мы установили связь

$$-\hat{\epsilon}\left(\bar{\chi}_{(+)}^{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r})\right)^* = e^{\frac{i}{\hbar}(|\mathbf{p}|x_0 - (-\mathbf{p}) \cdot (-\mathbf{r}))} \bar{\chi}_{(-)}(-\mathbf{p}) = \bar{\chi}_{(-)}^{-\mathbf{p}}(t, -\mathbf{r}).$$

Напомним, что правый спинор преобразуется в группе $SL(2, \mathbb{C})$ по закону

$$\bar{\chi} \mapsto \Lambda_+ \bar{\chi},$$

где матрица преобразований Λ_+ зависит от углов поворота ϕ и гиперповоротов ϑ (см. раздел 17.6.1),

$$\Lambda_+ = \exp\{-i(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi} + \tilde{\mathbf{s}} \cdot \boldsymbol{\vartheta})\} = \exp\left\{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\vartheta}\right\}$$

Поэтому переход 19.12 от $\bar{\chi}_{(+)}^{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r})$ к $\bar{\chi}_{(-)}^{\mathbf{p}}(t, -\mathbf{r})$ приводит к преобразованию матрицы Λ_+

$$\hat{\epsilon} \circ \Lambda_+^* \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\vartheta} \right\} = \Lambda_-,$$

где Λ_- — матрица преобразований левых киральных полей в представлении $(0, \frac{1}{2})$. Это значит, что $\bar{\chi}_{(-)}^{\mathbf{p}}(t, -\mathbf{r})$ преобразуется как левое поле. Применим теперь к полю $\bar{\chi}_{(-)}^{\mathbf{p}}(t, -\mathbf{r})$ операцию зеркальной инверсии пространства: $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$. При этой инверсии угол поворотов ϕ ведет себя как псевдовектор $\phi \mapsto \phi$, а угол гиперповоротов ϑ ведет себя как вектор $\vartheta \mapsto -\vartheta$ (см. лекцию??), и следовательно, зеркальная инверсия приводит к преобразованию Λ_-

$$\Lambda_- = \hat{\epsilon} \circ \Lambda_+^* \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\vartheta} \right\} \mapsto \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\vartheta} \right\} = \Lambda_+$$

Это значит, что при зеркальной инверсии

$$\bar{\chi}_{(-)}^{\mathbf{p}}(t, -\mathbf{r}) \mapsto \bar{\chi}_{(-)}^{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}),$$

и итоговое поле преобразуется как правое киральное поле матрицей Λ_+ . Поэтому наряду с обозначением $\bar{\chi}_{(-)}(\mathbf{p})$ используют обозначение

$$\bar{\chi}_{(-)}(\mathbf{p}) \equiv \bar{\chi}_{cp}(\mathbf{p}),$$

22422

где индекс cp включает в себя символ p , который указывает на то, что этот спинор получен при зеркальной инверсии пространства, а символ c — на то, что, как мы покажем, отрицательночастотные моды отвечают квантам-античастицам, так что спинор $\bar{\chi}_{cp}(\mathbf{p})$ описывает моду поля, которая получается действием операции комбинированной зарядовой четности композиции зеркальной инверсии пространства и зарядового сопряжения (замена частиц на античастицы). При таком переобозначении становится излишним индекс у положительночастотного решения, так что мы принимаем

$$\bar{\chi}_{(+)}(\mathbf{p}) \equiv \bar{\chi}(\mathbf{p}).$$

В итоге разложение классического правого спинорного поля по модам принимает вид

$$\bar{\chi}(x) = \int \frac{d^3p}{2p_0(2\pi\hbar)^3} \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar}p \cdot x} \bar{\chi}(\mathbf{p}) \vartheta(\mathbf{p}) + e^{\frac{i}{\hbar}p \cdot x} \bar{\chi}_{cp}(\mathbf{p}) \bar{v}(\mathbf{p}) \right\}$$

где уже энергия p_0 принимает только положительные значения

$$p_0 = |\mathbf{p}|, \quad p \cdot x = p_0 x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r},$$

а $\vartheta(\mathbf{p})$ и $v(\mathbf{p})$ — числовые параметры — амплитуды, свойства которых предстоит определить.

С учетом ортогональности базисных спиноров после довольно объемных, но стандартных выкладок с интегрированием, как мы это уже продемонстрировали в случае скалярного поля, находим для гамильтониана 19.6 на уравнениях движения

$$H_R = \int \varepsilon(\mathbf{p}) \frac{d^3p}{2p_0(2\pi\hbar)^3} \{ \bar{\vartheta}(\mathbf{p}) \vartheta(\mathbf{p}) - v(\mathbf{p}) \bar{v}(\mathbf{p}) \}$$

где $\varepsilon(\mathbf{p}) = c|\mathbf{p}| = cp_0 > 0$ - положительно определенная энергия спинорной моды. Аналогично, заряд классического поля 19.8

$$Q = e \int \frac{d^3p}{2p_0(2\pi\hbar)^3} \{ \bar{\vartheta}(\mathbf{p})\vartheta(\mathbf{p}) + v(\mathbf{p})\bar{v}(\mathbf{p}) \}.$$

Классические выражения для гамильтониана и заряда допускают логически непротиворечивую интерпретацию, если параметры $\vartheta(\mathbf{p})$ и $v(\mathbf{p})$ являются грассмановыми переменными ¹ так как только в этом случае гамильтониан является положительно определенной величиной: можно ввести соответствующие плотности гамильтониана в импульсном пространстве для спинорных мод

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_R(\mathbf{p}) &= \frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{2p_0} \bar{\vartheta}(\mathbf{p})\vartheta(\mathbf{p}) \geq 0 \\ \mathfrak{h}_L^{cp}(\mathbf{p}) &= \frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{2p_0} \bar{v}(\mathbf{p})v(\mathbf{p}) \geq 0, \end{aligned}$$

¹ Изложение материала из курса квантовой механики о фермионном осцилляторе, где построена полная картина описания грассмановых чисел и операций с ними, читатель может прочитать на стр. 162??, чтобы освежить свои знания в этой области. 23423

поскольку для грассмановых переменных

$$\bar{v}(\mathbf{p})v(\mathbf{p}) = -v(\mathbf{p})\bar{v}(\mathbf{p}),$$

так что величины

$$\begin{aligned} n_0(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2p_0} \bar{\vartheta}(\mathbf{p})\vartheta(\mathbf{p}), \\ n_0^{cp}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2p_0} \bar{v}(\mathbf{p})v(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

определяют соответственно плотности состояний правых спиноров и CP- - сопряженных к ним спиноров, обладающих левой спиральностью и противоположным значением заряда, так как

$$Q = e \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \{ n_0(\mathbf{p}) - n_0^{cp}(\mathbf{p}) \}$$

Повторяя ту же процедуру для левых вейлевских спиноров-столбцов θ_α , которые удовлетворяют уравнению

$$p_\mu \bar{\sigma}^\mu \theta = 0 \Leftrightarrow p_\mu (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \theta_\alpha = 0,$$

находим действие

$$S_L = \int d^4x \{ \bar{\theta} p_\mu \bar{\sigma}^\mu \theta \}$$

12.2.4 Dirac Spinors by Kiselev

Теория

Поскольку пространственная инверсия меняет знак спиральности безмассового поля, сохраняя его заряд, а зарядовое сопряжение сохраняет спиральность, изменяя знак заряда, свободное спинорное поле, действие которого симметрично относительно операций пространственной и зарядовой четности по отдельности, с необходимостью

должно включать в себя как левые, так и правые спиноры одного знака заряда, и, следовательно, такое поле преобразуется относительно группы $SL(2, \mathbb{C})$ как прямая сумма

(расширенный столбец)

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \\ \theta_{\alpha} \end{pmatrix} = \psi_D,$$

т. е. дираковский биспинор имеет индексы и правого, и левого спиноров. Такой безмассовый биспинор, очевидно, удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} p_{\mu} \bar{\sigma}^{\mu} \theta = 0 \\ p_{\mu} \sigma^{\mu} \bar{\chi} = 0 \end{cases}$$

которая получается из действия

$$S_D = \int d^4x (\chi p_{\mu} \sigma^{\mu} \bar{\chi} + \bar{\theta} p_{\mu} \bar{\sigma}^{\mu} \theta).$$

Уравнения движения в терминах дираковского спинора можно также записать в виде

$$\not{p} \psi_D = \begin{pmatrix} 0 & p_{\mu} \bar{\sigma}^{\mu} \\ p_{\mu} \sigma^{\mu} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\chi} \\ \theta \end{pmatrix} = 0,$$

где матрица p понимается в блочном смысле. Она переводит биспинор в биспинор, так как

$$\begin{aligned} p_{\mu} (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha} \theta_{\alpha} &- \text{правый спинор,} \\ p_{\mu} \sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} &- \text{левый спинор.} \end{aligned}$$

Обычно вводят блочные матрицы Дирака в киральном представлении

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma},$$

или

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^{\mu} \\ \sigma^{\mu} & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда ¹

$$\not{p} = p_{\mu} \gamma^{\mu} = p_0 \gamma_0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}$$

Безмассовый биспинор имеет два собственных состояния киральности

$$\gamma_5 \psi_D = \pm \psi_D,$$

где в киральном представлении

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Интересно, что

$$\gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -i \frac{1}{4!} \hat{\epsilon}_{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} \gamma^{\rho}$$

¹ Вместо перечеркнутого символа в отечественных изданиях используют символ со шляпкой. 27427

Если обозначить матрицы Паули, образующие блоки 1, символом $\boldsymbol{\tau}$, чтобы не путать их с σ -матрицами в группе $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, то, очевидно,

$$\gamma_0 = \boldsymbol{\tau}_1 \otimes \mathbb{1}, \quad \gamma_5 = \boldsymbol{\tau}_3 \otimes \mathbb{1},$$

и для полноты базиса

$$\gamma_0 \gamma_5 = -i \boldsymbol{\tau}_2 \otimes \mathbb{1}$$

так что

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_0 \gamma_5 \boldsymbol{\sigma} = -i \boldsymbol{\tau}_2 \otimes \boldsymbol{\sigma}$$

Тогда 4-вектор гамма-матриц Дирака с учетом различия верхних и нижних спинорных индексов с точками и без точек запишется в виде

$$(\gamma_0, \boldsymbol{\gamma}) = \gamma^\mu = \tau_+ \otimes \bar{\sigma}^\mu + \tau_- \otimes \sigma^\mu,$$

где $\tau_\pm = (\boldsymbol{\tau}_1 \pm i \boldsymbol{\tau}_2)/2$. Произведения

$$\tau_+ \tau_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_- \tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

образуют эрмитовы матрицы - проекторы на киральные состояния

$$P_{R,L} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} \pm \gamma_5),$$

причем

$$P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R + P_L = \mathbb{1}.$$

Тогда, используя антикоммутиационные соотношения для сигма-матриц 17.123, (17.124) на стр. 363 мгновенно находим ²

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}$$

а с помощью коммутатора вводим дираковские матрицы $\hat{\sigma}^{\mu\nu}$ (со шляпками),

$$\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = P_R \bar{\sigma}^{\mu\nu} + P_L \sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \sigma^{\mu\nu} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}^{\mu\nu},$$

которые, очевидно, образуют представление спинных генераторов группы Лоренца на дираковских спинорах.

Отметим, что согласно алгебре матриц Паули

$$\gamma_0^2 = \gamma_5^2 = -\gamma_\rho^2 = \mathbb{1}, \quad \{\gamma_5, \gamma^\nu\} = 0, \quad \rho = \{1, 3\}, \quad \nu = \{0, 3\},$$

¹ Умножение блочных матриц с точки зрения математической грамотности принято записывать в виде тензорного произведения обычных, не блочных, матриц: $\boldsymbol{\tau}_k \boldsymbol{\sigma}^l \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_k \otimes \boldsymbol{\sigma}^l$.

² В терминах релятивистских матриц Паули вычислим произведение

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\nu \\ \sigma^\nu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \end{pmatrix}.$$

Но мы знаем, что

$$\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} = g^{\mu\nu}\mathbb{1} - 2i\bar{\sigma}^{\mu\nu}, \quad \sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} = g^{\mu\nu}\mathbb{1} - 2i\sigma^{\mu\nu},$$

где обратная метрика Минковского $g^{\mu\nu}$ симметрична по перестановкам лоренцевых индексов, а генераторы группы Лоренца на правых и левых спинорах антисимметричны, так что результаты для коммутатора и антикоммутатора матриц Дирака становятся элементарными. 28428

где нет суммирования по ρ .

Произвольный элемент группы Лоренца на дираковских спинорах по построению имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_+ & 0 \\ 0 & \Lambda_- \end{pmatrix},$$

а обратный элемент

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_+^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_-^{-1} \end{pmatrix}$$

может быть представлен в виде

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_+^{\dagger} & 0 \\ 0 & \Lambda_-^{\dagger} \end{pmatrix} = \gamma_0 \Lambda^{\dagger} \gamma_0.$$

Поэтому дираковски сопряженный спинор-строка

$$\bar{\psi}_D \stackrel{\text{def}}{=} \psi_D^{\dagger} \gamma_0 = (\bar{\theta}, \chi)$$

преобразуется обратной матрицей. Используя это свойство и расписывая билинейные комбинации дираковских спиноров через вейлевские, получаем трансформационные свойства для следующих величин (опуская маркер D для дираковских спиноров):

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &= \bar{\theta}\bar{\chi} + \chi\theta - \text{скаляр}, \\ \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi &= \chi\sigma^{\mu}\bar{\chi} + \bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\theta - \text{вектор}, \\ \frac{1}{2}\bar{\psi}\hat{\sigma}^{\mu\nu}\psi &= \bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\chi} + \chi\sigma^{\mu\nu}\theta - \text{антисимметричный тензор}. \end{aligned}$$

Действие оператора пространственной инверсии изменяет спиральность, так что

$$\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \xleftrightarrow{\mathbb{P}} \theta_{\alpha}, \quad \chi^{\alpha} \xleftrightarrow{\mathbb{P}} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}},$$

и

$$\mathfrak{s} \xleftrightarrow{\mathbb{P}} -\mathfrak{s}, \quad P_L \xleftrightarrow{\mathbb{P}} P_R, \quad \gamma_5 \xleftrightarrow{\mathbb{P}} -\gamma_5.$$

При этом фазы преобразования спиноров можно определить таким образом, что операция инверсии запишется в виде 1

$$\psi^{\mathbb{P}}(t, \mathbf{r}) = \gamma_0 \psi(t, -\mathbf{r}),$$

причем, как и должно быть,

$$\gamma_0 \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_0$$

Тогда легко заметить, что следующие билинейные комбинации преобразуются как псевдовеличины:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma_5\psi &= \bar{\theta}\bar{\chi} - \chi\theta & - \text{псевдоскаляр,} \\ \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi &= -\chi\sigma^\mu\bar{\chi} + \bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\theta & - \text{псевдовектор.}\end{aligned}$$

¹ В самом деле, матрица преобразования в общем виде запишется в виде $\xi_{\mathbb{P}} \begin{pmatrix} 0 & e^{iu} \\ e^{-iu} & 0 \end{pmatrix}$, но фазы u можно занулить, переопределяя глобальные комплексные фазы киральных спиноров Вейля. 29429

Поскольку шестнадцать матриц

$$(\mathbb{1}, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma_5\gamma^\mu, \hat{\sigma}^{\mu\nu})$$

образуют базис в пространстве матриц 4×4 , мы получили исчерпывающий набор всевозможных билинейных дираковских выражений и их характеристики относительно преобразований группы Лоренца, включая дискретную операцию инверсии пространства.

Операция зарядового сопряжения сохраняет спиральность, т. е. переводит правый спинор в правый и аналогично действует на левый спинор, а также меняет знак комплексной фазы поля, которая связана со знаком заряда, так что, опуская фазу преобразования,

$$\begin{aligned}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} &\xrightarrow{\mathbb{C}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = (\epsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta)^\dagger = \left(((\hat{\epsilon}\theta)^T)^\dagger \right)^{\dot{\alpha}} = (\hat{\epsilon}\theta^*)^{\dot{\alpha}}, \\ \theta_\alpha &\xrightarrow{\mathbb{C}} \chi_\alpha = (\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\chi}^{\dot{\beta}})^\dagger = \left(((-\hat{\epsilon}\bar{\chi})^T)^\dagger \right)_\alpha = (-\hat{\epsilon}\bar{\chi}^*)_\alpha.\end{aligned}$$

Значит,

$$\mathbb{C}\psi = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\epsilon} \\ -\hat{\epsilon} & 0 \end{pmatrix} \psi^*$$

К такому же выводу мы придем, если рассмотрим композицию зеркальной инверсии пространства $\mathbb{P}(19.47)$ и комбинированной зарядового сопряжения $\mathbb{CP}$, так как

$$\begin{aligned}\psi^{\mathbb{P}}(t, \mathbf{r}) &= \gamma_0\psi(t, -\mathbf{r}), \quad \psi^{\mathbb{CP}}(t, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -\hat{\epsilon} & 0 \\ 0 & \hat{\epsilon} \end{pmatrix} \psi^*(t, -\mathbf{r}) = -\hat{\epsilon}\gamma_5\psi^*(t, -\mathbf{r}), \\ \psi^{\mathbb{PCP}}(t, \mathbf{r}) &= -\hat{\epsilon}\gamma_0\gamma_5\psi^*(t, \mathbf{r}) = -\hat{\epsilon} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \psi^*(t, \mathbf{r}) = \\ &= -\hat{\epsilon} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \psi^*(t, \mathbf{r}) = \hat{\epsilon}\gamma_5\gamma_0\psi^*(t, \mathbf{r}).\end{aligned}$$

Действие спинора, инвариантное относительно каждого из дискретных преобразований группы Лоренца по отдельности, принимает вид

$$S_D = \int d^4x \bar{\psi} p \psi.$$

Таким образом, безмассовое поле Дирака по сути представляет собой систему из двух вейлевских спиноров, переходящих друг в друга при инверсии пространства и сопряжении заряда.

Задача 10.6. Пользуясь антикоммутатором $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$, доказать, что след произведения γ_5 с нечетным числом гамма-матриц равен нулю:

$$\text{tr}(\gamma_5\gamma^\mu) = \text{tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}) = \dots = 0.$$

Задача 10.7. Пользуясь антикоммутатором $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, доказать, что для следа четного числа гамма-матриц Дирака имеет место альтернированное соотношение редукции

$$\text{tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = g^{\mu_1 \mu_2} \text{tr}(\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_n}) - g^{\mu_1 \mu_3} \text{tr}(\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_n}) + \dots$$

и вычислить

$$\text{tr}(\not{p} \not{\epsilon}), \quad \text{tr}(\not{K} \not{p}' \not{K}').$$

30430

Задача 10.8. Пользуясь антикоммутатором $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ и тождеством

$$\text{tr}(A) = \frac{1}{4} \text{tr}(A \gamma^\mu \gamma_\mu) = \frac{1}{4} \text{tr}(\gamma_\mu A \gamma^\mu)$$

доказать, что след трех гамма-матриц равен нулю и, по индукции, след нечетного числа гамма-матриц, во-первых, антисимметричен по перестановкам индексов матриц и, во-вторых, также равен нулю с использованием представления γ_5 в виде полностью антисимметричного произведения 4-х гамма-матриц.

Задача 10.9. Доказать, что

$$\text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = -4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$$

Задача 10.10. Доказать, что

$$\gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu = -2\not{p}, \quad \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu = 4p \cdot k.$$

19.2.2. Массивное поле. Дираковское поле с массой можно построить посредством действия буста на состояния базисных полей с нулевым импульсом

$$k^\nu = (mc, \mathbf{0})$$

и с заданными проекциями спина на ось z .

В системе покоя положительно- и отрицательночастотные моды можно записать в виде

$$\psi^+ = e^{-imc^2 t/\hbar} u(\mathbf{0}), \quad \psi^- = e^{-imc^2 t/\hbar} v(\mathbf{0}),$$

причем уравнения движения сводятся к виду

$$i\hbar \partial_t \psi^\pm = \pm mc^2 \psi^\pm$$

Отметим, что в такой записи для положительно- и отрицательночастотных решений уравнения движения в координатном представлении не имеют универсального вида: они явно отличаются. При этом необходимо, конечно, установить уравнения движения, которые являются идентичными для обеих мод.

С учетом уравнений на собственные значения проекции спина введем биспиноры $u_\pm(\mathbf{0})$ и $v_\pm(\mathbf{0})$ для положительно- и отрицательночастотных мод, соответственно. Это значит, что

$$s_3 u_\pm(\mathbf{0}) = \pm \frac{1}{2} u_\pm(\mathbf{0}), \quad s_3 v_\pm(\mathbf{0}) = \pm \frac{1}{2} v_\pm(\mathbf{0}).$$

подчеркнем, что общее число независимых мод у биспинора равно 4.

Важно, что пространственная инверсия, обращающая импульс и сохраняющая энергию и спин,

$$\mathbf{p} \xleftrightarrow{\mathbb{P}} -\mathbf{p}, \quad p_0 \xleftrightarrow{\mathbb{P}} p_0, \quad \mathbf{s} \xleftrightarrow{\mathbb{P}} \mathbf{s},$$

в случае нулевого импульса может быть дополнительно включена в полный набор наблюдаемых, так как она коммутирует с энергией и спином, поскольку инверсия сводится к матричному умножению

$$\mathbb{P}\psi^\pm(\mathbf{0}) = \gamma_0\psi^\pm(\mathbf{0}).$$

31431

Значит, пространственная четность-квантовое число для массивного поля с нулевым импульсом. Собственные значения матрицы $\gamma_0 = \boldsymbol{\tau}_1 \otimes \mathbf{1}$ известны: $\lambda_P = \pm 1$. Интересно, что композиция операторов в уравнениях на собственные значения энергии и Р-четности дает

$$\gamma^0 i\hbar\partial_0\psi^\pm = \pm mc\lambda_P^\pm\psi^\pm$$

где мы учли, что зеркальная инверсия пространства переводит положительночастотные моды в положительночастотные, а отрицательночастотные - в отрицательночастотные. При этом собственные состояния с разными собственными значениями являются ортогональными. Последние уравнения становятся универсальными, т.е. одинаковыми для положительно- и отрицательночастотных мод, а также для разных значений Р-четности, если согласовать знак Р-четности со знаком моды. Обычно полагают $m > 0$ и $\lambda_P^\pm = \pm 1$, так что ²

$$\gamma^0 i\hbar\partial_0\psi^\pm - mc\psi^\pm = 0$$

Уравнение (19.51) универсально для положительно- и отрицательночастотных мод, записанных как решения с нулевым значением импульса в координатном пространстве. В импульсном представлении это уравнение отвечает паре уравнений для двух типов дираковских спиноров с заданными проекциями спина и пространственной четности:

$$\gamma_0 u_\pm(\mathbf{0}) = +u_\pm(\mathbf{0})$$

$$\gamma_0 v_\pm(\mathbf{0}) = -v_\pm(\mathbf{0})$$

При построении уравнений движения при произвольном значении импульса будем исходить из уравнений (19.52) в системе покоя, которые просто вводят собственные биспиноры с фиксированными собственными значениями: положительной и отрицательной пространственной четностью и проекциями спина на выделенную ось. Мы увидим затем, что два типа биспиноров будут действительно отвечать положительно- и отрицательночастотным модам поля.

При действии лоренцева буста биспиноры в системе покоя переходят в биспиноры с заданными импульсами и с теми же проекциями спина на исходную ось:

$$\Lambda u_\pm(\mathbf{0}) = u_\pm(\mathbf{p}), \quad \Lambda v_\pm(\mathbf{0}) = v_\pm(\mathbf{p}).$$

Если мы теперь заметим, что выбор стандартного импульса k_μ в системе покоя означает, что

$$\gamma^0 = \frac{1}{mc}k_\mu\gamma^\mu$$

¹ Содержание уравнений движения при другом выборе соответствия знаков несколько не изменится. Читатель может сам удостовериться, что существует унитарное

преобразование спиноров Дирака, которое устанавливает связь двух возможных прескрипций: $\psi \mapsto \gamma\gamma_5\psi$.

2 Ясно, что другой выбор знаков для собственных значений Р-четности мод сводится к замене массы $m \mapsto -m$. Но это отвечало бы просто введению множителя -1 в определение оператора зеркальной инверсии пространства, что несущественно. 32432

то действие матрицы лоренцева буста на уравнения 19.52 сведется к преобразованиям вида

$$\Lambda k_\mu \gamma^\mu \Lambda^{-1} \Lambda u_\pm(\mathbf{0}) = mc \Lambda u_\pm(\mathbf{0}), \quad \Lambda k_\mu \gamma^\mu \Lambda^{-1} \Lambda v_\pm(\mathbf{0}) = -mc \Lambda v_\pm(\mathbf{0})$$

Но в явном виде

$$\begin{aligned} \Lambda k_\mu \gamma^\mu \Lambda^{-1} &= k_\mu \begin{pmatrix} \Lambda_+ & 0 \\ 0 & \Lambda_- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_+^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_-^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= k_\mu \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_+ \bar{\sigma}^\mu \Lambda_-^{-1} \\ \Lambda_- \sigma^\mu \Lambda_+^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_\mu \bar{\sigma}^\mu \\ p_\mu \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где уже p_μ - это 4-импульс в подвижной системе отсчета, как мы это установили при рассмотрении преобразований 4-вектора в разделе 17.6.1 на стр. 368. Следовательно, уравнения на собственные значения (19.52), записанные в системе покоя, в системе, где частицы движутся, в импульсном представлении сводятся к уравнениям

$$(p_\mu \gamma^\mu - mc) u_\pm(\mathbf{p}) = 0, \quad (p_\mu \gamma^\mu + mc) v_\pm(\mathbf{p}) = 0$$

33433

Суперпозиция мод - поле Дирака -

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{2p_0(2\pi\hbar)^3} \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar}p \cdot x} u_\pm(\mathbf{p}) \mathfrak{w}_\pm(\mathbf{p}) + e^{\frac{i}{\hbar}p \cdot x} v_\pm(\mathbf{p}) \bar{\mathfrak{b}}_\pm(\mathbf{p}) \right\}$$

удовлетворяет уравнению Дирака

$$(\hat{p}_\nu \gamma^\nu - mc) \psi(x) = 0,$$

где $\hat{p}_\nu = i\hbar\partial_\nu$ - оператор 4-импульса в координатном представлении, а $\mathfrak{w}, \mathfrak{b}$ - комплексные параметры в алгебре Грассмана. Мы убедились таким образом, что переход от двух уравнений (19.53, 19.56 в импульсном пространстве к одному уравнению 19.58 в координатном представлении происходит за счет введения в разложении по модам в 19.57 разных знаков перед 4импульсом у волн де Бройля, что и означает различие положительно- и отрицательночастотных волн, как мы и предполагали чуть раньше.

Уравнение Дирака получается вследствие принципа наименьшего действия, имеющего вид

$$S_D = \int d^4x \bar{\psi}(x) (\not{p} - mc) \psi(x)$$

Обычно принимают релятивистски инвариантную нормировку спиноров массивного поля с разными значениями пространственной четности

$$\begin{aligned} \bar{u}_\pm(\mathbf{0}) u_\pm(\mathbf{0}) &= u_\pm^\dagger(\mathbf{0}) \gamma_0 u_\pm(\mathbf{0}) = +u_\pm^\dagger(\mathbf{0}) u_\pm(\mathbf{0}) = +2mc = \bar{u}_\pm(\mathbf{p}) u_\pm(\mathbf{p}), \\ \bar{v}_\pm(\mathbf{0}) v_\pm(\mathbf{0}) &= v_\pm^\dagger(\mathbf{0}) \gamma_0 v_\pm(\mathbf{0}) = -v_\pm^\dagger(\mathbf{0}) v_\pm(\mathbf{0}) = -2mc = \bar{v}_\pm(\mathbf{p}) v_\pm(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

так как в явном виде в киральном представлении

$$u_+(\mathbf{0}) = \sqrt{mc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_-(\mathbf{0}) = \sqrt{mc} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_+(\mathbf{0}) = \sqrt{mc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_-(\mathbf{0}) = \sqrt{mc} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Для спиноров с ненулевым импульсом после учета соотношения

$$\gamma_0 \Lambda(\vartheta) = \gamma_0 \left(\cosh \frac{\vartheta}{2} + \gamma_5 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \sinh \frac{\vartheta}{2} \right) = \Lambda(-\vartheta) \gamma_0$$

или в силу того, что $\Lambda^{-1} = \gamma_0 \Lambda^\dagger \gamma_0$ и $\Lambda^{-1}(\vartheta) = \Lambda(-\vartheta)$, а спиноры $u_\pm(\mathbf{0})$ и $v_\pm(\mathbf{0})$ отвечают положительному и отрицательному собственному значению матрицы γ_0 , соответственно, из

$$\gamma_0 u_\pm(\mathbf{p}) = \gamma_0 \Lambda(\vartheta) u_\pm(\mathbf{0}) = \Lambda(-\vartheta) \gamma_0 u_\pm(\mathbf{0}) = +\Lambda(-\vartheta) u_\pm(\mathbf{0}) = +u_\pm(-\mathbf{p})$$

и

$$\gamma_0 v_\pm(\mathbf{p}) = \gamma_0 \Lambda(\vartheta) v_\pm(\mathbf{0}) = \Lambda(-\vartheta) \gamma_0 v_\pm(\mathbf{0}) = -\Lambda(-\vartheta) v_\pm(\mathbf{0}) = -v_\pm(-\mathbf{p})$$

получаем

$$\gamma_0 u_\pm(\mathbf{p}) = u_\pm(-\mathbf{p}), \quad \gamma_0 v_\pm(\mathbf{p}) = -v_\pm(-\mathbf{p}),$$

как это и должно быть для операции пространственной инверсии, которая меняет знак импульса и сохраняет спин 1

После простейших выкладок легко найти гамильтониан поля

$$H_D = \int d^3r \bar{\psi}(x) (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + mc) \psi(x) =$$

$$= \int \frac{d^3p}{2p_0(2\pi\hbar)^3} c p_0 \{ \bar{\mathbf{w}}_\pm(\mathbf{p}) \mathbf{w}_\pm(\mathbf{p}) - \mathbf{b}_\pm(\mathbf{p}) \bar{\mathbf{b}}_\pm(\mathbf{p}) \}$$

Ток определяется стандартным образом вариацией действия по комплексной фазе поля $\psi_u = \exp\{-ie u/\hbar c\} \psi$:

$$\frac{1}{c} j^\mu = \frac{\partial L_D}{\partial \partial_\mu \psi} \frac{\partial \psi_u}{\partial u} \Big|_{u=0} = \frac{e}{c} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

а заряд задается выражением

$$Q = \int d^3r j^0(x) = e \int \frac{d^3p}{2p_0(2\pi\hbar)^3} \{ \bar{\mathbf{w}}_\pm(\mathbf{p}) \mathbf{w}_\pm(\mathbf{p}) + \mathbf{b}_\pm(\mathbf{p}) \bar{\mathbf{b}}_\pm(\mathbf{p}) \}$$

37437

19.2.4. Сумма по поляризациям. Для покоящихся спиноров сумму по поляризациям - матрицу

$$\Pi(\mathbf{0}) = \sum_\lambda u_\lambda(\mathbf{0}) \bar{u}_\lambda(\mathbf{0})$$

можно вычислить в явном виде как прямое произведение строк и столбцов

$$\Pi(\mathbf{0}) = mc(1, 0, 1, 0) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + mc(0, 1, 0, 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = mc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

или в ковариантном виде

$$\Pi(\mathbf{0}) = mc(\gamma_0 + \mathbb{1}) = (\not{K} + mc), \quad k_\mu = (mc, \mathbf{0}).$$

Поскольку преобразование Лоренца для матрицы k сводятся к преобразованию 4-вектора k^ν в движущуюся систему отсчета $k^\nu \rightarrow p^\nu$ (проделайте это упражнение самостоятельно):

$$\Lambda \not{K} \Lambda^{-1} \rightarrow \not{p}$$

сумма по поляризациям для движущихся частиц -

$$\Pi(\mathbf{p}) = (\not{p} + mc)$$

и аналогично для античастиц

$$\Pi^c(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda} v_{\lambda}(\mathbf{p}) \bar{v}_{\lambda}(\mathbf{p}) = (\not{p} - mc)$$

19.2.5. Представление Дирака. В оригинальной работе Дирака, посвященной выводу уравнения для релятивистского электрона, он использовал не киральное представление для гамма-матриц, введенное выше, а нашел другой вид гамма-матриц, удовлетворяющих определяющему их соотношению антикоммутации (19.43). Представление Дирака для гамма-матриц, естественно, эквивалентно киральному, так как оно может быть получено унитарным преобразованием с

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma_0 + \gamma_5), \quad \mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}^2 = \mathbb{1}$$

так что

$$\gamma_D^\mu = \mathcal{U} \gamma^\mu \mathcal{U}^\dagger$$

Тогда легко найти, что

$$\gamma_0 \xrightarrow{u} \gamma_5, \quad \gamma_5 \xrightarrow{u} \gamma_0, \quad \gamma \xrightarrow{u} -\gamma,$$

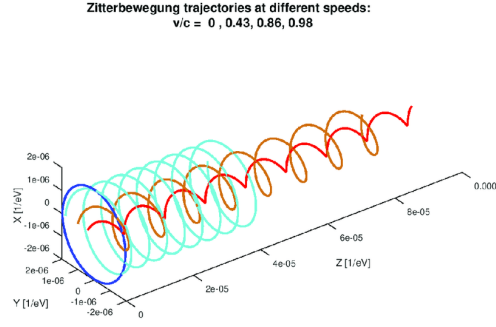
т. е. матрицы γ_0 и γ_5 меняются местами, а γ меняет знак, и в представлении Дирака (опускаем маркер D , указывающий на представление)

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

12.2.5 Zitterbewegung (????)

(решу эту задачу, на вики решена, пока просто не до этого, типичное явление.)

Теория по вики



The time-dependent Dirac equation is written as

$$H\psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$$

where $\hbar$ is the reduced Planck constant, $\psi(\mathbf{x}, t)$ is the wave function (bispinor) of a fermionic particle spin- 1/2, and H is the Dirac Hamiltonian of a free particle:

$$-i\hbar \frac{\partial Q}{\partial t} = [H, Q].$$

In particular, the time-dependence of the position operator is given by

$$\frac{\partial x_k(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [H, x_k] = c\alpha_k.$$

where $x_k(t)$ is the position operator at time t . The above equation shows that the operator α_k can be interpreted as the k -th component of a "velocity operator". Note that this implies that

$$\left\langle \left(\frac{\partial x_k(t)}{\partial t} \right)^2 \right\rangle = c^2$$

as if the "root mean square speed" in every direction of space is the speed of light. To add time-dependence to α_k , one implements the Heisenberg picture, which says

$$\alpha_k(t) = e^{\frac{iHt}{\hbar}} \alpha_k e^{-\frac{iHt}{\hbar}}.$$

The time-dependence of the velocity operator is given by

$$\hbar \frac{\partial \alpha_k(t)}{\partial t} = i [H, \alpha_k] = 2 (i\gamma_k m - \sigma_{kl} p^l) = 2i (p_k - \alpha_k H),$$

where

$$\sigma_{kl} \equiv \frac{i}{2} [\gamma_k, \gamma_l]$$

Now, because both p_k and H are time-independent, the above equation can easily be integrated twice to find the explicit time-dependence of the position operator.

First:

$$\alpha_k(t) = (\alpha_k(0) - cp_k H^{-1}) e^{-\frac{2iHt}{\hbar}} + cp_k H^{-1},$$

and finally

$$x_k(t) = x_k(0) + c^2 p_k H^{-1} t + \frac{1}{2} i \hbar c H^{-1} (\alpha_k(0) - cp_k H^{-1}) \left(e^{-\frac{2iHt}{\hbar}} - 1 \right).$$

The resulting expression consists of an initial position, a motion proportional to time, and an oscillation term with an amplitude equal to the reduced Compton wavelength. That oscillation term is the so-called zitterbewegung.

12.3 General Questions and Applications of Dirac Field

12.3.1 Other General Questions about the Dirac Theory

Описывает ли уравнение Дирака сполна электрон?

(не знаю, мб и да)

О границе применимости (!?)

(тоже вообще не четко вижу.)

Об операторе Дирака (???)

(мб потом поработаю с ним, пока не нужен он никогда был.)

Why people knew a lot about physics, had no idea about Dirac field, but turns out that there are so many models and phenomena which is explained only by it?

(???? this is very strange. did they overlook a lot of phenomena or how??? I would understand that if there were 2-3 phenomena with Dirac field, but there are hundreds pages about it. why??? why people haven't posted questions about these phenomena before?)

How to point out on the Dirac theory only from experiments?

(???? this is the continuation of the question "Why people knew a lot about physics, had no idea about Dirac field...". suppose we can make all possible experiments, but we don't know anything about any field except Maxwell one. how would we guess that there is the Dirac field? We believe that electron is a particle with spin (like in general physics), not a field)

12.3.2 Historical Derivation of the Dirac Equation (???)

(проработаю потом когда-то)

12.3.3 Effective Dirac Field in Condensed Matter: An Overview

(в конд средах пока про это, тут по сути просто напоминание, что такие разделы будут. Почти все, что тут - еще раз перепишу!)

Dirac field for Graphene

Graphene is a 2-dimensional crystalline allotrope of carbon, the carbon atoms are arranged in a honeycomb lattice. Each carbon atom forms σ bonds to the three neighboring atoms that lie in the graphene plane at angles of 120° . These bonds are mediated by three of carbon's four electrons while the fourth electron, which occupies a p_z orbital, mediates an out-of-plane π -bond that leads to the electronic bands at the Fermi level. The unique transport properties and the semimetallic state of graphene are the result of the delocalized electrons occupying these p_z orbitals.

The semimetallic state corresponds to a linear crossing of energy bands at the K and K' points of graphene's hexagonal Brillouin zone. At these two points, the electronic structure can be effectively described by the Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \hbar v_D (\tau k_x \sigma_x + k_y \sigma_y)$$

Here, σ_x and σ_y are two of the three Pauli matrices. The factor $\tau = +/ -$ indicates whether the Hamiltonian describes is centred on the K or K' valley at the corner of hexagonal Brillouin zone. For graphene, the Dirac velocity is about $\hbar v_D \approx 5.8 \text{eV\AA}$. An energy gap in the dispersion of graphene can be obtained from a low-energy Hamiltonian of the form

$$\mathcal{H} = \hbar v_D (\tau k_x \sigma_x + k_y \sigma_y) + M \sigma_z,$$

which now contains a mass term M . There are several distinct ways of introducing a mass term, and the results have different characteristics. ^{[13][14]} The most practical approach for creating a gap (introducing a mass term) is to break the sublattice symmetry of the lattice each carbon atom is slightly different to its nearest but identical to its next-nearest neighbours; an effect that may result from substrate effects.

Dirac field for Topological insulators

A topological insulator is a material that behaves as an insulator in its interior (bulk) but whose surface contains conducting states. This property represents a non-trivial, symmetry protected topological order. As a consequence, electrons in topological insulators can only move along the surface of the material. In the bulk of a non-interacting topological insulator, the Fermi level is positioned within the gap between the conduction and valence bands. On the surface, there are special states within the bulk energy gap which can be effectively described by a Dirac Hamiltonian:

$$\mathcal{H} = \hbar v_D (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}) \cdot \hat{\mathbf{z}}$$

$\hat{\mathbf{z}}$ is normal to the surface and $\boldsymbol{\sigma}$ is in the real spin basis. However, if we rotate spin by a unitary operator, $U = \text{diag}[1, i]$, we will end up with the standard notation of Dirac Hamiltonian, $\mathcal{H} = \hbar v_D \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}$. Such Dirac cones emerging on the surface of 3-dimensional crystals were observed in experiment, e.g.: bismuth selenide (Bi_2Se_3), ^{[15][16]} tin telluride (SnTe)^[17] and many other materials.

Dirac field for Transition metal dichalcogenides (TMDCs)

The low-energy properties some semiconducting transition metal dichalcogenide monolayers, can be described by a two-dimensional massive (gapped) Dirac Hamiltonian with an additional term describing a strong spin-orbit coupling:

$$\mathcal{H} = \hbar v_D (\tau k_x \sigma_x + k_y \sigma_y) + \Delta \sigma_z + \lambda (1 - \sigma_z) \tau s + (\alpha + \beta \sigma_z) (k_z^2 + k_y^2).$$

The spin-orbit coupling λ provides a large spin-splitting in the valence band and s indicates the spin degree of freedom. As for graphene, τ gives the valley degree of freedom - whether near the K or K' point of the hexagonal Brillouin zone. Transition metal dichalcogenide monolayers are often discussed in reference to potential applications in valleytronics.

Dirac field for Weyl semimetals

Weyl semimetals, for example tantalum arsenide (TaAs) and related materials, strontium silicide (SrSi_2) have a Hamiltonian that is very similar to that of graphene, but now includes all three Pauli matrices and the linear crossings occur in 3D:

$$\mathcal{H} = \hbar v_D (k_x \sigma_x + k_y \sigma_y + k_z \sigma_z).$$

Since all three Pauli matrices are present, there is no further Pauli matrix that could open a gap in the spectrum and Weyl points are therefore topologically protected. Tilting of the linear cones so the Dirac velocity varies leads to type II Weyl semimetals. One distinct, experimentally observable feature of Weyl semimetals is that the surface states form Fermi arcs since the Fermi surface does not form a closed loop.

Dirac field for Dirac semimetals

In crystals that are symmetric under inversion and time reversal, electronic energy bands are two-fold degenerate. This degeneracy is referred to as Kramers degeneracy. Therefore, semimetals with linear crossings of two energy bands (two-fold degeneracy) at the Fermi energy exhibit a four-fold degeneracy at the crossing point. The effective Hamiltonian for these states can be written as

$$\mathcal{H} = \hbar v_D \begin{pmatrix} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

This has exactly the matrix structure of Dirac matter. Examples of experimentally realised Dirac semimetals are sodium bismuthide (Na_3Bi) and cadmium arsenide (Cd_3As_2).

Об уравнении Дирака в сверхпроводниках (????)

(про это только слышал, потом подумая.)

12.4 Properties of Spinor Representations 1

Обсудим подробно типичные темы спиноров.

(другие - в конце.)

(выше коротко упоминается, что так можно делать, тут - нормальный набор свойств, с которыми базовые вещам можно будет делать.)

12.4.1 Spinors

Теория

Матрицы N действуют в двумерном комплексном линейном пространстве. Элементами этого пространства являются двухкомпонентные векторы $\psi \equiv \{\psi_a\}$; $a = 1, 2$. Матрицы N осуществляют преобразования этих векторов по правилу

$$\psi'_a = N_a^b \psi_b$$

Так как каждому преобразованию Лоренца Λ соответствует некоторая матрица N , то можно сказать, что соотношение (104) это преобразование двухкомпонентного комплексного вектора при преобразованиях Лоренца. Векторы $\psi = \{\psi_a\}$, преобразующиеся согласно (104) называются левыми или левосторонними вейлевскими спинорами. Индексы $a, b = 1, 2$ называются спинорными.

Введем матрицу $\varepsilon = (\varepsilon_{ab})$ с компонентами

$$\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим выражение

$$f_{ab} = N_a^c N_b^d \varepsilon_{cd} = N_a^1 N_b^2 \varepsilon_{12} + N_a^2 N_b^1 \varepsilon_{21} = N_a^2 N_b^1 - N_a^1 N_b^2$$

Очевидно, что $f_{11} = f_{22} = 0$ и $f_{21} = -f_{12}$. Найдем f_{12} , имеем $f_{12} = N_1^2 N_2^1 - N_1^1 N_2^2 = -\det N = -1$. То есть $f_{12} = -1$. Следовательно $f_{ab} = \varepsilon_{ab}$. Таким образом

$$\varepsilon_{ab} = N_a^c N_b^d \varepsilon_{cd} = \varepsilon_{ab}$$

Или

$$N\varepsilon N^T = \varepsilon$$

Это соотношение показывает, что матрица ε является инвариантом группы $SL(2|\mathbb{C})$.

Введем обратную матрицу ε^{-1} с элементами ε^{ab} . По определению $\varepsilon^{ac}\varepsilon_{cb} = \delta_b^a$, $\varepsilon_{ac}\varepsilon^{cb} = \delta_a^b$. Не трудно увидеть, что

$$\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Из (107) получаем

$$\varepsilon^{-1} = N^T \varepsilon^{-1} N$$

То есть ε^{-1} также является инвариантом группы $SL(2|\mathbb{C})$.

Матрицы $\varepsilon_{ab}, \varepsilon^{ab}$ используются для опускания и поднимания спинорных индексов

$$\psi^a = \varepsilon^{ab}\psi_b, \quad \psi_a = \varepsilon_{ab}\psi^b$$

Покажем, что выражение $\psi_1^a\psi_2^a$ является инвариантом группы $SL(2|\mathbb{C})$ и значит собственной группе Лоренца. Действительно

$$\begin{aligned} \psi_1'^a\psi_2'^a &= \varepsilon^{ab}\psi_1'^b\psi_2'^a = \varepsilon^{ab}N_b^d\psi_{1d}N_a^c\psi_{2c} = \\ &= (N^T)^c{}_a\varepsilon^{ab}N_b^d\psi_{1d}\psi_{2c} = \varepsilon^{cd}\psi_{1d}\psi_{2c} = \psi_1^a\psi_{2a} \end{aligned}$$

В результате мы получаем правило построения лоренц-инвариантов из двухкомпонентных спиноров.

Пусть N - произвольная матрица $SL(2|\mathbb{C})$. Ей соответствует единственная матрица N^* с комплексно сопряженными элементами, которые обозначаются как $(N^*)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}$; $\dot{a}, \dot{b} = \dot{1}, \dot{2}$. При этом $\det N^* = (\det N)^* = 1$. Матрица N^* действует в двухмерном комплексном линейном пространстве с векторами $\varphi = \{\varphi_{\dot{a}}\}$ по правилу

$$\varphi'_{\dot{a}} = (N^*)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}\varphi_{\dot{b}}$$

Векторы $\varphi = \{\varphi_{\dot{a}}\}$, преобразующиеся согласно (111), называются правыми или правосторонними вейлевскими спинорами. Индексы $\dot{a}, \dot{b}$ называются спинорными. Соотношение (111) можно трактовать как закон преобразования компонент правостороннего спинора при преобразованиях Лоренца.

Определим матрицы

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} &= (\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}), & \tilde{\varepsilon}^{-1} &= (\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}) \\ \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Можно показать, что эти матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} &= N_{\dot{a}}^{*\dot{c}}N^{\dot{d}}{}_{\dot{c}}\varepsilon_{\dot{d}\dot{b}} \\ \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} &= N_{\dot{c}}^{*\dot{a}}N^{\dot{b}}{}_{\dot{c}}\varepsilon^{\dot{c}\dot{d}} \end{aligned}$$

Это означает, что матрицы $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}^{-1}$ являются инвариантами группы $SL(2|\mathbb{C})$ и их можно использовать для поднятия и опускания индексов $\dot{a}, \dot{b}$. То есть

$$\varphi^{\dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\varphi_{\dot{b}}, \quad \varphi_{\dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\varphi^{\dot{b}}$$

При этом можно показать, что

$$\varphi'_{1\dot{a}}\varphi'^{\dot{a}}_2 = \varphi_{1\dot{a}}\varphi^{\dot{a}}_2$$

Здесь $\varphi'_{1\dot{a}}$ дается соотношением (111). Соотношение (115) показывает, что выражение $\varphi_{1\dot{a}}\varphi^{\dot{a}}_2$ является лоренц-инвариантом.

Обычно спинорные индексы $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dots$ называются точечными, а индексы $a, b, c, \dots$ неточечными.

Пусть x^μ - координата события в пространстве Минковского, введем матрицы $X = x^\mu \sigma_\mu$. Ранее было показано, что $X' = NXN^+$, $X' = x'^\mu \sigma_\mu$, и $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(N)x^\nu$ (см. формулы (87), (89) и (93)). Тогда имеем

$$\Lambda^\mu{}_\nu(N)x^\nu \sigma_\mu = N\sigma_\nu N^+ x^\nu$$

Отсюда в силу произвольности x^μ получим

$$\Lambda^\mu{}_\nu(N)\sigma_\mu = N\sigma_\nu N^+$$

или

$$\Lambda^T(N)_\nu{}^\mu \sigma_\mu = N\sigma_\nu N^+$$

или

$$\sigma_\mu = (\Lambda^T(N)^{-1})_\mu{}^\nu N\sigma_\nu N^+$$

Это соотношение показывает, что матрицы σ_μ образует инвариантный матричный вектор.

Обозначим элемент матрицы σ_μ как $(\sigma_\mu)_{a\dot{a}}$. Поднимая спинорные индексы получим

$$(\sigma_\mu)^{a\dot{a}} = \varepsilon^{ab}\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}(\sigma_\mu)_{b\dot{b}} \equiv (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a}$$

Прямые вычисления показывают, что $\tilde{\sigma}_\mu = (\sigma_0, -\sigma_i)$, то есть матрицы (117) совпадают с матрицами (90), введенные ранее. Матрицы $\sigma_\mu, \tilde{\sigma}_\mu$ обладают большим количеством полезных свойств, из которых мы отметим следующие

$$\begin{aligned} (\sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \tilde{\sigma}_\mu)_a{}^b &= 2\eta_{\mu\nu} \delta_a{}^b \\ (\sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \tilde{\sigma}_\mu)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} &= 2\eta_{\mu\nu} \delta_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \\ \text{tr} \sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu &= 2\eta_{\mu\nu} \\ \sigma_{a\dot{a}}^\mu \tilde{\sigma}_\mu{}^{b\dot{b}} &= 2\delta_a{}^b \delta_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}. \end{aligned}$$

Соотношения (118) проверяются прямыми вычислениями.

Мы видим, что с группой Лоренца связаны следующие инвариантные объекты

$$\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}, \varepsilon_{ab}, \varepsilon^{ab}, \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}, (\sigma^\mu)_{a\dot{a}}, (\sigma^\mu)^{\dot{a}a},$$

которые используются при рассмотрении различных аспектов релятивистской симметрии в теории поля.

12.4.2 Irreducible Representation of the $SL(2|\mathbb{C})$

Теория

Мы задали группу $SL(2|\mathbb{C})$ как группу 2×2 комплексных матриц с определителем равным единице, действующих в двумерном комплексном пространстве по правилу $\psi'_a = N_a{}^b \psi_b$. Произведению матриц $N_1 N_2$ отвечает преобразование $\psi'_a = N_a{}^b N_b{}^c \psi_c$. В результате

мы имеем представление группы $SL(2|\mathbb{C})$, называемое фундаментальным. Соотношения $N \rightarrow N^*, \varphi'_a = (N^*)^b_a \varphi_b$ задают другое представление, называемое сопряженным.

Пусть $N \in SL(2|\mathbb{C})$, сопоставим этой матрице матрицу, действующую в $2(n+m)$ мерном комплексном пространстве, по правилу

$$N_a^b \rightarrow N_{a_1}^{b_1} N_{a_2}^{b_2} \dots N_{a_n}^{b_n} (N^*)_{\dot{a}_1}^{\dot{b}_1} \dots (N^*)_{\dot{a}_m}^{\dot{b}_m}$$

Вектор такого линейного пространства обозначим $\psi_{a_1 \dots a_n \dot{a}_1 \dots \dot{a}_m}$. Закон преобразования этих векторов записывается в виде

$$\psi'_{a_1 \dots a_n \dot{a}_1 \dots \dot{a}_m} = N_{a_1}^{b_1} N_{a_2}^{b_2} \dots N_{a_n}^{b_n} (N^*)_{\dot{a}_1}^{\dot{b}_1} \dots (N^*)_{\dot{a}_m}^{\dot{b}_m} \psi_{b_1 \dots b_n \dot{b}_1 \dots \dot{b}_m}.$$

Вектор $\psi_{a_1 \dots a_n \dot{a}_1 \dots \dot{a}_m}$, преобразующийся согласно (120) называется спинтензором неточечного ранга n и точечного ранга m . Соотношения (119) и (120) задают представление группы $SL(2|\mathbb{C})$ в пространстве спинтензоров.

Представление, определенное выше, в общем случае приводимо. Построение пространства неприводимого представления начнем с простых примеров. Рассмотрим спин-тензор вида $\psi_{a_1 a_2}$ и запишем его в виде суммы симметричной и антисимметричной частей.

$$\psi_{a_1 a_2} = \psi_{(a_1 a_2)} + \psi_{[a_1 a_2]}.$$

Антисимметричная часть имеет следующую структуру

$$\psi_{[a_1, a_2]} = \begin{pmatrix} 0 & -\psi \\ \psi & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ab} \psi.$$

Поэтому

$$\psi_{a_1 a_2} = \psi_{(a_1 a_2)} + \psi \varepsilon_{a_1 a_2}.$$

Выясним как преобразуется антисимметричная и симметричная части спин-тензора $\psi_{a_1 a_2}$. Имеем

$$\psi'_{[a_1 a_2]} = N_{[a_1}^{b_1} N_{a_2]}^{b_2} \psi_{b_1 b_2}$$

Или

$$\psi' \varepsilon_{a_1 a_2} = N_{[a_1}^{b_1} N_{a_2]}^{b_2} (\psi_{(b_1 b_2)} + \varepsilon_{b_1 b_2} \psi)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} N_{[a_1}^{b_1} N_{a_2]}^{b_2} \psi_{(b_1 b_2)} &= \frac{1}{2} (N_{a_1}^{b_1} N_{a_2}^{b_2} - N_{a_2}^{b_1} N_{a_1}^{b_2}) \frac{1}{2} (\psi_{b_1 b_2} + \psi_{b_2 b_1}) = \\ &= \frac{1}{4} (N_{a_1}^{b_1} N_{a_2}^{b_2} \psi_{b_1 b_2} + N_{a_1}^{b_1} N_{a_2}^{b_2} \psi_{b_2 b_1} - N_{a_2}^{b_1} N_{a_1}^{b_2} \psi_{b_1 b_2} - N_{a_2}^{b_1} N_{a_1}^{b_2} \psi_{b_2 b_1}) = \\ &= \frac{1}{4} (N_{a_1}^{b_1} N_{a_2}^{b_2} + N_{a_1}^{b_2} N_{a_2}^{b_1} - N_{a_2}^{b_1} N_{a_1}^{b_2} - N_{a_2}^{b_2} N_{a_1}^{b_1}) \psi_{b_1 b_2} = 0 \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} N_{[a_1}^{b_1} N_{a_2]}^{b_2} \varepsilon_{b_1 b_2} &= \frac{1}{2} (N_{a_1}^{b_1} N_{a_2}^{b_2} - N_{a_2}^{b_1} N_{a_1}^{b_2}) \varepsilon_{b_1 b_2} = \\ &= \frac{1}{2} (-N_{a_1}^1 N_{a_2}^2 + N_{a_1}^2 N_{a_2}^1 + N_{a_2}^1 N_{a_1}^2 - N_{a_2}^2 N_{a_1}^1) = \\ &= - (N_{a_1}^1 N_{a_2}^2 - N_{a_1}^2 N_{a_2}^1) = \varepsilon_{a_1 a_2} \underbrace{(N_1^1 N_2^2 - N_1^2 N_2^1)}_{\det N=1} = \varepsilon_{a_1 a_2}. \end{aligned}$$

В итоге имеем

$$\psi' = \psi.$$

То есть ψ не преобразуется. Рассмотрим преобразование симметричной части

$$\psi'_{(a_1 a_2)} = N_{(a_1}^{b_1} N_{a_2)}^{b_2} \psi_{b_1 b_2} = N_{(a_1}^{b_1} N_{a_2)}^{b_2} (\psi_{(b_1 b_2)} + \varepsilon_{b_1 b_2} \psi).$$

Имеем

$$\frac{1}{2} (-N_{a_1}^1 N_{a_2}^2 + N_{a_1}^2 N_{a_2}^1 - N_{a_2}^1 N_{a_1}^2 + N_{a_2}^2 N_{a_1}^1) \varepsilon_{b_1 b_2} = 0.$$

Поэтому

$$\psi'_{(a_1 a_2)} = N_{(a_1}^{b_1} N_{a_2)}^{b_2} \psi_{(b_1 b_2)}.$$

Таким образом, компоненты $\psi_{(a_1 a_2)}$ и ψ спин-тензора $\psi_{a_1 a_2}$ преобразуются независимо друг от друга. Мы видим, что в линейном пространстве спинтензоров $\psi_{a_1 a_2}$ имеются инвариантные подпространства. Это означает, что представление группы $SL(2|\mathbb{C})$ в этом линейном пространстве приводимо. Очевидно, что представление на спин-тензорах ψ неприводимо, поскольку одномерное. Представление на симметричных спин-тензорах $\psi_{(a_1 a_2)}$ так же неприводимо, поскольку единственный инвариантный объект, который можно было бы использовать для выделения инвариантного подпространства это $\varepsilon_{a_1 a_2}$, но он уже использован. Рассмотрим спин-тензор вида $\varphi_{\dot{a}_1 \dot{a}_2}$ и проведем рассуждения, аналогичные тем, что привели к (122). Получим

$$\varphi_{\dot{a}_1 \dot{a}_2} = \varphi (\dot{a}_1 \dot{a}_2) + \varphi \varepsilon_{\dot{a}_1 \dot{a}_2}.$$

При этом компоненты φ и $\varphi_{(\dot{a}_1 \dot{a}_2)}$ преобразуются неприводимо.

Перейдем к общему случаю спин-тензоров $\psi_{a_1 \dots a_n \dot{a}_1 \dots \dot{a}_m}$. Проведем симметризации и антисимметризации по отдельности точечных и неточечных индексов. Каждая антисимметризация пары индексов порождает $\varepsilon_{a_i a_j}$ и $\varepsilon_{\dot{a}_i \dot{a}_j}$ умноженные, на спин-тензор низшего ранга. В каждом таком тензоре опять проведем симметризацию и антисимметризацию неточечных и точечных индексов и так далее. Полностью симметричный по точечным и неточечным индексам спин-тензор $\psi_{(a_1 \dots a_n)(\dot{a}_1 \dots \dot{a}_m)}$ преобразуется через себя и не может быть сведен с помощью инвариантных тензоров к спин-тензору более простого вида. Это означает, что неприводимое конечномерное представление группы $SL(2|\mathbb{C})$ реализуется в линейном пространстве спин-тензоров вида $\psi_{(a_1 \dots a_n)(\dot{a}_1 \dots \dot{a}_m)}$. Это представление обозначается $(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$. Можно показать, что его размерность есть $(n+1)(m+1)$ при данных n и m .

12.4.3 Relation of Spinor and Space-Time Indices

Теория

Инвариантные матричные векторы $(\sigma_\mu)_{a\dot{a}}$ и $(\tilde{\sigma}_\mu)_{\dot{a}a}$, имеющие один пространственно-временной индекс и пару спинорных индексов - точечный и неточечный, позволяют конвертировать один векторный индекс в пару спинорных индексов и наоборот. Пусть, например, задан вектор с компонентами t_μ , ему можно сопоставить спин-тензор $t_{a\dot{a}}$ по правилу

$$t_{a\dot{a}} = (\sigma^\mu)_{a\dot{a}} t_\mu.$$

Отсюда с использованием четвертого из тождеств (118) получим

$$t_\mu = \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a} t_{a\dot{a}}.$$

Заметим, что спин-тензор $t_{a\dot{a}}$ соответствует неприводимому представлению $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ группы $SL(2|\mathbb{C})$. Поскольку, согласно (132) и (133), спинтензор $t_{a\dot{a}}$ эквивалентен вектору t_μ , то лоренцевский вектор t_μ соответствует неприводимому представлению $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ группы $SL(2|\mathbb{C})$.

Соотношения (132) и (133) указывают общий способ конвертации пространственно-временных индексов в спинорные и наоборот. Надо применять правило (132) к каждому пространственно-временному индексу и правило (133) к каждой паре, состоящей из точечных и неточечных спинорных индексов.

Пусть задан тензор n -го ранга $t_{\mu_1 \dots \mu_n}$. Ему соответствует спин-тензор точечного ранга n и неточечного ранга n следующего вида:

$$t_{a_1 \dots a_n \dot{a}_1 \dots \dot{a}_n} = (\sigma^{\mu_1})_{a_1 \dot{a}_1} \dots (\sigma^{\mu_n})_{a_n \dot{a}_n} t_{\mu_1 \dots \mu_n},$$

Отсюда, согласно правилу (133) получаем

$$t_{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{1}{2^n} (\tilde{\sigma}_{\mu_1})^{\dot{a}_1 a_1} \dots (\tilde{\sigma}_{\mu_n})^{\dot{a}_n a_n} t_{a_1 \dots a_n \dot{a}_1 \dots \dot{a}_n}$$

Соотношения (134), (135), показывают, что спин-тензор с равным количеством неточечных и точечных индексов эквивалентен некоторому лоренцевскому тензору. Заметим, однако, что спин-тензор $t_{a_1 \dots a_n \dot{a}_1 \dots \dot{a}_m}$ не сводится при $m \neq n$ ни к каким чисто лоренцевским тензорам без дополнительных ограничений.

Переход от пространственно-временных индексов к спинорным может оказаться полезным при выполнении некоторых преобразований типа выделения неприводимых компонент. В качестве примера рассмотрим тензор второго ранга $t_{\mu\nu}$. Введем соответствующий ему спин-тензор $t_{ab\dot{a}\dot{b}}$ по правилу (134)

$$t_{ab\dot{a}\dot{b}} = (\sigma^\mu)_{a\dot{a}} (\sigma^\nu)_{b\dot{b}} t_{\mu\nu},$$

Спин-тензор $t_{ab\dot{a}\dot{b}}$ разобьем на неприводимые компоненты с помощью симметризации и антисимметризации.

$$\begin{aligned} t_{ab\dot{a}\dot{b}} &= t_{(ab)(\dot{a}\dot{b})} + t_{(ab)[\dot{a}\dot{b}]} + t_{[ab](\dot{a}\dot{b})} + t_{[ab][\dot{a}\dot{b}]} = \\ &= t_{(ab)(\dot{a}\dot{b})} + \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} t_{(ab)} + \varepsilon_{ab} t_{(\dot{a}\dot{b})} + \varepsilon_{ab} \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} t \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} t_{(ab)} &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} t_{(ab)[\dot{a}\dot{b}]} \\ t_{(\dot{a}\dot{b})} &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{ab} t_{[ab](\dot{a}\dot{b})} \\ t &= \frac{1}{4} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} t_{[ab][\dot{a}\dot{b}]} = \frac{1}{4} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} t_{ab\dot{a}\dot{b}} \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a} (\tilde{\sigma}_\nu)^{\dot{b}b} t_{ab\dot{a}\dot{b}} = \\ &= \frac{1}{4} (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a} (\tilde{\sigma}_\nu)^{\dot{b}b} \left(t_{(ab)(\dot{a}\dot{b})} + \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} t_{(ab)} + \varepsilon_{ab} t_{(\dot{a}\dot{b})} + \varepsilon_{ab} \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} t \right) \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями это выражение приводится к виду:

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a} t_{(ab)(\dot{a}\dot{b})} + \frac{1}{2} (\sigma_{\mu\nu})^{ab} t_{(ab)} - \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{a}\dot{b}} t^{(\dot{a}\dot{b})} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} t,$$

где обозначено

$$\begin{aligned} (\sigma_{\mu\nu})_a{}^b &= -\frac{1}{4} (\sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \tilde{\sigma}_\mu)_a{}^b \\ (\tilde{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} &= -\frac{1}{4} (\tilde{\sigma}_\mu \sigma_\nu - \tilde{\sigma}_\nu \sigma_\mu)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu} &= -\sigma_{\nu\mu}, & \sigma_{\mu\nu} &= -\sigma_{\nu\mu}^{\tilde{\nu}} \\ (\sigma_{\mu\nu})^{ab} &= (\sigma_{\mu\nu})^{ba}, & (\tilde{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{a}\dot{b}} &= (\tilde{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{b}\dot{a}} \end{aligned}$$

Соотношение (141) представляет собой разложение произвольного тензора второго ранга на неприводимые компоненты. Отсюда следует, что произвольный тензор второго ранга соответствует приводимому представлению группы $SL(2|\mathbb{C})$, включающему следующие неприводимые представления $(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)$. Последнее представление отвечает лоренцевскому скаляру, то есть тривиальному представлению $N \rightarrow 1$ группы $SL(2|\mathbb{C})$. Пусть тензор $t_{\mu\nu}$ симметричен, $t_{\mu\nu} = t_{\nu\mu}$. Поскольку матрицы $\sigma_{\mu\nu}, \tilde{\sigma}_{\mu\nu}$ (140) антисимметричны по μ, ν , то из (139) следует, что $t_{(ab)=0}, t^{(\dot{a}\dot{b})=0}$. Поэтому в данном случае

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a} (\tilde{\sigma}_\nu)^{\dot{b}b} t_{(ab)(\dot{a}\dot{b})} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} t$$

Можно показать, что первое слагаемое автоматически симметрично по μ, ν . Следовательно произвольный симметричный тензор второго ранга отвечает сумме двух неприводимых представлений $(1, 1)$ и $(0, 0)$ группы $SL(2|\mathbb{C})$. Пусть дополнительно к симметричности тензор $t_{\mu\nu}$ является бесследовым, $\varepsilon^{\mu\nu} t_{\mu\nu} = 0$, тогда из соотношения (142) следует, что $t = 0$. Поэтому симметричный бесследовый тензор второго ранга соответствует неприводимому представлению $(1, 1)$ группы $SL(2|\mathbb{C})$.

Пусть тензор $t_{\mu\nu}$ антисимметричен, $t_{\mu\nu} = -t_{\nu\mu}$. Тогда из (139) следует, что $t_{(ab)(\dot{a}\dot{b})} = 0, t = 0$. Поэтому

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\sigma_{\mu\nu})^{ab} t_{(ab)} - \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_{\mu\nu})_{(\dot{a}\dot{b})} t^{(\dot{a}\dot{b})}$$

То есть, антисимметричный тензор второго ранга соответствует сумме двух неприводимых представлений $(1, 0)$ и $(0, 1)$ группы $SL(2|\mathbb{C})$.

Рассмотрим неприводимый спин-тензор $t_{(a_1 \dots a_n)(\dot{a}_1 \dots \dot{a}_n)}$, отвечающий представлению $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$. Ему соответствует лоренцевский тензор

$$t_{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_{\mu_1})^{\dot{a}_1 a_1} \dots (\tilde{\sigma}_{\mu_n})^{\dot{a}_n a_n} t_{(a_1 \dots a_n)(\dot{a}_1 \dots \dot{a}_n)}$$

Можно показать, что правая часть (143) автоматически полностью симметрична по индексам $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Поэтому $t_{\mu_1 \dots \mu_n}$ (143) есть полностью симметричный тензор ранга n , $t_{\mu_1 \dots \mu_n} = t_{(\mu_1 \dots \mu_n)}$. Рассмотрим

$$\eta^{\mu_1 \mu_2} t_{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{1}{2^n} \eta^{\mu_1 \mu_2} (\tilde{\sigma}_{\mu_1})^{\dot{a}_1 a_1} (\tilde{\sigma}_{\mu_2})^{\dot{a}_2 a_2} (\tilde{\sigma}_{\mu_3})^{\dot{a}_3 a_3} \dots (\tilde{\sigma}_{\mu_n})^{\dot{a}_n a_n} t_{(a_1 \dots a_n)(\dot{a}_1 \dots \dot{a}_n)}$$

Преобразуем

$$\begin{aligned}
\eta^{\mu_1\mu_2} (\tilde{\sigma}_{\mu_1})^{\dot{a}_1 a_1} (\tilde{\sigma}_{\mu_2})^{\dot{a}_2 a_2} &= (\sigma^\mu)^{a_1 \dot{a}_1} (\sigma_\mu)^{a_2 \dot{a}_2} = \\
&= \varepsilon^{a_1 c_1} \varepsilon^{\dot{a}_1 \dot{c}_1} (\sigma^\mu)_{c_1 \dot{c}_1} (\sigma_\mu)^{a_2 \dot{a}_2} = \\
&= \varepsilon^{a_1 c_1} \varepsilon^{\dot{a}_1 \dot{c}_1} 2\delta_{c_1}^{a_2} \delta_{\dot{c}_1}^{\dot{a}_2} = 2\varepsilon^{a_1 a_2} \varepsilon^{\dot{a}_1 \dot{a}_2}
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\eta^{\mu_1\mu_2} t_{\mu_1\ldots\mu_n} &= 2\frac{1}{2^n} \eta^{\mu_1\mu_2} (\tilde{\sigma}_{\mu_1})^{\dot{a}_1 a_1} (\tilde{\sigma}_{\mu_2})^{\dot{a}_2 a_2} (\tilde{\sigma}_{\mu_3})^{\dot{a}_3 a_3} \ldots \\
&\quad \ldots (\tilde{\sigma}_{\mu_n})^{\dot{a}_n a_n} t_{(a_1\ldots a_n)(\dot{a}_1\ldots \dot{a}_n)} = 0
\end{aligned}$$

Следовательно $\eta^{\mu_1\mu_2} t_{\mu_1\ldots\mu_n} = 0$. Таким образом, соотношение (143) задает полностью симметричный бесследовый тензор n -го ранга. Это означает, что полностью симметричный бесследовый лоренцевский тензор n -го ранга соответствует неприводимому представлению $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ группы $SL(2|\mathbb{C})$

По построению, произвольный спин-тензор $\psi_{a_1\ldots a_n \dot{a}_1\ldots \dot{a}_m}$ является комплексным. Рассмотрим закон его преобразования

$$\psi'_{a_1\ldots a_n \dot{b}_1\ldots \dot{b}_m} = N_{a_1}{}^{c_1} \ldots N_{a_n}{}^{c_n} (N^*)_{b_1}{}^{\dot{d}_1} \ldots (N^*)_{b_m}{}^{\dot{d}_m} \cdot \dot{d}_m \psi_{c_1\ldots c_n \dot{d}_1\ldots \dot{d}_m}$$

Совершим комплексное сопряжение этого равенства, получим

$$(\psi'_{a_1\ldots a_n \dot{b}_1\ldots \dot{b}_m})^* = N_{b_1}{}^{d_1} \ldots N_{b_m}{}^{d_m} (N^*)_{\dot{a}_1}{}^{\dot{c}_1} \ldots (N^*)_{\dot{a}_n}{}^{\dot{c}_n} (\psi_{c_1\ldots c_n \dot{d}_1\ldots \dot{d}_m})^*$$

Мы видим, что $(\psi'_{a_1\ldots a_n \dot{b}_1\ldots \dot{b}_m})^*$ преобразуется как спин-тензор с m неточечными индексами и n точечными индексами. Положим по определению

$$(\psi_{a_1\ldots a_n \dot{b}_1\ldots \dot{b}_m})^* = \bar{\psi}_{b_1\ldots b_m \dot{a}_1\ldots \dot{a}_n}.$$

Говорят, что спин-тензор $\bar{\psi}_{b_1\ldots b_m \dot{a}_1\ldots \dot{a}_n}$ (145) является комплексно сопряженным к спин-тензору $\psi_{a_1\ldots a_n \dot{b}_1\ldots \dot{b}_m}$.

Выясним при каких условиях спин-тензор может быть вещественным. В этом случае он должен совпадать со своим комплексно сопряженным, то есть должно выполняться

$$\psi_{a_1\ldots a_n \dot{a}_1\ldots \dot{a}_m} = \bar{\psi}_{a_1\ldots a_m \dot{a}_1\ldots \dot{a}_n}$$

Отсюда следует, что $m = n$. Поэтому вещественный спин-тензор должен иметь структуру $\psi_{a_1\ldots a_n \dot{a}_1\ldots \dot{a}_n}$. Поскольку в этом случае числа точечных и неточечных индексов совпадают, то вещественный спин-тензор всегда может быть конвертирован в лоренцевский тензор по правилу (135).

наглядная иллюстрация

то, что я хочу увидеть

типичная теория

(пока от Володи)

Мы только что построили спин-тензорное представление группы $SL(2|\mathbb{C})$ - универсальной накрывающей группы Лоренца; на прошлой лекции мы изучили тензорное представление группы Лоренца.

Возникает вопрос: есть ли среди представлений $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$ группы $SL(2|\mathbb{C})$ тензорные представления группы.

Лоренца? Для ответа на этот вопрос вспомним соотношение, определяющее матрицу лоренцевских преобразований Λ в зависимости от $\omega \in SL(2|\mathbb{C})$ в контексте построенного нами ранее гомоморфизма $\pi : SL(2|\mathbb{C}) \rightarrow SO_+^\uparrow(3, 1)$

$$\Lambda(\omega)^\mu_\nu \sigma_\mu = \omega \sigma_\nu \omega^\dagger$$

Отсюда

$$\sigma_\mu = (\Lambda^T(\omega)^{-1})^\nu_\mu \omega \sigma_\nu \omega^\dagger$$

Обозначим элемент матрицы $\sigma_\mu = (\mathbf{1}, \sigma)$ через $(\sigma_\mu)_{a\dot{a}}$.

Тогда в индексных обозначениях (6.3) примет вид

$$(\sigma_\mu)_{a\dot{a}} = (\Lambda^T(\omega)^{-1})^\nu_\mu \omega_a^b \bar{\omega}_{\dot{a}}^{\dot{b}} (\sigma_\nu)_{b\dot{b}}$$

Это соотношение показывает, что $(\sigma_\mu)_{a\dot{a}}$ образуют инвариантный тензор (σ_μ образуют инвариантный матричный вектор).

Поднимая спинорные индексы, получим

$$(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a} = \varepsilon^{\dot{a}b} \varepsilon^{ab} (\sigma_\mu)_{b\dot{b}} = (\sigma_\mu)^{a\dot{a}}$$

Прямые вычисления показывают, что $\tilde{\sigma}_\mu = (\mathbf{1}, -\sigma)$.

Матрицы σ_μ и $\tilde{\sigma}_\mu$ обладают большим количеством полезных свойств, из которых мы отметим следующие:

$$\begin{aligned} (\sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \tilde{\sigma}_\mu)_a^b &= 2\eta_{\mu\nu} \delta_a^b, & (\sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \tilde{\sigma}_\mu)_{\dot{a}}^{\dot{b}} &= 2\eta_{\mu\nu} \delta_{\dot{a}}^{\dot{b}} \\ (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a} (\sigma_\nu)_{a\dot{a}} &= 2\eta_{\mu\nu}, & (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{b}b} (\sigma^\mu)_{a\dot{a}} &= 2\delta_a^b \delta_{\dot{a}}^{\dot{b}} \end{aligned}$$

Эти свойства проверяются прямыми вычислениями.

Инвариантные матричные векторы $(\sigma_\mu)_{a\dot{a}}$ и $(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a}$, имеющие один лоренцев индекс и пару спинорных индексов, позволяют конвертировать один векторный индекс в пару спинорных индексов и наоборот.

Так, например, вектору v_μ можно сопоставить спин-тензор $\psi_{a\dot{a}}^{(v)}$ по правилу

$$\psi_{a\dot{a}}^{(v)} = (\sigma^\mu)_{a\dot{a}} v_\mu$$

Отсюда видно, что

$$v_\mu = \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a} \psi_{a\dot{a}}^{(v)} = \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a} (\sigma^\nu)_{a\dot{a}} v_\nu = \delta_\mu^\nu v_\nu = v_\mu$$

Заметим, что спин-тензор $\psi_{a\dot{a}}^{(v)}$ соответствует неприводимому представлению $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ группы $SL(2|\mathbb{C})$ и поскольку, согласно (6.6) и (6.7), спин-тензор $\psi_{a\dot{a}}^{(v)}$ эквивалентен вектору v_μ , то лоренцев вектор v_μ соответствует неприводимому представлению $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ группы $SL(2|\mathbb{C})$. Соотношения (6.6) и (6.7) указывают на общий способ взаимной конвертации лоренцевых и спинорных индексов: необходимо применять правила (6.6) к каждому пространственновременному индексу и правило (6.7) к каждой паре неточно-точных спинорных

индексов.

Пусть задан тензор n -го ранга $T_{\mu_1 \mu_n}$.

Ему соответствует спин-тензор типа (n, n) :

$$\psi_{a_1 a_n \dot{a}_1 \dot{a}_n}^{(T)} = (\sigma^{\mu_1})_{a_1 \dot{a}_1} (\sigma^{\mu_n})_{a_n \dot{a}_n} T_{\mu_1 \mu_n}$$

Отсюда, согласно (6.7), имеем

$$T_{\mu_1 \mu_n} = \frac{1}{2^n} (\tilde{\sigma}_{\mu_1})^{\dot{a}_1 a_1} (\tilde{\sigma}_{\mu_n})^{\dot{a}_n a_n} \psi_{a_1 a_n}^{(T)} \dot{a}_1 \dot{a}_n$$

Полученные соотношения показывают, что спин-тензор с равным количеством точечных и неточечных индексов эквивалентен некоторому лоренцеву тензору; при $m \neq n$ спин-тензор типа (n, m) , вообще говоря, не сводится ни к каким чисто лоренцевым тензорам.

По построению произвольный спин-тензор типа (p, q) является комплексным.

Рассмотрим закон его преобразования

$$\psi'_{a_1 a_p \dot{c}_1 \dot{c}_q} = \omega_{a_1}^{b_1} \omega_{a_p}^{b_p} \bar{\omega}_{\dot{c}_1}^{\dot{d}_1} \bar{\omega}_{\dot{c}_q}^{\dot{d}_q} \psi_{b_1 b_p \dot{d}_1 \dot{d}_q}$$

После комплексного сопряжения, это равенство принимает вид

$$\left(\psi'_{a_1 a_p \dot{c}_1 \dot{c}_q} \right)^* = \omega_{c_1}^{d_1} \omega_{c_q}^{d_q} \bar{\omega}_{\dot{a}_1}^{\dot{b}_1} \bar{\omega}_{\dot{a}_p}^{\dot{b}_p} \left(\psi_{b_1 b_p \dot{d}_1 \dot{d}_q} \right)^*$$

Мы видим, что спин-тензор $\left(\psi_{a_1 a_p \dot{c}_1 \dot{c}_q} \right)^*$ преобразуется как спин-тензор типа (q, p) .

Положим по определению

$$\left(\psi_{a_1 a_p \dot{c}_1 \dot{c}_q} \right)^* = \bar{\psi}_{c_1 c_q \dot{a}_1 \dot{a}_p}$$

Говорят, что спин-тензор $\bar{\psi}_{c_1 c_q \dot{a}_1 \dot{a}_p}$ является комплексно сопряжённым к спин-тензору $\psi_{a_1 a_p \dot{c}_1 \dot{c}_q}$.

Выясним теперь, при каких условиях спин-тензор может быть вещественным: в этом случае он должен совпадать со своим комплексно сопряжённым спин-тензором, то есть должно выполняться равенство

$$\bar{\psi}_{a_1 a_q \dot{a}_1 \dot{a}_p} = \psi_{a_1 a_p \dot{a}_1 \dot{a}_q}$$

Отсюда следует, что $p = q$, поэтому вещественный спин-тензор должен иметь структуру типа (p, p) .

Поскольку в этом случае числа точечных и неточечных индексов совпадают, то вещественный спин-тензор всегда может быть конвертирован к лоренцеву тензору согласно формуле (6.9).

Переход от лоренцевых индексов к спинорным может оказаться полезным при выполнении некоторых преобразований типа выделения неприводимых компонент.

В качестве примера рассмотрим тензор второго ранга $G_{\mu\nu}$.

Соответствующий ему спин-тензор определяется согласно

$$\psi_{ab\dot{a}\dot{b}}^{(G)} = (\sigma^\mu)_{a\dot{a}} (\sigma^\nu)_{b\dot{b}} G_{\mu\nu}$$

Выделим неприводимые компоненты спин-тензора $\psi_{ab\dot{a}\dot{b}}^{(G)}$ при помощи симметризации и антисимметризации:

$$\psi_{ab\dot{a}\dot{b}}^{(G)} = \psi_{(ab)(\dot{a}\dot{b})}^{(G)} + \psi_{[ab](\dot{a}\dot{b})}^{(G)} + \psi_{(ab)[\dot{a}\dot{b}]}^{(G)} + \psi_{[ab][\dot{a}\dot{b}]}^{(G)} = \psi_{(ab)(\dot{a}\dot{b})}^{(G)} + \varepsilon_{ab} \psi_{(\dot{a}\dot{b})}^{(G)} + \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \psi_{(ab)}^{(G)} + \varepsilon_{ab} \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \psi^{(G)}$$

Здесь

$$\psi_{(ab)}^{(G)} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \psi_{(ab)[\dot{a}\dot{b}]}^{(G)}, \quad \psi_{(\dot{a}\dot{b})}^{(G)} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ab} \psi_{[ab](\dot{a}\dot{b})}^{(G)}, \quad \psi^{(G)} = \frac{1}{4} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \psi_{[ab][\dot{a}\dot{b}]}^{(G)} = \frac{1}{4} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \psi_{ab\dot{a}\dot{b}}^{(G)}$$

Поэтому

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a} (\tilde{\sigma}_\nu)^{\dot{b}b} \psi_{ab\dot{a}\dot{b}}^{(G)} = \frac{1}{4} (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a} (\tilde{\sigma}_\nu)^{\dot{b}b} \left\{ \psi_{(ab)(\dot{a}\dot{b})}^{(G)} + \varepsilon_{ab} \psi_{(\dot{a}\dot{b})}^{(G)} + \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \psi_{(ab)}^{(G)} + \varepsilon_{ab} \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \psi^{(G)} \right\}$$

Проводя прямые вычисления, нетрудно проверить, что последнее выражение приводится к виду

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a} (\tilde{\sigma}_\nu)^{\dot{b}b} \psi_{(ab)(\dot{a}\dot{b})}^{(G)} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \psi_{(G)} + \frac{1}{2} (\sigma_{\mu\nu})^{ab} \psi_{(ab)}^{(G)} - \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{a}\dot{b}} \psi_{(\dot{a}\dot{b})}^{(G)}$$

где Соотношение (6.13) представляет собой разложение произвольного тензора второго ранга на неприводимые компоненты.

Таким образом, произвольный тензор второго ранга соответствует приводимому представлению группы $SL(2|\mathbb{C})$, включающему следующие неприводимые представления: $(1,1), (1,0), (0,1)$ и $(0,0)$.

симметричный тензор второго ранга как спинор

Исследовать отдельно случаи симметричного и антисимметричного тензоров второго ранга.

Какому представлению группы $SL(2|\mathbb{C})$ отвечает симметричный бесследовый тензор второго ранга?

ээ

Examples of usage of Relation of Spinor and Space-Time Indices

(????)

12.4.4 Transformation of Spin-Tensors under Spatial Reflections

Теория

Пространственное отражение, называемое также преобразованием четности, задается соотношением (16) и является одним из дискретных преобразований Лоренца. При таком преобразовании обычный трехмерный вектор преобразуется также как и трехмерные координаты, то есть меняет знак, а аксиальный вектор остается инвариантным. Это в частности означает, что трехмерный векторный оператор K_i (154) меняет знак, а трехмерный векторный оператор J_i (155) не меняет знак (поскольку определен с помощью ϵ - символа, и поэтому является аксиальным вектором). Оператор J_{ij} имеет два векторных индекса и следовательно инвариантен относительно пространственных отражений. Матрице Λ_P (15), реализующей пространственное отражение в пространстве Минковского, сопоставим линейный оператор $\hat{P}$, действующий на базисные векторы неприводимого представления $|N, N_3; M, M_3\rangle \rightarrow \hat{P}|N, N_3; M, M_3\rangle$ и на операторы X в пространстве представления $X \rightarrow \hat{P}X\hat{P}^{-1}$. Поскольку $(\Lambda_P)^2 = I$, то $(\hat{P})^2 = \mathbf{1}$, здесь I - единичная 4×4 матрица, а $\mathbf{1}$ - единичный оператор в пространстве неприводимого представления. Это означает, что $\hat{P} = \hat{P}^{-1}$. Будем называть оператор $\hat{P}$ оператором четности или оператором пространственного отражения. Учитывая, что K_i является обычным вектором, а J_i аксиальным вектором, получим

$$\begin{aligned}\hat{P}K_i\hat{P}^{-1} &= -K_i \\ \hat{P}J_i\hat{P}^{-1} &= J_i\end{aligned}$$

Тогда из соотношений (160), (163) найдем

$$\begin{aligned}\hat{P}A_i\hat{P}^{-1} &= B_i \\ \hat{P}B_i\hat{P}^{-1} &= A_i\end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}A^2 \Big| N, N_3; M, M_3 \rangle &= N(N+1)\hat{\mathcal{P}} \Big| N, N_3; M, M_3 \rangle = \\ \hat{\mathcal{P}}A^2\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}} \Big| N, N_3; M, M_3 \rangle &= B^2\hat{\mathcal{P}} \Big| N, N_3; M, M_3 \rangle\end{aligned}$$

То есть $B^2\hat{\mathcal{P}} \Big| N, N_3; M, M_3 \rangle = N(N+1)\hat{\mathcal{P}} \Big| N, N_3; M, M_3 \rangle$.

Аналогично $A^2\hat{\mathcal{P}} \Big| N, N_3; M, M_3 \rangle = M(M+1)\hat{\mathcal{P}} \Big| N, N_3; M, M_3 \rangle$. Или

$$\begin{aligned}B^2\hat{\mathcal{P}}\psi_{(a_1\dots a_n)(\dot{a}_1\dots\dot{a}_m)} &= n(n+1)\hat{\mathcal{P}}\psi_{(a_1\dots a_n)(\dot{a}_1\dots\dot{a}_m)} \\ A^2\hat{\mathcal{P}}\psi_{(a_1\dots a_n)(\dot{a}_1\dots\dot{a}_m)} &= m(m+1)\hat{\mathcal{P}}\psi_{(a_1\dots a_n)(\dot{a}_1\dots\dot{a}_m)}\end{aligned}$$

Но оператор A^2 действует на неточечные индексы спин-тензора и его собственные значения определяются числом неточечных индексов, а оператор B^2 действует на точечные индексы и его собственные значения определяются числом точечных индексов. Следовательно преобразованный спин-тензор $\hat{\mathcal{P}}\psi_{(a_1\dots a_n)(\dot{a}_1\dots\dot{a}_m)}$ имеет m неточечных индексов и n точечных. Исходный спин-тензор $\psi_{(a_1\dots a_n)(\dot{a}_1\dots\dot{a}_m)}$ имеет n неточечных индексов и m точечных. Это означает, что оператор $\hat{\mathcal{P}}$ меняет точечные и неточечные индексы, то есть $\hat{\mathcal{P}}\psi_{(a_1\dots a_n)(\dot{a}_1\dots\dot{a}_m)} \sim \psi_{(a_1\dots a_n)(\dot{a}_1\dots\dot{a}_m)}$. Другими словами, под действием пространственного отражения представление $\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$ переходит в представление $\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$.

12.4.5 Spinor Metric

???

(see note on sp field theories about it also)

применения спинорной метрики

пока хз, зачем она

12.5 Properties of Spinor Representations 2

12.5.1 A Wave Equation for Spin- $\frac{1}{2}$ Particles The Dirac Equation 1

We follow the historical approach of Dirac who, in 1928, searched for a relativistic covariant wave equation of the Schrödinger form

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad (2.1)$$

with positive definite probability density. At that time there were doubts concerning the Klein-Gordon equation, which did not yield such probability density [see (1.29)]. The charge density interpretation was not known at that time and would have made little physical sense, because π^+ and π^- mesons as charged spin-0 particles had not yet been discovered.

Since an equation in the form (2.1) is linear in the time derivative, it is natural to try to construct a Hamiltonian that is also linear in the spatial derivatives (equality of spatial and temporal coordinates). Hence, the desired equation (2.1) has to be of the form

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar c}{i} \left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \hat{\beta} m_0 c^2 \right] \psi \equiv \hat{H}_f \psi \quad (2.2)$$

The - yet unknown - coefficients $\hat{\alpha}_i$ cannot be simple numbers, otherwise (2.2) would not be form invariant with respect to simple spatial rotations. We suspect that the $\hat{\alpha}_i$ are matrices

and indicate this by the operator sign $\wedge$. Then ψ cannot be a simple scalar, but has to be a column vector

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}, t) \\ \psi_2(\mathbf{x}, t) \\ \vdots \\ \psi_N(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

from which a positive definite density of the form

$$\varrho(x) = \psi^\dagger \psi(x) = (\psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_N^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \psi_i^* \psi_i(x) \quad (2.4)$$

can be constructed immediately. We still have to show that $\varrho(x)$ is the temporal component of a four-vector (current) for which a continuity equation must exist so that the spatial integral $\int \varrho d^3x$ becomes constant in time. Only then is the probability interpretation of $\varrho(x)$ ensured. It is clear that the wave function ψ in (2.3) is a column vector analogous to the spin wave functions of the Pauli equation ¹. Hence, we shall call them spinors, specifying this name later. The dimension N of the spinor is not yet known, but we will be able to decide this soon. The coefficients $\hat{\alpha}_i$ and $\hat{\beta}$ must obviously be quadratic $N \times N$ matrices so that a column vector of dimension N stands on the lhs as well as on the rhs (2.2). Thus the Schrödinger-like equation (2.1) and (2.2) represents a system of N coupled first-order differential equations of the spinor components $\psi_i, i = 1, 2, \dots, N$. We also indicate this point in the notation and write (2.2) in the form

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial t} &= \frac{\hbar c}{i} \sum_{\tau=1}^N \left(\hat{\alpha}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\alpha}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{\alpha}_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right)_{\sigma\tau} \psi_\tau + m_0 c^2 \sum_{\tau=1}^N \hat{\beta}_{\sigma\tau} \psi_\tau \\ &\equiv \sum_{\tau=1}^N \left(\hat{H}_f \right)_{\sigma\tau} \psi_\tau. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Equation (2.2) is a short form of (2.5), in which the four $N \times N$ matrices $(\hat{\alpha}_i)_{\sigma\tau}$ ($i = 1, 2, 3$) and $\hat{\beta}_{\sigma\tau}$ are expressed in the usual abbreviated form for matrices by $\hat{\alpha}_i$ ($i = 1, 2, 3$) and $\hat{\beta}$ respectively. To continue, we demand the following natural properties:

a) the correct energy - momentum relation for a relativistic free particle

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (2.6)$$

b) the continuity equation for the density (2.4) and

c) the Lorentz covariance (i.e. Lorentz form-invariance) for (2.2) and (2.5), respectively.

To fulfill requirement a), every single component ψ_σ of the spinor ψ has to satisfy the Klein-Gordon equation ², i.e.

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_\sigma}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4) \psi_\sigma \quad (2.7)$$

On the other hand, from (2.2) it follows by iteration that

$$\begin{aligned}
 -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = & -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} \\
 & + \frac{\hbar m_0 c^3}{i} \sum_{i=1}^3 \left(\hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i \right) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \hat{\beta}^2 m_0^2 c^4 \psi.
 \end{aligned}$$

Comparison with (2.7) shows the following requirements for the matrices $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}$:

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i &= 2\delta_{ij} \mathbb{1}, \\
 \hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i &= 0 \\
 \hat{\alpha}_i^2 = \hat{\beta}^2 &= \mathbb{1}.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

These anticommutation relations define an algebra for the ψ matrices. In order to establish hermiticity of the Hamiltonian $\hat{H}_f$ in (2.2), the matrices $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}$ also have to be Hermitian; thus,

$$\hat{\alpha}_i^\dagger = \hat{\alpha}_i, \quad \hat{\beta}^\dagger = \hat{\beta}. \tag{2.9}$$

Therefore, the eigenvalues of the matrices are real. Since, according to (2.8), one has $\hat{\alpha}_i^2 = \mathbb{1}$ and $\hat{\beta}^2 = \mathbb{1}$, it follows that the eigenvalues can only have the values ± 1 . Because the eigenvalues are independent of the special representation ³ this can best be shown in the diagonal representation of the single matrices. For example, $\hat{\alpha}_i$ in its eigenrepresentation has the form

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_N \end{pmatrix}$$

with the eigenvalues $A_1, \dots, A_N$, and (2.8) now yields

$$\hat{\alpha}_i^2 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & A_N^2 \end{pmatrix},$$

from which

$$A_k^2 = 1, \text{ i.e. } A_k = \pm 1 \tag{2.10}$$

¹ See Vol. 1 of this series, Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989) Chaps. 12,13.

² Notice that the analogy to classical electrodynamics, where the six electromagnetic fields $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ satisfy the first-order differential equations (Maxwell equations)

$$(\nabla \times H) = \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (\nabla \times E) = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad \nabla \cdot E = 0, \quad \nabla \cdot H = 0$$

in a vacuum. Each single component E_i and H_i satisfies simultaneously the differential equation of the second order (wave equation)

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_i = 0 \text{ and } \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) H_i = 0.$$

For further discussion of this analogy we refer to Exercise 2.1.

Furthermore, from the anticommutation relations (2.8) it follows that the trace (i.e. the sum of the diagonal elements of the matrix) of each $\hat{\alpha}_i$ and of $\hat{\beta}$ has to be zero. Namely, according to (2.8) one has

$$\hat{\alpha}_i = -\hat{\beta}\hat{\alpha}_i\hat{\beta}$$

Because of the identity

$$\text{tr } \hat{A}\hat{B} = -\text{tr } \hat{B}\hat{A},$$

one concludes that

$$\text{tr } \hat{\alpha}_i = +\text{tr } \hat{\beta}^2\hat{\alpha}_i = \text{tr } \hat{\beta}\hat{\alpha}_i\hat{\beta} = -\text{tr } \hat{\alpha}_i \Rightarrow \text{tr } \hat{\alpha}_i = 0. \quad (2.11)$$

The trace of a matrix is always equal to the sum of its eigenvalues, which can be seen if $\hat{U}$ transforms the matrix $\hat{\alpha}_i$ into its diagonal form,

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots\dots\dots \\ 0 & A_2 & \dots\dots\dots \\ \vdots & & \ddots \\ .. & .. & \dots A_N \end{pmatrix} = \hat{U}\hat{\alpha}_i\hat{U}^{-1}$$

Then

$$\text{tr } \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots\dots\dots \\ 0 & A_2 & \dots\dots\dots \\ \vdots & & \ddots \\ .. & .. & \dots A_N \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N A_k = \text{tr } \hat{U}\hat{\alpha}_i\hat{U}^{-1} = \text{tr } \hat{\alpha}_i\hat{U}\hat{U}^{-1} = \text{tr } \hat{\alpha}_i$$

which proves the above statement. Because the eigenvalues of $\hat{\alpha}_i$ and $\hat{\beta}$ are equal to ± 1 , each matrix $\hat{\alpha}_i$ and $\hat{\beta}$ has to possess as many positive as negative eigenvalues, and therefore has to be of even dimension. The smallest even dimension, $N = 2$, can not be right, because only three anticommuting matrices exist, namely the three Pauli⁴ matrices $\hat{\sigma}_i$. Therefore, the smallest dimension for which the requirements (2.8) can be fulfilled is $N = 4$. We now study this case in more detail and indicate immediately one possible explicit representation of the Dirac matrices, i.e.

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

where $\hat{\sigma}_i$ are Pauli's 2×2 matrices and 1 is the 2×2 unit matrix. With the explicit form of the Pauli matrices of (1.65), we have, in detail,

³ This follows, because $\hat{A}\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$ implies that

$$\hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1}\hat{U}\psi_\alpha = \alpha\hat{U}\psi_\alpha$$

and, therefore,

$$\hat{A}'(\hat{U}\psi_\alpha) = \alpha(\hat{U}\psi_\alpha)$$

The solutions of the rotated matrix $\hat{A}' = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1}$ are just the rotated vectors $\psi'_\alpha = \hat{U}\psi_\alpha$ with the same eigenvalues α .

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\alpha}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\alpha}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\beta} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Indeed, we can easily check the validity of the relations (2.8). For example,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_j \\ \hat{\sigma}_j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_j \\ \hat{\sigma}_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\delta_{ij} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 2\delta_{ij} \mathbb{1} \end{pmatrix} \\ &= 2\delta_{ij} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

holds. Here we have used the relation for the Pauli matrices ⁵

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i = 2\delta_{ij} \mathbb{1}. \quad (2.14)$$

We also notice that (2.12) describes just one possible choice of the Dirac matrices $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}$. Each set $\hat{\alpha}'_i = \hat{U} \hat{\alpha}_i \hat{U}^{-1}, \hat{\beta}' = \hat{U} \hat{\beta} \hat{U}^{-1}$, which is obtained from the original $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}$ of (2.13) by a unitary transformation $\hat{U}$, can be used equally as well as the one introduced here [see (2.21)]. In Example 3.1 it will be shown that all representations of the Dirac algebra are unitarily equivalent to each other. Therefore, physical results do not depend on the special choice of the Dirac matrices $\hat{\alpha}_i$ and $\hat{\beta}$, but the calculations can become particularly simple in a certain representation.

Next we want to construct the four-current density and the equation of continuity. For that we multiply (2.2) from the left by $\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$ and obtain

$$i\hbar \psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \psi^\dagger \hat{\alpha}_k \frac{\partial}{\partial x^k} \psi + m_0 c^2 \psi^\dagger \hat{\beta} \psi \quad (2.15a)$$

Furthermore, we form the Hermitian conjugate of (2.12), i.e.

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = -\frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} \hat{\alpha}_k^\dagger + m_0 c^2 \psi^\dagger \hat{\beta}^\dagger$$

and multiply this equation from the right by ψ , taking into consideration the hermicity of the Dirac matrices ($\hat{\alpha}_i^\dagger = \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}^\dagger = \hat{\beta}$), to give

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} \hat{\alpha}_k \psi + m_0 c^2 \psi^\dagger \hat{\beta} \psi \quad (2.15b)$$

⁴ See Vol. 1 of this series, Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989), Chaps. 12, 13 and especially Exercise 13.1.

Then, subtraction of (2.15b) from (2.15a) yields

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = \frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} (\psi^\dagger \hat{\alpha}_k \psi) \quad (2.16)$$

or

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0, \quad (2.17)$$

5 This relation is covered in detail in Vol. 1 of this series, Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).
where

$$\varrho = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^4 \psi^* \psi_i \quad (2.18a)$$

is the positive definite density (2.4) and

$$j^k = c\psi^\dagger \hat{\alpha}^k \psi \quad \text{or} \quad j = c\psi^\dagger \hat{\alpha} \psi \quad (2.18b)$$

is the current density. Here we have symbolically introduced the three-vector

$$\hat{\alpha} = \{\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3\} = \{-\hat{\alpha}_1, -\hat{\alpha}_2, -\hat{\alpha}_3\} \quad (2.19)$$

and introduced the upper and lower indices according to our former convention [see (1.5) and (1.6)]. From (2.17) the conservation law follows immediately in the usual way

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3x \psi^\dagger \psi = - \int_V \operatorname{div} j d^3x = - \int_F j \cdot df = 0 \quad (2.20)$$

where V denotes a certain volume and F its surface. Since ϱ is positive definite and because of the conservation law (2.17) we can accept the interpretation of ϱ as a probability density [in contrast to the density ϱ obtained for the Klein-Gordon equation, see (1.29) which was not positive definite]. Accordingly, we call j the probability current density. Here we have presumed that j is a vector, i.e. that its components (2.18 b) transform under spatial rotations as the components of a three-vector. This still has to be shown. Furthermore, $\{c\varrho, j\}$ should form a four-vector. Hence, it should transform from one inertial system into another one by a Lorentz transformation. This point and, in addition, the form invariance of the Dirac equation (2.2) with respect to Lorentz transformations (we also call the form invariance covariance) have still to be shown, before we can regard the Dirac equation as an acceptable relativistic wave equation.

We also notice that we have achieved a special representation with (2.12). The choice of the matrices (2.12) is not unequivocal. One recognizes immediately that each unitary transformation $\hat{S}$ yields the matrices

$$\hat{\alpha}'_i = \hat{S} \hat{\alpha}_i \hat{S}^{-1} \quad , \quad \hat{\beta}' = \hat{S} \hat{\beta} \hat{S}^{-1} \quad (2.21)$$

which also satisfy the algebra (2.8). We check this for the first commutator (2.8), as an example:

$$\begin{aligned} \hat{S} \hat{\alpha}_i \hat{S}^{-1} \hat{S} \hat{\alpha}_j \hat{S}^{-1} + \hat{S} \hat{\alpha}_j \hat{S}^{-1} \hat{S} \hat{\alpha}_i \hat{S}^{-1} &= 2\delta_{ij} \hat{S} 1 \hat{S}^{-1} \\ \Rightarrow \hat{\alpha}'_i \hat{\alpha}'_j + \hat{\alpha}'_j \hat{\alpha}'_i &= 2\delta_{ij} 1 \end{aligned} \quad (\text{q.e.d.})$$

2.1 Representation of the Maxwell Equations in the Form of the Dirac Equation

Problem. Write the Maxwell equations

$\text{curl } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$, $\text{curl } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, in the form analogous to the Dirac equation (spinor equation):

$$-\frac{1}{i} \sum_{j=0}^3 \hat{\alpha}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \psi = -\frac{4\pi}{c} \Phi \quad (\text{b})$$

Determine the matrices $\hat{\alpha}^j$ and their commutation relations and deduce the wave equation for ψ from (b).

Solution

We define the four-component column vectors

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix},$$

where $\phi_0 = c\rho$, $\phi_1 = j_1 = j_x$, $\phi_2 = j_2 = j_y$, $\phi_3 = j_3 = j_z$. Furthermore, we have $x^0 = x_0 = ct$, $x^1 = -x_1 = x$, $x^2 = -x_2 = y$, $x^3 = -x_3 = z$. Now we define the components of ψ as

$$\psi_0 \equiv 0, \psi_1 = H_1 - iE_1,$$

$$\psi_2 = H_2 - iE_2, \psi_3 = H_3 - iE_3.$$

From this definition it follows that the matrices $\hat{\alpha}^i$ have partly real and partly pure imaginary matrix elements. From (b) we get the equation

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{i} \left(\hat{\alpha}^0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi + \hat{\alpha}^1 \frac{\partial}{\partial x} \psi + \hat{\alpha}^2 \frac{\partial}{\partial y} \psi + \hat{\alpha}^3 \frac{\partial}{\partial z} \psi \right) \\ & = -\frac{4\pi}{c} \Phi. \end{aligned} \quad (\text{3})$$

Denoting now the matrix elements of the matrices $\hat{\alpha}^j$ by α_{ik}^j we can write down the components of (3) explicitly. In the same manner we write the components of the Maxwell equations (a) and compare the coefficients of both systems of equations. In order to obtain the correct signs in the Maxwell equations using (2) we infer, as there appears a factor $-1/i$, that the α_{ik}^j only take values ± 1 or $\pm i$.

Important Remark. As $\psi_0 = 0$, this procedure determines the columns 1, 2, 3, but not column 0. We can fix the remaining column by requiring that $\hat{\alpha}^j$ is Hermitian and that $(\hat{\alpha}^j)^2 = 11$. For the matrices $\hat{\alpha}^j$ we now find

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}^0 = \mathbb{1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 \hat{\alpha}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\
 \hat{\alpha}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \hat{\alpha}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{4}$$

and the operators $\hat{\alpha}^j$ are Hermitian. We see immediately that $\text{trace } \hat{\alpha}^j = 0$ holds for $j = 1, 2, 3$ and, thus, we obtain the commutation relations

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}^1 \hat{\alpha}^2 + \hat{\alpha}^2 \hat{\alpha}^1 &= 0, & \hat{\alpha}^1 \hat{\alpha}^2 &= i \hat{\alpha}^3, \\
 \hat{\alpha}^2 \hat{\alpha}^3 + \hat{\alpha}^3 \hat{\alpha}^2 &= 0, & \hat{\alpha}^2 \hat{\alpha}^3 &= i \hat{\alpha}^1, \\
 \hat{\alpha}^3 \hat{\alpha}^1 + \hat{\alpha}^1 \hat{\alpha}^3 &= 0, & \hat{\alpha}^3 \hat{\alpha}^1 &= i \hat{\alpha}^2 \quad \text{and} \\
 (\hat{\alpha}^1)^2 &= (\hat{\alpha}^2)^2 = (\hat{\alpha}^3)^2 = 1.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Using these, we infer from (b) that

$$\begin{aligned}
 &\left(-\frac{1}{i} \sum_{j=0}^3 \hat{\alpha}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \left(-\frac{1}{i} \sum_{k=0}^3 \hat{\alpha}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \psi \\
 &= - \left\{ (\hat{\alpha}^0)^2 \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \sum_{i=1}^3 (\hat{\alpha}^i)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}} \right\} \psi \\
 &= \left\{ \nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right\} \psi = \square \psi,
 \end{aligned} \tag{7}$$

as the mixing terms are proportional to the anticommutators (5) and hence vanish. This means, from (3) and (7),

$$\square \psi = \frac{4\pi}{i} \sum_{j=0}^3 \hat{\alpha}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Phi.$$

Hence, if there are no source terms ($\Phi = 0$) the components of ψ , that is the components of the electromagnetic field, obey a wave equation. If there are sources present, then for the upper component of (8) with $\psi_0 = 0$

$$\sum_{j=0}^3 \frac{\partial \phi_j}{\partial x^j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } j = 0$$

follows as a necessary condition of a solution of (b). Obviously, (9) is just the continuity equation. We also can recognize the analogue to the Dirac equation in the Schrödinger form:

$$\left(-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_0\right)\psi = -4\pi\Phi \quad (10)$$

where $\hat{H}_0 = (1/i) \sum_{k=1}^3 \hat{\alpha}^k \partial/\partial x^k$ has the same form as the Dirac Hamiltonian for vanishing mass m_0 .

2.1 Free Motion of a Dirac Particle

We examine the solution of the free Dirac equation (2.2) (that is, the Dirac equation without potentials) and again write it in the form

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_f \psi = \left(c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m_0 c^2 \hat{\beta}\right) \psi \quad (2.22)$$

Its stationary states are found with the ansatz

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}) \exp[-(i/\hbar)\varepsilon t] \quad (2.23)$$

which transforms (2.2) into

$$\varepsilon \psi(\mathbf{x}) = \hat{H}_f \psi(\mathbf{x}) \quad (2.24)$$

Again the quantity ε describes the time evolution of the stationary state $\psi(\mathbf{x})$. For many applications it is useful to split up the four-component spinor into two two-component spinors ϕ and χ , i.e.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad (2.25a)$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (2.25b)$$

Using the explicit form (2.12) for the $\hat{\alpha}$ and $\hat{\beta}$ matrices (2.24) can be written as

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

or

$$\begin{aligned} \varepsilon \varphi &= c \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \chi + m_0 c^2 \varphi \\ \varepsilon \chi &= c \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \varphi - m_0 c^2 \chi \end{aligned} \quad (2.26)$$

States with definite momentum $\mathbf{p}$ are

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \exp[(i/\hbar)\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] \quad (2.27)$$

The equations (2.26) are transformed into the same equations for ϕ_0 and χ_0 , but replacing the operators $\hat{\mathbf{p}}$ by the eigenvalues $\mathbf{p}$. Ordering with respect to ϕ_0 and χ_0 results in the system of equations

$$\begin{aligned} (\varepsilon - m_0 c^2) \mathbb{1} \varphi_0 - c \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} \chi_0 &= 0, \\ -c \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} \varphi_0 + (\varepsilon + m_0 c^2) \mathbb{1} \chi_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

This linear homogenous system of equations for φ_0 and χ_0 has nontrivial solutions only in the case of a vanishing determinant of the coefficients, that is

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon - m_0 c^2) \mathbb{1} & -c \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} \\ -c \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} & (\varepsilon + m_0 c^2) \mathbb{1} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.29)$$

Using the relation ⁶

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{A})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbb{1} + i \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (2.30)$$

equation (2.29) transforms into

$$\begin{aligned} (\varepsilon^2 - m_0^2 c^4) \mathbb{1} - c^2 (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}) &= 0, \\ \varepsilon^2 &= m_0^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2 \end{aligned}$$

from which follows

$$\varepsilon = \pm E_p \quad , \quad E_p = +c \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2} \quad (2.31)$$

The two signs of the time-evolution factor ε correspond to two types of solutions of the Dirac equation. We call them positive and negative solutions, respectively. From (2.28), for fixed ε ,

$$\chi_0 = \frac{c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p})}{m_0 c^2 + \varepsilon} \varphi_0 \quad (2.32)$$

Let us denote the two-spinor φ_0 in the form

$$\varphi_0 = U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

with the normalization

$$U^\dagger U = U_1^* U_1 + U_2^* U_2 = 1$$

where U_1, U_2 are complex. Using (2.27) and (2.23) we obtain the complete set of positive and negative free solutions of the Dirac equation as

$$\Psi_{\mathbf{p}\lambda}(\mathbf{x}, t) = N \left(\frac{c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p})}{m_0 c^2 + \lambda E_p} U \right) \frac{\exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \overbrace{\lambda E_p}^\varepsilon t)/\hbar]}{\sqrt{2\pi\hbar^3}^3}. \quad (2.34)$$

Here $\lambda = \pm 1$ characterizes the positive and negative solutions with the time evolution factor $\varepsilon = \lambda E_p$. The normalization factor N is determined from the condition

$$\int \Psi_{\mathbf{p}\lambda}^\dagger(\mathbf{x}, t) \Psi_{\mathbf{p}'\lambda'}(\mathbf{x}, t) d^3x = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (2.35)$$

Hence,

⁶ Encountered previously in Vol. 1 of this series, Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989), Exercise 13.2.

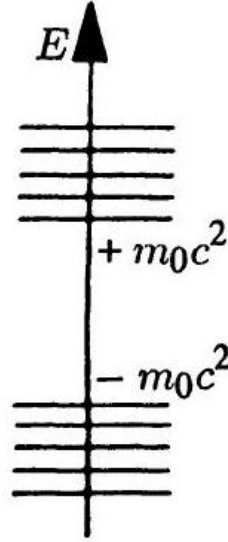


Fig. 2.1. Spectrum of the eigenvalues of the free Dirac equation

$$N^2 \left(U^\dagger U + U^\dagger \frac{c^2 (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p})}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2} U \right) = 1$$

or, using (2.30)

$$\begin{aligned} N^2 \left(1 + \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2 \mathbf{p}^2}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2} \right) &= 1 \\ \Rightarrow N &= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2 + c^2 \mathbf{p}^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{(m_0^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2) + 2m_0 c^2 \lambda E_p + E_p^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2}{2(m_0 c^2 + \lambda E_p) \lambda E_p}} \\ &= \sqrt{\frac{(m_0 c^2 + \lambda E_p)}{2\lambda E_p}}. \end{aligned}$$

The spectrum of $\varepsilon_{p\lambda} = \lambda E_p$, corresponding to the spinors $\Psi_{p\lambda}(\mathbf{x}, t)$, is shown in Fig. 2.1. There appears - as in the case of the Klein-Gordon equation - a domain of positive and negative frequencies ("energy eigenvalues"). We will discuss the interpretation of the states with $\lambda = -1$ in detail later on. We now recognize that all states (2.34) are eigenfunctions of momentum

$$\hat{\mathbf{p}} \Psi_{p\lambda} = p \Psi_{p\lambda}(x, t) \quad (2.37)$$

For every momentum p there are two different kinds of solutions, those with $\lambda = +1$ ($\varepsilon = +E_p$) and those with $\lambda = -1$ ($\varepsilon = -E_p$). We will now show that another quantum number, the helicity, can be used to classify the free one-particle states (2.34). First we note that the operator

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{p}} \quad (2.38)$$

commutes with the free Dirac-Hamiltonian operator $\hat{H}_f$ [cf. (2.2)]. Here

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

is the four-dimensional generalization of the spin vector operator ⁷. We calculate

$$\left[\hat{H}_f, \hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right]_- = \left[c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0c^2, \hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right]_- = c[\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}]_-,$$

as $\hat{\beta}$ is a diagonal matrix and hence $[\hat{\beta}, \hat{\Sigma}]_- = 0$. Furthermore, we obtain

$$\begin{aligned} & (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}})(\hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) - (\hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2 \\ (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2 \\ (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Hence,

$$\left[\hat{H}_f, \hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right]_- = 0 \quad (2.40a)$$

and naturally

$$[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}]_- = 0 \quad (2.40b)$$

This means that $\hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$, $\hat{H}_f$ and $\hat{\mathbf{p}}$ can be diagonalized together. The same holds for the helicity operator

$$\hat{\Lambda}_S = \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma} \cdot \frac{\hat{\mathbf{p}}}{|\mathbf{p}|} = \hat{\mathbf{S}} \cdot \frac{\hat{\mathbf{p}}}{|\mathbf{p}|} \quad (2.41)$$

as we can immediately see by repeating the calculations which led us to (2.40a, b). Helicity has an obvious interpretation: it is the projection of the spin onto the direction of momentum, as illustrated in Fig. 2.2.

If the electron wave propagates into the direction of the z axis, we have

$$\mathbf{p} = \{0, 0, p\}$$

and, because of (2.41),

$$\hat{\Lambda}_S = \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

with the eigenvalues $\pm\hbar/2$. Clearly, the eigenvectors of $\hat{\Lambda}_S$ are

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ u_{-1} \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad (2.43)$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad u_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

⁷ See Vol. 1 of this series, Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989), Chaps. 12, 13.

Now we can classify completely the free Dirac waves propagating in the z direction; we denote them by $\Psi_{p,\lambda,s_z}(x,t)$ and write explicitly

$$\Psi_{p,\lambda,+1/2} = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{c\hat{\sigma}_z p}{m_0 c^2 + \lambda E_p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \exp [i (pz - \lambda E_p t) / \hbar],$$

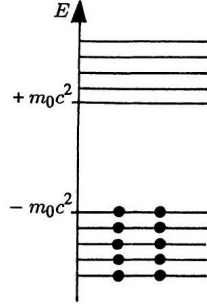


Fig. 2.3. The negative energy states with $E < m_0 c^2$ are occupied by electrons and form the "Dirac sea". As we shall see later on in greater detail, they represent the vacuum state and are unobservable; whereas real, i.e. observable, electrons in general exist only in states of positive energy

$$\Psi_{p,\lambda,-1/2} = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{c\hat{\sigma}_z p}{m_0 c^2 + \lambda E_p} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \exp [i (pz - \lambda E_p t) / \hbar]$$

From (2.35) one immediately recognizes the validity of the orthonormality relations

$$\int \Psi_{p_z \lambda s_z}^\dagger \Psi_{p'_z \lambda' s'_z} d^3 x = \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{s_z s'_z} \delta(p_z - p'_z) \quad (2.45)$$

2.2 Single-Particle Interpretation of the Plane (Free) Dirac Waves

In this section we shall examine the single-particle interpretation of the free Dirac equation and its solutions in greater detail. Many of our considerations will be similar to those carried out when discussing the Klein-Gordon equation and, indeed, we can already remark at this stage that we will find that a single-particle interpretation can be performed to a large extent after a suitable modification of the operators. However, such an interpretation will not stand a rigorous treatment.

First we shall discuss the interpretation of the energy. From (2.31) we know that the eigenvalues of the free Dirac-Hamiltonian $\hat{H}_f$ (2.2) are $\varepsilon = \pm E_p$. As in the previous discussion of the Klein-Gordon equation we have to find out whether the time evolution factors can be interpreted as energies. In order to answer this question we use the canonical (Lagrange) formalism. In the following Exercise 2.2 it is shown that the Lagrange density, leading to the free Dirac equation (2.2) is given by

$$\mathcal{L} = i\hbar \Psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \Psi + i\hbar c \Psi^\dagger \nabla \cdot \hat{\alpha} \Psi - m_0 c^2 \Psi^\dagger \hat{\beta} \Psi \quad (2.46)$$

and, using this result, we will also calculate, as previously in (1.59-61), the energy related to the free solutions (2.44) of the Dirac equation. The result is that

$$E = \varepsilon = \pm E_p \quad (2.47)$$

is identical with the energy of the states. This is different from the case of the Klein-Gordon equation: The free Dirac equation possesses positive and negative energy solutions, whose energies are given by (2.47). What is their interpretation since there is none in the framework of a one-particle theory? With the proposal of the hole theory, Dirac showed the following way out of this difficulty: let us assume that real electrons are described only by positive energy states (2.47), these are the states with $E = +E_p$. All states of negative energy are occupied by electrons, one electron in each state of negative energy and given spin projection [see (2.44)]. This is illustrated in Fig. 2.3.

In this way a real electron of positive energy is also prevented from falling into energetically lower and lower states by radiation emission. A radiation catastrophe of this kind is averted by the effective Pauli principle which simply does not allow these transitions. On the other hand the question arises as to the meaning of a hole in this occupied "sea of negative states". Later on in Chap.12, we will see that this leads to a meaningful description of the positron (the antiparticle of the electron). One thing should already have become clear here: The interpretation of the negative energy states of the Dirac equation takes us out of the one-particle picture and into the many-particle picture (more precisely, infinitely many particles are necessary for the formation of the Dirac sea). Therefore a consistent single-particle interpretation of the Dirac theory is not possible, a fact which is contrary to Dirac's initial intentions. Figure 2.3 gives an especially clear view of this aspect.

However, we pursue the single-particle aspect further and devote ourselves to the investigation of modified one-particle operators and to Ehrenfest's theorems. This way, perhaps, a consistent single-particle description can be obtained. For this it is helpful to introduce the sign operator $\hat{\Lambda}$,

$$\hat{\Lambda} = \frac{\hat{H}_f}{\sqrt{\hat{H}_f^2}} = \frac{c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0c^2}{c\sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 + m_0^2c^2}} \quad (2.48)$$

Of course it commutes with the free Dirac-Hamiltonian $\hat{H}_f$. Furthermore, $\hat{\Lambda}$ is Hermitian and unitary, i.e.

$$\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}^\dagger = \hat{\Lambda}^{-1}. \quad (2.49)$$

In momentum representation $\hat{\Lambda}$ has an especially simple form, that is

$$\hat{\Lambda} = \frac{c(\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \hat{\beta}m_0c^2}{E_p} \quad (2.50)$$

The name "sign operator" comes from the fact that

$$\hat{\Lambda}\Psi_{p,\lambda,s_z} = \frac{\varepsilon}{E_p}\Psi_{p,\lambda,s_z} = \frac{\lambda E_p}{E_p}\Psi_{p,\lambda,s_z} = \lambda\Psi_{p,\lambda,s_z} \quad (2.51)$$

$\hat{\Lambda}$ has as eigenvalue the sign $\lambda(= \pm 1)$ of the time-evolution factor. $\lambda = +1$ means positive-energy states, $\lambda = -1$ negative-energy states. An arbitrary state with fixed λ can be written in the form

$$\Psi_\lambda = \sum_{s_z} \int A_{s_z}(p) \Psi_{p,\lambda,s_z} d^3p \quad (2.52)$$

Then

$$\hat{\Lambda}\Psi_\lambda = \sum_{s_z} \int A_{s_z}(p) \frac{\hat{H}_f}{E_p} \Psi_{p,\lambda,s_z} d^3p = \lambda\Psi_\lambda \quad (2.53)$$

We can use $\hat{\Lambda}$ in order to introduce the projection operators $\hat{\Pi}_{\pm}$ by

$$\hat{\Lambda}_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\Lambda}) \quad (2.54)$$

with the useful properties

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_+ \Psi_{\lambda=+1} &= \Psi_{\lambda=+1}, \\ \hat{\Lambda}_+ \Psi_{\lambda=-1} &= 0, \\ \hat{\Lambda}_- \Psi_{\lambda=+1} &= 0, \\ \hat{\Lambda}_- \Psi_{\lambda=-1} &= \Psi_{\lambda=-1}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

The operators $\hat{\Lambda}_{\pm}$ split off the positive (or negative) parts of the state to which they are applied. As earlier, in the context of the Klein-Gordon equation [cf. (1.160, 161)pp], we call operators "even" or "odd" if they transform positive (negative) functions into positive (negative) or negative (positive) functions, respectively. The product of two even or two odd operators is always an even operator, and the product of an even and an odd operator is always an odd operator. Since all positive functions ($\lambda = \pm 1$) are orthogonal with respect to all negative ($\lambda = -1$) functions, the expectation value of an odd operator with states of fixed λ is always zero; hence,

$$\langle \Psi_{\lambda} | \hat{A}_{\text{odd}} | \Psi_{\lambda} \rangle = 0$$

A consistent one-particle theory can only use states with a specified sign (either $\lambda = +1$ or $\lambda = -1$), because the energy can only be defined meaningfully in that way (cf. our preceding discussion). However, from that it follows that in a consistent one-particle theory all physical quantities must necessarily be defined by even operators. In the following we shall see that for Dirac's theory, Ehrenfest's theorems follow under this condition too, i.e. the quantum-mechanical operator equations and the corresponding classical equations become identical. Once again this means that the mean-values comply with the classical equations, a fact which is quite significant. We formalize these considerations by splitting up every operator $\hat{A}$ into an even $[\hat{A}]$ and an odd $\{\hat{A}\}$ part

$$\hat{A} = [\hat{A}] + \{\hat{A}\}. \quad (2.56)$$

If we simply write in short form $\Psi_{\pm}$ for $\Psi_{\lambda=\pm 1}$ we obtain

$$\hat{A}\Psi_+ = [\hat{A}]\Psi_+ + \{\hat{A}\}\Psi_+, \quad (2.57a)$$

$$\hat{A}\Psi_- = [\hat{A}]\Psi_- + \{\hat{A}\}\Psi_-, \quad (2.57b)$$

$$\hat{\Lambda}\hat{A}\hat{\Lambda}\Psi_+ = \hat{\Lambda}\hat{A}\Psi_+ = [\hat{A}]\Psi_+ - \{\hat{A}\}\Psi_+, \quad (2.57c)$$

$$\hat{\Lambda}\hat{A}\hat{\Lambda}\Psi_- = -\hat{\Lambda}\hat{A}\Psi_- = [\hat{A}]\Psi_- - \{\hat{A}\}\Psi_-. \quad (2.57d)$$

Hence, it follows by, say, addition and subtraction of (2.57a) and (2.57c) or, also, (2.57b) and (2.57 d) that

$$[\hat{A}] = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{\Lambda}\hat{A}\hat{\Lambda}) \quad , \quad \{\hat{A}\} = \frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{\Lambda}\hat{A}\hat{\Lambda}). \quad (2.58)$$

We immediately recognize that the free Dirac Hamiltonian $\hat{H}_f$ is an even operator since

$$\hat{\Lambda}\hat{H}_f\hat{\Lambda} = \hat{H}_f \quad \text{and therefore} \quad \left[\hat{H}_f \right] = \frac{1}{2} \left(\hat{H}_f + \hat{\Lambda}\hat{H}_f\hat{\Lambda} \right) = \hat{H}_f$$

12.5.2 A Wave Equation for Spin- $\frac{1}{2}$ Particles The Dirac Equation 2

2.2. Lagrange Density and Energy-Momentum Tensor of the Free Dirac Equation

Problem. Determine the Lagrangian density of the free Dirac field. Calculate the energy-momentum tensor and interpret the individual results.

Solution

We claim that the free Dirac Lagrange density has the form

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (ci\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m_0c^2) \psi.$$

$\bar{\psi} := \psi^\dagger\gamma^0$ is called the spinor adjoint to ψ and the abbreviation γ^μ stands for $\gamma^0 = \hat{\beta}, \gamma^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}^i$ [cf. Chap. 3 (3.8)].

Also $\partial_\mu := \partial/\partial x^\mu$ is a shorthand notation. Straight away we introduce these γ^μ matrices instead of the $\hat{\alpha}^i$ and $\hat{\beta}$, but will revert to the $\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}$ representation in all important sections. The γ^μ are appropriate for the covariant formulation of the Dirac equation. The Lagrangian density (1) can therefore be rewritten as

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger i\hbar\partial_t\psi + c\psi^\dagger i\hbar\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi - m_0c^2\psi^\dagger\gamma_0\psi,$$

since $\gamma_0 = \gamma^0$. Because of $\partial_i = \partial/\partial x^i = (\nabla)_i$, this yields

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \psi^\dagger (i\hbar\partial_t + i\hbar c\hat{\alpha} \cdot \nabla - m_0c^2\gamma_0) \psi \\ &= \psi^\dagger (i\hbar\partial_t - c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \hat{\beta}m_0c^2) \psi\end{aligned}\tag{3}$$

which uses the $\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}$ matrices instead of the γ^μ . We realize that this is the correct Lagrangian density if we determine the equations of motion by variation. Variation with respect to $\bar{\psi}$ yields

$$\begin{aligned}\frac{\delta \int \mathcal{L} d^4x}{\delta \bar{\psi}} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \\ &\Rightarrow (ci\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m_0c^2) \psi = 0\end{aligned}\tag{4}$$

This is Dirac's equation

$$\begin{aligned}i\hbar\partial_t\psi &= (c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0c^2) \psi \\ &\equiv \hat{H}_f\psi\end{aligned}\tag{5}$$

with the free Hamiltonian

$$\hat{H}_f (c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0c^2).$$

We recognize that for the solutions of the equations of motion (5)

$$\delta \mathcal{L}(\psi) \equiv 0$$

Variation with respect to ψ yields

$$\begin{aligned}\frac{\delta \int \mathcal{L} d^4x}{\delta \psi} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = 0 \\ &\Rightarrow \bar{\psi} (i\hbar\gamma_\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m_0c^2) = 0\end{aligned}\tag{8}$$

where $\overleftarrow{\partial}_\mu$ acts to the lhs on $\bar{\psi}$. One can easily calculate the canonical energy-momentum tensor from the Lagrangian density $\mathcal{L}$: $T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial_\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \partial_\nu \bar{\psi} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$,

which follows explicitly with (1) as

$$T^\mu{}_\nu = \bar{\psi} i \hbar \gamma^\mu \partial_\nu \psi - \delta^\mu_\nu \bar{\psi} i \hbar c \gamma^\sigma \partial_\sigma \psi + \delta^\mu_\nu m_0 c^2 \bar{\psi} \psi.$$

From that one obtains the energy density T^0_0 ,

$$\begin{aligned} T^0_0 &= -\psi^\dagger i \hbar \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \nabla c \psi + m_0 c^2 \bar{\psi} \psi \\ &= \psi^\dagger \left(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} c + \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \psi = \psi^\dagger \hat{H}_f \psi. \end{aligned} \quad (11)$$

Consequently

$$\int T^0_0 d^3x = \langle \psi | \hat{H}_f | \psi \rangle$$

(that is, the energy), is just the expectation value of $\hat{H}_f$ in the state ψ . By analogy the momentum density T^0_i is given by

$$T^0_i = \bar{\psi} i \hbar c \gamma^0 \partial_i \psi = \psi^\dagger (\hat{\mathbf{p}})_i c \psi,$$

in other words, $p_i \equiv (1/c) \int T^0_i d^3x = \langle \psi | (\hat{\mathbf{p}})_i | \psi \rangle$ is the expectation value of the momentum operator in the state ψ . The components

$$T^i_j = \bar{\psi} i \hbar c (\gamma^i \partial_j - \delta^i_j \gamma^\mu \partial_\mu) \psi + \delta^i_j m_0 c^2 \bar{\psi} \psi,$$

which can simply be written for each solution of the equation of motion as

$$T^i_j = \bar{\psi} i \hbar c \gamma^i \partial_j \psi = -\bar{\psi} \gamma^i \hat{p}_j c \psi = -\psi^\dagger \hat{\alpha}^i \hat{p}_j c \psi,$$

are called the components of the stress-strain tensor. The trace of $T^\mu{}_\nu$ is given by

$$\begin{aligned} T \equiv T^\mu{}_\mu &= \bar{\psi} i \hbar c (\gamma^\mu \partial_\mu - 4 \gamma^\sigma \partial_\sigma) \psi + 4 m_0 c^2 \bar{\psi} \psi \\ &= -3 \bar{\psi} (i \hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - m_0 c^2) \psi + m_0 c^2 \bar{\psi} \psi \end{aligned} \quad (16)$$

which, for every solution of the equation of motion, just becomes

$$T = m_0 c^2 \bar{\psi} \psi.$$

One should notice that this is not proportional to the charge density

$$\varrho = e \bar{\psi} \gamma_0 \psi = e \psi^\dagger \psi.$$

2.3 Calculation of the Energies of the Solutions to the Free Dirac Equation in the Canonical Formalism

Problem. Calculate in the framework of the canonical formalism the energies of the solutions (2.44) of the free Dirac equation.

Solution

We can determine the energy as the integral

$$E = \int_V T^0_0 d^3x \quad (1)$$

If we insert (11) of Exercise 2.2 as well as the solutions (2.44a) for ψ into this, we obtain

$$\begin{aligned} E &= N^2 \int_V \left(1, 0, \frac{pc}{m_0 c^2 + \lambda E_p}, 0 \right) \\ &\quad \times \left(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} c + \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p}{m_0 c^2 + \lambda E_p} \\ 0 \end{pmatrix} d^3x. \end{aligned} \quad (2)$$

Since for (2.44) $p = (0, 0, p)$ holds, we get by calculation

$$\begin{aligned}
 E &= N^2 V \left(1, 0, \frac{pc}{m_0 c^2 + \lambda E_p}, 0 \right) \\
 &\quad \times \left(pc \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + m_0 c^2 \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{0}{m_0 c^2 + \lambda E_p} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= N^2 V \left(1, 0, \frac{pc}{m_0 c^2 + \lambda E_p}, 0 \right) \\
 &\quad \times \left(pc \begin{pmatrix} \frac{pc}{m_0 c^2 + \lambda E_p} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m_0 c^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{0}{m_0 c^2 + \lambda E_p} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= N^2 V \left(\frac{2p^2 c^2}{m_0 c^2 + \lambda E_p} + m_0 c^2 - \frac{m_0 c^2 p^2 c^2}{(m_0 c^2 + \lambda E_p)^2} \right) \\
 &= N^2 V (m_0 c^2 + \lambda E_p)^{-2} (2p^2 c^2 m_0 c^2 + 2p^2 c^2 \lambda E_p \\
 &\quad + m_0^3 c^6 + 2m_0^2 c^4 \lambda E_p + m_0^3 c^6 + m_0 c^2 p^2 c^2 - m_0 c^2 p^2 c^2) \\
 &= N^2 V (m_0 c^2 + \lambda E_p)^{-2} (2(\lambda E_p)^3 + 2m_0^3 c^6 \\
 &\quad + 2m_0 c^2 p^2 c^2) \\
 &= N^2 V (m_0 c^2 + \lambda E_p)^{-1} 2\lambda^2 E_p^2. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Here we have used wave functions which are normalized with respect to a finite spherical volume V . If we furthermore insert the normalization factor N from (2.36)

$$N^2 = V^{-1} \left(\frac{2\lambda E_p}{m_0 c^2 + \lambda E_p} \right)^{-1},$$

we finally obtain

$$E = \lambda E_p,$$

that means

$$E = +\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

for the upper energy continuum ($\lambda = +1$) and

$$E = -\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

for the lower energy continuum ($\lambda = -1$). Hence, the free Dirac equation leads to states with positive and negative energy.

As for the Dirac Hamiltonian $\hat{H}_f$, for the momentum operator $\hat{\mathbf{p}}$ also

$$\hat{\Lambda} \hat{\mathbf{p}} \hat{\Lambda} = \hat{\mathbf{p}}, \text{ so that } [\hat{\mathbf{p}}] = \hat{\mathbf{p}}$$

Let us also determine the even part of the $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ operator. We have

$$\hat{\Lambda} \hat{\alpha}_i \hat{\Lambda} = \frac{c \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2}{c \sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 + m_0^2 c^2}} \hat{\alpha}_i \frac{c(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \hat{\beta} m_0 c^2}{c \sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 + m_0^2 c^2}} = -\hat{\alpha}_i + 2c \hat{p}_i \frac{\hat{\Lambda}}{c \sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 + m_0^2 c^2}}$$

and therefore

$$[\hat{\alpha}_i] = \frac{1}{2} \left(\hat{\alpha}_i + \hat{\Lambda} \hat{\alpha}_i \hat{\Lambda} \right) = c \hat{p}_i \frac{\hat{\Lambda}}{c \sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 + m_0^2 c^2}} \tag{2.59}$$

In a similar way one calculates

$$[\hat{\beta}] = \frac{m_0 c^2}{E_p} \hat{\Lambda} = m_0 c^2 \frac{\hat{\Lambda}}{c \sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 + m_0^2 c^2}}. \quad (2.60)$$

Now we determine the velocity operator in the Dirac theory. Since we are concerned with an equation of Schrödinger type [cf. (2.2)], the theorems for the time derivatives of operators which we formulated in (1.157) are also valid here and we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{\mathbf{x}}, \hat{H}_f]_- = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\mathbf{x}}, c(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \hat{\beta} m_0 c^2]_- \\ &= \frac{c}{i\hbar} [\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}]_- = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \equiv \hat{\mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Since the eigenvalues of $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ have the values ± 1 we obtain here the paradoxical result that the absolute value of the velocity of a relativistic spin- $\frac{1}{2}$ particle always equals the velocity of light⁸. Moreover, since the $\hat{\alpha}_i$ do not commute with each other the components of the velocity dx_i/dt would not be simultaneously measurable. Of course, this is nonsense and certainly would not yield the classical relations for the mean values (Ehrenfest's theorems). According to previous statements, however, we find, using (2.59), the true velocity operator, that is the even part of $d\hat{\mathbf{x}}/dt$, to be

$$\left[\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} \right] = c[\hat{\boldsymbol{\alpha}}] = \frac{c^2 \hat{\mathbf{p}} \hat{\Lambda}}{c \sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 + m_0^2 c^2}} \quad (2.62)$$

Accordingly, the true velocity equals $c^2 \hat{\mathbf{p}}/E_p$ for positive and $-c^2 \hat{\mathbf{p}}/E_p$ for negative free solutions of the Dirac equation. This exactly corresponds, for positive solutions, to the classical picture. For waves with negative energy the result is paradoxical in the first instance since their velocity is directed against their momentum. Therefore particles with negative energy behave formally as if they would have a negative mass. Later on we shall comprehend these facts better in the context of the hole theory (Chap. 12). Accordingly, the motion of a single particle can be visualized as follows (cf. Fig. 2.4). The particle has to perform - if we adhere to the one particle interpretation - a kind of Zitterbewegung (trembling motion) around the classical location $[x]$ (classical trajectory).

Now we investigate the result (2.62) from yet another point of view. If we consider wave packets built up from free Dirac waves, we show that only the mean of the centre of the wave packet generally follows a classical trajectory.

In order to understand this we integrate the equations of motion in the Heisenberg representation:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\mathbf{x}}, \hat{H}_f]_- = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.63)$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\alpha}}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{H}_f]_- = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_f \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \hat{\boldsymbol{\alpha}} \hat{H}_f] - \frac{2i}{\hbar} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \hat{H}_f = \frac{2ic\hat{\mathbf{p}}}{\hbar} - \frac{2i}{\hbar} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \hat{H}_f \quad (2.64)$$

Since $\hat{\mathbf{p}}$ and $\hat{H}_f$ are constant in time (because $[\hat{\mathbf{p}}, \hat{H}_f]_- = 0 = [\hat{H}_f, \hat{H}_f]_-$), one can easily integrate the former equation and obtain

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(0) - \frac{c\hat{\mathbf{p}}}{\hat{H}_f} \right) \exp \left(-2i\hat{H}_f t / \hbar \right) + \frac{c\hat{\mathbf{p}}}{\hat{H}_f} \quad (2.65)$$

⁸ This was first recognized by Gregory Breit in 1928.

If this result is inserted into (2.63), then $\hat{\mathbf{x}}(t)$ can be explicitly calculated with the result

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(0) + \frac{c^2 \hat{\mathbf{p}}}{\hat{H}_f} t + \left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(0) - \frac{c \hat{\mathbf{p}}}{\hat{H}_f} \right) \frac{i \hbar c}{2 \hat{H}_f} \exp \left(-2i \hat{H}_f t / \hbar \right)$$

This result determines the space operator $\hat{\mathbf{x}}(t)$ in the Heisenberg representation at time t . Of course, the operator $\hat{\mathbf{x}}(t)$ also depends on $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(0)$ and $\hat{\mathbf{x}}(0)$. Making use of (2.66), the equation of motion of the centre $\langle \hat{\mathbf{x}}(t) \rangle$ of each wave packet can be determined. It is interesting to compare this with the classical equation of motion, which reads

$$x_{\text{cl}}(t) = \mathbf{x}_{\text{cl}}(0) + \left(\frac{c^2 \mathbf{p}}{E_p} \right)_{\text{cl}} t \quad (2.67)$$

The comparison of (2.67) with (2.66) shows that the free wave packet indeed follows the uniform classical motion [first two terms in (2.66)], but that moreover a rapidly oscillating motion is superposed, namely

$$\left\langle \left| i \left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(0) - \frac{c \hat{\mathbf{p}}}{\hat{H}_f} \right) \frac{\hbar c}{2 \hat{H}_f} \exp \left(-2i \hat{H}_f t / \hbar \right) \right| \right\rangle. \quad (2.68)$$

The amplitude and frequency of these additional oscillations are of the order $\hbar/2m_0c$ and $2m_0c^2/\hbar$, respectively. This oscillating motion is the previously mentioned Zitterbewegung. It vanishes if wave packets with exclusively positive or negative energy are considered. This becomes clear if we calculate, with (2.54),

$$\hat{\Lambda}_{\pm} \left(\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{c \hat{\mathbf{p}}}{\hat{H}_f} \right) \frac{\exp \left(-2i \hat{H}_f t / \hbar \right)}{2 \hat{H}_f} \hat{\Lambda}_{\pm} = 0 \quad (2.69)$$

where $\hat{\Lambda}_{\pm}$ are the projection operators for the states of positive and negative energy, respectively. Namely,

$$\left[\hat{H}_f, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \right]_{-} = 2c \hat{\mathbf{p}} - 2 \hat{\boldsymbol{\alpha}} \hat{H}_f$$

$$\hat{H}_f \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \hat{\boldsymbol{\alpha}} \hat{H}_f = 2c \hat{\mathbf{p}}$$

$$\left[\hat{\Lambda}_{\pm}, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \right]_{-} = \frac{1}{2} [(1 \pm \hat{\Lambda}), \hat{\boldsymbol{\alpha}}]_{-} = \pm \frac{1}{2} [\hat{\Lambda}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}]$$

$$= \pm \frac{1}{2} \left[\frac{\hat{H}_f}{E_p}, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \right]_{-} = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{E_p} \left[\hat{H}_f, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \right]_{-} = \pm \frac{c \hat{\mathbf{p}}}{E_p} \mp \hat{\boldsymbol{\alpha}} \frac{\hat{H}_f}{E_p}$$

$$\left[\hat{H}_f, \hat{\Lambda}_{\pm} \right]_{-} = 0 \quad (2.70 \text{ d})$$

$$\hat{H}_f \hat{\Lambda}_{\pm} = \pm E_p \hat{\Lambda}_{\pm} \quad (2.70 \text{ e})$$

With this we can write

$$\hat{\Lambda}_{\pm} \left(\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{c \hat{\mathbf{p}}}{\hat{H}_f} \right) \hat{\Lambda}_{\pm} \frac{\exp \left(-2i \hat{H}_f t / \hbar \right)}{2 \hat{H}_f} \equiv \hat{A} \frac{\exp \left(-2i \hat{H}_f t / \hbar \right)}{2 \hat{H}_f}$$

and, because of the preceding calculation (2.70c), one gets

$$\hat{\Lambda}_{\pm} \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\Lambda}_{\pm} \pm \frac{c \hat{\mathbf{p}}}{E_p} \mp \hat{\boldsymbol{\alpha}} \frac{\hat{H}_f}{E_p}$$

Thus one obtains

$$\hat{A} = \left[\hat{\alpha} \hat{\Lambda}_{\pm} \pm \frac{c\hat{\mathbf{p}}}{E_p} \mp \hat{\alpha} \frac{\hat{H}_f}{E_p} - \frac{c\hat{\mathbf{p}}}{\hat{H}_f} \right] \hat{\Lambda}_{\pm}$$

and the identity $\hat{\Lambda}_{\pm} \hat{\Lambda}_{\pm} = \hat{\Lambda}_{\pm}$ for the projection operators is recovered in a trivial way, finally resulting in

$$\hat{A} = \left[\hat{\alpha} \pm \frac{c\hat{\mathbf{p}}}{E_p} \mp \hat{\alpha} \frac{(\pm E_p)}{E_p} - \frac{c\hat{\mathbf{p}}}{\hat{H}_f} \right] \hat{\Lambda}_{\pm} = 0$$

Hence, the Zitterbewegung is caused by the interference between the positive and negative energy compounds of a wave packet. It demonstrates that in a real sense a singleparticle theory is not possible, it can only be approximately obtained if the associated wave packets can be restricted to one energy range.

2.3 Nonrelativistic Limit of the Dirac Equation

Before we proceed further with the extension of the Dirac theory, it is important to check whether the Dirac equation yields physically reasonable results in the nonrelativistic limiting case. First we study the case of an electron at rest, in this case we obtain the Dirac equation by setting $\hat{\mathbf{p}}\psi = 0$ in (2.2),

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{\beta} m_0 c^2 \psi \quad (2.71)$$

In the particular representation (2.12) with

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$$

we are able to write down the four solutions

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp[-i(m_0 c^2 / \hbar) t], \quad \psi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp[-i(m_0 c^2 / \hbar) t] \\ \psi^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp[+i(m_0 c^2 / \hbar) t], \quad \psi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp[+i(m_0 c^2 / \hbar) t] \end{aligned} \quad (2.72)$$

The first two wave functions correspond to positive, the last two to negative energy values. The interpretation of the solutions with negative energy still causes problems and is postponed [cf. (2.47) pp.]); however, the correct interpretation leads to a considerable triumph of relativistic quantum theory by forecasting and describing antiparticles. At first therefore we restrict ourselves to solutions of positive energy. In order to show that the Dirac equation reproduces the two-component Pauli equation' in the nonrelativistic limit, we introduce the electromagnetic four-potential

$$A^\mu = \{A_0(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})\} \quad (2.73)$$

into the Dirac equation (2.2). We know that the minimal coupling

$$\hat{p}^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \equiv \hat{\Pi}^\mu$$

ensures gauge invariance of the theory, where $\hat{\Pi}^\mu$ is the kinetic momentum and $\hat{p}^\mu$ the canonical momentum. So we are inevitably guided to the Dirac equation with electromagnetic potentials

$$c \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} - \frac{e}{c} A_0 \right) \psi = \left(c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \psi$$

or

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + eA_0 + \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \psi. \quad (2.74)$$

This contains the interaction with the electromagnetic field

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= -\frac{e}{c} c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{A} + eA_0 \\ &= -\frac{e}{c} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{A} + eA_0, \end{aligned} \quad (2.75)$$

where

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}}$$

is the relativistic velocity operator. The expression (2.75) corresponds to the classical interaction of a moving charged point-like particle with the electromagnetic field. The velocity operator, however, is the formal operator $\hat{v}$ from (2.61) which contains the Zitterbewegung.

2.4 Time Derivative of the Position and Momentum Operators for Dirac Particles in an Electromagnetic Field

Problem. Calculate the time derivative of the position operators $\hat{\mathbf{x}}$ and of the kinetic momentum $\hat{\Pi} = \hat{\mathbf{p}} - (e/c)\mathbf{A}$ for Dirac particles in an electromagnetic field. Compare the result with the corresponding classical expressions and discuss Ehrenfest's theorems.

Solution

The Hamiltonian of a Dirac particle in the electromagnetic field is [setting $A_0(x)$ equal to $\phi(x)$]

$$\hat{H} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \hat{\beta} m_0 c^2 + e\phi.$$

Furthermore, the equation of motion of an arbitrary operator $\hat{F}$ is given by

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}]_-,$$

and for the position operator we obtain

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\mathbf{x}}]$$

since $\partial \hat{\mathbf{x}} / \partial t = 0$. With (1), the commutator reads

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{\mathbf{x}}]_- &= c[\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{x}}]_- - e[\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{A}, \hat{\mathbf{x}}]_- \\ &\quad + m_0 c^2 [\hat{\beta}, \hat{\mathbf{x}}]_- + e[\phi, \hat{\mathbf{x}}]_-, \end{aligned} \quad (4)$$

9 See Vol. 1 of this series, Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989), Chap. 12.

ϕ is the Coulomb potential, i.e. $[\phi, \hat{x}]_- = 0$. The position operator $\hat{\mathbf{x}}$ is nothing but a simple multiplication operator $\hat{\mathbf{x}}\psi = \mathbf{x}\psi$ (i.e. it is diagonal with respect to the spinor indices) and contains no differentiation. Hence $[\hat{\beta}, \hat{\mathbf{x}}]_- = 0 = [\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\mathbf{x}}]_-$. Furthermore we will use the identity $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}]_- = [\hat{A}, \hat{C}]_- \hat{B} + \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]_-$ to show that

$$\begin{aligned} [\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{x}}]_- &= \sum_{j,k} \{ [\hat{\alpha}_j, \hat{x}_k]_- \hat{p}_j \mathbf{e}_k + \hat{\alpha}_j [\hat{p}_j, \hat{x}_k]_- \mathbf{e}_k \} \\ &= \sum_j \frac{\hbar}{i} \hat{\alpha}_j \mathbf{e}_j = \frac{\hbar}{i} \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \\ \text{since } [\hat{p}_j, \hat{x}_k]_- &= \frac{\hbar}{i} \delta_{jk}. \end{aligned} \quad (5)$$

$[\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{x}}]_- = 0$ since $\hat{\mathbf{x}}$ commutes with $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ as well as with $\mathbf{A}$: we obtain $[\hat{H}, \hat{\mathbf{x}}]_- = (\hbar/i)c\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, and hence $\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \equiv \hat{\mathbf{v}}$

hence the velocity operator of a Dirac particle is given by

$$\hat{\mathbf{v}} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Let us now see how this operator acts on a Dirac spinor. Considering the single components, this reads as

$$\hat{v}^j \psi = c\hat{\alpha}_j \psi = \pm c\psi$$

since the operator $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ has the eigenvalues $\tilde{\alpha}_j = \pm 1$. This result means that a Dirac particle always moves with the speed of light and it is clear that this finding has no classical analogy [cf. the discussion following (2.61)]. The equation of motion for the kinetic momentum $\hat{\boldsymbol{\Pi}} = \hat{\mathbf{p}} - (e/c)\mathbf{A}$ is

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\Pi}}}{dt} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\Pi}}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\boldsymbol{\Pi}}]_- = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\boldsymbol{\Pi}}]_- - \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

because the potential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ can depend on time explicitly. The commutator is given by

$$[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{\Pi}}]_- = [\hat{H}, \hat{\mathbf{p}}]_- - \frac{e}{c} [\hat{H}, \mathbf{A}]_- \quad (9)$$

First we calculate the single commutators

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{\mathbf{p}}]_- &= c[\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}]_- - e[\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{A}, \hat{\mathbf{p}}]_- \\ &\quad + m_0 c^2 [\hat{\beta}, \hat{\mathbf{p}}]_- + e[\phi, \hat{\mathbf{p}}], \end{aligned} \quad (10)$$

and $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$, it follows that i.e. $[\hat{\beta}, \hat{\mathbf{p}}] = 0$ since $\hat{\beta}$ does not depend on space coordinates. Furthermore it holds that

$$e[\phi, \hat{\mathbf{p}}]_- = ie\hbar[\nabla, \phi]_- = ie\hbar(\nabla\phi - \phi\nabla).$$

Making use of this relation we obtain

$$\begin{aligned} e[\phi, \hat{\mathbf{p}}]_- \psi &= ie\hbar(\nabla\phi - \phi\nabla)\psi = ie\hbar(\nabla\phi\psi - \phi\nabla\psi) \\ &= ie\hbar\{\psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi - \phi\nabla\psi\} = ie\hbar(\nabla\phi)\psi \end{aligned}$$

for any wave function ψ , i.e. $e[\phi, \hat{\mathbf{p}}]_- = ie\hbar(\nabla\phi)$. Further we find

$$\begin{aligned} c[\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}]_- &= c \sum_{i,j} \{ [\hat{\alpha}_i, \hat{p}_j]_- \hat{p}_i \mathbf{e}_j \\ &\quad + \hat{\alpha}_i [\hat{p}_i, \hat{p}_j]_- \mathbf{e}_j \} = 0, \end{aligned}$$

because $[\hat{p}_i, \hat{p}_j]_- = 0$ and $[\hat{\alpha}_i, \hat{p}_j]_- = 0$ (since $\hat{\alpha}_i$ does not depend on the space coordinates). This leaves

$$\begin{aligned}
 -e[\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{A}, \mathbf{p}]_- &= -e \sum_{i,j} \{ [\hat{\alpha}_i, \hat{p}_j]_- A_i e_j + \hat{\alpha}_i [A_i, \hat{p}_j]_- e_j \\
 &= -e \sum_{i,j} \hat{\alpha}_i [A_i, \hat{p}_j]_- e_j
 \end{aligned} \tag{11}$$

The second commutator in (9) yields

$$\begin{aligned}
 -\frac{e}{c}[\hat{H}, \mathbf{A}]_- &= -\frac{e}{c} \{ c[\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \mathbf{A}]_- - e[\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{A}, \mathbf{A}]_- \\
 &\quad + m_0 c^2 [\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{A}]_- + e[\phi, \mathbf{A}]_- \}
 \end{aligned}$$

Since $[\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{A}]_- = [\phi, \mathbf{A}]_i = 0$ and $[\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{A}, \mathbf{A}]_- = 0$ ($\mathbf{A}$ commutes with $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ and also with itself), we get

$$\begin{aligned}
 -e[\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \mathbf{A}]_- &= -e \left[\sum_{i,j} \{ [\hat{\alpha}_i, A_j]_- \hat{p}_i e_j + \hat{\alpha}_i [\hat{p}_i, A_j]_- e_j \} \right] \\
 &= -e \sum_{i,j} \hat{\alpha}_i [\hat{p}_i, A_j]_- e_j.
 \end{aligned} \tag{12}$$

In total we have

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{\boldsymbol{\Pi}}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} \left[ie\hbar(\nabla\phi) - e \sum_{i,j} \hat{\alpha}_i \{ [A_i, \hat{p}_j]_- \right. \\
 &\quad \left. + [\hat{p}_i, A_j]_- \} \mathbf{e}_j \right] - \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\
 &= +e \underbrace{\left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi \right)}_{\mathbf{E}} \\
 &\quad + \frac{ie}{\hbar} \sum_{i,j} \hat{\alpha}_i \{ -[A_i, \hat{p}_j]_- - [\hat{p}_i, A_j]_- \} \mathbf{e}_j.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Additionally,

$$\begin{aligned}
 [\hat{p}_i, A_j]_- \psi &= -i\hbar(\nabla_i A_j - A_j \nabla_i) \psi \\
 &= -i\hbar(\nabla_i (A_j \psi) - A_j \nabla_i \psi) \\
 &= -i\hbar\{\psi \nabla_i A_j + A_j \nabla_i \psi - A_j \nabla_i \psi\} \\
 &= -i\hbar(\nabla_i A_j) \psi
 \end{aligned}$$

where the gradients acts on $\mathbf{A}$ only! Hence $[\hat{p}_j, A_i]_- - [\hat{p}_i, A_j]_- = i\hbar(\nabla_j A_i - \nabla_i A_j)$, and thus we find

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{\boldsymbol{\Pi}}}{dt} &= e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \sum_{i,j} c\hat{\alpha}_i (\nabla_j A_i - \nabla_i A_j) \mathbf{e}_j \\
 &= e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \times \text{curl } \mathbf{A} \right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

The final step is verified by performing some simple algebra, leading to

$$\frac{d\hat{\Pi}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{B} \right).$$

In the classical case this is just the Lorentz force. Thus, we realize that the operator $\hat{\mathbf{x}}$ does not satisfy classical equations of motion whereas a "classical" equation of motion can be set up for the operator $\hat{\Pi}$, in which the formal velocity operator (7) appears. Hence (15) seems to coincide, at least formally, with the corresponding classical equation, although we always have to bear in mind that any expectation values of (15) are not very useful because $\hat{\mathbf{v}}$ contains the Zitterbewegung. Only the projection of the even contributions of (15) produces results which are relevant within the scope of a (classical) single-particle description. Obviously at this point we reach the limits of the single-particle interpretation.

The nonrelativistic limiting case of (2.74) can be most efficiently studied in the representation

$$\psi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

where the four-component spinor ψ is decomposed into two two-component spinors $\tilde{\varphi}$ and $\tilde{\chi}$. Then the Dirac equation (2.74) becomes

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}} & \tilde{\chi} \\ c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}} & \tilde{\varphi} \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + m_0c^2 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

the $\hat{\alpha}_i$ as well as the $\hat{\beta}$ matrices having been inserted according to (2.12). If the rest energy m_0c^2 , as the largest occurring energy, is additionally separated by

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \exp [-i (m_0c^2/\hbar) t] \quad (2.78)$$

then (2.77) takes the form

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}} & \chi \\ c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}} & \varphi \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2m_0c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$$

Let us consider first the lower (second) of the above equations. For the conditions $|i\hbar\partial\chi/\partial t| \ll |m_0c^2\chi|$ and $|eA_0\chi| \ll |m_0c^2\chi|$ (i.e. if the kinetic energy as well as the potential energy are small compared to the rest energy) we obtain from the lower component of (2.79)

$$\chi = \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}}}{2m_0c} \varphi \quad (2.80)$$

This means that χ represents the small components of the wave function ψ , a result we already know from (2.32), while φ represents the large components $\chi \sim (v/2c)\varphi$. Insertion of (2.80) into the first equation (2.79) results in a nonrelativistic wave function for φ

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}})}{2m_0} \varphi + eA_0 \varphi \quad (2.81)$$

With the help of (2.30) we continue the calculation,

$$\begin{aligned}
 (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}}) &= \hat{\boldsymbol{\Pi}}^2 + i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\Pi}} \times \hat{\boldsymbol{\Pi}}) \\
 &= \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left[\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) \times \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right] \\
 &= \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{e}{c}\hbar\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\
 &= \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{c}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}
 \end{aligned}$$

and finally obtain (2.81) in the form

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2/2m_0 - \frac{e\hbar}{2m_0c}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B} + eA_0\right]\varphi \quad (2.82)$$

This is, as it should be, the Pauli-equation¹⁰. The two components of φ , therefore, describe the spin degrees of freedom, which we have already dealt with in the section dealing with free Dirac-waves [cf. (2.38-44)]. From the former discussion on the Pauli equation we know that this equation, and hence also (2.82), yields the correct gyromagnetic factor of $g = 2$ for a free electron. This can be demonstrated once again by turning on a weak, homogeneous magnetic field

$$\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{x},$$

¹⁰ This is well known from Vol. 1 of this series, Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989) Chap. 12.

¹¹ cf. in this context the linearization of the Schrödinger equation in Vol. 1 of this series, Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989) Chap. 13. where the quadratic terms of A in (2.82) have been neglected. With

$$\begin{aligned}
 \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 &= \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{2c}\mathbf{B} \times \mathbf{x}\right)^2 \approx \hat{\mathbf{p}}^2 - \frac{e}{c}(\mathbf{B} \times \mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{p}} \\
 &= \hat{\mathbf{p}}^2 - \frac{e}{c}\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{L}},
 \end{aligned}$$

where $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{x} \times \hat{\mathbf{p}}$ is the operator of orbital angular momentum, and

$$\hat{S} = \frac{1}{2}\hbar\hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

is the spin operator, it follows for the Pauli equation (2.82) that

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} - \frac{e}{2m_0c}(\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}}) \cdot \mathbf{B} + eA_0\right]\varphi. \quad (2.83)$$

This form shows explicitly the g -factor 2. However, the most important result is that, in the nonrelativistic limit, the Dirac equation transforms into the Pauli equation, i.e. to the proper nonrelativistic wave equation for spin- $\frac{1}{2}$ particles. Since spin exists both at low as well as at high velocities, this implies that the Dirac equation describes particles with spin $\frac{1}{2}$. In contrast to the Klein-Gordon equation [cf. (1.140), Chap. 1], valid for spin-0 particles, we have now found a relativistic wave equation for spin- $\frac{1}{2}$ particles. Clearly spin comes into the theory by linearization of the second-order differential equation (Klein-Gordon equation).¹¹

12.5.3 Lorentz-Covariance of the Dirac Equation 1

A proper relativistic theory has to be Lorentz-covariant, i.e. its form has to be invariant under a transition from one inertial system to another one. To establish this we will first restate the essentials of Lorentz transformations and also refer to Chap. 14 for supporting group theoretical arguments.

Two observers, A and B , in different inertial systems describe the same physical event with their particular, different space-time coordinates. Let the coordinates of the event be x^μ for observer A and x'^μ for observer B . Both coordinates are connected by means of the Lorentz transformation

$$(x')^\nu = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu^\nu x^\mu \equiv a_\mu^\nu x^\mu \equiv (\hat{a}\vec{x})^\nu \quad (3.1)$$

$\hat{a}$ denotes the abbreviated version of the transformation matrix and $\vec{x}$ the four-dimensional world vector. Equation (3.1) is a linear, homogeneous transformation and the coefficients a_μ^ν depend only on the relative velocities and spatial orientations of the reference frames. The distance between two space-time points is invariant under the Lorentz transformations (3.1), which can be expressed differentially by means of the invariance of the line element (see Fig. 3.1)

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.2)$$

Hence

$$dx^\mu dx_\mu = (dx')^\mu (dx')_\mu \quad (3.3)$$

This may also be deduced from the empirical fact that the velocity of light is the same in every inertial system ¹ Now, from (3.3) and (3.1) it follows that

$$(dx')^\mu (dx')_\mu = a_\nu^\mu a_\mu^\sigma dx^\nu dx_\sigma \stackrel{!}{=} dx^\nu dx_\nu = \delta_\nu^\sigma dx^\nu dx_\sigma \quad ;$$

hence

$$a_\nu^\mu a_\mu^\sigma = \delta_\nu^\sigma. \quad (3.4)$$

These are the orthogonality relations for Lorentz transformations. We now distinguish between proper and improper Lorentz transformations. Namely, from (3.4) follows

$$[\det(a_\nu^\mu)]^2 = 1, \text{ i.e. } \det(a_\nu^\mu) = \pm 1 \quad (3.5)$$

For the proper Lorentz transformations the determinant of the transformation coefficients is

$$\det(a_\nu^\mu) = +1 \quad (3.6)$$

These proper Lorentz transformations can be obtained from the identity (which has determinant +1 too) by an infinite number of successive, infinitesimal Lorentz transformations. They consist of the group of all transformations of coordinates from one coordinate system into another one which moves with constant velocity in an arbitrary direction. Normal three-dimensional rotations and translations belong to the proper Lorentz transformation too. The improper Lorentz transformations contain a (discrete) reflection either in space or in time.

¹ See J.D. Jackson: Classical Electrodynamics, 2nd ed. (Wiley, New York 1975).

Such discrete transformations can not be obtained from the identity by successive infinitesimal transformations. The determinant of the transformation coefficients of the improper Lorentz transformation is

$$\det(a_\nu^\mu) = -1 \quad (3.7)$$

It will now be our task to find a relation between the measurements of observer A and those of observer B which have been performed by both of them in their respective inertial systems. More precisely, we have to find a relation between (Fig. 3.2)

$$\begin{aligned} & \left(i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_0 c \right) \psi(\vec{x}) = 0 \quad \text{and} \quad \left(i\hbar \gamma'^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m_0 c \right) \psi'(\vec{x}') = 0 \\ & x^0 = ct \underbrace{\psi(x)} \\ & \iff x^{10} = ct' \underbrace{\psi'(x')} \quad \text{system B} \end{aligned}$$

Fig. 3.2.

For given $\psi(\vec{x})$ for A , the transformation must enable us to calculate $\psi'(\vec{x}')$ for B . The requirement of Lorentz covariance now means that $\psi(\vec{x})$ in system A as well as $\psi'(\vec{x}')$ in system B have to satisfy the respective Dirac equations, which have the same form in both systems. This is precisely the relativity principle: only in this way do both inertial systems become completely equivalent and indistinguishable.

In the following considerations it is much more convenient to denote the Dirac equation in four-dimensional notation to show the symmetry between the time-coordinate ct and the space coordinates x^i . Therefore we start with [from (2.2)]

$$\frac{\hat{\beta}}{c} \left| \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c \sum_{k=1}^3 \hat{\alpha}_k \frac{\partial}{\partial x^k} - \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \psi = 0 \right.$$

which we multiply by $\hat{\beta}/c$ from the lhs to obtain

$$\left(\hat{\beta} i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} + \sum_{k=1}^3 \hat{\beta} \hat{\alpha}_k i\hbar \frac{\partial}{\partial x^k} - m_0 c \right) \psi = 0$$

With the definitions

$$\gamma^0 = \hat{\beta} \quad , \quad \gamma^i = \hat{\beta} \hat{\alpha}_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

this can finally be written in the form

$$i\hbar \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \psi - m_0 c \psi = 0. \quad (3.9)$$

From now on we will write the matrices γ^μ without the operator sign $\wedge$; likewise we will denote the four-dimensional radius vector (world vector) by x ; hence

$$\vec{x} \equiv x \quad (3.10)$$

which will simplify the notation in the following considerably and will scarcely lead to confusion. A more elegant formulation of the anti-commutation relations (2.8) is possible using the γ matrices. Because of $\hat{\beta}^2 = \mathbb{1}$ it is obvious that they now read

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}, \quad (3.11)$$

"11" being the 4×4 unit matrix. The $\gamma^i (i = 1, 2, 3)$ are unitary $\left[(\gamma^i)^{-1} = \gamma^{i\dagger} \right]$ and anti-Hermitian $\left[(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \right]$; indeed,

$$(\gamma^i)^2 = -11 = -\gamma^i \gamma^{i\dagger} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad (\gamma^i)^{-1} = \gamma^{i\dagger}.$$

The fact that they are antihermitian follows directly from (2.8) and (2.9).

$$\gamma^{i\dagger} = \left(\hat{\beta} \hat{\alpha}_i \right)^\dagger = \hat{\alpha}_i^\dagger \hat{\beta}^\dagger = \hat{\alpha}_i \hat{\beta} = -\hat{\beta} \hat{\alpha}_i = -\gamma^i. \quad (3.12a)$$

On the other hand γ^0 is unitary and Hermitian,

$$(\gamma^0)^2 = +11 = +\gamma^0 \gamma^{0\dagger} \Rightarrow \gamma^{0\dagger} = \gamma^0. \quad (3.12b)$$

In the so-far used standard representation the γ^μ can be written down explicitly using

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ -\hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

A further short hand notation is often convenient: It is the so-called Feynman-dagger notation, i.e. for example

$$AA \equiv \gamma^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu A^\nu = \gamma^0 A^0 - \sum_{i=1}^3 \gamma^i A^i = \gamma^0 A^0 - \gamma \cdot \mathbf{A} \quad (3.14)$$

Another example is the nabla dagger:

$$\nabla \equiv \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \gamma^0 \frac{\partial}{\partial ct} + \sum_{i=1}^3 \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\gamma^0}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \cdot \nabla. \quad (3.15)$$

With this the Dirac equation (3.9) can be written in the very concise form

$$(i\hbar \nabla - m_0 c) \psi = 0, \quad (3.16)$$

or, with $\hat{p}_\mu = i\hbar \partial / \partial x^\mu$,

$$(\hat{\mathbf{p}} - m_0 c) \psi = 0 \quad (3.17)$$

Introducing the electromagnetic potentials using minimal (gauge-invariant) coupling yields

$$\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} - m_0 c \right) \psi = 0 \quad (3.18)$$

Both $\hat{p}^\mu$ and A^μ are four-vectors; hence the difference $\hat{p}^\mu - (e/c)A^\mu$ is a four-vector too. While discussing the covariance in the following part we can thus confine ourselves to the free equations (3.16) and (3.17).

3.1 Formulation of Covariance (Form Invariance)

Covariance of the Dirac equation means two different things:

1. There must be an explicit rule to enable observer B to calculate his $\psi'(x')$ if $\psi(x)$ of observer A is given. Hence $\psi'(x')$ of B describes the same physical state as $\psi(x)$ of A .
2. According to the principle of relativity, which states that physics (i.e. the basic equations of physics) is the same in every inertial system, $\psi'(x')$ must be a solution of a Dirac equation which has the form (3.16)

$$\left(i\hbar\gamma'^{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - m_0c \right) \psi'(x') = 0 \quad (3.19)$$

in the primed system, too. Additionally the γ'^{μ} have also to satisfy the anti-commutation relations (3.11). This is a requirement of the principle of relativity, as otherwise A and B could distinguish their inertial systems. Therefore,

$$\gamma'^{\mu}\gamma'^{\nu} + \gamma'^{\nu}\gamma'^{\mu} = 2g^{\mu\nu}11 \quad (3.20)$$

and

$$\gamma'^{0\dagger} = \gamma'^0 \quad (3.21a)$$

$$\gamma'^{i\dagger} = -\gamma'^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.21b)$$

Within the sense of the principle of relativity these conditions of Hermiticity and antihermiticity must hold in all inertial systems, something we can also understand in the following: Let us first write (3.19) in the form

$$i\hbar\gamma'^0\frac{\partial\psi'(x')}{\partial ct'} = \left(-\gamma'^k i\hbar\frac{\partial}{\partial x'^k} + m_0c \right) \psi' \text{ or} \quad (3.22a)$$

$$i\hbar\gamma'^0\frac{\partial\psi'(x')}{\partial t'} = \left(-c\gamma'^k + i\hbar\frac{\partial}{\partial x'^k} + m_0c^2 \right) \psi' \equiv \hat{H}'\psi' \text{ or} \quad (3.22a)$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi'(x')}{\partial t'} = \left[-c\gamma'^0\gamma'^k \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x'^k} \right) + \gamma'^0m_0c^2 \right] \psi'(x') \equiv \hat{H}'\psi' \quad (3.22b)$$

The last form (3.22b) is Schrödinger type; the former (3.22a) is not Schrödinger type, because on the lhs the factor γ'^0 appears with the time derivative. Here we have used $(\gamma'^0)^2 = 1$ from (3.20). The Hamiltonian $\hat{H}'$ from (3.22b), given by

$$\hat{H}' = -c\gamma'^0\gamma'^k \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x'^k} \right) + \gamma'^0m_0c^2, \quad (3.23)$$

must be Hermitian in order to have real eigenvalues

$$(\hat{H}')^{\dagger} = \hat{H}'.$$

This is perhaps a more evident requirement of the principle of relativity because it ensures that both observers see real energy eigenvalues. Now the momentum operators

$$\hat{p}'_{\mu} = i\hbar\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}$$

are Hermitian and commute with the γ' matrices. Hence, both γ'^0 as well as the products $\gamma'^0\gamma'^k$ from (3.23) must be Hermitian, which means that

$$\begin{aligned} (\gamma'^0)^{\dagger} &= \gamma'^0 \\ (\gamma'^0\gamma'^k)^{\dagger} &= (\gamma'^k)^{\dagger} (\gamma'^0)^{\dagger} = (\gamma'^k)^{\dagger} \gamma'^0 \stackrel{!}{=} \gamma'^0\gamma'^k \\ \Rightarrow (\gamma'^k)^{\dagger} &= \gamma'^0\gamma'^k\gamma'^0 = -\gamma'^k \end{aligned}$$

Again we have used the relations $\gamma'^0\gamma'^k = -\gamma'^k\gamma'^0$ and $(\gamma'^0)^2 = 1$ which are included in (3.20) and we stress the point that only $\hat{H}'$ from (3.23) has to be Hermitian, but not

$$\hat{H}' \equiv -c\gamma'^k \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x'^k} \right) + m_0 c^2$$

from (3.22a), the first part of which is indeed antihermitian. Therefore, we have

$$\left(\hat{H}' \right)^\dagger \neq \hat{H}'$$

It can be shown by means of a rather long algebraic proof (see Example 3.1 for better understanding) that all 4×4 matrices γ'^μ which satisfy (3.20) and (3.21) are identical up to a unitary transformation $\hat{U}$, i.e.

$$\gamma'^\mu = \hat{U}^\dagger \gamma^\mu \hat{U} \quad , \quad \hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1} \quad (3.24)$$

Hence it follows, because unitary transformations do not change the physics, that without loss of generality we can use the same γ matrices in the Lorentz system of observer B as in the Lorentz system of physicist A , i.e. the matrices (3.13).² Therefore, we shall no longer differentiate between γ'^μ and γ^μ , instead we rewrite (3.19) as

$$(\hat{\mathbf{p}}' - m_0 c) \psi'(x') = 0, \quad (3.25)$$

where now

$$\hat{\mathbf{p}} = i\hbar \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \quad (3.26)$$

holds.

3.1 Pauli's Fundamental Theorem: The 16 Complete 4×4 Matrices $\hat{\Gamma}_A$

Problem. Show that all representations of the Dirac algebra $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} 1$ for 4×4 matrices which satisfy $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$ are unitary equivalent!

Solution

The proof³ is divided into two parts:

i) Proof of the fundamental theorem for Dirac matrices: For two four-dimensional representations γ_μ, γ'_μ of the Dirac algebra there exists a nonsingular 4×4 matrix $\hat{S}$ with $\gamma'_\mu = \hat{S} \gamma_\mu \hat{S}^{-1}$.

ii) If additionally $\gamma_0 = \gamma_0^\dagger, \gamma^i = -\gamma^{i\dagger}, \gamma'_0 = \gamma_0'^\dagger, \gamma'_i = -\gamma_i'^\dagger$, then $\hat{S}$ can be chosen to be unitary. The proof uses the 16 following 4×4 matrices $\hat{\Gamma}_A$ ($A = 1, \dots, 16$) (see also Chap. 5):

$$\hat{\Gamma}_A = \mathbb{1},$$

$$\gamma_0, i\gamma_1, i\gamma_2, i\gamma_3,$$

$$i\gamma_2\gamma_3, i\gamma_3\gamma_1, i\gamma_1\gamma_2, \gamma_1\gamma_0, \gamma_2\gamma_0, \gamma_3\gamma_0,$$

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3, i\gamma_1\gamma_2\gamma_0, i\gamma_3\gamma_1\gamma_0, i\gamma_2\gamma_3\gamma_0,$$

$$i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0,$$

for which

$$\hat{\Gamma}_A^2 = 1 \quad (A = 1, \dots, 16).$$

Let us denote $i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 = \gamma_5$. It can easily be proven that γ_5 anticommutes with γ_μ ($\mu = 0, \dots, 3$),

$$\gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 = 0 \quad (\mu = 0, \dots, 3).$$

Now let us prove the fundamental theorem for Dirac matrices:

² This fact can also be considered to be a consequence of the principle of relativity, since otherwise the different structure of the γ -matrices in the inertial systems of A and B would indicate to A and B in which of the systems they are.

1. For all $\hat{\Gamma}_A$ but the 11 there exists a $\hat{\Gamma}_B$ with

$$\hat{\Gamma}_B \hat{\Gamma}_A \hat{\Gamma}_B = -\hat{\Gamma}_A.$$

We will specify for every $\hat{\Gamma}_A$ a corresponding $\hat{\Gamma}_B$:

A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B	9	4	3	3	4	5	3	2	2	2	2	6	6	7	2

One verifies easily by explicit calculation that (4) holds.

2. The traces of all $\hat{\Gamma}_A$ ($A = 2, \dots, 16$) are zero. From (2) and (4)

$$-\text{tr}(\hat{\Gamma}_A) = \text{tr}(\hat{\Gamma}_B \hat{\Gamma}_A \hat{\Gamma}_B) = \text{tr}(\hat{\Gamma}_B^2 \hat{\Gamma}_A) = +\text{tr}(\hat{\Gamma}_A).$$

3. The $\hat{\Gamma}_A$ are linearly independent. From

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^{16} a_A \hat{\Gamma}_A &= 0 \text{ follows} \\ a_A &= 0 \quad (A = 1, \dots, 16), \\ \text{because if we multiply the sum by } \hat{\Gamma}_B, \\ a_B 1 + \sum_{A \neq B} a_A \hat{\Gamma}_A \hat{\Gamma}_B &= 0 \\ \text{and} \\ 4a_B + \sum_{A \neq B} a_A \text{tr}(\hat{\Gamma}_A \hat{\Gamma}_B) &= 0. \end{aligned}$$

Equation (1) implies that $\hat{\Gamma}_A \hat{\Gamma}_B = \text{const } \hat{\Gamma}_C$, i.e. by means of the algebra a product of two matrices of (1) can be expressed in terms of another such matrix. In the case where $A \neq B$ then $\hat{\Gamma}_C \neq 1$; therefore the sum in (8) vanishes and consequently $a_B = 0$. This conclusion is valid for all $B = 1, \dots, 16$. The linear independence of the matrices $\hat{\Gamma}_A$ is most important and will frequently be used in the following. $\hat{\Gamma}_a$,

4. Each 4×4 matrix can be expanded in terms of the

$$\hat{\chi} = \sum_{A=1}^{16} x_A \hat{\Gamma}_A.$$

This is evident since the 16 linearly independent $\hat{\Gamma}_A$ generate a 16-dimensional space, that is the space of the 4×4 matrices. Then

$$x_B = \frac{1}{4} \text{tr}(\hat{\Gamma}_B \hat{\chi}).$$

5. Each 4×4 matrix which commutes with all $\hat{\Gamma}_A$ is a multiple of 11 (Schur's Lemma).

$$\text{Consider the matrix } \hat{\chi}, \hat{\chi} = x_B \hat{\Gamma}_B + \sum_{A \neq B} x_A \hat{\Gamma}_A,$$

where we have singled out a particular matrix $\hat{\Gamma}_B$ on which we shall focus our attention. We will show that $x_B = 0$. With respect to (4) we first choose $\hat{\Gamma}_C$ such that it fulfills $\hat{\Gamma}_C \hat{\Gamma}_B \hat{\Gamma}_C = -\hat{\Gamma}_B$,

and, since $\hat{\chi}$ commutes with all $\hat{\Gamma}_A$ and therefore also with $\hat{\Gamma}_C$,

3 This argument stems from R.H. Good: Rev. Mod. Phys. 27, 187

$$\begin{aligned}
 \hat{\chi} &= \hat{\Gamma}_C \hat{\chi} \hat{\Gamma}_C & \Rightarrow x_B \hat{\Gamma}_B + \sum_{A \neq B} x_A \hat{\Gamma}_A &= x_B \hat{\Gamma}_C \hat{\Gamma}_B \hat{\Gamma}_C \\
 &+ \sum_{A \neq C} x_A \hat{\Gamma}_C \hat{\Gamma}_A \hat{\Gamma}_C, \\
 x_B \hat{\Gamma}_B + \sum_{A \neq B} x_A \hat{\Gamma}_A &= -x_B \hat{\Gamma}_B + \sum_{A \neq B} (\pm) x_A \hat{\Gamma}_A
 \end{aligned}$$

due to the fact that $\hat{\Gamma}_C$ and $\hat{\Gamma}_A$ commute or anticommute. Next we multiply with $\hat{\Gamma}_B$, take the trace and obtain

$$x_B = -x_B.$$

Thus, $x_B = 0$ as claimed.

6. If γ_μ and γ'_μ are two representations of the Dirac algebra and $\hat{\Gamma}_A, \hat{\Gamma}'_A$ are the corresponding 16-dimensional bases, then

$$\hat{\Gamma}'_A \hat{S} = \hat{S} \hat{\Gamma}_A,$$

where

$$\hat{S} = \sum_{B=1}^{16} \hat{\Gamma}'_B \hat{F} \hat{\Gamma}_B$$

with an arbitrary 4×4 matrix $\hat{F}$. To understand this, consider the matrix

$$\hat{\Gamma}'_A \hat{S} \hat{\Gamma}_A = \sum_{B=1}^{16} \hat{\Gamma}'_A \hat{\Gamma}'_B \hat{F} \hat{\Gamma}_B \hat{\Gamma}_A$$

According to (1) we have $\hat{\Gamma}_B \hat{\Gamma}_A = \varepsilon_C \hat{\Gamma}_C$ with $\varepsilon_C \in \{\pm 1, \pm i\}$. For fixed A , if B runs from 1 to 16 then C takes all values from 1 to 16. This is so, since otherwise we would have

$$\hat{\Gamma}_B \hat{\Gamma}_A = \varepsilon_C \hat{\Gamma}_C$$

$$\text{and } \hat{\Gamma}_D \hat{\Gamma}_A = \delta_C \hat{\Gamma}_C \quad (\hat{\Gamma}_D \neq \hat{\Gamma}_B),$$

leading to $\hat{\Gamma}_B = \varepsilon_C \hat{\Gamma}_C \hat{\Gamma}_A = (\varepsilon_C / \delta_C) \hat{\Gamma}_D$, which contradicts the linear independence of the $\hat{\Gamma}_A$. Since the $\hat{\Gamma}'_A$ are constructed from the γ'_μ in the same way as the $\hat{\Gamma}_A$ from the γ_μ , we also have the relation

$$\hat{\Gamma}'_B \hat{\Gamma}'_A = \varepsilon_C \hat{\Gamma}'_C$$

with the same ε_C . Inverting (20) yields

$$\hat{\Gamma}'_A \hat{\Gamma}'_B = \frac{1}{\varepsilon_C} \hat{\Gamma}'_C,$$

and substituting (21) into (18) then gives

$$\hat{\Gamma}'_A \hat{S} \hat{\Gamma}_A = \sum_{C=1}^{16} \frac{1}{\varepsilon_C} \hat{\Gamma}'_C \hat{F} \varepsilon_C \hat{\Gamma}_C = \sum_{C=1}^{16} \hat{\Gamma}'_C \hat{F} \hat{\Gamma}_C = \hat{S},$$

thus proving the relation (16).

7. The matrix $\hat{F}$ can be chosen such that $\hat{S}$ does not vanish. If $\hat{S} = \mathbf{0}$ did hold for all $\hat{F}$, then by a special choice of $\hat{F}$ such that a single element has the value 1, all the remaining elements being set to zero (i.e. $F_{\nu\sigma} = 1$, all other $F_{\alpha\beta} = 0$), we could infer from (17) that

$$\sum_{B=1}^{16} \left(\hat{\Gamma}'_B \right)_{\mu\nu} \left(\hat{\Gamma}_B \right)_{\sigma\varrho} = 0$$

which must hold for all ν, σ , due to the arbitrary choice of $\hat{F}$. From the relations (23) for the various combinations ν, σ we infer the matrix equation

$$\sum_{B=1}^{16} \left(\hat{\Gamma}'_B \right)_{\mu\nu} \hat{\Gamma}_B = 0.$$

Since $\hat{\Gamma}_B^2 = 1$, the $\left(\hat{\Gamma}'_B \right)_{\mu\nu}$ cannot vanish simultaneously, so that (24) is in contradiction to the linear independence of the $\hat{\Gamma}_B$.

8. The matrix $\hat{F}$ can be chosen such that $\hat{S}$ is not singular. To prove this lemma, we construct

$$\hat{T} = \sum_{B=1}^{16} \hat{\Gamma}_B \hat{G} \hat{\Gamma}'_B$$

with arbitrary $\hat{G}$, specified below. In analogy to point 6) we can show that

$$\hat{\Gamma}_A \hat{T} = \hat{T} \hat{\Gamma}'_A,$$

which, together with (16) leads to

$$\hat{\Gamma}_A \hat{T} \hat{S} = \hat{T} \hat{\Gamma}'_A \hat{S} = \hat{T} \hat{S} \hat{\Gamma}_A,$$

i.e. $(\hat{T} \hat{S})$ commutes with all $\hat{\Gamma}_A$ and is therefore, according to point 5), a multiple of the unit matrix

$$\hat{T} \hat{S} = K \hat{1}$$

Here we choose $\hat{G}$ such that $\hat{T} \neq 0$ (cf. point 7). This enables us to choose $\hat{F}$ in (17) such that $K \neq 0$. This is so because the assumption $K = 0$ for all $\hat{F}$ would, with respect to (28) and (17), result in

$$\sum_{B=1}^{16} \hat{T} \hat{\Gamma}'_B \hat{F} \hat{\Gamma}_B = 0$$

With a choice of $\hat{F}$ in line with point 7), we have, from (29),

$$\sum_{B=1}^{16} \left(\hat{T} \hat{\Gamma}'_B \right)_{\mu\nu} \left(\hat{\Gamma}_B \right)_{\rho\sigma} = 0 \quad \text{or}$$

$$\sum_{B=1}^{16} \left(\hat{T} \hat{\Gamma}'_B \right)_{\mu\nu} \hat{\Gamma}_B = 0$$

The $\left(\hat{T} \hat{\Gamma}'_B \right)_{\mu\nu}$ do not vanish simultaneously since $\hat{T} \neq 0$ and $\left\{ \hat{\Gamma}_B \right\}$ contain the unit matrix

1. Consequently this yields a contradiction to the linear independence of the $\hat{\Gamma}_B$. Thus $\hat{S}$ is not singular, and

$$\gamma'_\mu = \hat{S} \gamma_\mu \hat{S}^{-1},$$

completing part i) of the proof.

ii) Now we will show that in case of

$$\gamma^\dagger_\mu = g_{\mu\mu} \gamma_\mu \quad , \quad \gamma'^\dagger_\mu = g_{\mu\mu} \gamma'_\mu.$$

$\hat{S}$ can be chosen as a unitary operator. To see this let

$$\gamma'_\mu = \hat{V} \gamma_\mu \hat{V}^{-1}, \det \hat{V} = 1, \text{ i.e.}$$

$$\hat{V} = (\det \hat{S})^{-1} \hat{S}.$$

Except for an arbitrary factor $\pm 1, \pm i$, due to $\det \hat{V} = \det(\pm \hat{V}) = \det(\pm i \hat{V}) = 1$, the matrix $\hat{V}$ is completely determined. To assume in contrast to this that

$$\gamma'_\mu = \hat{V}_1 \gamma_\mu \hat{V}_1^{-1} = \hat{V}_2 \gamma_\mu \hat{V}_2^{-1},$$

would lead to

$$\hat{V}_2^{-1} \hat{V}_1 \gamma_\mu = \gamma_\mu \hat{V}_2^{-1} \hat{V}_1$$

and, with respect to point 5) of part i), $\hat{V}_2^{-1} \hat{V}_1 = k \cdot 1$; hence

$$\hat{V}_1 = k \hat{V}_2 \quad , \quad k = \pm 1, \pm i.$$

Therefore, taking the Hermitian conjugate of (34), we obtain

$$\gamma'^\dagger_\mu = \left(\hat{V}^{-1} \right)^\dagger \gamma^\dagger_\mu \hat{V}^\dagger$$

and, by means of (33),

$$\gamma'_\mu = \left(\hat{V}^\dagger \right)^{-1} \gamma_\mu \hat{V}^\dagger,$$

i.e. $\left(\hat{V}^\dagger \right)^{-1}$ likewise fulfills (35) as does $\hat{V}$. From (38), it follows that

$$\left(\hat{V}^\dagger \right)^{-1} = e^{im\pi/2} \hat{V}, \quad \hat{V}^\dagger = e^{-im\pi/2} \hat{V}^{-1},$$

$$\hat{V}^\dagger \hat{V} = e^{-im\pi/2}.$$

Since the diagonal elements of the product of a matrix and its Hermitian conjugated counterpart have the form

$$\left(\hat{V}^\dagger \hat{V}\right)_{ii} = \sum_j \left(\hat{V}^\dagger\right)_{ij} (\hat{V})_{ji} = \sum_j V_{ji}^* V_{ji},$$

and $V_{ji}^* V_{ji}$ is positive definite and real, the factor $e^{-im\pi/2}$ in (42) must be positive definite and real too, implying $m = 0$. Hence,

$$\hat{V}^\dagger \hat{V} = 11$$

which was to be proven.

We will now explicitly construct the transformation between $\psi(x)$ and $\psi'(x')$. This transformation is required to be linear, since both the Dirac equation as well as the Lorentz transformation (3.1) are linear in the space-time coordinates. Hence it must have the form

$$\psi'(x') = \psi'(\hat{a}x) = \hat{S}(\hat{a})\psi(x) = \hat{S}(\hat{a})\psi(\hat{a}^{-1}x') \quad (3.27)$$

where $\hat{a}$ denotes the matrix of the Lorentz transformation a_μ^ν of (3.1) and $\hat{S}(\hat{a})$ is a 4×4 matrix which is a function of the parameters of the Lorentz transformation $\hat{a}$ and operates upon the four components of the bispinor $\psi(x)$. Through $\hat{a}$ it depends on the relative velocities and spatial orientations of the observers A and B . The principle of relativity, stating the invariance of physical laws for all inertial systems, implies the existence of the inverse operator $\hat{S}^{-1}(\hat{a})$ that enables the observer A to construct his wave function $\psi(x)$ from the $\psi'(x')$ of observer B . Therefore, it must hold that

$$\psi(x) = \hat{S}^{-1}(\hat{a})\psi'(x') = \hat{S}^{-1}(\hat{a})\psi'(\hat{a}x) \quad (3.28a)$$

Because of (3.27) we can also write

$$\psi(x) = \hat{S}(\hat{a}^{-1})\psi'(x') = \hat{S}(\hat{a}^{-1})\psi'(\hat{a}x) \quad (3.28b)$$

and, comparing with (3.28a), we find

$$\hat{S}^{-1}(\hat{a}) = \hat{S}(\hat{a}^{-1}). \quad (3.29)$$

Our aim is to construct $\hat{S}$ fulfilling (3.27-29). Starting from the Dirac equation (3.16) of the observer A , i.e.

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_0c\right)\psi(x) = 0$$

and expressing $\psi(x)$ by means of (3.28a) yields

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \hat{S}^{-1}(\hat{a}) \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_0c\hat{S}^{-1}(\hat{a})\right)\psi'(x') = 0$$

Multiplication with $\hat{S}(\hat{a})$ from the left and using $\hat{S}(\hat{a})\hat{S}^{-1}(\hat{a}) = 11$ then gives

$$\left(i\hbar\hat{S}(\hat{a})\gamma^\mu \hat{S}^{-1}(\hat{a}) \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_0c\right)\psi'(x') = 0 \quad (3.30)$$

With regard to (3.1) we transform $\partial/\partial x^\mu$ to the coordinates of the system B ,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} = a_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} \quad (3.31)$$

so that (3.30) becomes

$$\left[i\hbar\left(\hat{S}(\hat{a})\gamma^\mu \hat{S}^{-1}(\hat{a})a_\mu^\nu\right) \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} - m_0c\right]\psi'(x') = 0 \quad (3.32)$$

This has to be identical with the Dirac equation (3.25), since form-invariance of the equations of motion is required, i.e. $\hat{S}(\hat{a})$ must have the property

$$\hat{S}(\hat{a})\gamma^\mu\hat{S}^{-1}(\hat{a})a_\mu^\nu = \gamma^\nu \quad (3.33)$$

or equivalently

$$\hat{S}(\hat{a})\gamma^\nu\hat{S}^{-1}(\hat{a}) = a_\mu^\nu\gamma^\mu \quad (3.34)$$

This is the fundamental relation determining the operator $\hat{S}$: To find $\hat{S}$ means solving (3.34) which holds for discrete as well as continuous Lorentz transformations since the above deduction does not depend on $\det a_\mu^\nu = \pm 1$. Once we have shown that there exists a solution $\hat{S}(\hat{a})$ of (3.34) and have found it, we will have proven the covariance of the Dirac equation. We may already now specify more precisely the definition of a spinor which, we have previously introduced somewhat inaccurately as a four-component column vector: In general, a wave function is termed a four-component Lorentz spinor if it transforms according to (3.27) by means of the fundamental relation (3.34). Such a four-component spinor is also frequently called a bispinor, since it consists of two two-component spinors, known to us from the Pauli equation ⁴.

In determining $\hat{S}(\hat{a})$ we expect to deal with novel features which are not present in ordinary tensor calculus, since bilinear forms of ψ , e.g. the current four-vector of (2.18)

$$\{c\rho, j^k\} \quad \text{with} \quad \rho = \psi^\dagger\psi \quad \text{and} \quad j^k = \psi^\dagger\alpha^k\psi \quad ; \quad k = 1, 2, 3,$$

have to transform like four-vectors; we will now discuss these properties. As we have already learned, in general it is simplest to generate a continuous group transformation by constructing the group operators for infinitesimal transformations and then composing operators for finite rotations, translations, etc., by connecting the infinitesimal operators in series. Following the same pattern in our case of Lorentz transformations, we first construct the operator $\hat{S}(\hat{a})$ for infinitesimal proper Lorentz transformations given by

$$a_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + \Delta\omega_\mu^\nu \quad (3.35)$$

with

$$\Delta\omega^{\nu\mu} = -\Delta\omega^{\mu\nu}. \quad (3.36a)$$

The antisymmetric form (3.36) follows from (3.4) by neglecting quadratic terms [of the order $(\Delta\omega)^2$]:

$$\begin{aligned} a_\nu^\mu a_\mu^\sigma &= \delta_\nu^\sigma = (\delta_\nu^\mu + \Delta\omega_\nu^\mu) (\delta_\mu^\sigma + \Delta\omega_\mu^\sigma) \\ &\approx \delta_\nu^\mu \delta_\mu^\sigma + \delta_\nu^\mu \Delta\omega_\mu^\sigma + \delta_\mu^\sigma \Delta\omega_\nu^\mu = \delta_\nu^\sigma + \Delta\omega_\nu^\sigma + \Delta\omega_\sigma^\nu \end{aligned} \quad (3.36b)$$

Hence,

$$\Delta\omega_\nu^\sigma + \Delta\omega_\sigma^\nu = 0, \quad \text{or} \quad g^{\mu\nu} (\Delta\omega_\nu^\sigma + \Delta\omega_\sigma^\nu) = 0 = \Delta\omega^{\mu\sigma} + \Delta\omega^{\sigma\mu}$$

Consequently, there are six independent non-vanishing parameters $\Delta\omega^{\mu\nu}$. Each of these group-parameters (rotation angle in the four-dimensional Minkowski space) generates an infinitesimal Lorentz transformation. We will now give two examples pointing out the physical significance of the $\Delta\omega^{\mu\nu}$:

a) $\Delta\omega^{10} = \Delta\omega^{01} \equiv -\Delta\beta \neq 0$, all other $\Delta\omega^{\mu\nu} = 0$.

This implies that

$$\Delta\omega_1^0 = g_{1\sigma}\Delta\omega^{\sigma 0} = g_{11}\Delta\omega^{10} = -\Delta\omega^{10} = +\Delta\beta = +\Delta\omega^{01} = \Delta\omega_0^1 = -\Delta\omega_1^0$$

and

$$\Delta\omega_i^1 = g_{i\sigma}\Delta\omega^{\sigma 1} = 0 \text{ for all } i = 1, 2, 3.$$

According to (3.1) we then find

$$\begin{aligned} (x')^\nu &= (\delta_\mu^\nu + \Delta\omega_0^1\delta_1^\nu\delta_\mu^0 + \Delta\omega_1^0\delta_0^\nu\delta_\mu^1) x^\mu \\ &= (\delta_\mu^\nu - \Delta\beta\delta_1^\nu\delta_\mu^0 - \Delta\beta\delta_0^\nu\delta_\mu^1) x^\mu \end{aligned} \quad (3.37a)$$

or, explicitly,

$$\begin{aligned} (x')^0 &= x^0 - \Delta\beta x^1 = x^0 - \frac{\Delta v}{c} x^1, \\ (x')^1 &= -\Delta\beta x^0 + x^1 = -\frac{\Delta v}{c} x^0 + x^1, \\ (x')^2 &= x^2, \\ (x')^3 &= x^3. \end{aligned} \quad (3.37b)$$

Therefore the inertial system ('') of the observer B moves along the positive x^1 axis relative to the system of observer A according to

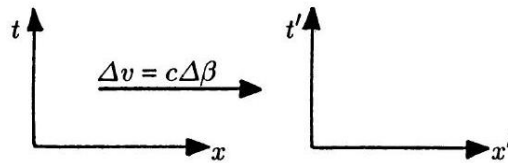
$$(x')^1 = 0 \rightarrow \frac{x^1}{x^0} = \frac{\Delta v}{c} = \Delta\beta.$$

This means that case a) describes an (infinitesimal) Lorentz transformation for a motion parallel to the x' axis with a velocity $\Delta v = \Delta\beta c$, (see Fig. 3.3).

b) $\Delta\omega_2^1 = -\Delta\omega^{12} = \Delta\omega^{21} \equiv \Delta\varphi$, all other $\Delta\omega^{\mu\nu} = 0$.

According to (3.1),

$$(x')^\nu = [\delta_\mu^\nu + \delta_1^\nu\delta_\mu^2\Delta\varphi + \delta_2^\nu\delta_\mu^1(-\Delta\varphi)] x^\mu \quad (3.38a)$$



or explicitly

Fig. 3.3. The x' system moves relative to the x system with velocity $\Delta v = c\Delta\beta$

$$\begin{aligned} (x')^0 &= x^0, \\ (x')^1 &= x^1 + \Delta\varphi x^2, \\ (x')^2 &= -\Delta\varphi x^1 + x^2, \\ (x')^3 &= x^3. \end{aligned} \quad (3.38b)$$

4 See Vol. 1 of this series, Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

5 See Vol. 2 of this series, Quantum Mechanics - Symmetries (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

Clearly this transformation generates an infinitesimal rotation around the z axis by an angle $\Delta\varphi$, (Fig. 3.4). For finite rotations it would read

$$\begin{aligned}(x')^1 &= x^1 \cos \varphi + x^2 \sin \varphi \\ (x')^2 &= -x^1 \sin \varphi + x^2 \cos \varphi\end{aligned}\tag{3.38c}$$

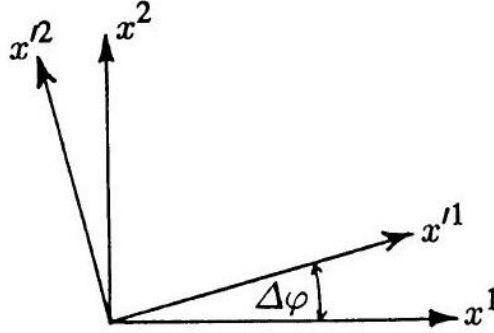


Fig. 3.4. An infinitesimal rotation of the coordinate system around the z axis

3.2 Construction of the $\hat{S}$ Operator for Infinitesimal Lorentz Transformations

We now return to our original aim of determining the operator $\hat{S}(\hat{a}) = \hat{S}(\Delta\omega^{\mu\nu})$, by expanding $\hat{S}$ in powers of $\Delta\omega^{\mu\nu}$ and keeping only the linear terms of the infinitesimal generators $\Delta\omega^{\mu\nu}$; hence we write

$$\begin{aligned}\hat{S}(\Delta\omega^{\mu\nu}) &= 11 - \frac{i}{4} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu}, \\ \hat{S}^{-1}(\Delta\omega^{\mu\nu}) &= 11 + \frac{i}{4} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu}, \quad (\hat{\sigma}_{\mu\nu} = -\hat{\sigma}_{\nu\mu}).\end{aligned}\tag{3.39}$$

The factors $i/4$ in the second term of the rhs are chosen such that the six coefficients $\hat{\sigma}_{\mu\nu}$ can be expressed in a convenient form, as will become clear later. Each of the six coefficients $\hat{\sigma}_{\mu\nu}$ is a 4×4 matrix, which is indicated by the operator sign "! Of course, the same holds for the operator $\hat{S}$ and the unit matrix 11. By finding the $\hat{\sigma}_{\mu\nu}$, we can determine the operator $\hat{S}$. The second relation (3.39) results from (3.29), which means that the inverse operator is obtained by substituting $\Delta\omega_\mu^\nu \rightarrow -\Delta\omega_\mu^\nu$. Inserting (3.39) and (3.35) into (3.34) which determines $\hat{S}$, we find

$$(\delta_\mu^\nu + \Delta\omega_\mu^\nu) \gamma^\mu = \left(11 - \frac{i}{4} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta} \right) \gamma^\mu \left(11 + \frac{i}{4} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta} \right)$$

or, omitting the quadratic terms in $\Delta\omega^{\mu\nu}$,

$$\Delta\omega_\mu^\nu \gamma^\mu = -\frac{i}{4} \Delta\omega^{\alpha\beta} (\hat{\sigma}_{\alpha\beta} \gamma^\nu - \gamma^\nu \hat{\sigma}_{\alpha\beta})\tag{3.40}$$

Taking into account the antisymmetry (3.36) $\Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega^{\nu\mu}$, the lhs of (3.40) becomes

$$\begin{aligned}-\frac{i}{4} \Delta\omega^{\alpha\beta} (\hat{\sigma}_{\alpha\beta} \gamma^\nu - \gamma^\nu \hat{\sigma}_{\alpha\beta}) &= g_\sigma^\nu \Delta\omega_\mu^\sigma \gamma^\mu = \Delta\omega_\mu^\sigma g_\sigma^\nu \gamma^\mu \\ &= \Delta\omega_\beta^\alpha (g_\alpha^\nu \gamma^\beta) = \Delta\omega^{\beta\alpha} (g_\alpha^\nu \gamma_\beta) \\ &= \frac{1}{2} \Delta\omega^{\beta\alpha} (g_\alpha^\nu \gamma_\beta - g_\beta^\nu \gamma_\alpha) \\ &= -\frac{1}{2} \Delta\omega^{\alpha\beta} (g_\alpha^\nu \gamma_\beta - g_\beta^\nu \gamma_\alpha).\end{aligned}$$

Hence, we end up with the relation

$$-2i(g_\alpha^\nu \gamma_\beta - g_\beta^\nu \gamma_\alpha) = [\hat{\sigma}_{\alpha\beta}, \gamma^\nu]_- . \quad (3.41)$$

The problem of constructing $\hat{S}$ according to the fundamental relation (3.34) is now reduced to that of determining the six matrices $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$. Since $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$ has to be antisymmetric in both indices, α and β , it is natural to try an antisymmetric product of two matrices:

$$\hat{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]_- . \quad (3.42)$$

This form fulfills the requirement (3.41), which will be proven in the following exercise by taking into consideration the commutation relations (3.11).

3.2 Proof of the Coefficients $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$ for the Infinitesimal Lorentz Transformation

Problem. Prove that the $\hat{\sigma}_{\alpha\beta} = i[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]_- / 2$ fulfill (3.41),

$$[\gamma^\nu, \hat{\sigma}_{\alpha\beta}]_- = +2i(g_\alpha^\nu \gamma_\beta - g_\beta^\nu \gamma_\alpha).$$

Solution

Inserting the expression for $\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$ in (3.41), we get

$$\begin{aligned} [\gamma^\nu, \hat{\sigma}_{\alpha\beta}]_- &= \frac{i}{2} [\gamma^\nu, [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]_-]_- \\ &= \frac{i}{2} \{ [\gamma^\nu, \gamma_\alpha \gamma_\beta]_- - [\gamma^\nu, \gamma_\beta \gamma_\alpha]_- \} . \end{aligned}$$

By means of the algebra (3.11) it then follows that

$$\begin{aligned} [\gamma^\nu, \hat{\sigma}_{\alpha\beta}]_- &= \frac{i}{2} \{ 2[\gamma^\nu, \gamma_\alpha \gamma_\beta]_- - 2[\gamma^\nu, \gamma_\beta \gamma_\alpha]_- \} \\ &= i[\gamma^\nu, \gamma_\alpha \gamma_\beta]_- . \end{aligned}$$

Furthermore we have

$$\begin{aligned} i[\gamma^\nu, \gamma_\alpha \gamma_\beta]_- &= i\{\gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta - 2g_\alpha^\nu \gamma_\beta + \gamma_\alpha \gamma^\nu \gamma_\beta\} \\ &= i\{\gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta - 2g_\beta^\nu \gamma_\alpha + 2g_\alpha^\nu \gamma_\beta - \gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta\} \\ &= 2i(g_\alpha^\nu \gamma_\beta - g_\beta^\nu \gamma_\alpha) , \end{aligned}$$

which is the required form.

According to (3.39), the operator $\hat{S}(\Delta\omega^{\mu\nu})$ for infinitesimal proper Lorentz transformations is now

$$\hat{S}(\Delta\omega^{\mu\nu}) = 11 - \frac{i}{4} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu} = 11 + \frac{1}{8} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]_- \Delta\omega^{\mu\nu} . \quad (3.43)$$

The next step is to construct $\hat{S}(\hat{a})$ for finite proper Lorentz transformations by successive application of the infinitesimal operators (3.43). To construct the finite Lorentz transformation of (3.1) from the infinitesimal one (3.35), we write

$$\Delta\omega_\mu^\nu = \Delta\omega \left(\hat{I}_n \right)_\mu^\nu . \quad (3.44)$$

Here $\Delta\omega$ is an infinitesimal parameter of the Lorentz group [infinitesimal (generalized) rotation angle] around an axis in the n direction. $\left(\hat{I}_n \right)_\mu^\nu$ is the 4×4 matrix (in space and

time) for a unit Lorentz rotation around the n axis. For the Lorentz rotation (3.37), which - as we already know - corresponds to a Lorentz transformation along the x axis with velocity $\Delta v = c\Delta\beta$, we find

$$a_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + \Delta\omega_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + \Delta\omega \left(\hat{I}_x\right)_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu - \Delta\beta \left(\delta_1^\nu \delta_\mu^0 + \delta_0^\nu \delta_\mu^1\right) \quad (3.45)$$

With $\Delta\omega = \Delta\beta$,

$$\left(\hat{I}_x\right)_\mu^\nu = -\left(\delta_1^\nu \delta_\mu^0 + \delta_0^\nu \delta_\mu^1\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

that only the matrix elements

$$\left(\hat{I}_x\right)_1^0 = \left(\hat{I}_x\right)_0^1 = -\left(\hat{I}_x\right)^{01} = +\left(\hat{I}_x\right)^{10} = -1$$

are different from zero. Besides, we can easily calculate the relations

$$\left(\hat{I}_x\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{aligned} \left(\hat{I}_x\right)^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{I}_x. \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.3 Finite Proper Lorentz Transformations

The algebraic properties (3.47) for $\hat{I}_x$ are of value, because we can use them, following (3.1) and (3.45), to construct the finite proper Lorentz transformations. Indeed we get by successive application of the infinitesimal Lorentz transformations

$$\begin{aligned} (x')^\nu &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(11 + \frac{\omega}{N} \hat{I}_x\right)_{\nu_1}^\nu \left(11 + \frac{\omega}{N} \hat{I}_x\right)_{\nu_2}^{\nu_1} \dots x^{\nu_N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(11 + \frac{\omega}{N} \hat{I}_x\right)^N \right]_\mu^\nu x^\mu \end{aligned}$$

(The last summation index ν_N of the matrix multiplication has been renamed μ in the last step.)

$$\begin{aligned}
 &= \left(e^{\omega \hat{I}_x} \right)_\mu^\nu x^\mu \\
 &= \left(\cosh \left(\omega \hat{I}_x \right) + \sinh \left(\omega \hat{I}_x \right) \right)_\mu^\nu x^\mu \\
 &= \left[\left(11 + \frac{(\omega \hat{I}_x)^2}{2!} + \frac{(\omega \hat{I}_x)^4}{4!} + \dots \right) + \left(\frac{\omega \hat{I}_x}{1!} + \frac{(\omega \hat{I}_x)^3}{3!} + \dots \right) \right]_\mu^\nu x^\mu \\
 &= \left[\left(11 + \frac{\omega^2}{2!} (\hat{I}_x)^2 + \frac{\omega^4}{4!} (\hat{I}_x)^2 + \dots \right) + \left(\frac{\omega}{1!} + \frac{\omega^3}{3!} + \dots \right) \hat{I}_x \right]_\mu^\nu x^\mu \\
 &= \left[1 - (\hat{I}_x)^2 + (\cosh \omega) (\hat{I}_x)^2 + (\sinh \omega) \hat{I}_x \right]_\mu^\nu x^\mu, \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

or, explicitly,

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \omega & -\sinh \omega & 0 & 0 \\ -\sinh \omega & \cosh \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{3.49a}$$

or

$$\begin{aligned}
 x'^0 &= x^0 \cosh \omega - x^1 \sinh \omega = \cosh \omega (x^0 - x^1 \tanh \omega), \\
 x'^1 &= -x^0 \sinh \omega + x^1 \cosh \omega = \cosh \omega (x^1 - x^0 \tanh \omega), \\
 x'^2 &= x^2, \\
 x'^3 &= x^3. \tag{3.49b}
 \end{aligned}$$

Now the finite Lorentz rotation angle ω can easily be related to the relative velocity $v_x = c\beta_x$ of both inertial systems. Let us observe the origin of the x' system and its motion from the x system,

$$x'^1 = 0 = \cosh \omega (x^1 - x^0 \tanh \omega).$$

From this we can deduce the velocity of the x' system along the x axis of the x system.

$$\frac{x^1}{x^0} = \frac{x^1}{ct} = \frac{v_x}{c} = \tanh \omega = \beta \tag{3.50a}$$

and so by use of the relation $\cosh^2 \omega - \sinh^2 \omega = 1$ we get

$$\cosh \omega = \frac{\cosh \omega}{\sqrt{\cosh^2 \omega - \sinh^2 \omega}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \omega}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{3.50b}$$

so that (3.49b) results in the known Lorentz transformations

$$x'^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3. \tag{3.51}$$

This procedure to construct Lorentz transformations can be generalized to motion in an arbitrary direction or to arbitrary spatial rotations. There exist six different matrices (generators) $\left(\hat{I}_n \right)_\mu^\nu$ corresponding to the six independent Lorentz transformations. They represent the four-dimensional generalization of the generators of spatial rotations known from nonrelativistic quantum mechanics. ⁶ We refer to Chap. 16 for a deeper discussion of the group theoretical structure of the Lorentz transformations.

12.5.4 Lorentz-Covariance of the Dirac Equation 2

3.4 The $\hat{S}$ Operator for Proper Lorentz Transformations

Now we can construct the spinor transformation operator $\hat{S}(\hat{\alpha})$ for a finite "rotation angle". We start from the infinitesimal transformation (3.39) with the rotation angle (3.44) around the n axis and apply N of these infinitesimal transformations.

$$\begin{aligned}\psi'(x') &= \hat{S}(\hat{\alpha})\psi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(11 - \frac{i}{4} \frac{\omega}{N} \hat{\sigma}_{\mu\nu} (\hat{I}_n)^{\mu\nu} \right)^N \psi(x) \\ &= e^{-(i/4)\omega \hat{\sigma}_{\mu\nu} (\hat{I}_n)^{\mu\nu}} \psi(x)\end{aligned}\quad (3.52)$$

In particular for the rotation (3.46) which corresponds to a Lorentz transformation along the x axis we get

$$\begin{aligned}\psi'(x') &= \exp \left\{ -(i/4)\omega \left[\hat{\sigma}_{01} (\hat{I}_x)^{01} + \hat{\sigma}_{10} (\hat{I}_x)^{10} \right] \right\} \psi(x) \\ &= \exp \{ -(i/4)\omega [\hat{\sigma}_{01}(+1) + \hat{\sigma}_{10}(-1)] \} \psi(x) \\ &= \exp [-(i/2)\omega \hat{\sigma}_{01}] \psi(x)\end{aligned}\quad (3.53)$$

because following (3.42) we have $\hat{\sigma}_{01} = -\hat{\sigma}_{10}$ and following (3.46), $(\hat{I}_x)^{01} = 1$ and $(\hat{I}_x)^{10} = -1$. Analogously we can write for a rotation around the z axis of angle φ (to avoid confusion we use the notation $\hat{I}_x, \hat{I}_y, \hat{I}_z$ for the Lorentz transformation into a moving system and $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$ for spatial rotations, according to (3.28) and (3.44),

$$\Delta\omega_\mu^\nu = \Delta\varphi (\hat{I}_3)^\nu{}_\mu, \quad (3.54)$$

where

$$(\hat{I}_3)^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Thus only the elements $(\hat{I}_3)^{12} = -(\hat{I}_3)^{21}$ are non-zero, in which case we get

$$\begin{aligned}\psi'(x') &= \exp \left[-(i/4)\varphi \hat{\sigma}_{\mu\nu} (\hat{I}_3)^{\mu\nu} \right] \psi(x) \\ &= \exp \left[-(i/4)\varphi \left(\hat{\sigma}_{12} (\hat{I}_3)^{12} + \hat{\sigma}_{21} (\hat{I}_3)^{21} \right) \right] \psi(x) \\ &= \exp [(i/4)\varphi (\hat{\sigma}_{12}(-1) + \hat{\sigma}_{21}(+1))] \psi(x) \\ &= \exp [(i/2)\varphi \hat{\sigma}_{12}] \psi(x) = \exp [(i/2)\varphi \hat{\sigma}^{12}] \psi(x),\end{aligned}\quad (3.56)$$

corresponding to (3.52). Using the explicit representations (3.13) we obtain, according to (3.42),

⁶ See the discussion of angular momentum operators in Vol. 2 of this series, Quantum Mechanics - Symmetries (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^{12} &= \frac{i}{2} [\gamma^1, \gamma^2]_- \\
&= \frac{i}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^1 \\ -\hat{\sigma}^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^2 \\ -\hat{\sigma}^2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^2 \\ -\hat{\sigma}^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^1 \\ -\hat{\sigma}^1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{i}{2} \left[\begin{pmatrix} -\hat{\sigma}^1 \hat{\sigma}^2 & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}^1 \hat{\sigma}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\hat{\sigma}^2 \hat{\sigma}^1 & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}^2 \hat{\sigma}^1 \end{pmatrix} \right] \\
&= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\hat{\sigma}^1 \hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2 \hat{\sigma}^1 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^1 \hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2 \hat{\sigma}^1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 2i\hat{\sigma}^3 & 0 \\ 0 & 2i\hat{\sigma}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^3 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^3 \end{pmatrix} = \hat{\Sigma}_3.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Here $\hat{\sigma}^i$ are the well-known 2×2 Pauli matrices, in particular

$$\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

We recognize the similarity between the spinor transformation (3.56) and the rotation of the two-component Pauli spinor,

$$\varphi'(x') = e^{(i/2)\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \varphi(x), \tag{3.58}$$

with which we are already acquainted.⁷ We can call the $\omega^{\mu\nu}$ the covariant angular variables, because they arise in a similar way as did the components of the axial rotation vector $\boldsymbol{\omega}$ for the spatial three-dimensional rotations. The existence of half-angles in the transformation law (3.56) is a result of the peculiarity of the spinor-rotation laws. A spinor is first transformed into itself by a rotation of 4π , not 2π , as one might expect. Therefore, physically observable quantities have to be bilinear in the spinors $\psi(x)$ in spinor theory (Dirac theory), and hence they have to be of even order in the fields $\psi(x)$. Only in this case do observables become identical under a rotation of 2π , a property of observables we know from experience.

Following (3.52) and (3.56) the operator $\hat{S}_R$ for spatial rotations of spinors is given by

$$\hat{S}_R(\omega_{ij}) = \exp \left[-(i/4) \hat{\sigma}_{ij} \omega^{ij} \right], \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{3.59}$$

Note that in the previous case⁷ we subsequently used active rotations, whereas for the Lorentz transformations we have used passive rotations. It is unitary, because the $\hat{\sigma}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) are Hermitian and

$$\hat{S}_R^\dagger = \exp \left[(i/4) \hat{\sigma}_{ij}^\dagger \omega^{ij} \right] = \exp \left[(i/4) \hat{\sigma}_{ij} \omega^{ij} \right] = \hat{S}_R^{-1}. \tag{3.60}$$

For proper Lorentz transformations (e.g. transformation into a moving frame) this does not hold. For example, for a Lorentz transformation into a moving inertial system along the x axis (3.53) we find that

$$\hat{S}_L = e^{-(i/2)\omega \hat{\sigma}_{01}} = e^{+(\omega/2)\hat{\alpha}_1} = \hat{S}_L^\dagger \neq \hat{S}_L^{-1} \text{ L}, \tag{3.61}$$

where we have followed from (3.42)

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{01} &= \frac{i}{2} (\gamma_0 \gamma_1 - \gamma_1 \gamma_0) = \frac{i}{2} (\hat{\beta} \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_1 \hat{\beta}) \\
&= \frac{i}{2} (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_1) = i\hat{\alpha}_1
\end{aligned}$$

In the following Exercise 3.3 we shall prove that in this case

$$\hat{S}^{-1} L = \gamma_0 \hat{S}_L^\dagger \gamma_0 \quad (3.62)$$

holds and further that, because of

$$[\gamma_0, \hat{\sigma}_{ij}]_- = 0,$$

we can combine (3.60) and (3.62). Hence, for any Lorentz transformation (i.e. for proper Lorentz transformations and for spatial rotations) we can write

$$\hat{S}^{-1} = \gamma_0 \hat{S}^\dagger \gamma_0. \quad (3.63)$$

3.3 Calculation of the Inverse Spinor Transformation Operators

Problem. Show that for $\hat{S} = \exp \left(-\frac{1}{4} \omega \hat{\sigma}_{\mu\nu} \left(\hat{I}_n \right)^{\mu\nu} \right)$ the inverse operator is given by:
 $\hat{S}^{-1} = \gamma_0 \hat{S}^\dagger \gamma_0.$

Solution

We prove (1) separately for transformations on a moving coordinate system and for spatial rotations.

(i) Spatial rotations: For spatial rotations the time coordinate remains unchanged. So the components $\hat{I}^{0\mu}, \hat{I}^{0\nu}$ of the corresponding generators vanish identically. Thus we can write

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \exp \left(-\frac{1}{4} \omega^{ij} \hat{\sigma}_{ij} \right), \\ \hat{S}^\dagger &= \exp \left(\frac{1}{4} \omega^{ij} \hat{\sigma}_{ij}^\dagger \right) = \exp \left(\frac{1}{4} \omega^{ij} \hat{\sigma}_{ij} \right), \end{aligned}$$

because the $\hat{\sigma}_{ij}$ are Hermitian and

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij}^\dagger &= -\frac{i}{2} \left\{ (\gamma_i \gamma_j)^\dagger - (\gamma_j \gamma_i)^\dagger \right\} \\ &= -\frac{i}{2} \{ \gamma_j \gamma_i - \gamma_i \gamma_j \} = \hat{\sigma}_{ij}. \end{aligned} \quad (3)$$

According to (3.41) γ_0 commutes with $\hat{\sigma}_{ij}$ and thus γ_0 commutes with $\hat{S}^\dagger$ to 0. Hence we get

$$\gamma_0 \hat{S}^\dagger \gamma_0 = \hat{S}^\dagger = \hat{S}^{-1}.$$

(ii) Transformation onto a moving coordinate system: First we rotate the coordinate system such that the boost coincides with the x direction. For this transformation we have

$$\hat{S} = \exp \left(-\frac{\mathbf{i}}{2} \omega \hat{\sigma}_{01} \right)$$

[see (3.61)] and

$$\hat{S}^\dagger = \exp \left(\frac{\mathbf{i}}{2} \omega \hat{\sigma}_{01}^\dagger \right) = \exp \left(-\frac{\mathbf{i}}{2} \omega \hat{\sigma}_{01} \right) = \hat{S} \quad (5)$$

because

7 See Vol. 2 of this series, Quantum Mechanics - Symmetries (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{01}^\dagger &= -\frac{i}{2} \left\{ (\gamma_0 \gamma_1)^\dagger - (\gamma_1 \gamma_0)^\dagger \right\} \\
&= \frac{i}{2} (\gamma_1 \gamma_0 - \gamma_0 \gamma_1) = -\hat{\sigma}_{01}.
\end{aligned} \tag{6}$$

From

$$\begin{aligned}
\gamma_0 \hat{\sigma}_{01} &= \frac{i}{2} (\gamma_0 \gamma_0 \gamma_1 - \gamma_0 \gamma_1 \gamma_0) \\
&= \frac{i}{2} (\gamma_1 \gamma_0 \gamma_0 - \gamma_0 \gamma_1 \gamma_0) \\
&= \hat{\sigma}_{10} \gamma_0 = -\hat{\sigma}_{01} \gamma_0
\end{aligned} \tag{7}$$

we get

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 \hat{S}^\dagger \gamma_0 \\
&= \gamma_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{2} \omega \hat{\sigma}_{01} \right)^n \right] \gamma_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_0 \left(-\frac{i}{2} \omega \hat{\sigma}_{01} \right)^n \gamma_0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\gamma_0 \left(-\frac{i}{2} \omega \hat{\sigma}_{01} \right) \gamma_0 \gamma_0 \left(-\frac{i}{2} \omega \hat{\sigma}_{01} \right) \gamma_0 \dots \gamma_0 \left(-\frac{i}{2} \omega \hat{\sigma}_{01} \right) \gamma_0}_{n \text{ - times}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(+\frac{i}{2} \omega \hat{\sigma}_{01} \right)^n = \exp \left(\frac{i}{2} \omega \hat{\sigma}_{01} \right) = \hat{S}^{-1}.
\end{aligned}$$

Thus (1) holds for all Lorentz transformations $\hat{S}$.

3.5 The Four-Current Density

Next we prove the covariance of the continuity equation (2.16) and (2.17). According to (2.18) the probability current density reads

$$\{j^\mu\} = \{j^0, \mathbf{j}\} = \{c\psi^\dagger \psi, c\psi^\dagger \hat{\boldsymbol{\alpha}} \psi\} = \{c\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi\},$$

i.e.

$$j_\mu(x) = c\psi^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^\mu \psi(x). \tag{3.64}$$

This current density transforms under the Lorentz transformation (3.1) as

$$\begin{aligned}
j'^\mu(x') &= c\psi'^\dagger(x') \gamma^0 \gamma^\mu \psi'(x') \\
&= c\psi^\dagger(x) \hat{S}^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \hat{S} \psi(x) \\
&= c\psi^\dagger(x) \gamma^0 \hat{S}^{-1} \gamma^\mu \hat{S} \psi(x) \quad [\text{because of (3.63)}] \\
&= ca^\mu{}_\nu \psi^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^\nu \psi(x) \quad [\text{because of (3.33)}] \\
&= a^\mu{}_\nu j^\nu(x)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

and is thus recognized as a four-vector. This is the reason for calling $j^\mu(x)$ the fourcurrent density. The continuity equation (2.17) can now be written in Lorentz-invariant form

$$\frac{\partial j^\mu(x)}{\partial x^\mu} = 0 \tag{3.66}$$

By this we have explicitly proven that the probability-density

$$j^0(x) = c\rho(x) = c\psi^\dagger\psi(x)$$

transforms like the time-component of a (conserved) four-vector. Thus an invariant probability is guaranteed, because it holds for the Lorentz system of observer A

$$\frac{\partial}{\partial t} \int j^0(x) d^3x = 0 \quad \Rightarrow \quad \int j^0(x) d^3x = 1$$

and for observer B

$$\frac{\partial}{\partial t'} \int j'^0(x') d^3x' = 0 \quad \Rightarrow \quad \int j'^0(x') d^3x' = 1$$

For further considerations it is useful to introduce the short-hand notation

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad (3.67)$$

for the combination $\psi^\dagger \gamma^0$, which occurs very often. $\bar{\psi}$ is called the adjoint spinor and is converted by Lorentz transformations as [using (3.63)]

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x') &= \psi'^\dagger(x') \gamma^0 = (\hat{S}\Psi(x))^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger(x) \hat{S}^\dagger \gamma^0 \\ &= \psi^\dagger(x) \gamma^0 \hat{S}^{-1} = \bar{\psi}(x) \hat{S}^{-1} \end{aligned} \quad (3.68)$$

12.5.5 Spinors under Spatial Reflection

Theory

Next we explore the improper Lorentz transformations of spatial reflections, which are given by

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= -\mathbf{x}, \\ t' &= t, \end{aligned} \quad (4.1)$$

with a corresponding transformation matrix

$$a_\mu^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

In this case the Dirac equation should be covariant too, because (4.1) is nothing other than a special case of the general Lorentz transformation (3.1). All of our considerations from Chap. 3 can therefore be used again here, except for those which are based on infinitesimal transformations. This is a consequence of the fact that a spatial reflection cannot be generated by means of infinitesimal rotations acting on the identity element. Let us call the operator of the spinor transformation $\hat{P}$ (for parity). For $\hat{S} = \hat{P}$ holds also the defining equation (3.34) which now reads with (4.2) as

$$\begin{aligned}
a^\nu{}_\mu \gamma^\mu &= \hat{P} \gamma^\nu \hat{P}^{-1} \quad \text{or} \\
a^\sigma{}_\nu a^\nu{}_\mu \gamma^\mu &= \hat{P} a^\sigma{}_\nu \gamma^\nu \hat{P}^{-1} \\
&\Leftrightarrow \delta^\sigma{}_\mu \gamma^\mu = \hat{P} \sum_{\nu=0}^3 g^{\sigma\nu} \gamma^\nu \hat{P}^{-1} \\
&\Leftrightarrow \hat{P}^{-1} \gamma^\sigma \hat{P} = g^{\sigma\sigma} \gamma^\sigma.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Notice that on the rhs there is no summation over σ , because conventionally summation is only defined over identical indices occurring simultaneously in the top and bottom of an expression. Equation (4.3) has the simple solution

$$\hat{P} = e^{i\varphi} \gamma^0, \quad \hat{P}^{-1} = e^{-i\varphi} \gamma^0, \tag{4.4}$$

where for the time being φ is an unobservable arbitrary phase. It can e.g. be chosen in the following way. In analogy to the proper Lorentz transformations for which a rotation of 4π reproduces the original spinor, we postulate that four space-inversions will reproduce the spinor, i.e.

$$\hat{P}^4 \psi = \psi = e^{i4\varphi} (\gamma^0)^4 \psi = e^{i4\varphi} \psi \tag{4.5}$$

This implies that

$$(e^{i\varphi})^4 = 1$$

and thus

$$e^{i\varphi} = \pm 1, \pm i \tag{4.6}$$

The operator $\hat{P}$ given by (4.4) is unitary,

$$\hat{P}^{-1} = e^{-i\varphi} \gamma^0 = \hat{P}^\dagger, \tag{4.7}$$

and, as will be seen shortly, also fulfills

$$\hat{P}^{-1} = \gamma^0 \hat{P}^\dagger \gamma^0 \tag{4.8}$$

which is analogous to (3.63). We are now able to write down explicitly the transformation of the spinor under space inversion, [cf. (3.27)]

$$\begin{aligned}
\psi'(x') &= \psi'(\mathbf{x}', t') = \psi'(-x, t) = \hat{P} \psi(x) = e^{i\varphi} \gamma^0 \psi(\mathbf{x}, t) \\
&= \hat{P} \psi(-x', t')
\end{aligned} \tag{4.9}$$

In the nonrelativistic limit

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

and thus ϕ is an eigenvector of $\hat{P}$. For an electron at rest [see (2.71)],

$$\begin{aligned}
\hat{P}\psi^{(1)} &= e^{i\varphi}\psi^{(1)} \\
\hat{P}\psi^{(2)} &= e^{i\varphi}\psi^{(2)} \\
\hat{P}\psi^{(3)} &= -e^{i\varphi}\psi^{(3)} \\
\hat{P}\psi^{(4)} &= -e^{i\varphi}\psi^{(4)}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Therefore the eigenfunctions of positive energy $\psi^{(1)}$ and $\psi^{(2)}$ have a $\hat{P}$ eigenvalue ("internal parity") opposite to that of the states with negative energy $\psi^{(3)}$ and $\psi^{(4)}$.

Another improper transformation is time reversal but since this is more complicated we shall deal with it later, in Chap. 12.5. The parity of spinors is also discussed in Example 9.3 and is further illustrated in Chap. 12.5.

12.5.6 Bilinear Covariants of the Dirac Spinors

There must exist 16 linearly independent 4×4 matrices which we denote by $(\hat{\Gamma}^n)_{\alpha\beta}$. It turns out that one can construct 16 (a complete set) of these $\hat{\Gamma}^n (n = 1, \dots, 16)$ from the Dirac matrices and their products. We write

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_{(1)}^S &= 11, \quad \hat{\Gamma}_{(4)}^V = \gamma_\mu, \quad \hat{\Gamma}_{(6)}^T = \hat{\sigma}_{\mu\nu} = -\hat{\sigma}_{\nu\mu}, \\
\hat{\Gamma}_{(1)}^P &= i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma_5 \equiv \gamma^5, \quad \hat{\Gamma}_{(4)}^A = \gamma_5 \gamma_\mu
\end{aligned}$$

and verify step by step the postulated properties of the $\hat{\Gamma}^n$ as well as some extra ones (also cf. Example 3.1). First we shall prove that in (5.1) there are indeed 16 matrices. This is easily done by adding the values written in brackets below the symbols. The upper indices of the matrices ("S", "V", "T", "P", and "A") have the meaning "scalar", "vector", "tensor", "pseudovector", and "axial vector", and these specifications will become clear in the following. Furthermore it holds that:

a) For each $\hat{\Gamma}^n$ holds $(\hat{\Gamma}^n)^2 = \pm 11$. We shall prove this for some of the $\hat{\Gamma}^n$:

$$(\hat{\Gamma}^S)^2 = 11, \quad (\hat{\Gamma}_\mu^V)^2 = (\gamma_\mu)^2 = 11g_{\mu\mu} \tag{5.2}$$

due to the commutation relations (3.11),

$$\begin{aligned}
(\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^T)^2 &= \hat{\sigma}_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)^2 \\
&= -\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu) \\
&= -\frac{1}{4}[2g_{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu - (\gamma_\mu)^2(\gamma_\nu)^2 - 2(\gamma_\mu)^2(\gamma_\nu)^2 + 2g_{\mu\nu}\gamma_\nu\gamma_\mu - (\gamma_\nu)^2(\gamma_\mu)^2] \\
&= -\frac{1}{4}[2g_{\mu\nu}(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu) - 4(\gamma_\nu)^2(\gamma_\mu)^2] \\
&= -\frac{1}{4}[4(g_{\mu\nu})^2 11 - 4g_{\nu\nu}g_{\mu\mu}1] \\
&= \begin{cases} g_{\nu\nu}g_{\mu\mu}11 & \text{for } \mu \neq \nu \\ 0 & \text{for } \mu = \nu. \text{ In this case } \hat{\sigma}_{\mu\mu} = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Similarly the conjecture is proven for the other matrices (5.1).

b) To each $\hat{\Gamma}^n$ except $\hat{\Gamma}^S$ there exists at least one corresponding $\hat{\Gamma}^m$ with

$$\hat{\Gamma}^n \hat{\Gamma}^m = -\hat{\Gamma}^m \hat{\Gamma}^n. \quad (5.3)$$

This is easily proved explicitly, e.g.

$$\hat{\Gamma}_\mu^V : \hat{\Gamma}_\mu^V \hat{\Gamma}_\nu^V = -\hat{\Gamma}_\nu^V \hat{\Gamma}_\mu^V \quad \text{if } \nu \neq \mu$$

since this corresponds to the commutation relation (3.11)

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^T : \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^T \hat{\Gamma}_\mu^V = -\hat{\Gamma}_\mu^V \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^T,$$

because for each μ, ν we have

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu} \gamma_\mu &= \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \gamma_\mu = \frac{i}{2} (-\gamma_\mu \gamma_\mu \gamma_\nu + 2\gamma_\mu g_{\mu\nu} + \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\mu - 2\gamma_\mu g_{\mu\nu}) \\ &= -\frac{i}{2} \gamma_\mu (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) = -\gamma_\mu \sigma_{\mu\nu} \end{aligned}$$

This shows that the $\hat{\Gamma}_\mu^V$'s correspond to the $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^T$ in the sense of relation (5.3), and vice versa, etc. For the other $\hat{\Gamma}^n$ matrices one proves the relation (5.3) in a similar way. From (5.3) and (5.2) in particular,

$$\pm \hat{\Gamma}^n = -\hat{\Gamma}^m \hat{\Gamma}^n \hat{\Gamma}^m = +\hat{\Gamma}^n (\hat{\Gamma}^m)^2$$

and therefore calculating the trace yields [making use of $\text{tr}(\hat{A}\hat{B}) = \text{tr}(\hat{B}\hat{A})$]

$$\pm \text{tr}(\hat{\Gamma}^n) = -\text{tr}(\hat{\Gamma}^n (\hat{\Gamma}^m)^2) = +\text{tr}(\hat{\Gamma}^n (\hat{\Gamma}^m)^2) = 0. \quad (5.4)$$

Here we have a remarkable result: All $\hat{\Gamma}^n$ matrices except $\hat{\Gamma}^S$ have a vanishing trace;

c) For given $\hat{\Gamma}^a$ and $\hat{\Gamma}^b$ ($a \neq b$) there exists a $\hat{\Gamma}^n \neq \hat{\Gamma}^S$ with

$$\hat{\Gamma}^a \hat{\Gamma}^b = f_{ab}^n \hat{\Gamma}^n, \quad (5.5)$$

so defining f_{ab}^n as a complex number. We check this property with some examples: For $\mu \neq \nu$ we have

$$\hat{\Gamma}_\mu^V \hat{\Gamma}_\nu^V = \gamma_\mu \gamma_\nu = \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu}{2} = -i\hat{\sigma}_{\mu\nu} = -i\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^T$$

In this case the f factor is -i. As a second example we take a look at

$$\hat{\Gamma}_\mu^V \hat{\Gamma}_{\sigma\tau}^T = \frac{i}{2} \gamma_\mu (\gamma_\sigma \gamma_\tau - \gamma_\tau \gamma_\sigma) = \begin{cases} -i\gamma_\sigma g_{\mu\mu} = -ig_{\mu\mu} \hat{\Gamma}_\sigma^V & \text{for } \mu = \tau, \\ +i\gamma_\sigma g_{\mu\mu} = ig_{\mu\mu} \hat{\Gamma}_\sigma^V & \text{for } \mu = \sigma, \\ \pm i\hat{\Gamma}_{\kappa}^A, \kappa \neq \mu, \sigma, \tau & \text{for } \mu \neq \tau \neq \sigma, \end{cases}$$

etc.. It can easily be shown that (5.5) holds in each case.

Now we show that the $\hat{\Gamma}^n$'s of (5.1) are linearly independent. For this purpose we suppose the existence of the relation

$$\sum_n a_n \hat{\Gamma}^n = 0 \quad (5.6)$$

and by multiplication with $\hat{\Gamma}^m \neq \hat{\Gamma}^S$ we get

$$\begin{aligned}
 0 &= \Sigma_n a_n \operatorname{tr} (\hat{\Gamma}^n \hat{\Gamma}^m) = a_m \operatorname{tr} \left(\left(\hat{\Gamma}^m \right)^2 \right) + \Sigma_{n \neq m} a_n \operatorname{tr} \left(f_{nm}^\nu \hat{\Gamma}^\nu \right) \quad [\text{cf. (5.5)}] \\
 &= a_m \underbrace{\operatorname{tr} \left(\left(\hat{\Gamma}^m \right)^2 \right)}_{=\pm 11 [\text{cf. (5.2)}]} + \Sigma_{n \neq m} a_n f_{nm}^\nu \underbrace{\operatorname{tr} \left(\hat{\Gamma}^\nu \right)}_{=0 [\text{cf. (5.4)}]} \\
 &= \pm 4 a_m.
 \end{aligned} \tag{5.7a}$$

Thus $a_m = 0$ for all $m \neq S$, and in the case of $\hat{\Gamma}^m = \hat{\Gamma}^S$

$$0 = \operatorname{tr} \left(\sum_n a_n \hat{\Gamma}^S \hat{\Gamma}^n \right) = a_S \underbrace{\operatorname{tr} \left(\hat{\Gamma}^S \right)^2}_{=4 [\text{cf. (5.1)}]} + \sum_{n \neq S} a_n \underbrace{\operatorname{tr} \left(\hat{\Gamma}^n \right)}_{=0 [\text{cf. (5.4)}]} = 0, \tag{5.7b}$$

i.e. $a_S = 0$ also. Therefore all coefficients a_n of (5.6) must vanish and the linear independence of the $\hat{\Gamma}^n$'s is proved. Hence every 4×4 matrix can be expressed by the $\hat{\Gamma}^n$'s.

We now turn to the behaviour of the bilinear expressions

$$\bar{\psi}(x) \hat{\Gamma} \psi(x) \tag{5.8}$$

under Lorentz transformations. For this purpose we need

$$\gamma^\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma^\mu = 0 \tag{5.9}$$

which may be easily verified and leads immediately to

$$[\gamma_5, \hat{\sigma}_{\mu\nu}]_- = \frac{i}{2} (\gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) - (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \gamma_5) = 0 \tag{5.10}$$

According to the proper Lorentz transformations (3.52) the spinors are transformed by the operator

$$\hat{S}(\hat{a}) = \exp \left(-\frac{i}{4} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \omega_n^{\mu\nu} \right) = \exp \left(-\frac{i}{4} \omega \hat{\sigma}_{\mu\nu} \left(\hat{I}_n \right)^{\mu\nu} \right) \tag{5.11}$$

Together with (5.10) we get directly

$$\left[\hat{S}(\hat{a}), \gamma_5 \right]_- = 0 \tag{5.12}$$

According to (4.9) the space inversion (improper Lorentz transformation) of the spinors is accomplished by the operator

$$\hat{P} = e^{i\phi} \gamma^0. \tag{5.13}$$

For this operator, by virtue of (5.9),

$$\hat{P} \gamma_5 = -\gamma_5 \hat{P} \text{ or } \tag{5.14a}$$

$$\left[\hat{P}, \gamma_5 \right]_+ = 0. \tag{5.14b}$$

Now we consider bilinear quantities in $\bar{\psi}$ and ψ and can easily calculate that, e.g.

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x')\psi'(x') &= \psi'^{\dagger}(x')\gamma^0\psi'(x') = \psi^{\dagger}(x)\hat{S}^{\dagger}\gamma^0\hat{S}\psi(x) \\ &= \psi^{\dagger}(x)\gamma^0\hat{S}^{-1}\hat{S}\psi(x) = \psi^{\dagger}(x)\gamma^0\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)\end{aligned}\quad (5.15)$$

Thus the bilinear expression $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ has the same value in every Lorentz frame. We therefore call

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \equiv \bar{\psi}(x)\hat{\Gamma}^S\psi(x) \quad (5.16)$$

a scalar under Lorentz transformations (or simply Lorentz scalar) and $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ the scalar density. Similarly, in the following Exercise 5.1 we prove that

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\hat{S}^{-1}\gamma_5\hat{S}\psi(x) = \det(a)\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) \quad (5.17a)$$

is a pseudoscalar,

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^{\nu}\psi'(x') = a^{\nu}_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) \quad (5.17b)$$

a vector,

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^{\nu}\psi'(x') = \det(a)a^{\nu}_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^{\mu}\psi(x) \quad (5.17c)$$

a pseudovector, and

$$\bar{\psi}'(x')\hat{\sigma}^{\mu\nu}\psi'(x') = a^{\mu}_{\alpha}a^{\nu}_{\beta}\bar{\psi}(x)\hat{\sigma}^{\alpha\beta}\psi(x) \quad (5.17d)$$

a tensor of second rank. The prefix "pseudo" in pseudoscalar indicates that this quantity transforms as a Lorentz scalar but reverses its sign under improper Lorentz transformations. The same holds for the pseudovector (5.17c).

5.1 Transformation Properties of Some Bilinear Expressions of Dirac Spinors

Problem. Investigate the transformation properties of the following bilinear expressions consisting of Dirac spinors:

1. $\bar{\psi}\psi$
2. $\bar{\psi}\gamma_5\psi$
3. $\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$
4. $\bar{\psi}\gamma_5\gamma_{\mu}\psi$
5. $\bar{\psi}\hat{\sigma}^{\mu\nu}\psi$.

Solution

ψ changes to $\hat{S}\psi$ under Lorentz transformations and $\bar{\psi}$ to $\bar{\psi}\hat{S}^{-1}$ (since $\hat{S}^{\dagger}\gamma_0 = \gamma_0\hat{S}^{-1}$). It holds that $\hat{S}^{-1}\gamma^{\mu}\hat{S} = a^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}$ and $\hat{S}\gamma_5 = \gamma_5\hat{S}\det|a|$. The latter relation is a useful summary of (5.12) and (5.14). Thus,

1. $\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}\hat{S}^{-1}\hat{S}\psi$
 $= \bar{\psi}\psi$ (scalar),

$$2. \bar{\psi}\gamma_5\psi \rightarrow \bar{\psi}\hat{S}^{-1}\gamma_5\hat{S}\psi$$

$$= \bar{\psi} \det |a| \hat{S}^{-1} \hat{S} \gamma_5 \psi \\ = \det |a| \bar{\psi} \gamma_5 \psi \text{ (pseudoscalar),}$$

$$3. \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \rightarrow \bar{\psi}\hat{S}^{-1}\gamma^\mu\hat{S}\psi$$

$$= a^\mu{}_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \text{ (vector),}$$

$$4) \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi \rightarrow \bar{\psi}\hat{S}^{-1}\gamma_5\gamma^\mu\hat{S}\psi \\ = \det |a| \bar{\psi} \gamma_5 \hat{S}^{-1} \gamma^\mu \hat{S} \psi \\ = \det |a| a^\mu{}_\nu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\nu \psi \text{ (pseudovector),}$$

$$5. \bar{\psi}\hat{\sigma}^{\mu\nu}\psi \rightarrow \bar{\psi}\hat{S}^{-1}\hat{\sigma}^{\mu\nu}\hat{S}\psi$$

$$= \frac{i}{2} \bar{\psi} \hat{S}^{-1} \left(\gamma^\mu \hat{S} \hat{S}^{-1} \gamma^\nu - \gamma^\nu \hat{S} \hat{S}^{-1} \gamma^\mu \right) \hat{S} \psi \\ = \frac{i}{2} \bar{\psi} (a^\mu{}_\rho \gamma^\rho a^\nu{}_\tau \gamma^\tau - a^\nu{}_\tau \gamma^\tau a^\mu{}_\rho \gamma^\rho) \psi \\ = a^\mu{}_\rho a^\nu{}_\tau \bar{\psi} \hat{\sigma}^{\rho\tau} \psi \text{ (second rank tensor).}$$

5.2 Majorana Representation of the Dirac Equation

Problem. Show that there exist four 4×4 matrices $\hat{\Gamma}_\mu$ such that

$$\text{Re} \left(\hat{\Gamma}_\mu \right)_{\alpha\beta} = 0,$$

$$\hat{\Gamma}_\mu \hat{\Gamma}_\nu + \hat{\Gamma}_\nu \hat{\Gamma}_\mu = 2g_{\mu\nu},$$

$$\left(i\hbar \hat{\Gamma}_\mu \partial^\mu - m_0 c \right) \psi = 0,$$

i.e., the Dirac equation is real in this representation. Here $\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu$.

Solution

From the common γ_μ matrices we know that they fulfill

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ -\hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix},$$

with

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

and

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad \gamma_0^\dagger = \gamma_0, \quad \gamma_i^\dagger = -\gamma_i.$$

We define

$$\hat{\Gamma}_0 = \gamma_0 \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Gamma}_1 = i\gamma_0 \gamma_1 = i \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Gamma}_2 = i\gamma_0 = i \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Gamma}_3 = i\gamma_0 \gamma_3 = i \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_3 \\ \hat{\sigma}_3 & 0 \end{pmatrix}$$

and recognize immediately that these $\hat{\Gamma}_\mu$ are purely imaginary matrices. On complex conjugation

$$\hat{\Gamma}_0^* = \gamma_0^* \gamma_2^* = -\gamma_0 \gamma_2 = -\hat{\Gamma}_0,$$

$$\hat{\Gamma}_1^* = -i\gamma_0^*\gamma_1^* = -i\gamma_0\gamma_1 = -\hat{\Gamma}_1, \quad \hat{\Gamma}_2^* = -i\gamma_0 = -\hat{\Gamma}_2, \\ \hat{\Gamma}_3^* = -i\gamma_0\gamma_3 = -\hat{\Gamma}_3$$

since only γ_2 is imaginary. Now we check the anticommutation relations:

g_{00}

$$= 1 = (\hat{\Gamma}_0)^2 = \gamma_0\gamma_2\gamma_0\gamma_2 \\ = -(\gamma_0)^2(\gamma_2)^2 = 1,$$

$$2g_{01} = 2g_{10} = 0 = -i(\gamma_2\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2) \\ = -i[(\gamma_0)^2\gamma_2\gamma_1 + (\gamma_0)^2\gamma_1\gamma_2] \\ = i(\gamma_0\gamma_2\gamma_0\gamma_1 + \gamma_0\gamma_1\gamma_0\gamma_2) \\ = \hat{\Gamma}_0\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_1\hat{\Gamma}_0, \\ 2g_{02} = 2g_{20} = 0 = i(\gamma_2 - \gamma_2) = i(\gamma_0\gamma_0\gamma_2 + \gamma_0\gamma_2\gamma_0) \\ = \hat{\Gamma}_2\hat{\Gamma}_0 + \hat{\Gamma}_0\hat{\Gamma}_2, \\ 2g_{03} = 2g_{30} = 0 = \hat{\Gamma}_0\hat{\Gamma}_3 + \hat{\Gamma}_3\hat{\Gamma}_0 \text{ as for } g_{01},$$

g_{11}

$$= -1 = (\gamma_0)^2(\gamma_1)^2 = -\gamma_0\gamma_1\gamma_0\gamma_1 \\ = (i\gamma_0\gamma_1)^2 = (\hat{\Gamma}_1)^2,$$

$$2g_{12} = 2g_{21} = 0 = \hat{\Gamma}_1\hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_2\hat{\Gamma}_1, \text{ as for } g_{20},$$

$$2g_{13} = 2g_{31} = 0 = \hat{\Gamma}_1\hat{\Gamma}_3 + \hat{\Gamma}_3\hat{\Gamma}_1, \text{ as for } g_{10},$$

$$g_{22} = -1 = (i\gamma_0)^2 = (\hat{\Gamma}_2)^2,$$

$$2g_{23} = 2g_{32} = 0 = \hat{\Gamma}_2\hat{\Gamma}_3 + \hat{\Gamma}_3\hat{\Gamma}_2, \text{ as for } g_{20},$$

$$g_{33} = -1 = (\hat{\Gamma}_3)^2, \text{ as for } g_{11}.$$

Thus we have proved all of the necessary properties of the $\hat{\Gamma}_\mu$ matrices. This $\hat{\Gamma}_\mu$ representation of the Dirac algebra is called the Majorana representation.

12.5.7 Relativistic Way of Constructing Solutions of Free Dirac Equation 1

Theory

Our considerations of the last chapters showed that the free Dirac equation exhibits all of the properties of covariance. Moreover positive-energy solutions possess the correct behaviour in the nonrelativistic limit. We consider now the solutions of the free Dirac equation with a new approach better suited to the covariant formulation and, later on, for the field-theoretical applications. Let us return to the solutions (2.71) of the free electron in its rest frame. We denote them in a more compact form:

$$\psi^r = \omega^r(0)e^{-i\varepsilon_r(m_0c^2/\hbar)t}, \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad (6.1)$$

where

$$\varepsilon_r = \begin{cases} +1 & \text{for } r = 1, 2 \\ -1 & \text{for } r = 3, 4 \end{cases}. \quad (6.2)$$

The x dependence of the spinors ψ^r in (6.1) reduces to a simple time dependence. There is no space dependence because the wavefunction is smeared out homogeneously in the whole of space. We also have

$$\omega^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \omega^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \omega^3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \omega^4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

The first and the second solutions $\psi^1(x)$ and $\psi^2(x)$ have positive energy and correspond to the spin degrees of freedom of the Schrödinger-Pauli electron. For the solutions $\psi^3(x)$ and $\psi^4(x)$ with negative energy we must still find a reasonable interpretation. All of the $\psi^r(x)$ of (6.1) are also eigenfunctions of

$$\hat{\Sigma}_3 = \hat{\sigma}_{12} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_3 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_3 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

[cf. (3.57)] with the eigenvalues ± 1 :

$$\hat{\Sigma}_3 \psi^r(x) = (\pm 1) \psi^r(x) \quad (6.5)$$

where the eigenvalues

+1 are valid for $r = 1, 3$ and -1 are valid for $r = 2, 4$.

Earlier [cf. (2.34)] we directly obtained the free solutions for finite momentum (finite velocity) by solving the free Dirac equation. Now we follow a different path: By transforming

Fig. 6.1. In the $x't'$ system the electron moves with the velocity $+v$. In the xt system the four-momentum is p^μ ; in the $x't'$ system it is p'^μ

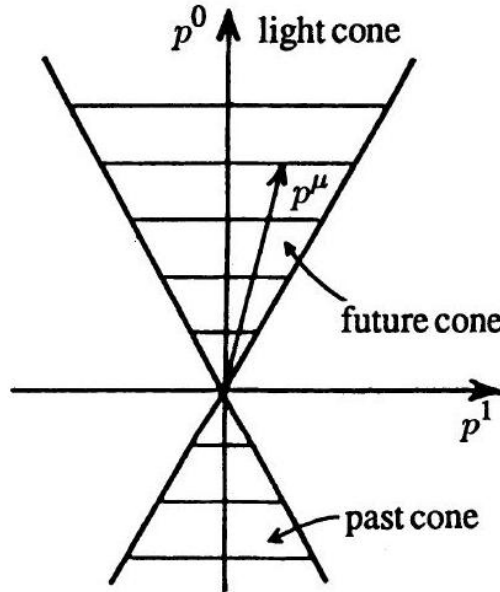
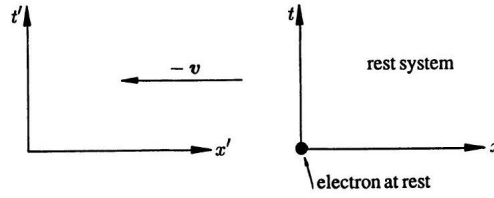


Fig. 6.2. The four-momentum of a free particle always lies within the lightcone in momentum space to a coordinate system which moves with the velocity $-v$ relative to the rest system, the free wave functions of the electron with velocity $+v$ are constructed from the wave functions (6.1) of the electron at rest (see Fig. 6.1). For this purpose we write first the exponent of the rest solution (6.1) in invariant form:

$$e^{-i\varepsilon_r(m_0c^2/\hbar)t} = e^{-i\varepsilon_r(p_\mu x^\mu/\hbar)} = e^{-i\varepsilon_r(p'_\mu x'^\mu/\hbar)}, \quad (6.6)$$



where

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= a^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad p'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} p^{\nu} = a^{\mu}_0 p^0 = a^{\mu}_0 m_0 c, \\ p^{\nu} &= \{m_0 c, \mathbf{0}\} = \left\{ \frac{m_0 c^2}{c}, \mathbf{0} \right\}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

The primed quantities are valid in the moving reference system, the unprimed in the rest system of the electron. The zero-component of the four-momentum is always given by

$$p^0 = \frac{E}{c} = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2} > 0. \quad (6.8)$$

Next we remark that the solutions for positive and negative energy transform separately under proper Lorentz transformations and also under space inversion. This means that the solutions for positive and negative energy are not mixed under these transformations. One recognizes this from (6.6): The four-momentum of the free particle $p^{\mu} p_{\mu} = m_0^2 c^2 > 0$ is always timelike. Therefore, for free particles p^{μ} lies within the light cone in momentum space (Fig. 6.2). Under proper Lorentz transformation and also under space inversion (but not under time inversion), the future and past cones (i.e. the vectors with $p^0 > 0$ and $p^0 < 0$, respectively), and with them the solutions for positive and negative energy, remain strictly separated from each other.

We transform the spinors ω^r according to (3.61) with the operator

$$\hat{S} = e^{-i\omega \hat{\sigma}_{01}/2} \quad (6.9)$$

if, for convenience, we choose the velocity parallel to the x axis. According to (3.50a),

$$\frac{v_x}{c} = \tanh \omega.$$

Since in our case v_x should be negative (the moving inertial system has the velocity $v = -v_x e_1$ in the rest system), this relation is now

$$-\frac{v_x}{c} = \tanh \omega, \quad (6.10a)$$

or

$$\omega = \tanh^{-1} \left(-\frac{v_x}{c} \right) = -\tanh^{-1} \left(\frac{v_x}{c} \right) \quad (6.10b)$$

Therefore (3.49b) and (3.51) now read as

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \cosh \omega (x^0 - \tanh \omega x^1) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(x^0 + \frac{v_x}{c} x^1 \right), \\ x^{1'} &= \cosh \omega (x^1 - \tanh \omega x^0) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(x^1 + \frac{v_x}{c} x^0 \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

and the operator (6.9), with $\hat{\sigma}_{01} = \frac{i}{2}(\gamma_0\gamma_1 - \gamma_1\gamma_0) = i\gamma_0\gamma_1 = -i\gamma^0\gamma^1 = -i\gamma^0\gamma^0\hat{\alpha}_1 = -i\hat{\alpha}_1$, becomes

$$\begin{aligned}\hat{S} &= e^{-i(\omega/2)\hat{\sigma}_{01}} = e^{-(\omega/2)\hat{\alpha}_1} \\ &= 11 \left(1 + \frac{(-\omega/2)\hat{\alpha}_1}{1!} + \frac{(-\omega/2)^2(\hat{\alpha}_1)^2}{2!} + \frac{(-\omega/2)^3(\hat{\alpha}_1)^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \left(1 + \frac{(\omega/2)^2}{2!} + \frac{(\omega/2)^4}{4!} + \dots \right) 11 - \left(\frac{\omega/2}{1!} + \frac{(\omega/2)^3}{3!} + \dots \right) \hat{\alpha}_1 \\ &= 11 \cosh \frac{\omega}{2} - \hat{\alpha}_1 \sinh \frac{\omega}{2}.\end{aligned}\tag{6.12}$$

Here we used $\hat{\alpha}_i^2 = 1$, according to (2.8). Now the spinor transformation (3.53) can be applied directly to the $\omega^r(0)$ from (6.1) to obtain

$$\begin{aligned}\omega^r(p_x) &= e^{-i(\omega/2)\hat{\sigma}_{01}}\omega^r(0) = \left(\cosh \frac{\omega}{2} - \hat{\alpha}_1 \sinh \frac{\omega}{2} \right) \omega^r(0) \\ &= \cosh \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\tanh \frac{\omega}{2} \\ 0 & 1 & -\tanh \frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & -\tanh \frac{\omega}{2} & 1 & 0 \\ -\tanh \frac{\omega}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \omega^r(0).\end{aligned}\tag{6.13}$$

Because the $\omega^r(0)$ have the simple form (6.3), the r th column of this transformation matrix (6.13) is identical to the spinor $\omega^r(\mathbf{p})$. More precisely,

$$\begin{aligned}\omega^1(p_x) &= \cosh \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\tanh \frac{\omega}{2} \end{pmatrix}, & \omega^2(p_x) &= \cosh \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\tanh \frac{\omega}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \omega^3(p_x) &= \cosh \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\tanh \frac{\omega}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \omega^4(p_x) &= \cosh \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} -\tanh \frac{\omega}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{6.14}$$

To return to physical quantities, we convert the rotation angle ω with the aid of (6.10),

$$\begin{aligned}\cosh x \sinh 2x &= \frac{1}{2} \sinh 2x \\ \cosh x \cosh x &= \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1), \\ \sinh x \sinh x &= \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1),\end{aligned}\tag{6.15}$$

and therefore

$$\tanh x = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + 1} = \frac{\tanh 2x}{1 + 1/\cosh 2x}.\tag{6.16}$$

Since

$$\frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x = \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x}, \text{ then } \cosh x = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}$$

and hence (6.16) becomes

$$\tanh x = \frac{\tanh 2x}{1 + \sqrt{1 - \tanh^2 2x}}. \quad (6.17)$$

With (6.10) we may now calculate

$$\begin{aligned} -\tanh \frac{\omega}{2} &= \frac{-\tanh \omega}{1 + \sqrt{1 - \tanh^2 \omega}} = \frac{v_x/c}{1 + \sqrt{1 - (v_x/c)^2}} \\ &= \frac{\left[m_0 c^2 / \sqrt{1 - (v_x/c)^2} \right] (v_x/c)}{\left[m_0 c^2 / \sqrt{1 - (v_x/c)^2} \right] \left[1 + \sqrt{1 - (v_x/c)^2} \right]} = \frac{p_x c}{E + m_0 c^2} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \cosh \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left[\tanh^2 \omega \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 - \tanh^2 \omega}} \right)^2 \right]}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left[(v_x/c)^2 / \left(1 + \sqrt{1 - (v_x/c)^2} \right)^2 \right]}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{1 - (v_x/c)^2}}{\sqrt{1 + 2\sqrt{1 - (v_x/c)^2} + (1 - (v_x/c)^2) - (v_x/c)^2}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{1 - (v_x/c)^2}}{\sqrt{2}\sqrt{1 - (v_x/c)^2 + \sqrt{1 - (v_x/c)^2}}} = \frac{\left[\left(1/\sqrt{1 - (v_x/c)^2} \right) + 1 \right] m_0 c^2}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \left[1/\sqrt{1 - (v_x/c)^2} \right] m_0 c^2}} \\ &= \frac{E + m_0 c^2}{\sqrt{m_0 c^2 + E}\sqrt{2m_0 c^2}} = \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2}}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Hence by (6.18) and (6.19), the transformation (6.13) can be expressed completely by physical observables $(E, p_x, m_0 c^2)$ and reads

$$\begin{aligned} \omega^r(p_x) &= \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{p_x c}{E + m_0 c^2} \\ 0 & 1 & \frac{p_x c}{E + m_0 c^2} & 0 \\ 0 & \frac{p_x c}{E + m_0 c^2} & 1 & 0 \\ \frac{p_x c}{E + m_0 c^2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \omega^r(0). \end{aligned} \quad (6.20)$$

6.1 Plane Waves in Arbitrary Directions

The result (6.20) can be generalized to plane waves with velocity v in arbitrary directions. We write

$$\mathbf{v} = v\mathbf{n} = v\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} \quad (6.21)$$

thus n is the unit vector which specifies the direction of motion of the moving inertial system with respect to the rest system of the electron. Then according to (3.44) the "rotation angles" are

$$\Delta\omega^\nu{}_\mu = \Delta\omega \left(\hat{I}_n \right)_\mu^\nu = \Delta\omega \begin{pmatrix} 0 & -\cos \alpha & -\cos \beta & -\cos \gamma \\ -\cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \gamma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

and with that, according to (3.45), the infinitesimal Lorentz transformation reads

$$x'^\nu = a^\nu{}_\mu x^\mu = x^\nu + \Delta\omega^\nu{}_\mu x^\mu, \quad (6.23)$$

or, in expanded form,

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 - \Delta\omega \cos \alpha x^1 - \Delta\omega \cos \beta x^2 - \Delta\omega \cos \gamma x^3, \\ x'^1 &= -\Delta\omega \cos \alpha x^0 + x^1, \\ x'^2 &= -\Delta\omega \cos \beta x^0 + x^2, \\ x'^3 &= -\Delta\omega \cos \gamma x^0 + x^3. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Since $x' = 0 = \{x'^1, x'^2, x'^3\}$ characterizes the origin of the moving inertial system, it follows immediately that it moves with

$$\Delta v = \{\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3\} = c \left\{ \frac{x^1}{x^0}, \frac{x^2}{x^0}, \frac{x^3}{x^0} \right\} = c\Delta\omega\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} \quad (6.25)$$

relative to the rest coordinate-system. From (6.24) easily follows the former special case of motion along the x axis if we set $\cos \alpha = 1, \cos \beta = 0, \cos \gamma = 0$. Just as simply, one obtains the movements along the y and z axes for $\cos \alpha = 0, \cos \beta = 1, \cos \gamma = 0$ and $\cos \alpha = 0, \cos \beta = 0, \cos \gamma = 1$, respectively, both of which are also contained in (6.24). Thus from (6.22) follows the coefficient-matrix belonging to the direction of motion $\mathbf{n}$.

$$\left(\hat{I}_n \right)_\mu^\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\cos \alpha & -\cos \beta & -\cos \gamma \\ -\cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \gamma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Setting $\Delta\omega = \omega/N$ we get, in complete analogy to (3.52),

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= \hat{S}(\hat{\alpha})\psi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i}{4} \frac{\omega}{N} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \left(\hat{I}_n \right)^{\mu\nu} \right)^N \psi(x) \\ &= \exp \left(-i\omega \hat{\sigma}_{\mu\nu} \left(\hat{I}_n \right)^{\mu\nu} / 4 \right) \psi(x) \end{aligned} \quad (6.27a)$$

thus,

$$\hat{S}(\hat{\alpha}) = \exp \left(-i\omega \hat{\sigma}_{\mu\nu} \left(\hat{I}_n \right)^{\mu\nu/4} \right) \quad (6.27b)$$

The expression in the exponent reads

$$\hat{\sigma}_{\mu\nu} \left(\hat{I}_n \right)^{\mu\nu} = 2 \left(\hat{\sigma}_{01} \left(\hat{I}_n \right)^{01} + \hat{\sigma}_{02} \left(\hat{I}_n \right)^{02} + \hat{\sigma}_{03} \left(\hat{I}_n \right)^{03} \right),$$

which can be converted by use of (6.26) and $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$ into

$$\hat{\sigma}_{\mu\nu} \left(\hat{I}_n \right)^{\mu\nu} = 2 (\hat{\sigma}_{01} \cos \alpha + \hat{\sigma}_{02} \cos \beta + \hat{\sigma}_{03} \cos \gamma) = -2i\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v}. \quad (6.28)$$

Here we have made use of

$$\frac{\mathbf{v}}{v} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

along with $v = |\mathbf{v}|$ and

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{0i} &= \frac{i}{2} [\gamma_0, \gamma_i]_- = \frac{i}{2} (\gamma_0 \gamma_i - \gamma_i \gamma_0) = i\gamma_0 \gamma_i \\ &= i\gamma^0 \gamma^i g_{ii} = -i\gamma^0 \gamma^i = -i\gamma^0 \gamma^0 \hat{\alpha}_i = -i\hat{\alpha}_i. \end{aligned} \quad (6.29)$$

With this the spinor transformation (6.27b) for Lorentz transformations to inertial systems with direction of velocity $\mathbf{v}/v$ now becomes

$$\begin{aligned} \hat{S}(-\mathbf{v}) &= \hat{S} \left(-\frac{\mathbf{p}}{E} \right) = e^{-(\omega/2)\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{v}/v} \\ &= \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z c}{E + m_0 c^2} & \frac{p_- c}{E + m_0 c^2} \\ 0 & 1 & \frac{p_+ c}{E + m_0 c^2} & \frac{-p_z c}{E + m_0 c^2} \\ \frac{p_z c}{E + m_0 c^2} & \frac{p_- c}{E + m_0 c^2} & 1 & 0 \\ \frac{p_+ c}{E + m_0 c^2} & \frac{-p_z c}{E + m_0 c^2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [\omega^1(\mathbf{p}), \omega^2(\mathbf{p}), \omega^3(\mathbf{p}), \omega^4(\mathbf{p})]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Here we have set $p_{\pm} = p_x \pm ip_y$, and the last line indicates that the individual column vectors of the $S(-v)$ matrix are identical with $\omega^r(p)$. We will calculate the final step of (6.30) in the following Exercise 6.1.

6.1 Calculation of the Spinor Transformation Operator in Matrix Form

Problem. Calculate explicitly the spinor transformation operator

$$\hat{S}(-\mathbf{v}) = e^{-(\omega/2)\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{v}/v}$$

in matrix form.

Solution

We expand $\hat{S}$ in a series

$$\begin{aligned} \hat{S}(-v) &= 1 - \frac{\omega}{2} \frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{v}}{v} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{4v^2} (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{v})^2 \\ &\quad - \frac{1}{6} \frac{\omega^3}{8v^3} (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{v})^3 + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

and use

$$\begin{aligned}
 (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{v})^2 &= \hat{\alpha}^i \alpha^j v_i v_j = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^j v_i v_j = -\gamma^i \gamma^j v_i v_j \\
 &= -\frac{1}{2} (\gamma^i \gamma^j v_i v_j + \gamma^j \gamma^i v_j v_i) = -\frac{1}{2} (2g^{ij} 11 v_i v_j) \\
 &= +v^2 11
 \end{aligned} \tag{2}$$

This yields

$$\begin{aligned}
 \hat{S}(-v) &= \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{4} \left(\frac{\mathbf{v}}{v} \right)^2 + \frac{1}{24} \frac{\omega^4}{16} \left(\frac{\mathbf{v}}{v} \right)^4 + \dots \right\} \cdot 11 \\
 &\quad - \frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{v}}{v} \left\{ \frac{\omega}{2} + \frac{1}{6} \frac{\omega^3}{8} \left(\frac{\mathbf{v}}{v} \right)^2 + \dots \right\} \\
 &= 11 \cosh \frac{\omega}{2} - \frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{v}}{v} \sinh \frac{\omega}{2}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

The matrix $\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{v}/v$ has the form

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{v}}{v} &= \hat{\alpha}_x \cdot \frac{v_x}{v} + \hat{\alpha}_y \cdot \frac{v_y}{v} + \hat{\alpha}_z \cdot \frac{v_z}{v} \\
 &= \frac{p_x}{p} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\
 &\quad + \frac{ip_y}{p} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\
 &\quad + \frac{p_z}{p} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{p} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & p_z & p_- \\ \cdot & \cdot & p_+ & -p_z \\ p_z & p_- & \cdot & \cdot \\ p_+ & -p_z & \cdot & \cdot \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4}$$

where $p_{\pm} = p_x \pm ip_y$.

(3) that

With the help of (6.19) for $\cosh(\omega/2)$, we obtain from

$$\begin{aligned}
 \hat{S}(-v) &= \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad - \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \frac{\tanh \omega/2}{p} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & p_z & p_- \\ \cdot & \cdot & p_+ & -p_z \\ p_z & p_- & \cdot & \cdot \\ p_+ & -p_z & \cdot & \cdot \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \\
&\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z c}{E + m_0 c^2} & \frac{p_- c}{E + m_0 c^2} \\ 0 & 1 & \frac{p_+ c}{E + m_0 c^2} & \frac{-p_z c}{E + m_0 c^2} \\ \frac{p_z c}{E + m_0 c^2} & \frac{p_- c}{E + m_0 c^2} & 1 & 0 \\ \frac{p_+ c}{E + m_0 c^2} & \frac{-p_z c}{E + m_0 c^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)
\end{aligned}$$

According to (6.18),

$$-\tanh \frac{\omega}{2} = \frac{pc}{E + m_0 c^2},$$

taking into account that in (6.18) p was substituted by p_x , because there we only considered motion in the x direction. Hence the matrices in (5) can be summarized by the expression (6.30).

6.2. Calculation of the Spinor $u(p+q)$ by Means of a Lorentz Transformation from the Spinor $u(p)$ of a Free Particle

Problem. Given a free-particle spinor $u(p)$, express $u(p+q)$ by $u(p)$ for $q_\mu \rightarrow 0, pq \rightarrow 0$ by means of a Lorentz transformation.

Solution

The solution of the Dirac equation for a free particle with momentum p reads as

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip \cdot x}.$$

If we transform into a system x' , which moves with the velocity $\mathbf{u} = -\mathbf{q}/m$ in the system chosen in (1), the particle (in system x') has the momentum $p+q$, and

$$\psi'(x') = u(p+q)e^{-i(p+q) \cdot x'}.$$

Because of the invariance of the scalar product $p \cdot x$,

$$e^{-ip \cdot x} = e^{-i(p+q) \cdot x'}.$$

From (3.52) we obtain the transformation of $\psi(x)$ into the moving system

$$\psi'(x') = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega \hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{I}_n^{\mu\nu}\right) \psi(x).$$

By inserting (1) and (2) into (4) we get the general result

$$u(p+q) = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega \hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{I}_n^{\mu\nu}\right) u(p).$$

For $q_\mu \rightarrow 0$ the exponential function can be expanded;

$$\exp\left(-\frac{i}{4}\omega \hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{I}_n^{\mu\nu}\right) \cong \mathbb{1} - \frac{i}{4}\omega \hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{I}_n^{\mu\nu}.$$

If we choose the coordinate system in (1) with q pointing in the x direction and with $pq \cong 0$, (6) can be simplified as

$$\exp\left(-\frac{i}{2}\omega \sigma_{01}\right) \cong \mathbb{1} - \frac{i\omega}{2} \sigma_{01},$$

where the connection between ω and $q = (0, q_x, 0, 0)$ is

$$\tanh \omega = \frac{v}{c} = -\frac{q_x}{mc} \simeq \omega.$$

Therefore one obtains

$$\begin{aligned}
 u(p+q) &= \left(11 + \frac{iq_x}{2mc} \sigma_{01} \right) u(p) \\
 &= \left(11 + \frac{q_x}{4mc} (\gamma_1 \gamma_0 - \gamma_0 \gamma_1) \right) u(p) \\
 &\times \left\{ 11 + \frac{q_x}{2mc} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \right\} u(p) \\
 &= \begin{pmatrix} u_1(p) - \frac{q_x}{2mc} u_4(p) \\ u_2(p) - \frac{q_x}{2mc} u_3(p) \\ u_3(p) - \frac{q_x}{2mc} u_2(p) \\ u_4(p) - \frac{q_x}{2mc} u_1(p) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

6.2 The General Form of the Free Solutions and Their Properties

From our previous considerations (6.1), (6.6) and (6.30), the general free solution must have the form

$$\psi^r(x) = \omega^r(\mathbf{p}) e^{-i\varepsilon_r p_\mu x^\mu / \hbar} \quad (6.31)$$

In the above, due to (6.3) and (6.30), the spinor $\omega^r(\mathbf{p})$ is identical to the row r of the matrix (6.30), because

$$\omega^r(\mathbf{p}) = \hat{S} \left(\frac{-\mathbf{p}}{E} \right) \omega^r(0) \quad (6.32)$$

However, we must take note of the fact that this result holds for the special representation of the γ matrices (3.13) only. The spinors $\omega^r(p)$ satisfy

$$(\not{p} - \varepsilon_r m_0 c) \omega^r(\mathbf{p}) = 0, \quad (6.33a)$$

$$\bar{\omega}^r(\mathbf{p}) (\not{p} - \varepsilon_r m_0 c) = 0, \quad (6.33b)$$

which are very useful later on. The first one is obvious and directly follows with (6.1) from (3.9) and the covariance of the Dirac equation. It represents the Dirac equation of a free particle in momentum space. We have $\varepsilon_r = +1$ for $r = 1, 2$ and therefore (6.33a) reads $(\not{p} - m_0 c) \omega^r(\mathbf{p}) = 0$. These are the solutions with positive energy. As already mentioned $\omega^1(p)$ and $\omega^2(p)$ are given by the two first rows of (6.30). Furthermore, we see directly that in the nonrelativistic limit of the representation of (6.30) the lower components of $\omega^1(p)$ and $\omega^2(p)$ become small; in the limit of the electron being at rest they finally change to the first two solutions (6.3). Similar considerations apply for the solutions of negative energy ($\varepsilon_r = -1, r = 3, 4$). According to (6.30) and (6.3) we have to exchange the large components with the small ones in this case. Equation (6.33b) follows from (6.33a) by Hermitian conjugation,

$$\begin{aligned}
 (\not{p} - \varepsilon_r m_0 c) \omega^r(\mathbf{p})^\dagger &= 0 = \omega^{r\dagger}(\mathbf{p}) (\not{p} - \varepsilon_r m_0 c)^\dagger \\
 &= \omega^{r\dagger}(\mathbf{p}) (\not{p}^\dagger - \varepsilon_r m_0 c) \\
 &= \omega^{r\dagger}(\mathbf{p}) (p_\mu \gamma^{\mu\dagger} - \varepsilon_r m_0 c) \\
 &= \omega^{r\dagger}(\mathbf{p}) (p_0 \gamma^0 - p_k \gamma^k - \varepsilon_r m_0 c)
 \end{aligned}$$

Note that the p_μ are good complex numbers ($p_\mu^\dagger = p_\mu$), and in the last line (3.12a) was used, i.e. $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ and $\gamma^{k\dagger} = -\gamma^k$. Multiplication with γ^0 from the right yields

$$\begin{aligned}
 \omega^{r\dagger}(\mathbf{p}) (p_\mu \gamma^{\mu\dagger} - \varepsilon_r m_0 c) &= 0 = \omega^{r\dagger}(\mathbf{p}) \gamma^0 (p_0 \gamma^0 + p_k \gamma^k - \varepsilon_r m_0 c) \\
 &= \bar{\omega}^r(\mathbf{p}) (p_\mu \gamma^\mu - \varepsilon_r m_0 c) \\
 &= \bar{\omega}^r(\mathbf{p}) (\mathbf{p} - \varepsilon_r m_0 c)
 \end{aligned}$$

We name (6.33b) the adjoint wave equation because it is valid for the adjoint spinor $\bar{\omega}^r(\mathbf{p}) = \omega^{r\dagger}(\mathbf{p})\gamma_0$. With the help of the explicit representation of the $\omega^r(\mathbf{p})$ in (6.30) we can now compute the normalization condition (see Exercise 6.3),

$$\bar{\omega}^r(\mathbf{p})\omega^{r'}(\mathbf{p}) = \delta_{rr'}\varepsilon_r \quad (6.34)$$

Then, in Exercise (6.4), we will prove the validity of

$$\omega^{r\dagger}(\varepsilon_r \mathbf{p}) \omega^{r'}(\varepsilon_{r'} \mathbf{p}) = \frac{E}{m_0 c^2} \delta_{rr'} \quad (6.35)$$

6.3 Normalization of the Spinor $\omega^r(p)$

Problem. Prove explicitly the normalization condition

$$\bar{\omega}^r(\mathbf{p})\omega^{r'}(\mathbf{p}) = \delta_{rr'}\varepsilon_r$$

for the spinors given in (6.30).

Solution

From these equations we get

$$\begin{aligned}
 \omega^1(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_z c}{E+m_0 c^2} \\ \frac{p_+ c}{E+m_0 c^2} \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m_0 c^2}{2m_0 c^2}}, \\
 \omega^3(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \frac{p_z c}{E+m_0 c^2} \\ \frac{p_+ c}{E+m_0 c^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m_0 c^2}{2m_0 c^2}}, \\
 \omega^2(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p_- c}{E+m_0 c^2} \\ \frac{-p_z c}{E+m_0 c^2} \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m_0 c^2}{2m_0 c^2}}, \\
 \omega^4(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \frac{p_- c}{E+m_0 c^2} \\ \frac{-p_z c}{E+m_0 c^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m_0 c^2}{2m_0 c^2}}.
 \end{aligned}$$

Now we take, say, the product $\bar{\omega}^{1\dagger}(p)\omega^1(p)$. Note, that $p_+^\dagger = p_-!$

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega}^1(\mathbf{p})\omega^1(\mathbf{p}) &= \left(1, 0, -\frac{p_z c}{E+m_0 c^2}, -\frac{p_- c}{E+m_0 c^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_z^0 c}{E + m_0 c^2} \\ \frac{p_+ c}{E + m_0 c^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2} \left\{ 1 - \frac{p_z^2 c^2}{(E + m_0 c^2)^2} - \frac{p_+ p_- c^2}{(E + m_0 c^2)^2} \right\} \\
&= \frac{1}{2m_0 c^2} \left\{ E + m_0 c^2 - \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) c^2}{(E + m_0 c^2)} \right\} \\
&= \frac{1}{2m_0 c^2} \frac{1}{E + m_0 c^2} \{ E^2 + 2Em_0 c^2 + m_0^2 c^4 - \mathbf{p}^2 c^2 \} \\
&= \frac{1}{2m_0 c^2 (E + m_0 c^2)} \{ 2Em_0 c^2 + 2m_0^2 c^4 \} \\
&= \frac{2(E + m_0 c^2) m_0 c^2}{2m_0 c^2 (E + m_0 c^2)} = 1 = \delta_{11} \varepsilon_1.
\end{aligned}$$

Next we calculate

$$\begin{aligned}
& \bar{\omega}^2(\mathbf{p}) \omega^3(\mathbf{p}) \\
&= \frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2} \\
& \times \left(0, 1, -\frac{p_+ c}{E + m_0 c^2}, +\frac{p_z c}{E + m_0 c^2} \right) \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E + m_0 c^2} \\ \frac{p_+ c}{E + m_0 c^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2} \left\{ \frac{p_+ c}{E + m_0 c^2} - \frac{p_+ c}{E + m_0 c^2} \right\} \\
&= 0 = \delta_{23} \varepsilon_2.
\end{aligned}$$

The third example we give is

$$\begin{aligned}
& \omega^4(\mathbf{p}) \omega^4(\mathbf{p}) \\
&= \frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2} \\
& \left(\frac{p_+ c}{E + m_0 c^2}, \frac{-p_z c}{E + m_0 c^2}, 0, -1 \right) \begin{pmatrix} \frac{p_- c}{E + m_0 c^2} \\ \frac{-p_z c}{E + m_0 c^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2m_0 c^2 (E + m_0 c^2)} \{ (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) c^2 \\
& \quad - (E + m_0 c^2)^2 \} \\
&= \frac{1}{2m_0 c^2 (E + m_0 c^2)} \{ \mathbf{p}^2 c^2 - E^2 \\
& \quad - 2Em_0 c^2 - m_0^2 c^4 \} = -1 = \delta_{44} \varepsilon_4.
\end{aligned}$$

All other combinations can be calculated in the same way. However, there is a more elegant procedure available: $\bar{\omega}^r(\mathbf{p}) \omega^{r'}(\mathbf{p})$ is a Lorentz scalar (cf. Exercise 5.1), and hence

$$\bar{\omega}^r(\mathbf{p}) \omega^{r'}(\mathbf{p}) = \bar{\omega}^r(0) \omega^{r'}(0) = \omega^{r\dagger}(0) \gamma^0 \omega^{r'}(0) = \delta_{rr'} \varepsilon_r,$$

which we see at once because of (6.3). But note: The probability density $\omega^{r\dagger}(\mathbf{p})\omega^r(\mathbf{p})$ is not Lorentz-invariant. This quantity is only the fourth component of the four-vector.

12.5.8 Relativistic Way of Constructing Solutions of Free Dirac Equation 2

6.4 Proof of the Relation

$$\omega^{r\dagger}(\varepsilon_r \mathbf{p}) \omega^{r'}(\varepsilon_{r'} \mathbf{p}) = \delta_{rr'} (E/m_0 c^2)$$

Problem. Show with the help of (6.30) that the following relation holds:

$$\omega^{r\dagger}(\varepsilon_r \mathbf{p}) \omega^{r'}(\varepsilon_{r'} \mathbf{p}) = \delta_{rr'} \frac{E}{m_0 c^2}$$

Solution

Again we calculate some examples

(a) $r = 1, r' = 1$:

$$\begin{aligned} & \left(1, 0, \frac{p_z c}{E + m_0 c^2}, \frac{p_- c}{E + m_0 c^2} \right) \frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_z^0 c}{E + m_0 c^2} \\ \frac{p_+ c}{E + m_0 c^2} \\ \frac{p_- c}{E + m_0 c^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2} \left\{ 1 + \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) c^2}{(E + m_0 c^2)^2} \right\} \\ &= \frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2} \frac{(E + m_0 c^2)^2 + p^2 c^2}{(E + m_0 c^2)^2} \\ &= \frac{2E^2 + 2m_0 c^2 E}{2m_0 c^2 (E + m_0 c^2)} = \frac{E}{m_0 c^2} \delta_{11}. \end{aligned}$$

(b) $r = 2, r' = 3$:

$$\begin{aligned} & \left(0, 1, +\frac{p_+ c}{E + m_0 c^2}, -\frac{p_z c}{E + m_0 c^2} \right) \\ & \times \frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2} \begin{pmatrix} -\frac{p_z c}{E + m_0 c^2} \\ -\frac{p_+ c}{E + m_0 c^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2} \left\{ -\frac{p_+ c}{E + m_0 c^2} + \frac{p_z c}{E + m_0 c^2} \right\} = 0. \end{aligned}$$

(c) $r = 4, r' = 4$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{p_+ c}{E + m_0 c^2}, +\frac{p_z c}{E + m_0 c^2}, 0, 1 \right) \\ & \times \frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2} \begin{pmatrix} -\frac{p_- c}{E + m_0 c^2} \\ +\frac{p_z c}{E + m_0 c^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2} \left\{ \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) c^2}{(E + m_0 c^2)^2} + 1 \right\} \\
 &= \frac{1}{2m_0 c^2 (E + m_0 c^2)} \{ \mathbf{p}^2 c^2 + E^2 + 2Em_0 c^2 + m_0^2 c^4 \} \\
 &= \frac{E}{m_0 c^2} \delta_{44}.
 \end{aligned}$$

The other remaining combinations can be calculated similarly.

The factor

$$\frac{E}{m_0 c^2} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2} m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

appearing in (6.35) just cancels the Lorentz contraction of the volume element in the direction of motion

$$\Delta V' = \Delta x' \Delta y' \Delta z' = \Delta x \sqrt{1 - \beta^2} \Delta y \Delta z = \Delta V \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Consequently the probability in the volume $\Delta V'$ becomes invariant, i.e.

$$\omega^{r'\dagger}(\mathbf{p}) \omega^{r'}(\mathbf{p}) \Delta V' = \omega^{r\dagger}(0) \omega^r(0) \Delta V = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sqrt{1 - \beta^2} \Delta V = 1 \cdot \Delta V. \quad (6.36)$$

We expect this property to hold for a proper normalization. Let us clearly point out the difference between the orthogonalization relations (6.34) and (6.35): In (6.34) the spinor $\omega^{r'}(p)$ is orthogonal to the adjoint spinor $\bar{\omega}^r(p)$ with the same momentum argument. On the other hand, for instance in (6.35), the spinor $\omega^{r'}(\varepsilon_r p)$ with positive energy ($r' = 1, 2$) is orthogonal to the Hermitian conjugate spinor $\omega^{r\dagger}(\varepsilon_r \mathbf{p})$ ($r = 3, 4$) belonging to negative energy and the reverse momentum argument. When considering the latter property we have to bear in mind that the sign of the momentum dependent term in the plane wave factor is also reversed for the negative energy solutions. Therefore two plane Dirac waves with the same spatial momentum $\mathbf{p}$ but opposite energy are orthogonal. This follows simply from the definition of the plane Dirac waves given in (6.6), (6.13) and (6.33) [compare also with (6.31)],

$$\begin{aligned}
 \psi_p^r(x) &= \omega^r(\mathbf{p}) e^{-i\varepsilon_r p_\mu x^\mu / \hbar} = \omega^r(\mathbf{p}) e^{-i\varepsilon_r p_0 x^0 / \hbar} e^{+i\varepsilon_r \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / \hbar}, \\
 p_0 &= +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2} > 0.
 \end{aligned}$$

Accordingly, we have, for a wave with $r = 1, 2$, the energy $E = +\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} = p_0 c$ and momentum $+\mathbf{p}$,

$$\psi_{\mathbf{p}}^{1,2}(x) = \omega^{1,2}(\mathbf{p}) e^{-ip_0 x^0 / \hbar} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / \hbar} = \omega^{1,2}(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu / \hbar}, \quad (6.37a)$$

and for one with $r = 3, 4$, the energy $E = -\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} = -p_0 c$ and momentum $+\mathbf{p}$

$$\psi_{-\mathbf{p}}^{3,4}(x) = \omega^{3,4}(-\mathbf{p}) e^{+ip_0 x^0 / \hbar} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / \hbar} = \omega^{3,4}(-\mathbf{p}) e^{+ip_0 x^0 / \hbar} e^{-i(-\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / \hbar)} \quad (6.37b)$$

Clearly we learn that both waves have the same momentum p (the same factor $e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / \hbar}$) but the opposite energy ($e^{-ip_0 x^0 / \hbar}$ and $e^{+ip_0 x^0 / \hbar}$, respectively). Hence the spinors $\omega^{1,2}(\mathbf{p})$ belong to positive energy and momentum $+\mathbf{p}$, whereas $\omega^{3,4}(-\mathbf{p})$ correspond to negative energy and the same momentum $+\mathbf{p}$. These spinors are orthogonal according to (6.35), and thus (6.37) holds. In fact, the relation (6.35) is required to ensure that any two plane waves $\psi_{\mathbf{p}'}^{r'}(x)$ and $\psi_{\mathbf{p}}^r(x)$ are orthogonal in the sense of the following scalar product:

$$\langle \psi_{\mathbf{p}'}^{r'} | \psi_{\mathbf{p}}^r \rangle = \int d^3x \psi_{\mathbf{p}'}^{r'\dagger}(x) \psi_{\mathbf{p}}^r(x) \quad (6.38)$$

Inserting the plane wave spinors of (6.31) we obtain

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\mathbf{p}'}^{r'} | \psi_{\mathbf{p}}^r \rangle &= \int d^3x \omega^{r'\dagger}(\mathbf{p}') \omega^r(\mathbf{p}) \exp \left[-i \left(\varepsilon_r p_\mu x^\mu / \hbar - \varepsilon_{r'} p'_\mu x^\mu / \hbar \right) \right] \\ &= \omega^{r'\dagger}(\mathbf{p}') \omega^r(\mathbf{p}) \exp \left[-i \left(\varepsilon_{r'} p'_0 x^0 / \hbar - \varepsilon_r p_0 x^0 / \hbar \right) \right] \\ &\quad \times (2\pi)^3 \delta^3(\varepsilon_{r'} \mathbf{p}' / \hbar - \varepsilon_r \mathbf{p} / \hbar). \end{aligned} \quad (6.39)$$

The integration over the spatial coordinates has led to a delta function containing the momentum vectors $\mathbf{p}$ and $\mathbf{p}'$. Thus the scalar product vanishes unless $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ (if the energies have equal sign) or unless $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$ (for opposite signs of the energy, $\varepsilon_{r'} \neq -\varepsilon_r$). This is just the condition for which the orthogonality relation of the unit spinors ω^r (6.35) applies! Thus we obtain for any two plane waves

$$\langle \psi_{\mathbf{p}'}^{r'} | \psi_{\mathbf{p}}^r \rangle = \frac{E}{m_0 c^2} (2\pi)^3 \delta^3((\mathbf{p}' - \mathbf{p}) / \hbar) \delta_{rr'} \quad (6.40)$$

Up to a normalization factor this is just the orthogonality property one would expect for plane wave states.

The closure relation is important too:

$$\sum_{r=1}^4 \varepsilon_r \omega_\alpha^r(p) \bar{\omega}_\beta^r(p) = \delta_{\alpha\beta} \quad (6.41)$$

Here the sum extends over all four spinors, taking from the first one only the component α and from the second adjoint one solely the component β . Therefore, the closure relation (6.39) expresses a kind of row orthonormality of the matrix (6.30). Due to (6.13), in the rest frame ($p = 0$) of the electron clearly

$$\sum_{r=1}^4 \varepsilon_r \omega_\alpha^r(0) \bar{\omega}_\beta^r(0) = \delta_{\alpha\beta} \quad (6.42)$$

is valid. For this reason (6.41) can be traced back to (6.42). Indeed with the help of (6.32) and we can calculate it directly:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^4 \varepsilon_r \omega_\alpha^r(\mathbf{p}) \bar{\omega}_\beta^r(\mathbf{p}) &= \sum_{r=1, \gamma, \lambda}^4 \varepsilon_r \hat{S}_{\alpha\gamma} \left(-\frac{\mathbf{p}}{E} \right) \omega_\gamma^r(0) \bar{\omega}_\lambda^r(0) \hat{S}_{\lambda\beta}^{-1} \left(-\frac{\mathbf{p}}{E} \right) \\ &= \sum_{\gamma, \lambda} \hat{S}_{\alpha\gamma} \left(-\frac{\mathbf{p}}{E} \right) \hat{S}_{\lambda\beta}^{-1} \left(-\frac{\mathbf{p}}{E} \right) \sum_{r=1}^4 \varepsilon_r \omega_\gamma^r(0) \bar{\omega}_\lambda^r(0) \\ &= \sum_{\gamma, \lambda} \hat{S}_{\alpha\gamma} \left(-\frac{\mathbf{p}}{E} \right) \hat{S}_{\lambda\beta}^{-1} \left(-\frac{\mathbf{p}}{E} \right) \delta_{\gamma\lambda} \\ &= \sum_{\gamma} \hat{S}_{\alpha\gamma} \left(-\frac{\mathbf{p}}{E} \right) \hat{S}_{\gamma\beta}^{-1} \left(-\frac{\mathbf{p}}{E} \right) = \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (6.43)$$

where in the first line we have used the relation

$$\hat{S}^\dagger = \gamma^0 \hat{S}^{-1} \gamma^0 \quad (6.44)$$

from (3.63). This is again the reason why the adjoint spinor $\bar{\omega}^r = \omega^{r\dagger}\gamma_0$ appears in the closure relation (6.41), but not the Hermitian conjugate $\omega^{r\dagger}$. It is in accordance with the fact that the Lorentz transformation of the spinors is not unitary as expressed in (6.44).

6.5 Independence of the Closure Relation from the Representation of the Dirac Spinors

Problem. Show that the relation (6.41)

$$\sum_{r=1}^4 \varepsilon_r \omega_\alpha^r(\mathbf{p}) \bar{\omega}_\beta^r(\mathbf{p}) = \delta_{\alpha\beta}$$

is independent of the special representation from the Dirac spinors.

Solution

Let another representation $\tilde{\gamma}_\mu = \hat{U}\gamma_\mu\hat{U}^{-1}$ of the Dirac algebra ($\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$) be given, and let $v^r(0)$ denote the spinors of the free particles at rest, constructed accordingly. We will prove that from (6.41) it follows that

$$\sum_r \varepsilon_r v_\alpha^r(\mathbf{p}) \bar{v}_\beta^r(\mathbf{p}) = \delta_{\alpha\beta}.$$

As seen previously [see (6.43)], one can show that (1) is equivalent to

$$\sum_r \varepsilon_r v_\alpha^r(0) \bar{v}_\beta^r(0) = \delta_{\alpha\beta},$$

and therefore we prove (2).

With the change of the representation $\tilde{\gamma}_\mu = \hat{U}\gamma_\mu\hat{U}^{-1}$, the spinors become $v^r(0) = \hat{U}\omega^r(0)$.

Hence we have

$$\begin{aligned} \sum_r \varepsilon_r v_\alpha^r \bar{v}_\beta^r &= \sum_r \varepsilon_r \left(\hat{U} \omega^r \right)_\alpha \left(\overline{\hat{U} \omega^r} \right)_\beta \\ &= \sum_{r,\gamma} \varepsilon_r \hat{U}_{\alpha\gamma} \omega_\gamma^r \left(\left(\hat{U} \omega^r \right)^\dagger \tilde{\gamma}_0 \right)_\beta \\ &= \sum_{r,\gamma} \varepsilon_r \hat{U}_{\alpha\gamma} \omega_\gamma^r \left(\omega^{r\dagger} \hat{U}^{-1} \tilde{\gamma}_0 \right)_\beta \\ &= \sum_{r,\gamma,\delta} \varepsilon_r \hat{U}_{\alpha\gamma} \omega_\gamma^r \left(\omega^{r\dagger} \gamma_0 \right)_\delta \left(\hat{U}^{-1} \right)_{\delta\beta} \\ &= \sum_{r,\gamma,\delta} \varepsilon_r \omega_\gamma^r \bar{\omega}_\delta^r \hat{U}_{\alpha\gamma} \left(\hat{U}^{-1} \right)_{\delta\beta} \\ &= \sum_{\gamma,\delta} \delta_{\gamma\delta} \hat{U}_{\alpha\gamma} \left(\hat{U}^{-1} \right)_{\delta\beta} \\ &= \sum_\delta \hat{U}_{\alpha\beta} \left(\hat{U}^{-1} \right)_{\delta\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

which is the form required.

6.6 Proof of Another Closure Relation for Dirac Spinors

Problem. Prove directly the closure relation

$$\sum_{r=1}^4 \omega_\alpha^r(\varepsilon_r \mathbf{p}) \omega_\beta^{r\dagger}(\varepsilon_r \mathbf{p}) = \frac{E}{m_0 c^2} \delta_{\alpha\beta} \quad (1)$$

Solution

We use the equation

$$\omega^r(\varepsilon_r \mathbf{p}) = \hat{S}\left(-\frac{\varepsilon_r \mathbf{p}}{E}\right) \omega^r(0),$$

insert the expression for $\hat{S}$ given by

$$\begin{aligned} \hat{S}\left(-\frac{\varepsilon_r \mathbf{p}}{E}\right) &= 11 \cosh \frac{\omega}{2} - \frac{\varepsilon_r \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \sinh \frac{\omega}{2} \\ &= 11 \cosh \frac{\omega}{2} - \sum_i \varepsilon_r \frac{\hat{\alpha}_i p_i}{p} \sinh \frac{\omega}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

and use this to transform (1) into

$$\begin{aligned} A &\equiv \sum_r \omega_\alpha^r(\varepsilon_r p) \omega_\beta^{r\dagger}(\varepsilon_r \mathbf{p}) \\ &= \sum_{r,\gamma,\delta} \left[\left(\cosh\left(\frac{\omega}{2}\right) \delta_{\alpha\gamma} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_i \frac{\varepsilon_r (\hat{\alpha}_i)_{\alpha\gamma} p_i}{p} \sinh \frac{\omega}{2} \right) \omega_\gamma^r(0) \right] \\ &\quad \times \left[\omega_\delta^{r\dagger}(0) \left(\cosh\left(\frac{\omega}{2}\right) \delta_{\delta\beta} - \sum_i \frac{\varepsilon_r (\hat{\alpha}_i^\dagger)_{\delta\beta} p_i}{p} \sinh \frac{\omega}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

The matrices $\hat{\alpha}_i$ are Hermitian $[\hat{\alpha}_i^\dagger = \hat{\alpha}_i]$ and by explicit multiplication we get

$$\begin{aligned} A &= \cosh^2 \frac{\omega}{2} \sum_r \omega_\alpha^r(0) \omega_\beta^{r\dagger}(0) \\ &\quad - \cosh \frac{\omega}{2} \sinh \frac{\omega}{2} \sum_{r,i,\gamma,\delta} \left[\frac{(\hat{\alpha}_i)_{\alpha\gamma} p_i}{p} \varepsilon_r \omega_\gamma^r(0) \omega_\beta^{r\dagger}(0) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_r \omega_\alpha^r(0) \omega_\delta^{r\dagger}(0) \frac{(\hat{\alpha}_i)_{\delta\beta} p_i}{p} \right] + \sinh^2 \frac{\omega}{2} \\ &\quad \times \sum_{r,i,j,\gamma,\delta} \omega_\gamma^r(0) \omega_\delta^{r\dagger}(0) \frac{p_i p_j}{p^2} (\hat{\alpha}_i)_{\alpha\gamma} (\hat{\alpha}_j)_{\delta\beta} \end{aligned} \quad (5)$$

In the last term we have used that

$$\left[-\varepsilon_r \frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}}{p} \right]_{\alpha\gamma} \left[-\varepsilon_r \frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}}{p} \right]_{\delta\beta} = \sum_{i,j} \frac{p_i p_j}{p^2} (\hat{\alpha}_i)_{\alpha\gamma} (\hat{\alpha}_j)_{\delta\beta} \quad (6)$$

For the $\omega^r(0)$

$$\gamma_0 \omega^r(0) = \varepsilon_r \omega^r(0)$$

$$\Leftrightarrow \sum_\tau (\gamma_0)_{\sigma\tau} \omega_\tau^r(0) = \varepsilon_r \omega_\sigma^r(0) \text{ is valid; hence,}$$

$$\omega^{r\dagger}(0) = \bar{\omega}^r(0) \gamma_0 = \varepsilon_r \bar{\omega}^r(0). \quad (8)$$

Therefore (5) turns out to be

$$\begin{aligned}
 & \cosh^2 \frac{\omega}{2} \sum_r \varepsilon_r \omega_\alpha^r(0) \bar{\omega}_\beta^r(0) - \sinh \frac{\omega}{2} \cosh \frac{\omega}{2} \\
 & \times \underbrace{\sum_{r,i,\gamma,\delta} \left[\frac{(\hat{\alpha}_i)_{\alpha\gamma} p_i}{p} \omega_\gamma^r(0) \bar{\omega}_\beta^r(0) + \omega_\alpha^r(0) \bar{\omega}_\delta^r(0) \frac{(\hat{\alpha}_i)_{\delta\beta} p_i}{p} \right]}_{=B} \\
 & + \sinh^2 \frac{\omega}{2} \sum_{r,i,j,\gamma,\delta} \varepsilon_r \omega_\gamma^r(0) \bar{\omega}_\delta^r(0) \frac{p_i p_j}{p^2} (\hat{\alpha}_i)_{\alpha\gamma} (\hat{\alpha}_j)_{\delta\beta}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Because of the closure relation (6.41) one can sum over r in the first and the last sum to obtain

$$\begin{aligned}
 A &= \cosh^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) \delta_{\alpha\beta} - \sinh \left(\frac{\omega}{2} \right) \cosh \left(\frac{\omega}{2} \right) B \\
 &+ \sinh^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) \sum_{i,j,\gamma} \frac{p_i p_j}{p^2} (\hat{\alpha}_i)_{\alpha\gamma} (\hat{\alpha}_j)_{\gamma\beta}
 \end{aligned} \tag{10}$$

According to Exercise 6.1, (2) one has

$$\sum_{i,j,\gamma} p_i p_j (\hat{\alpha}_i)_{\alpha\gamma} (\hat{\alpha}_j)_{\gamma\beta} = \sum_{i,j} (p_i p_j \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j)_{\alpha\beta} = p^2 \delta_{\alpha\beta} \quad ,$$

and consequently (10) changes to

$$\begin{aligned}
 A &= \cosh^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) \delta_{\alpha\beta} + \sinh^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) \delta_{\alpha\beta} \\
 &+ B \sinh \left(\frac{\omega}{2} \right) \cosh \left(\frac{\omega}{2} \right) \\
 &= \delta_{\alpha\beta} \left(2 \cosh^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) - 1 \right) - B \sinh \left(\frac{\omega}{2} \right) \cosh \left(\frac{\omega}{2} \right) \\
 &= \delta_{\alpha\beta} \left(2 \frac{E + m_0 c^2}{2 m_0 c^2} - 1 \right) - B \sinh \left(\frac{\omega}{2} \right) \cosh \left(\frac{\omega}{2} \right) \\
 &= \delta_{\alpha\beta} \frac{E}{m_0 c^2} - B \sinh \left(\frac{\omega}{2} \right) \cosh \left(\frac{\omega}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{11}$$

To finish the proof, we need to show that B vanishes. With the help of (7a) and (9) this term reads

$$\begin{aligned}
 B &= \sum_{r,i,\gamma,\delta} \left[\frac{(\hat{\alpha}_i)_{\alpha\gamma} p_i}{p} \omega_\gamma^r(0) \bar{\omega}_\beta^r(0) + \omega_\alpha^r(0) \bar{\omega}_\delta^r(0) \frac{(\hat{\alpha}_i)_{\delta\beta} p_i}{p} \right] \\
 &= \sum_{r,i,\gamma,\delta} \left[\frac{(\hat{\alpha}_i)_{\alpha\gamma} (\gamma_0)_{\gamma\sigma} p_i}{p} \varepsilon_r \omega_\sigma^r(0) \bar{\omega}_\beta^r(0) \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon_r \omega_\alpha^r(0) \bar{\omega}_\tau^r(0) \frac{(\gamma_0)_{\tau\delta} (\hat{\alpha}_i)_{\delta\beta} p_i}{p} \right] \\
 &= \sum_i \frac{p_i}{p} \left[(\hat{\alpha}_i \gamma_0)_{\alpha\beta} + (\gamma_0 \hat{\alpha}_i)_{\alpha\beta} \right],
 \end{aligned} \tag{12}$$

where again we have used (6.41). But now it holds that $\hat{\alpha}_i \gamma_0 = -\gamma_0 \hat{\alpha}_i$ and consequently (12) vanishes. Hence we have in fact:

$$\sum_r \omega_\alpha^r(\varepsilon_r \mathbf{p}) \omega_\beta^{r\dagger}(\varepsilon_r \mathbf{p}) = \frac{E}{m_0 c^2} \delta_{\alpha\beta}.$$

6.3 Polarized Electrons in Relativistic Theory

Electrons at rest are described by the spinors (6.3) and (6.13). These electrons are polarized in the z direction. For example, the spinor

$$\omega^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

describes an electron at rest with spin projection $-\hbar/2$ on the z direction. If the rotation operator [(3.56), (3.57)]

$$\hat{S}_R = e^{i\varphi \hat{\Sigma} \cdot s/2} \quad (6.45)$$

where s is the unit vector along the rotation axis, acts on the states (6.3), one will obtain states which are - according to s - polarized in any arbitrary direction. A state (spinor) ω , which is polarized in the direction s is an eigenstate of the spin operator $\hat{S} \cdot s$ in this direction:

$$\hat{S} \cdot s \omega = \frac{\hbar}{2} \omega$$

or, with $\hat{S} = \hbar \hat{\Sigma}/2$,

$$\hat{\Sigma} \cdot s \omega = \omega \quad (6.46)$$

Our next task is to turn this equation into a covariant form. This means we are searching for the generalization of a (three-) spin vector into a (four-) spin vector. First we note:

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix}$$

contains the Pauli matrices $\hat{\sigma}$ in the main diagonal; thus the form of the 4-spinor equation (6.46) will be similar to the 2-component Pauli theory. In the relativistic theory one commonly uses a different notation. The spinor of a (free) solution of the Dirac equation with positive energy, momentum p^μ and spin vector s^μ is denoted by

$$u(p, s).$$

Hence $u(p, s)$ satisfies the equation

$$(\not{p} - m_0 c)_{\alpha\beta} u_\beta(p, s) = 0. \quad (6.47)$$

Now we have to clarify the meaning of a four-spin vector s^μ . To do this we start with the polarization vector s in the rest system, which is a unit vector ($s \cdot s = 1$), and write

$$(s^\nu)_{\text{R.S.}} \equiv (s^\nu)_{\text{rest system}} = (0, s). \quad (6.48)$$

In an arbitrary inertial system we can get the four-spinor s^μ by a Lorentz transformation of $(s^\mu)_{\text{R.S.}}$ from the rest system:

$$s^\mu = a^\mu{}_\nu (s^\nu)_{\text{R.S.}}. \quad (6.49)$$

The $a^\mu{}_\nu$ are the coefficients of the Lorentz transformation from the moving system to the rest system. Hence it also holds, e.g. for the momentum, that

$$p^\mu = a^\mu_\nu (p^\nu)_{\text{R.S.}} \quad , \quad \text{where} \quad (6.50)$$

$$(p^\nu)_{\text{R.S.}} = (m_0 c, 0, 0, 0) \quad . \quad (6.51)$$

Because of the Lorentz invariance of the four-dimensional scalar product it now follows immediately that

$$s_\mu s^\mu = (s_\mu)_{\text{R.S.}} (s^\mu)_{\text{R.S.}} = -\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = -1 \quad (6.52)$$

and

$$p^\mu s_\mu = (p^\mu)_{\text{R.S.}} (s_\mu)_{\text{R.S.}} = (m_0 c, 0, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -s_x \\ -s_y \\ -s_z \end{pmatrix} = 0 \quad (6.53)$$

In the rest system u satisfies (6.46), and hence

$$\hat{\Sigma} \cdot \mathbf{s} u((p)_{\text{R.S.}}, (s)_{\text{R.S.}}) = u((p)_{\text{R.S.}}, (s)_{\text{R.S.}}) \quad . \quad (6.54)$$

In the moving system we obtain $u(p, s)$ from $u((p)_{\text{R.S.}}, (s)_{\text{R.S.}})$ by the Lorentz transformation $\hat{S}(\hat{a})$ for spinors. Let us consider a solution $v(p, s)$ of the free Dirac equation for negative energy. Because of (6.33a) it satisfies

$$(\mathbf{p} + m_0 c) v(p, s) = 0. \quad (6.55)$$

We require that the solution $v(p, s)$ has the polarization $-s$ in the rest system, i.e. in the rest system

$$\hat{\Sigma} \cdot \mathbf{s} v((p)_{\text{R.S.}}, (s)_{\text{R.S.}}) = -v((p)_{\text{R.S.}}, (s)_{\text{R.S.}}) \quad (6.56)$$

is valid. The minus sign on the rhs, which on first sight seems to be paradoxical, is remarkable. Later we will interpret this within the hole theory. The spinors $w^r(\mathbf{p})$, which arise from the rest spinors (6.13) obviously fulfill the demands (6.54) and (6.56), if we define $s = e_z$ and use the following relations:

$$\begin{aligned} u(p, u_z) &= \omega^1(\mathbf{p}), & v(p, u_z) &= \omega^4(\mathbf{p}), \\ u(p, -u_z) &= \omega^2(\mathbf{p}), & v(p, -u_z) &= \omega^3(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (6.57)$$

There u_z^ν is that four-vector in the moving system which arises from the Lorentz-transformation of the unit vector u_z in the z direction, which is defined in the rest system by

$$(u_z^\nu)_{\text{R.S.}} = (0, \mathbf{u}_z) = (0, 0, 0, 1). \quad (6.58)$$

One may wonder why the spin projection (6.56) for electrons with negative energy is defined with the opposite sign. The reason for this becomes obvious later when we interpret an electron with negative energy, momentum $-\mathbf{p}$ and spin direction minus $=\downarrow$ as a positron with positive energy, momentum $+\mathbf{p}$ and spin direction plus $=\uparrow$. Then the relations given in (6.56) and (6.57) can be understood in the positron language! The spinor $v((p)_{\text{R.S.}}, (s)_{\text{R.S.}})$ describes a positron with the opposite spin to that which might first seem to be the case (in the "electron language"). We note that, according to this, an arbitrary spinor is characterized by its momentum p_μ , the sign of the energy and the polarization $(s^\mu)_{\text{R.S.}}$ in the rest system. [See the last part of Chap. 7 and also Chap. 12 (Hole Theory)].

12.5.9 Projection Operators for Energy and Spin

In practical calculations of quantum electrodynamic (QED) processes we will become acquainted with a technique of calculation which allows the simple treatment of complicated expressions; especially the calculation of traces of products of many γ matrices. It is based on a projection procedure, i.e. a method to project a spinor with a given sign of energy and fixed polarization out of a general wave function or a wave packet. The appropriate operators which achieve this are called projection operators. In the nonrelativistic case, say,

$$\hat{P}_{\pm} = \frac{1 \pm \hat{\sigma}_z}{2} \quad (7.1)$$

is a projection operator for spin up (+) or down (-). Acting on an arbitrary state $\hat{P}_{\pm}$ just takes out the corresponding parts. Now we want to generalize this concept to the relativistic case and to search for four operators which project those four independent parts belonging to positive or negative energy with spin up or spin down, and with the same momentum p , out of an arbitrary free solution of the Dirac equation (i.e. out of a plane wave with momentum $\mathbf{p}$). Those four projection operators are denoted by $\hat{P}_r(\mathbf{p})$. They should, of course, be in covariant form so that they can be given in any Lorentz system (by transformation) in an easy way. We denote those four projectors explicitly as

$$\hat{P}_r(\mathbf{p}) \equiv \hat{P}(p_{\mu}, u_z, \varepsilon)$$

They should obey the conditions

$$\hat{P}_r(\mathbf{p})\omega^{r'}(\mathbf{p}) = \delta_{rr'}\omega^{r'}(\mathbf{p}) \quad \text{and} \quad (7.2)$$

$$\hat{P}_r(\mathbf{p})\hat{P}_{r'}(\mathbf{p}) = \delta_{rr'}\hat{P}_r(\mathbf{p}). \quad (7.3)$$

Both equations show the projection properties of $\hat{P}_r(p)$ very clearly. If we now recall (6.33a), i.e.

$$(\not{p} - \varepsilon_r m_0 c)\omega^r(\mathbf{p}) = 0 = (\varepsilon_r \not{p} - m_0 c)\omega^r(p), \quad (7.4)$$

we at once find the projection operator for eigenstates with positive or negative energy:

$$\hat{\Lambda}(p) = \frac{\varepsilon_r \not{p} + m_0 c}{2m_0 c}. \quad (7.5)$$

Indeed, with the help of (7.4) we find

$$\hat{\Lambda}_r(p)\omega^r(p) = \frac{\varepsilon_r \not{p} + m_0 c}{2m_0 c}\omega^r(p) = \frac{2m_0 c}{2m_0 c}\omega^r(p) = \omega^r(p) \quad (7.6)$$

and furthermore because of

$$\begin{aligned} \not{p}\not{p} &= \gamma_{\mu}\gamma_{\nu}p^{\mu}p^{\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu})p^{\mu}p^{\nu} = g_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu} = p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 \\ &= \frac{m_0^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 \end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned}
 \hat{\Lambda}_r(p)\hat{\Lambda}_{r'}(p) &= \frac{(\varepsilon_r \not{p} + m_0 c)(\varepsilon_{r'} \not{p} + m_0 c)}{4m_0^2 c^2} \\
 &= \frac{\varepsilon_r \varepsilon_{r'} \not{p} + m_0^2 c^2 + (\varepsilon_r + \varepsilon_{r'}) m_0 c}{4m_0^2 c^2} \\
 &= \frac{m_0^2 c^2 (1 + \varepsilon_r \varepsilon_{r'}) + m_0 c (\varepsilon_r + \varepsilon_{r'})}{4m_0^2 c^2} \\
 &= \frac{m_0^2 c^2 (1 + \varepsilon_r \varepsilon_{r'}) + m_0 c (\varepsilon_r (1 + \varepsilon_r \varepsilon_{r'}))}{4m_0^2 c^2} \\
 &= \frac{(1 + \varepsilon_r \varepsilon_{r'})}{2} m_0 c \frac{(m_0 c + \varepsilon_r \not{p})}{2m_0^2 c^2} = \frac{(1 + \varepsilon_r \varepsilon_{r'})}{2} \hat{\Lambda}_r(p)
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Obviously all the operators (7.5) decompose into only two types, namely those with $\varepsilon_r = +1$ (which we call $\hat{\Lambda}_+$) and the ones with $\varepsilon_r = -1$ (which we call $\hat{\Lambda}_-$):

$$\hat{\Lambda}_{\pm}(p) = \frac{\pm \not{p} + m_0 c}{2m_0 c} \tag{7.8}$$

Notice that is written here, and not $\mathbf{p}$. Hence the momentum (with real numbers as components) and not the momentum operator occurs in the projector (7.8). We may present the relations (7.7) more transparently by writing explicitly

- a) $(\hat{\Lambda}_+)^2 = \hat{\Lambda}_+$,
- b) $(\hat{\Lambda}_-)^2 = \hat{\Lambda}_-$,
- c) $\hat{\Lambda}_+ \hat{\Lambda}_- = 0$, and also
- d) $\hat{\Lambda}_+ + \hat{\Lambda}_- = 1$.

These are the typical properties an energy projection operator must have. Besides, the expression (7.5) is also covariant, so that all required conditions are fulfilled.

Now we consider the spin projection operator. Again we consider the rest frame, where the spin can be easily described. We already know from (7.1) that in this case the projection operator for "spin up" or "spin down" is given in the nonrelativistic limit by

$$\hat{P}_{\pm} = \frac{1 \pm \hat{\sigma}_3}{2}.$$

If we define the spin-projection operator with respect to an arbitrary axis given by the unit vector $\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$) in a nonrelativistic theory, then (7.1) is generalized to

$$\hat{P}(u) = \frac{1 + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{u}}{2} \tag{7.10}$$

It is obvious that with $u_z = (0, 0, +1)$, the special case (7.1) is contained within the general expression (7.10). But this is still nonrelativistic. In the Dirac theory we need the relativistic covariant generalization of the operators (7.1) or (7.10). For that purpose we make use of the four-component vector

$$u_z^\nu \tag{7.11}$$

which is given in the rest system of the electron by

$$(u_z^\nu)_{\text{R.S.}} = (0, 0, 0, 1) = (0, u_z) \tag{7.12}$$

[cf. (6.58)]. Thus, by Lorentz transformation into arbitrary inertial systems it follows that

$$u_z^\nu = a_\mu^\nu (u_z^\mu)_{\text{R.S.}} \quad (7.13)$$

With (7.12) we can write the spin-projection operator in the rest system, which is now extended to the fourth dimension and labelled by $\hat{\Sigma}(u_z)$. This generalization is achieved by first denoting $\hat{\Sigma}(u_z^3)$ where u_z^3 is the third component of $\mathbf{u}_z$ of (7.12):

$$\hat{\Sigma}(u_z^3) = \frac{1 + \hat{\Sigma}_3}{2} = \frac{1 + \gamma_5 \gamma_3 (u_z^3)_{\text{R.S.}} \gamma_0}{2} = \frac{1 + \gamma_5 (\not{u}_z)_{\text{R.S.}} \gamma_0}{2} \quad (7.14)$$

This is because $(u_z)_{\text{R.S.}} = (u_z^\nu \gamma_\nu)_{\text{R.S.}} = (u_z^3)_{\text{R.S.}} \gamma_3$ and therefore

$$\begin{aligned} \gamma_5 \gamma_3 (u_z^3)_{\text{R.S.}} \gamma_0 &= \gamma_5 \gamma_3 \gamma_0 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma_3 \gamma_0 \\ &= -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \underbrace{\gamma^3 \gamma^3}_{-11} \gamma^0 = +i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^0 \\ &= +i \gamma^1 \gamma^2 = i \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_1 \\ -\hat{\sigma}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_2 \\ -\hat{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} -\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_3 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_3 \end{pmatrix} \equiv \hat{\Sigma}_3, \end{aligned} \quad (7.15)$$

and ${}^1\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = i \varepsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k + \delta_{ij}$. Now the question arises how to generalize (7.14) to a covariant form. The factor γ_0 is disturbing, while $\gamma_5 \mathbf{u}_z$ is a covariant expression. In the rest frame the effect of γ_0 on the rest spinors $w^r(0)$ is given solely by the factor ± 1 . For the spinors $w^{1,2}(0)$ we can therefore easily omit γ_0 in (7.14). If we do the same for the spinors $w^{3,4}(0)$, the effect in the rest frame is

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(u_z^3) \omega^{3,4}(0) &= \frac{1 + \gamma_5 (u_z^3)_{\text{R.S.}}}{2} \omega^{3,4}(0) = \frac{1 + \gamma_5 (\not{u}_z^3)_{\text{R.S.}} \gamma^0 \gamma^0}{2} \omega^{3,4}(0) \\ &= \frac{1 - \gamma_5 (u_z^3)_{\text{R.S.}} \gamma_0}{2} \omega^{3,4}(0) = \frac{1 - \hat{\Sigma}_3}{2} \omega^{3,4}(0) \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \cdot \omega^3(0) \\ 1 \cdot \omega^4(0) \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

This would be exactly opposite to what we may naively expect. Analogously, one easily verifies that

$$\hat{\Sigma}(-u_z^3) \omega^{3,4}(0) = \begin{Bmatrix} 1 \cdot \omega^3(0) \\ 0 \cdot \omega^4(0) \end{Bmatrix}. \quad (7.17)$$

Now we see that the covariant spin-projection operator

$$\hat{\Sigma}(u_z) = \frac{1 + \gamma_5 u_z}{2} \quad (7.18)$$

satisfies the following relations in the rest system [denoting $\hat{\Sigma}((u_z)_{\text{R.S.}}) \equiv \hat{\Sigma}(u_z)(0)$]:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(u_z)(0) \omega^1(0) &= \omega^1(0), & \hat{\Sigma}(-u_z)(0) \omega^1(0) &= 0, \\ \hat{\Sigma}(u_z)(0) \omega^2(0) &= 0, & \hat{\Sigma}(-u_z)(0) \omega^2(0) &= \omega^2(0), \\ \hat{\Sigma}(u_z)(0) \omega^3(0) &= 0, & \hat{\Sigma}(-u_z)(0) \omega^3(0) &= \omega^3(0), \\ \hat{\Sigma}(u_z)(0) \omega^4(0) &= \omega^4(0), & \hat{\Sigma}(-u_z)(0) \omega^4(0) &= 0, \end{aligned} \quad (7.19a)$$

¹ See Vol. 1 of this series, Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989), Exercise 13.2.

which we can rewrite with the help of the definitions (6.57):

$$\begin{aligned}
 \hat{\Sigma}(u_z)(0)u(0, u_z) &= u(0, u_z), & \hat{\Sigma}(-u_z)(0)u(0, u_z) &= 0, \\
 \hat{\Sigma}(u_z)(0)u(0, -u_z) &= 0, & \hat{\Sigma}(-u_z)(0)u(0, -u_z) &= u(0, -u_z), \\
 \hat{\Sigma}(u_z)(0)v(0, -u_z) &= 0, & \hat{\Sigma}(-u_z)(0)v(0, -u_z) &= v(0, -u_z), \\
 \hat{\Sigma}(u_z)(0)v(0, u_z) &= v(0, u_z), & \hat{\Sigma}(-u_z)(0)v(0, u_z) &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.19b}$$

Notice, the operator $\hat{\Sigma}(u_z)$ should not be confused with the operator $\hat{\Sigma}!$ Because (7.18) is covariant, these relations are also valid in a moving system in which the spinors are given by $u(p, u_z) \dots$:

$$\begin{aligned}
 \hat{\Sigma}(u_z)u(p, u_z) &= u(p, u_z), \\
 \hat{\Sigma}(u_z)v(p, u_z) &= v(p, u_z), \\
 \hat{\Sigma}(-u_z)u(p, u_z) &= \hat{\Sigma}(-u_z)v(p, u_z) = 0.
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

The covariant generalization (7.18) of the nonrelativistic spin-projection operator (7.14) corresponds naturally to the convention, given by (6.56) and (6.57). Therein the spin projections of negative-energy states are contragredient (i.e. opposite) to those of normal "states" of positive energy [see (6.54) and (6.56)]. The positron interpretation of the hole theory, which we have already preliminary considered in (6.57), comes up here in a natural way through the covariant spin-projection operator. Furthermore, we generalize the spinprojection operator (7.18) for an arbitrary spin vector s^μ with $s^\mu p_\mu = 0$ [see (6.52) and (5.53)]:

$$\hat{\Sigma}(s) = \frac{11 + \gamma_5}{2} \tag{7.21}$$

Because of the covariance, it follows that as a generalization of (7.20) the $u(p, s)$ and $v(p, s)$ obey the relations [see (6.48)-(6.57)]

$$\begin{aligned}
 \hat{\Sigma}(s)u(p, s) &= u(p, s) \\
 \hat{\Sigma}(s)v(p, s) &= v(p, s) \\
 \hat{\Sigma}(-s)u(p, s) &= \hat{\Sigma}(-s)v(p, s) = 0.
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

7.1 Simultaneous Projections of Energy and Spin

With the projection operators $\hat{\Lambda}_\pm(p)$ for the energy and $\hat{\Sigma}(s)$ for the spin we can easily construct projectors for energy and spin. As we already know, the motion of a free particle is completely determined by

the four momentum p_μ ,
the sign of the energy ε ,
and the polarization s^μ ,

with $s^\mu p_\mu = 0$. Therefore the energy spin projectors

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_1(\mathbf{p}) &= \hat{\Sigma}_+(p)\hat{\Sigma}(u_z), & \hat{P}_2(\mathbf{p}) &= \hat{\Lambda}_+(p)\hat{\Sigma}(-u_z), \\
 \hat{P}_3(\mathbf{p}) &= \hat{\Lambda}_-(p)\hat{\Sigma}(-u_z), & \hat{P}_4(\mathbf{p}) &= \hat{\Lambda}_-(p)\hat{\Sigma}(u_z),
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

which are composed of (7.8) and (7.18), determine the free Dirac waves, these being projected out of superposed wave functions (wave packets). The order of the energy and spin projection in (7.23) does not matter because

$$\left[\hat{\Sigma}(s), \hat{\Lambda}_{\pm}(p) \right]_{-} = 0 \quad (7.24)$$

as $s^{\mu}p_{\mu} = 0$ is valid. This is easy to verify, because the commutator (7.24) is equivalent to the commutator

$$[\not{p}, \gamma_5 \phi]_{-} = 0, \quad (7.25)$$

which we immediately prove:

$$\begin{aligned} \gamma_5 \not{s} &= \gamma^{\mu} p_{\mu} i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^{\nu} s_{\nu} = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} s_{\nu} p_{\mu} = -\gamma_5 (2g^{\mu\nu} - \gamma^{\nu} \gamma^{\mu}) s_{\nu} p_{\mu} \\ &= \gamma_5 \not{p} \end{aligned}$$

Here $g^{\mu\nu} s_{\nu} p_{\mu} = s^{\mu} p_{\mu} = s \cdot p = 0$ according to (6.53). Because of (7.2), (7.6) and (7.20) or (7.19a), we easily confirm that the defining equations (7.2), i.e.

$$\hat{P}_r(\mathbf{p}) \omega^{r'}(p) = \delta_{rr'} \omega^{r'}(p) \quad (7.26)$$

are fulfilled!

In the following ² we will appreciate the usefulness of these projection operators, which at first seem to be a little artificial. With their help we will often perform practical calculations, without explicit use of γ matrices and free spinors. Indeed, we will see that an explicit calculation, component by component, can be replaced by a rather elegant one through the use of the projectors.

According to (6.31) the general free solution was given by

$$\psi^r(x) = \omega^r(\mathbf{p}) e^{-i\varepsilon_r p_0 x^0 / \hbar}$$

For $r = 1, 2$ these are free waves of positive energy ($\varepsilon_r p_0 = p_0$) and momentum $\hat{p}_i \psi^{1,2}(x) = p_i \psi^{1,2}(x)$. For $r = 3, 4$ these waves have negative energy ($\varepsilon_r p_0 = -p_0$) and the eigenvalues of the momentum operators are

$$\hat{p}_i \psi^{3,4}(x) = \varepsilon_{3,4} p_i \psi^{3,4}(x) = -p_i \psi^{3,4}(x),$$

that is, they are negative ($-p_i$). We call $\psi^{3,4}(x)$ "spinors with negative energy". They describe antiparticles of positive energy and positive momentum p_i . This striking redefinition of plane waves with negative energy has already occurred for the spin [see discussion following (6.57)]. To this end the eigenvalues of the momentum and spin operators agree with the momentum or spin direction of the waves of positive energy. For waves with negative energy we define it the other way round. In other words: a particle with negative energy and momentum eigenvalue $-p_i$ has momentum $+p_i$, and a particle with spin eigenvalue $-u_z$ has the spin $+u_z$. This seemingly strange definition has a deeper reason: in the framework of the hole theory, which will follow soon, we interpret an electron with negative energy, momentum $-p_i$ and spin $-u_z$ as a positron (i.e. the antiparticle of the electron) with positive energy, momentum $+p_i$ and spin u_z . This occurs as a natural result. Thus we hold on to our definition. Accordingly $\psi^{3,4}(x)$ is an electron wave function with negative energy, negative momentum and negative spin-projection [see (7.19a)] or and this is the physically correct description - a positron with positive energy, positive momentum and positive spin-projection. For the latter property the redefinition (6.57) is necessary, which means the change of $r = 3, 4 \Leftrightarrow r = 4, 3$.

tion).

² See in particular Vol. 4 of this series, Quantum Electrodynamics (Springer Berlin, Heidelberg, in prepara-

12.6 Properties of Spinor Representations 3

12.6.1 Wave Packets of Plane Dirac Waves

Already in Sect. 2.3 we dealt with the single particle aspects of Dirac waves. In order to gain a deeper understanding and a possible interpretation of the free solutions, we study wave packets. These are superpositions of plane waves which yield localized wave functions in space time. Since the Dirac equation is a linear wave equation, the wave packets are also solutions of the free Dirac equation, which is just the superposition principle. A wave packet of plane waves with positive energy has the form

$$\psi^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} \sqrt{\frac{m_0c^2}{E}} \sum_{\pm s} b(p, s) u(p, s) e^{-ip_\mu x^\mu / \hbar}. \quad (8.1)$$

The amplitudes $b(p, s)$ determine the admixture of the plane waves $u(p, s) \cdot e^{-ip_\mu x^\mu / \hbar}$ to the wave packet. The " (+) " indicates that a superposition of only positive-energy plane waves is taken. Normalizing to unity implies

$$\begin{aligned} \int \psi^{(+)\dagger}(\mathbf{x}, t) \psi^{(+)}(\mathbf{x}, t) d^3x &\stackrel{!}{=} 1 \stackrel{!}{=} \int d^3p \int d^3p' \sum_{\pm s} \sum_{\pm s'} \\ &\times \sqrt{\frac{m_0c^2}{E}} \sqrt{\frac{m_0c^2}{E'}} b^\dagger(p, s) b(p', s') u^\dagger(p, s) u(p', s') e^{-i(p_0 - p'_0)x^0} \\ &\times \underbrace{\int \frac{e^{i(p-p') \cdot x / \hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar^3} \sqrt{2\pi\hbar^3}} d^3x}_{\delta(p-p')} \\ &= \int d^3p \sum_{\pm s} \sum_{\pm s'} \frac{m_0c^2}{E} b^\dagger(p, s) b(p, s') \underbrace{u^\dagger(p, s) u(p, s')}_{\delta_{ss'}(E/m_0c^2) \text{ because of (6.35)}} \\ &= \int d^3p \sum_{\pm s} b^\dagger(p, s) b(p, s) \\ &= \int d^3p \sum_{\pm s} |b(p, s)|^2 \stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

The factor

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} (p_0 - p'_0) x^0\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (E - E') \frac{x^0}{c}\right)$$

is equal to 1 because of

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0c^2} = c\sqrt{p'^2 + m_0c^2} = E'$$

utilizing the property of $(\delta(p - p'))$. The next step is to find the current of such a packet, given the velocity operator $c\hat{\boldsymbol{\alpha}}$; thus we obtain

$$J^{(+)} = \int \psi^{(+)\dagger} c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \psi^{(+)} d^3x. \quad (8.3)$$

In the calculation of this expression (shown in Examples 8.1 and 8.2), we will learn a new and elegant mathematical technique, i.e. the Gordon decomposition. The result is

$$J_i^{(+)} = \int d^3p \frac{p_i c^2}{E} \sum_{\pm s} |b(p, s)|^2 = \left\langle \frac{c^2 p_i}{E} \right\rangle_+ = \langle v_{\text{gr}} \rangle_i \quad (8.4)$$

Because of the normalization (8.2), in the second step we have written $J_i^{(+)}$ as an expectation value with respect to the wave packet of positive energy and labelled this $\langle \rangle_+$. In this way the mean current of an arbitrary wave packet of plane waves of positive energy is equal to the expectation value of the classical group velocity $\mathbf{v}_{\text{gr}} = c^2 \mathbf{p}/E$. This corresponds to the Ehrenfest theorem of the Schrödinger theory and agrees with our earlier considerations (2.62) and (2.67), where we restricted ourselves to the even part of the velocity operator to get the same result. Obviously the restriction to the even part of an operator is equivalent to the restriction to those wave packets which are constructed from one sort of solution (of positive or negative energy) only.

8.1 The Gordon Decomposition

ψ_1 and ψ_2 are considered to be two arbitrary solutions of the free Dirac equation, that is

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{p}} - m_0 c) \psi_1 &= 0, \\ (\hat{\mathbf{p}} - m_0 c) \psi_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1 \left(-\overleftarrow{\hat{\mathbf{t}}} - m_0 c \right) &= 0 \\ \bar{\psi}_2 \left(-\overleftarrow{\hat{\mathbf{p}}} - m_0 c \right) &= 0 \end{aligned}$$

(here, there is a bad latex, there should be canceled p at all the equations)

The second set of equations holds for the adjoint spinors, as will be proven below. Then

$$\begin{aligned} c \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1 &= \frac{1}{2m_0} [\bar{\psi}_2 \hat{p}^\mu \psi_1 - (\hat{p}^\mu \bar{\psi}_2) \psi_1] \\ &\quad - \frac{i}{2m_0} \hat{p}_\nu (\bar{\psi}_2 \hat{\sigma}^{\mu\nu} \psi_1) \end{aligned} \quad (2)$$

is valid. We prove this with the help of the relation

$$\begin{aligned} db &= \gamma^\mu a_\mu \gamma^\nu b_\nu = a_\mu b_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \\ &= a_\mu b_\nu \left\{ \frac{1}{2} \underbrace{(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)}_{2g^{\mu\nu}} + \frac{1}{2} \underbrace{(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)}_{-i\hat{\sigma}^{\mu\nu}} \right\} \\ &= a_\mu b^\mu - i a^\mu b^\nu \hat{\sigma}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3)$$

which is valid for two arbitrary four-vectors a^μ and b^μ . Furthermore, we introduce the definition

$$\bar{\psi} \overrightarrow{\hat{p}} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{p}_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu$$

which means that the momentum operator acts to the left onto the function $\bar{\psi}(x)$. Because of (1) we obtain

$$0 = \bar{\psi}_2 \left(-\overleftarrow{\mathbf{p}} - m_0 c \right) d\psi_1 + \bar{\psi}_2 d \left(\overleftarrow{\mathbf{p}} - m_0 c \right) \psi_1$$

This happens because the terms on the rhs are zero [according to (1)]. In particular the first term on the rhs can be rewritten as

$$(-\hat{p}_\mu \bar{\psi}_2 \gamma^\mu - m_0 c \bar{\psi}_2) d\psi_1.$$

That it vanishes is obvious from the fourth equation (1). Let us deduce this from the second equation (1). It follows by multiplication with γ_0 and Hermitian conjugation, that

$$\begin{aligned} & (\gamma^0 (\hat{p} - m_0 c) \psi_2)^\dagger \\ &= 0 = \psi_2^\dagger \left(\gamma^{\mu\dagger} \overleftarrow{\mathbf{p}}_\mu^\dagger - m_0 c \right) \gamma^{0\dagger} \\ &= +\hat{p}_\mu^\dagger \psi_2^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^{0\dagger} - m_0 c \psi_2^\dagger \gamma^{0\dagger} \\ &= -\hat{p}_\mu \psi_2^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^{0\dagger} - m_0 c \psi_2^\dagger \gamma^{0\dagger}. \end{aligned} \quad (6)$$

Because of $\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$, $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$, we can write

$$\gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\nu \text{ or } \gamma^0 \gamma^{\nu\dagger} = \gamma^\nu \gamma^0 \text{ or}$$

$$\gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\nu$$

and for (6) we achieve

$$\begin{aligned} & -\hat{p}_\mu \psi_2^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu - m_0 c \psi_2^\dagger \gamma^0 \\ &= 0 = -\hat{p}_\mu \bar{\psi}_2 \gamma^\mu - m_0 c \bar{\psi}_2 = \bar{\psi}_2 \left(-\overleftarrow{\mathbf{p}} - m_0 c \right). \end{aligned}$$

Thus we have proven (5), from which we can furthermore conclude that

$$\begin{aligned} 0 &= -2m_0 c \bar{\psi}_2 d\psi_1 + \bar{\psi}_2 [d\overleftarrow{\mathbf{p}} - \overleftarrow{\mathbf{p}} d] \psi_1 \\ &= -2m_0 c \bar{\psi}_2 d\psi_1 + \bar{\psi}_2 \left[a^\mu \overrightarrow{\mathbf{p}}^\mu - i a^\mu \overrightarrow{\mathbf{p}}^\nu \hat{\sigma}_{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. - \overleftarrow{\mathbf{p}}^\mu a_\mu + i \overleftarrow{\mathbf{p}}^\mu a^\nu \hat{\sigma}_{\mu\nu} \right] \psi_1 \\ &= a_\mu \left\{ -2m_0 c \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1 + \bar{\psi}_2 \left[\overrightarrow{\mathbf{p}}^\mu - \overleftarrow{\mathbf{p}}^\mu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i \overrightarrow{\mathbf{p}}^\nu \hat{\sigma}_{\nu}^\mu - i \overleftarrow{\mathbf{p}}^\nu \hat{\sigma}_\nu^\mu \right] \psi_1 \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Because a^μ was arbitrary the coefficient of a^μ must vanish, that is

$$\begin{aligned} c \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1 &= \frac{1}{2m_0} [\bar{\psi}_2 \hat{p}^\mu \psi_1 - (\hat{p}^\mu \bar{\psi}_2) \psi_1] \\ &\quad - \frac{i}{2m_0} \hat{p}^\nu (\bar{\psi}_2 \hat{\sigma}_{\mu\nu} \psi_1). \end{aligned} \quad (2)$$

This is just the statement of (2). This splitting of the matrix $\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1$ is called Gordon decomposition.¹ Its physical meaning is that the Dirac current density $c \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1$ can be split up into a convection current density

$$\frac{1}{2m_0} [\bar{\psi}_2 \hat{p}^\mu \psi_1 - (\hat{p}^\mu \bar{\psi}_2) \psi_1]$$

and spin-current density

$$\frac{-i}{2m_0} \hat{p}^\nu (\bar{\psi}_2 \hat{\sigma}_{\mu\nu} \psi_1).$$

¹ Surprisingly, this procedure was derived by Walter Gordon in Z. Phys. 50, 630 (1928).

8.2 Calculation of the Expectation Value of a Velocity Operator

Problem. Calculate the expectation value of the velocity operator of a wave packet consisting of plane waves with positive energy, using the Gordon decomposition.

Solution

A wave packet of Dirac plane waves of positive energy is given by

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_0c^2}{E}} \\ &\times \sum_{\pm s} b(p, s) u(p, s) e^{-ip_\mu x^\mu / \hbar} \end{aligned} \quad (1)$$

This gives the expectation value of the velocity operator (do not confuse the given symbol for wave packets of positive energy (+) with that for Hermitian conjugation †):

$$\begin{aligned} J^{i(+)} &= \int \psi^{(+)\dagger} c \hat{\alpha}_i \psi^{(+)} d^3x \\ &= \int \psi^{(+)\dagger} \gamma^0 c \gamma^i \psi^{(+)} d^3x = c \int \bar{\psi}^{(+)} \gamma^i \psi^{(+)} d^3x \\ &= \int d^3x \iint \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi\hbar)^{3/2} (2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_0c^2}{E}} \sqrt{\frac{m_0c^2}{E'}} \\ &\times \sum_{\pm s, \pm s'} b^*(p', s') b(p, s) e^{(i/\hbar)(p'^\mu - p^\mu)x_\mu} \\ &\times \bar{u}(p', s') c \gamma^i u(p, s). \end{aligned} \quad (2)$$

Using the Gordon decomposition [Example 8.1, (2)] of the spinor matrix element this becomes

$$\begin{aligned} J^{i(+)} &= \iint d^3p d^3p' \frac{m_0c^2}{\sqrt{EE'}} \sum_{\pm s, \pm s'} b^*(p', s') b(p, s) \\ &\times \int \frac{e^{(i/\hbar)(p'^\mu - p^\mu)x_\mu}}{(2\pi\hbar)^3} d^3x \cdot \frac{1}{2m_0} \bar{u}(p', s') \\ &\times [(p'^i + p^i) - i(-p'^\nu + p^\nu) \hat{\sigma}^i_\nu] u(p, s). \end{aligned}$$

Because of the identity

$$\begin{aligned} &\int e^{(i/\hbar)(p'_0 - p_0)x^0} \frac{e^{-(i/\hbar)(p'^i - p^i)x_i}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{(2\pi\hbar)^3}} d^3x \\ &= \delta(p'^i - p^i) \exp \underbrace{\left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{E'}{c} - \frac{E}{c} \right) x^0 \right]}_{=1}, \end{aligned} \quad (3)$$

this evaluates to be

$$\begin{aligned} J^{i(+)} &= \int d^3p \frac{m_0c^2}{E} \frac{2p^i}{2m_0} \sum_{\pm s, \pm s'} b^*(p, s') b(p, s) \\ &\times \underbrace{\bar{u}(p, s') u(p, s)}_{=\delta_{ss'} \text{ [from (6.34)]}} \end{aligned}$$

$$= \int d^3p \frac{p_i c^2}{E} \sum_{\pm s} |b(p, s)|^2.$$

As we can see, the spin-dependent part of the current vanishes.

Let us resume our earlier discussion [see (2.61) to (2.70)] on the velocity operator for one particle in relativistic theory: In Schrödinger's theory the velocity operator $\hat{v} = \hat{p}/m$ was proportional to momentum, but this is no longer the case in Dirac's relativistic theory. The velocity operator for free particles $c\hat{\alpha}$ is no longer a temporal constant, because of

$$\frac{dc\hat{\alpha}}{dt} = \frac{c}{i\hbar} [\hat{\alpha}, \hat{H}_f]_- \neq 0 \quad (8.5)$$

From (8.4) we can even conclude that one needs the solutions of negative energy to construct eigenfunctions of $c\hat{\alpha}$. Further, wave packets consisting of plane waves with only positive energy have the expectation value of the velocity $|\langle c\hat{\alpha}^i \rangle| \sim |\langle c^2 p_i / E \rangle| < c$, whereas the eigenvalues of $c\hat{\alpha}^i$ are exactly $\pm c$. This motivates us to consider wave packets made up of the complete set of plane Dirac waves, i.e. plane waves with both positive and negative energy. Instead of (8.1) we now write

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} \\ & \times \sum_{\pm s} [b(p, s) u(p, s) e^{-ip_\mu x^\mu / \hbar} + d^*(p, s) v(p, s) e^{+ip_\mu x^\mu / \hbar}] \end{aligned} \quad (8.6)$$

The coefficients $b(p, s)$ are the probability amplitudes for waves with positive energy, whereas $d^*(p, s)$ are those for negative energy. The probability of finding a particle anywhere must be one (see Exercise 8.3):

$$\int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi(x, t) = \int d^3p \sum_{\pm s} [|b(p, s)|^2 + |d(p, s)|^2] = 1 \quad (8.7)$$

From this we calculate the current of the wave packet (see Exercise 8.4):

$$\begin{aligned} J^k = & \int d^3x \psi^\dagger(x, t) c\hat{\alpha}_k \psi(x, t) \\ = & \int d^3p \left\{ \sum_{\pm s} (|b(p, s)|^2 + |d(p, s)|^2) \frac{p^k c^2}{E} \right. \\ & + i c \sum_{\pm s, \pm s'} b^*(-p, s') d^*(p, s) e^{2ix_0 p_0 / \hbar} \bar{u}(-p, s') \hat{\sigma}^{k0} v(p, s) \\ & \left. - i c \sum_{\pm s, \pm s'} d(-p, s') b(p, s) e^{-2ix_0 p_0 / \hbar} \bar{v}(-p, s') \hat{\sigma}^{k0} u(p, s) \right\}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Here $u(-p, s)$ means $u(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0 c^2}, -\mathbf{p}, s)$. This abbreviation is not particularly obvious, but it is absolutely clear what is meant. In the following we use this notation for the coefficients b, d^* and for $v(-p, s)$ too.

If we compare (8.8) with (8.4) we see that additional terms appear in (8.8). The first term in (8.8) represents the time-independent group velocity that also appears in (8.4). The second and third terms are interferences of solutions with positive and negative energy, which oscillate

time-dependently because of the factors $\exp(\pm 2ip_0x_0/\hbar)$. The frequency of this Zitterbewegung² is

$$\frac{2p_0c}{\hbar c} > \frac{2m_0c^2}{\hbar c} \approx 2 \cdot 10^{21} \text{sec}^{-1} \quad (8.9)$$

and its strength is proportional to the amplitudes $d(p, s)$ of the waves with negative energy in the wave packet. See Exercise 8.5! ² This name stems from *E. Schrödinger: Sitzungsber. Preu. Akad. Wiss., Phys.-Math. 24, 418 (1930)* and in German means literally "trembling motion".

8.3 Calculation of the Norm of a Wave Packet

Problem. Calculate the norm of the general wave packet built out of plane Dirac waves of positive and negative energies

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) = & \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_0c^2}{E}} \\ & \times \sum_{\pm s} [b(p, s)u(p, s)e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar} \\ & + d^*(p, s)v(p, s)e^{+ip_\mu x^\mu/\hbar}] \end{aligned}$$

Solution

The current is defined as

$$J^\mu = c \int d^3x \bar{\psi}(x, t) \gamma^\mu \psi(\mathbf{x}, t),$$

and the wave packet reads (see above)

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) = & \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_0c^2}{E}} \\ & \times \sum_{\pm s} [b(p, s)u(p, s)e^{-ip \cdot x/\hbar} \\ & + d^*(p, s)v(p, s)e^{+ip \cdot x/\hbar}] \end{aligned} \quad (2)$$

The zero component of the current (probability) is then evaluated as

$$\begin{aligned} W \equiv & \frac{1}{c} J^0 \\ = & \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) = \iiint \frac{d^3x d^3p d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{m_0c^2}{\sqrt{EE'}} \\ & \times \sum_{\pm s, s'} \left[b^*(p', s') b(p, s) u^\dagger(p', s') u(p, s) e^{-i(p-p') \cdot x/\hbar} \right. \\ & + b^*(p', s') d^*(p, s) u^\dagger(p', s') v(p, s) e^{i(p+p') \cdot x/\hbar} \\ & + d(p', s') b(p, s) v^\dagger(p', s') u(p, s) e^{-i(p+p') \cdot x/\hbar} \\ & \left. + d(p', s') d^*(p, s) v^\dagger(p', s') v(p, s) e^{i(p-p') \cdot x/\hbar} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Integrating over $d^3x/(2\pi\hbar)^3$ leads to δ functions $\delta^{(3)}(\mathbf{p}' \pm \mathbf{p})$. Because $p_0 = E = \sqrt{m_0^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$, the energies $p_0 = p'_0$ ($E = E'$) are identical if the momenta $|\mathbf{p}|$ and $|\mathbf{p}'|$ are the same. Then we can also integrate over d^3p' and obtain

$$\begin{aligned}
\varrho = \int d^3p \frac{m_0 c^2}{E} \sum_{\pm s, s'} \{ & b^*(p, s') b(p, s) u^\dagger(p, s') u(p, s) \\
& + d(p, s') d^*(p, s) v^\dagger(p, s') v(p, s) \\
& + b^*(-p, s') d^*(p, s) u^\dagger(-p, s') v(p, s) e^{2ip_0 x_0 / \hbar} \\
& + d(-p, s') b(p, s) v^\dagger(-p, s') u(p, s) e^{-2ip_0 x_0 / \hbar} \}.
\end{aligned} \tag{4}$$

From (6.35) we have

$$u^\dagger(p, s') u(p, s) = v^\dagger(p, s') v(p, s) = \frac{E}{m_0 c^2} \delta_{ss'},$$

$$u^\dagger(-p, s') v(p, s) = v^\dagger(-p, s') u(p, s) = 0,$$

and therefore

$$W = \int d^3p \sum_{\pm s} \{|b(p, s)|^2 + |d(p, s)|^2\} = 1.$$

In the very last step we were careful to normalize the total probability W to one.

8.4 Calculation of the Current for a Wave Packet

Problem. Calculate the current

$J^k = \int \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\alpha}_k \psi(\mathbf{x}, t) d^3x = c \int \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \gamma^k \psi(\mathbf{x}, t) d^3x$ for the general wave packet of Exercise 8.3.

Solution

The space components are calculated in exactly the same manner as in the last Exercise (8.3):

$$\begin{aligned}
J^k &= c \int d^3x \bar{\psi}(x, t) \gamma^k \psi(x, t) \\
&= \frac{1}{2m_0} \int d^3x \{ \bar{\psi} \hat{p}^k \psi - (\hat{p}^k \bar{\psi}) \psi - i \hat{p}_\nu (\bar{\psi} \hat{\sigma}^{k\nu} \psi) \}
\end{aligned} \tag{1}$$

where we used the Gordon decomposition (Example 8.1). Inserting (2) of Exercise 8.3 yields

$$\begin{aligned}
J^k = & \frac{1}{2m_0} \iiint \frac{d^3x d^3p d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{E E'}} \\
& \times \sum_{\pm s, s'} \{ b^*(p', s') b(p, s) \bar{u}(p', s') \\
& \times u(p, s) p^k e^{-i(p-p') \cdot x/\hbar} \\
& - b^*(p', s') d^*(p, s) \bar{u}(p', s') v(p, s) p^k e^{i(p+p') \cdot x/\hbar} \\
& + d(p', s') b(p, s) \bar{v}(p', s') u(p, s) p^k e^{-i(p+p') \cdot x/\hbar} \\
& - d(p', s') d^*(p, s) \bar{v}(p', s') v(p, s) p^k e^{i(p-p') \cdot x/\hbar} \\
& + b^*(p', s') b(p, s) \bar{u}(p', s') u(p, s) p'^k e^{-i(p-p') \cdot x/\hbar} \\
& + b^*(p', s') d^*(p, s) \bar{u}(p', s') v(p, s) p'^k e^{i(p+p') \cdot x/\hbar} \\
& - d(p', s') b(p, s) \bar{v}(p', s') u(p, s) p'^k e^{i(p+p') \cdot x/\hbar} \\
& - d(p', s') d^*(p, s) \bar{v}(p', s') v(p, s) p'^k e^{i(p-p') \cdot x/\hbar} \\
& - i b^*(p', s') b(p, s) \bar{u}(p', s') \hat{\sigma}^{k\nu} u(p, s) (p_\nu - p'_\nu) \\
& \times e^{-i(p-p') \cdot x/\hbar} \\
& + i b^*(p', s') d^*(p, s) \bar{u}(p', s') \hat{\sigma}^{k\nu} \\
& \times v(p, s) (p_\nu + p'_\nu) e^{i(p+p') \cdot x/\hbar} \\
& - i d(p', s') b(p, s) \bar{v}(p', s') \hat{\sigma}^{k\nu} \\
& \times u(p, s) (p_\nu + p'_\nu) e^{-i(p+p') \cdot x/\hbar} \\
& + i d(p', s') d^*(p, s) \bar{v}(p', s') \hat{\sigma}^{k\nu} \\
& \times v(p, s) (p_\nu - p'_\nu) e^{i(p+p') \cdot x/\hbar} \} \quad (2)
\end{aligned}$$

Integrating again over $d^3x/(2\pi\hbar)^3$ we get δ functions $\delta^{(3)}(\mathbf{p}' \pm \mathbf{p})$. The integration over d^3p' then yields

$$\begin{aligned}
J^k = & \frac{1}{2m_0} \int d^3p \frac{m_0 c^2}{E} \\
& \times \sum_{\pm s, s'} \{ 2p^k [b^*(p, s') b(p, s) \bar{u}(p, s') u(p, s) \\
& - d(p, s') d^*(p, s) \bar{v}(p, s') v(p, s)] \\
& + 2p^k [d(-p, s') b(p, s) \bar{v}(-p, s') u(p, s) e^{-2ip_0 x_0/\hbar} \\
& - b^*(-p, s') d^*(p, s) \bar{u}(-p, s') v(p, s) e^{2ip_0 x_0/\hbar}] \\
& + \frac{2iE}{c} [b^*(-p, s') d^*(p, s) \bar{u}(-p, s') \hat{\sigma}^{k0} \\
& \times v(p, s) e^{2ip_0 x_0/\hbar} \\
& - d(-p, s') d(p, s) \bar{v}(-p, s') \hat{\sigma}^{k0} \\
& \times u(p, s) e^{-2ip_0 x_0/\hbar}] \}. \quad (3)
\end{aligned}$$

From the orthogonality relation (6.34) we get

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p, s') u(p, s) &= \delta_{ss'} = -\bar{v}(p, s') v(p, s) \\
\bar{u}(-p, s') v(p, s) &= 0 = \bar{v}(-p, s') u(p, s) \quad (4)
\end{aligned}$$

Therefore, from (3) only

$$\begin{aligned}
 J^k = \int d^3p \left\{ \sum_{\pm s} [|b(p, s)|^2 + |d(p, s)|^2] \frac{p^k c^2}{E} \right. \\
 + i c \sum_{\pm s, \pm s'} [b^* (-p, s') d^*(p, s) \bar{u} (-p, s') \hat{\sigma}^{k0} \\
 \times v(p, s) e^{2ip_0 x_0 / \hbar} \\
 - d(-p, s') b(p, s) \bar{v}(-p, s') \hat{\sigma}^{k0} \\
 \left. \times u(p, s) e^{-2ip_0 x_0 / \hbar} \right] \quad (5)
 \end{aligned}$$

remains. This is the earlier used result (8.8).

8.5 Temporal Development of a Wave Packet with Gaussian Density Distribution

Problem. At time $t = 0$ the following wave packet with Gaussian density distribution is defined as

$$\psi'(x, 0, s) = \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-(|x|^2/d^2)^2} \omega^1(0).$$

Determine the wave packet at time t developing from (1).

Consider the intensity of the negative energy solutions in the wave packet. What does one learn in general about the applicability of the one-particle interpretation of the Dirac equation?

Solution

Equation (1) is a boundary condition for the general wave packet

$$\begin{aligned}
 \psi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} \\
 \times \sum_{s'=\pm s} [b(p, s') u(p, s') e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})/\hbar} \\
 + d^*(p, s') v(p, s') e^{i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})/\hbar}] \quad (2)
 \end{aligned}$$

The requirement

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \psi'(\mathbf{x}, 0, s)$$

leads to equations that determine the coefficients $b(p, s')$ and $d^*(p, s')$. In particular, it follows from

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} \sum_{s'=\pm s} d^*(p, s') v(p, s') e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}/\hbar} \\
 = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} \sum_{s'=\pm s} d^*(p', s') v(p', s') e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}/\hbar} \quad (4)
 \end{aligned}$$

(where we have inserted $\mathbf{p} = -\mathbf{p}'$ and $p_0 = -p'_0$) that

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} \sum_{s'=\pm s} [b(p, s') u(p, s') + d^*(p', s') v(p', s')] \\
 e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}/\hbar} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} = \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-(|x|^2/d^2)^2} \omega^1(0) \quad (5)
 \end{aligned}$$

The rhs of (5) is just the Fourier transform of the braced expression on the left. Therefore the inverse transformation reads:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} \sum_{s'=\pm s} [b(p, s') u(p, s') + d^*(p', s') v(p', s')] \\ &= \int \frac{d^3 x}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-ip \cdot x/\hbar} \left[\frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-|x|^2/d^2} \omega^1(0) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

On the rhs of (6) we have the Fourier transform of a Gaussian distribution. With the identity

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3 x}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-ip \cdot x/\hbar} \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-|x|^2/d^2} \\ &= \frac{1}{\pi^{3/4}} \left(\frac{d}{\hbar} \right)^{3/2} e^{-(|p|^2 d^2/\hbar^2)^2 \stackrel{\text{def}}{=} g(|p|)}, \end{aligned} \quad (7)$$

we rewrite (6) as

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} \sum_{s'=\pm s} [b(p, s') u(p, s') + d^*(p', s') v(p', s')] \\ &= g(|\mathbf{p}|) \omega^1(0). \end{aligned} \quad (8)$$

Expanding the sum and using the definitions

$$\begin{aligned} u(p, s' = +s) &= \omega^1(\mathbf{p}), & u(p, -s) &= \omega^2(\mathbf{p}) \\ v(p', +s) &= \omega^4(\mathbf{p}'), & v(p', -s) &= \omega^3(\mathbf{p}') \end{aligned} \quad (9)$$

we get

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} [b(p, s) \omega^1(\mathbf{p}) + b(p, -s) \omega^2(\mathbf{p}) \\ & \quad + d^*(p', s) \omega^4(\mathbf{p}') + d^*(p', -s) \omega^3(\mathbf{p}')] \\ &= g(|\mathbf{p}|) \omega^1(0). \end{aligned} \quad (10)$$

Now we multiply (10), in turn, by $[\omega^1(\mathbf{p})]^\dagger$, $[\omega^2(\mathbf{p})]^\dagger$, $[\omega^3(-\mathbf{p})]^\dagger$ and $[\omega^4(-\mathbf{p})]^\dagger$. With [see (6.30)]

$$\begin{aligned} [\omega^1(\mathbf{p})]^\dagger &= \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \left(1, 0, \frac{p_z c}{E + m_0 c^2}, \frac{p_- c}{E + m_0 c^2} \right) \\ [\omega^2(\mathbf{p})]^\dagger &= \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \left(1, 0, \frac{p_+ c}{E + m_0 c^2}, \frac{-p_z c}{E + m_0 c^2} \right) \\ [\omega^3(-\mathbf{p})]^\dagger &= \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \left(\frac{-p_z c}{E + m_0 c^2}, \frac{-p_- c}{E + m_0 c^2}, 1, 0 \right) \\ [\omega^4(-\mathbf{p})]^\dagger &= \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \left(\frac{-p_+ c}{E + m_0 c^2}, \frac{p_z c}{E + m_0 c^2}, 0, 1 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

the following relations are valid:

$$[\omega^i(\mathbf{p})]^\dagger \omega^j(-\mathbf{p}) = [\omega^j(-\mathbf{p})]^\dagger \omega^i(\mathbf{p}) = 0$$

for $i = 1, 2$ and $j = 3, 4$;

$$[\omega^i(\mathbf{p})]^\dagger \omega^j(\mathbf{p}) = \frac{E}{m_0 c^2} \delta_{ij}$$

for $i, j = 1, 2$;

$$[\omega^i(-\mathbf{p})]^\dagger \omega^j(-\mathbf{p}) = \frac{E}{m_0 c^2} \delta_{ij} \quad \text{for } i, j = 3, 4.$$

Hence, we get the four equations:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} b(p, s) \frac{E}{m_0 c^2} &= g(|\mathbf{p}|) [\omega^1(\mathbf{p})]^\dagger \omega^1(0) \\ \Rightarrow b(p, s) &= \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2E}} g(|\mathbf{p}|) \cdot 1, \\ \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} b(p, -s) \frac{E}{m_0 c^2} &= g(|\mathbf{p}|) [\omega^2(\mathbf{p})]^\dagger \omega^1(0) \\ \Rightarrow b(p, -s) &= 0, \\ \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} d^*(p', -s) \frac{E}{m_0 c^2} &= g(|\mathbf{p}|) [\omega^3(-\mathbf{p})]^\dagger \omega^1(0) \\ \Rightarrow d^*(p', -s) &= \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2E}} g(|\mathbf{p}|) \frac{(-p_z) c}{E + m_0 c^2}, \\ \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} d^*(p, s) \frac{E}{m_0 c^2} &= g(|\mathbf{p}|) [\omega^4(-\mathbf{p})]^\dagger \omega^1(0) \\ \Rightarrow d^*(p, s) &= \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2E}} g(|\mathbf{p}|) \frac{(-p_+) c}{E + m_0 c^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

We now insert these equations, as well as (9) and (4), into (2), which yields:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / \hbar} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E}} \\ &\times \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2E}} g(|\mathbf{p}|) \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{2m_0 c^2}} \\ &\times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_z^0 c}{E + m_0 c^2} \\ \frac{p_+ c}{E + m_0 c^2} \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar} + \begin{pmatrix} \frac{p_z^2 c^2}{(E + m_0 c^2)^2} \\ \frac{p_z p_+ c^2}{(E + m_0 c^2)^2} \\ \frac{-p_z c}{E + m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &\times e^{iEt/\hbar} + \begin{pmatrix} \frac{(p_x^2 + p_y^2) c^2}{(E + m_0 c^2)^2} \\ \frac{-p_z p_+ c^2}{(E + m_0 c^2)^2} \\ 0 \\ \frac{-p_+ c}{E + m_0 c^2} \end{pmatrix} e^{iEt/\hbar} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} g(|\mathbf{p}|) \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \frac{E+m_0c^2}{2E} e^{-iEt/\hbar} + \frac{\mathbf{p}^2c^2}{2E(E+m_0c^2)} e^{iEt/\hbar} \\ 0 \\ \frac{p_zc}{2E} (e^{-iEt/\hbar} - e^{iEt/\hbar}) \\ \frac{p_+c}{2E} (e^{-iEt/\hbar} - e^{iEt/\hbar}) \end{pmatrix} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} g(|p|) \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \frac{E+m_0c^2}{2E} e^{-iEt/\hbar} + \frac{E-m_0c^2}{2E} e^{iEt/\hbar} \\ 0 \\ -\frac{p_zc}{2E} 2i \sin \frac{Et}{\hbar} \\ -\frac{p_+c}{E} i \sin \frac{Et}{\hbar} \end{pmatrix} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} g(|p|) \\
&\quad \times \left[\left(\cos \frac{Et}{\hbar} - i \frac{m_0c^2}{E} \sin \frac{Et}{\hbar} \right) \omega^1(0) \right. \\
&\quad \times -i \frac{p_zc}{E} \sin \left(\frac{Et}{\hbar} \right) \omega^3(0) \\
&\quad \left. -i \frac{p_+c}{E} \sin \left(\frac{Et}{\hbar} \right) \omega^4(0) \right].
\end{aligned}$$

At an arbitrary time $t \neq 0$, $\psi(x, t)$ is thus composed of the following three parts:

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) &= c_1(x, t) \omega^1(0) \\
&\quad + c_3(x, t) \omega^3(0) + c_4(x, t) \omega^4(0)
\end{aligned}$$

The functions $c_1(x)$, $c_3(x)$, $c_4(x)$ can be calculated only by use of numerical methods:

$$\begin{aligned}
c_1(x, t) &:= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \frac{1}{\pi^{3/4}} \left(\frac{d}{\hbar} \right)^{3/2} e^{-(|\mathbf{p}|^2 d^2 / \hbar^2)^2} \\
&\quad \times \left(\cos \frac{\sqrt{m_0^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}}{\hbar} t - i \frac{m_0 c^2}{\sqrt{m_0^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}} \right. \\
&\quad \left. \times \sin \frac{\sqrt{m_0^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}}{\hbar} t \right), \\
c_3(x, t) &:= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \frac{1}{\pi^{3/4}} \left(\frac{d}{\hbar} \right)^{3/2} e^{-(|\mathbf{p}|^2 d^2 / \hbar^2)^2} \\
&\quad \times \frac{p_z c}{\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}} \sin \frac{\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}}{\hbar} t, \\
c_4(x, t) &:= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \frac{1}{\pi^{3/4}} \left(\frac{d}{\hbar} \right)^{3/2} e^{-(|\mathbf{p}|^2 d^2 / \hbar^2)^2} \\
&\quad \times \frac{p_y - ip_x}{\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}} \sin \frac{\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}}{\hbar} t
\end{aligned} \tag{14}$$

This result can be understood in the following way: To obtain the wave-packet of (1) a superposition of plane waves of positive as well as of negative energy is necessary. Here the

coefficients occur in such a way that for $t = 0$ the $\omega^3(0)$ - and $\omega^4(0)$ -parts of the partial waves of positive energies and those of negative energies cancel each other. This can be clearly seen for $t = 0$ in (13): The third and fourth components of the sum of the three spinors vanish. Since the partial waves of positive and negative energy behave differently in time [$\exp(-iEt/\hbar)$ and $\exp(iEt/\hbar)$, respectively] this is no longer valid for times $t \neq 0$. This implies that (1) obviously cannot be regarded as a localized electron of spin $+s$, as it would have been in the framework of a single-particle interpretation of the Dirac equation. One may wonder why a spin-up electron in time gets admixtures of components of negative energy with spin down. The reason for that comes from the fact, that

$$\left[\hat{H}_f, \boldsymbol{\sigma} \right]_- = 2\hat{\boldsymbol{\alpha}} \times \hat{\mathbf{p}} \neq 0 \quad \text{while} \quad \left[\hat{H}_f, \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right]_- = 0.$$

Hence spin is not conserved; only the projection of spin along the momentum $\hat{\mathbf{p}}$ is a conserved quantity.

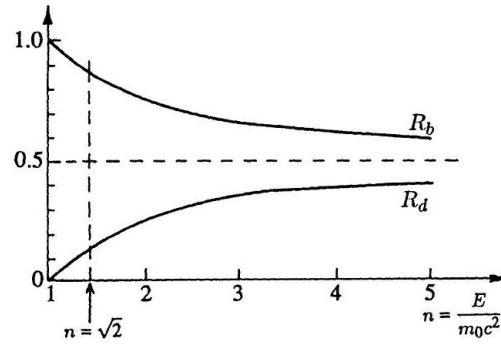
Let us briefly return to (12), from which we get the relative intensities of the partial waves of positive and negative energy:

$$\begin{aligned} R_b &= \frac{|b(p, s)|^2}{|d^*(p', s)|^2 + |d^*(p', -s)|^2 + |b(p, s)|^2} \\ &= \frac{1}{\mathbf{p}^2 c^2 / (E + m_0 c^2)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{(E - m_0 c^2) / (E + m_0 c^2) + 1} \\ &= \frac{n + 1}{n - 1 + n + 1} = \frac{n + 1}{2n} \quad \text{with} \quad n = \frac{E}{m_0 c^2}, \\ R_d &= \frac{|d^*(p', s)|^2 + |d^*(p', -s)|^2}{|d^*(p', s)|^2 + |d^*(p', -s)|^2 + |b(p, s)|^2} \\ &= 1 - \frac{n + 1}{2n} = \frac{n - 1}{2n}. \end{aligned} \tag{15}$$

Because of the Gaussian distribution $g(|p|)$ [see (7)] only partial waves with $|\mathbf{p}| \leq \hbar/d$ contribute noticeably, so that

$$\begin{aligned} n &= \frac{E_0}{m_0 c^2} = \frac{\sqrt{(m_0 c^2)^2 + c^2 p^2}}{m_0 c^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{d_c}{d} \right)^2}, \end{aligned} \tag{16}$$

where we have set $p = \hbar/d$ and $d_c = \hbar/m_0 c$. In the figure below we recognize that only for $d \leq d_c = \hbar/m_0 c$, i.e. only if the width of the wave packet is compressed to a size of about a Compton wavelength of the electron, do the partial waves of negative energies have an appreciable effect.



Relative intensities of partial waves of positive (R_b) and negative (R_d) energy is a Gaussian wave packet of width d

12.6.2 Dirac Particles in External Fields: Examples and Problems 1

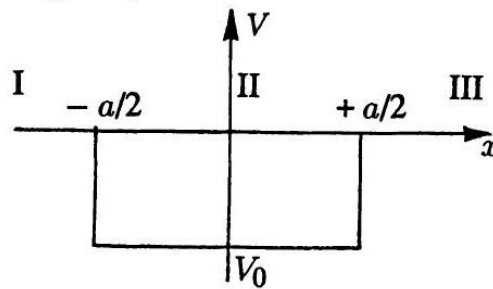
9.1 Eigenvalue Spectrum of a Dirac Particle in a

One-Dimensional Square-Well Potential We calculate the spectrum of eigenvalues for Dirac particles in a square-well potential of depth $V_0 \leq 0$ and width a .

For that purpose we decompose the real axis into three domains I, II, III:

I: $z \leq -a/2$; II: $-a/2 \leq z \leq a/2$; III $z \geq a/2$.

The Dirac equation within these domains reads (see Fig. 9.1)



I, III:

$$(\hat{\alpha} \cdot \hat{p}c + \hat{\beta}m_0c^2) \psi = E\psi \quad ,$$

II:

$$(\hat{\alpha} \cdot \hat{p}c + \hat{\beta}m_0c^2) \psi = (E - V_0) \psi$$

($V_0 < 0$).

(1)

As the relevant coordinate we choose z . Therefore the spinor ψ is only a function of z , e.g. $\psi = \psi(z)$.

While the wave functions in I and III are just the free solutions of the Dirac equation, the solutions in II are obtained from the free solution by the substitution $E \rightarrow E - V_0$. Since no spin-flip occurs at the border of the well, we can restrict our discussion to solutions with spin up. The energies of the solutions can take all allowed values from $-\infty$ up to $+\infty$, so that we can describe particles as well as antiparticles. by:

The solution of the Dirac equation (1) are thus given

I :

$$\begin{aligned}\psi_1(z) &= Ae^{ip_1 z/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_1 c}{E+m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ A'e^{-ip_1 z/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p_1 c}{E+m_0 c^2} \end{pmatrix} \\ p_1^2 &= \frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2, \quad z \leq -\frac{a}{2},\end{aligned}$$

II:

$$\begin{aligned}\psi_{II}(z) &= Be^{ip_2 z/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_2 c}{E-V_0+m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ B'e^{-ip_2 z/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_2 c}{E-V_0+m_0 c^2} \end{pmatrix} \\ p_2^2 &= \frac{(E - m_0 c^2)^2}{c^2} - m_0^2 c^2, \quad -\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2},\end{aligned} \tag{3}$$

III:

$$\psi_{III}(z) = Ce^{ip_1 z/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_1 c}{E+m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix} + C'e^{-ip_1 z/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p_1 c}{E+m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$p_1^2 = \frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2, \quad z \geq \frac{a}{2}.$$

At the borders of the well the wave function must be continuous (because of the current conservation $\partial_\mu j^\mu = 0$). Therefore we get the condition at the boundaries

$$z = -\frac{a}{2} :$$

$$\psi_I \left(-\frac{a}{2}\right) = \psi_{II} \left(-\frac{a}{2}\right)$$

$$z = +\frac{a}{2} :$$

$$\psi_{II} \left(\frac{a}{2}\right) = \psi_{III} \left(\frac{a}{2}\right).$$

$$\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = \frac{1}{4\gamma} \begin{pmatrix} (1+\gamma)^2 e^{i(p_1-p_2)a/\hbar} - (1-\gamma)^2 e^{i(p_1+p_2)a/\hbar} \\ -(1-\gamma)^2 (e^{-ip_2 a/\hbar} - e^{ip_2 a/\hbar}) \end{pmatrix}$$

This means in particular:

$$z = -\frac{a}{2} :$$

$$Ae^{-ip_1 a/2\hbar} + A'e^{ip_1 a/2\hbar} = Be^{-ip_2 a/2\hbar} + B'e^{ip_2 a/2\hbar},$$

$$\begin{aligned} & (Ae^{-ip_1 a/2\hbar} - A'e^{ip_1 a/2\hbar}) \frac{p_1 c}{E+m_0 c^2} \\ &= (Be^{-ip_2 a/2\hbar} - B'e^{ip_2 a/2\hbar}) \frac{p_2}{E-V_0+m_0 c^2}. \end{aligned}$$

$$z = +\frac{a}{2} :$$

$$Be^{ip_2 a/2\hbar} + B'e^{-ip_2 a/2\hbar} = Ce^{ip_1 a/2\hbar} + C'e^{-ip_1 a/2\hbar},$$

$$\begin{aligned} & (Be^{ip_2 a/2\hbar} - B'e^{-ip_2 a/2\hbar}) \frac{p_2 c}{E - V_0 + m_0 c^2} \\ &= (Ce^{ip_1 a/2\hbar} - C'e^{-ip_1 a/2\hbar}) \frac{p_1 c}{E + m_0 c^2} \end{aligned} \tag{8}$$

If we define γ to be

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{p_1 c}{E + m_0 c^2} \frac{E - V_0 + m_0 c^2}{p_2 c} \\ &= \sqrt{\frac{(E - m_0 c^2)(E - V_0 + m_0 c^2)}{(E + m_0 c^2)(E - V_0 - m_0 c^2)}}\end{aligned}\quad (9)$$

we can write (5-8) in the following matrix form:

$$\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\gamma+1}{\gamma} e^{i(p_1-p_2)a/2\hbar} & \frac{\gamma-1}{\gamma} e^{i(p_1+p_2)a/2\hbar} \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} e^{-i(p_1+p_2)a/2\hbar} & \frac{\gamma+1}{\gamma} e^{i(p_2-p_1)a/2\hbar} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+\gamma) e^{i(p_1-p_2)a/2\hbar} & (1-\gamma) e^{-i(p_1+p_2)a/2\hbar} \\ (1-\gamma) e^{i(p_1+p_2)a/2\hbar} & (1+\gamma) e^{i(p_2-p_1)a/2\hbar} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C \\ C' \end{pmatrix}, \quad (11)$$

and by inserting (11) into (10) we get in summary

$$\begin{pmatrix} (1-\gamma^2) (e^{-ip_2 a/\hbar} - e^{ip_2 a/\hbar}) \\ (1+\gamma)^2 e^{-i(p_1-p_2)a/\hbar} - (1-\gamma)^2 e^{-i(p_1+p_2)a/\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C' \end{pmatrix}.$$

Thus we have two equations with four unknown coefficients A, A', C, C' . The normalization condition is a third equation:

$$\int \psi^\dagger \psi dz = 1.$$

Therefore one of the four coefficients A, A', C, C' can, in general, be arbitrarily chosen.

Now we can discuss the solutions to different energies. Let us look at Figs. 9.1,2 where typical behaviour of the large component of the wave function is plotted for different energies. In Fig. 9.1 we have assumed $|V_0|$ to be smaller than $2m_0 c^2$; therefore we have to consider four energy domains:

(1) $E > m_0 c^2$: Free electrons are moving from left to right and are scattered by the (attractive) potential. If in domain II the width of the potential is an integer multiple of the wavelength, there exists a potential resonance, i.e. one gets an especially large probability for finding the electron in the well.

(2) $m_0 c^2 + V_0 < E < m_0 c^2$: Here we find bound states with an exponentially decreasing probability for finding an electron in domains I and III.

(3) $-m_0 c^2 + V_0 < E < -m_0 c^2$: Incoming positrons

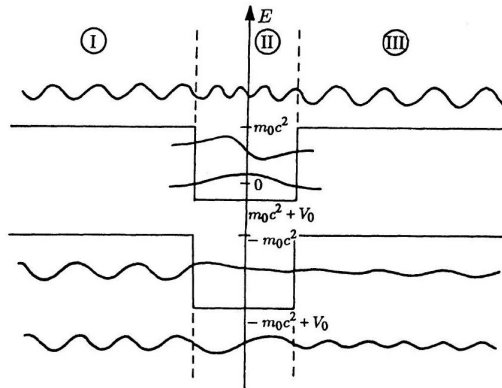


Fig. 9.1. The large component of some wave functions for different energies. In this case the depth is $|V_0| < 2m_0c^2$

(continuum states of negative energy) "feel" a repulsive potential (because of their opposite charge - these wave functions actually describe positrons, as we shall see in Chap. 12 on hole theory) and will be scattered at this potential. Since the probability of finding an electron in domain II decreases exponentially, a large proportion of the

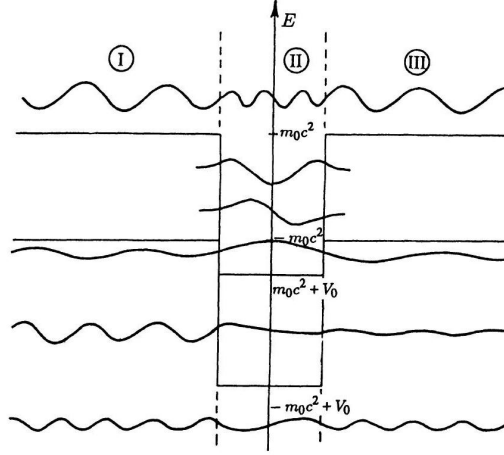


Fig. 9.2. The large component of some wave functions for different energies. In this case the depth is $|V_0| > 2m_0c^2$ positrons will be reflected at the repulsive potential. (The transmission decreases with a and increases with $|E|$.)

(4) $E < m_0c^2 + V_0$: The positrons are scattered at the repulsive potential; again, there can exist potential resonances if a is an integer multiple of the wavelength in the domain II.

On the other hand in Fig. 9.2 the potential is assumed to be $|V_0| > 2m_0c^2$. In this case an additional energy domain appears, showing a new behaviour of the wave function: $m_0c^2 + V_0 < E < -m_0c^2$. In this domain, bound electronic states are possible; however their wave functions do not decrease exponentially, in the domains I, III, but they join a continuum wave of the same energy $E < -m_0c^2$. Therefore the probability of finding the particle far away from the well is not equal to zero. We interpret this observation using hole theory (see Chap. 12). It means that a hole in that state will travel away (as a positron) from the well to infinity, and if a state is unoccupied, it will be slowly occupied by an electron of the filled Dirac sea. Thus a spontaneous creation of an electron-positron pair is possible. An empty bound state will spontaneously be occupied by an electron from the negative continuum, whereas the positron will move away to infinity. (Because of the spin degeneracy of the state there will even be two positrons: one with spin up and one with spin down.) One usually says that in this case the potential well is overcritical with respect to spontaneous $e^- - e^+$ pair creation. While bound

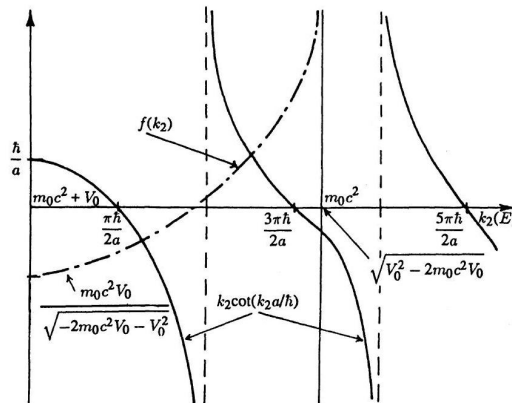


Fig. 9.3. The graphical solution of (19)

states in the energy domain $-m_0c^2 < E < m_0c^2$ can remain empty without causing any instability to the system, it is impossible to keep bound states that "dive" into the negative continuum empty for a long time. They will be spontaneously filled up, i.e. the hole in this state has a finite decay width. We will see that, in fact, no sharp energy levels of bound states exist in the domain $m_0c^2 + V_0 < E < -m_0c^2$ (as was the case for $-m_0c^2 < E < m_0c^2$), but these wave functions will have a resonating structure that peaks around the expected binding energy of the bound state.

Following these qualitative considerations, we shall now show how these statements result from the solutions (10)-(12) and we distinguish the two cases:

a) $|E| > m_0c^2$, i.e. p_1 is real.

b) $|E| < m_0c^2$, i.e. p_1 is imaginary

Solutions for a) are in general called scattering states, solutions for b) are bound states.

First we consider case b). Here (12) are significantly simplified since A and C' have to vanish, so that ψ_I and ψ_{III} do not increase exponentially and are therefore normalizable; thus the first of (12) has the form:

$$0 = \frac{1}{4\gamma} e^{ip_1 a/\hbar} C \left((1 + \gamma)^2 e^{-ip_2 a/\hbar} - (1 - \gamma)^2 e^{ip_2 a/\hbar} \right) \quad (14)$$

Since $C \neq 0$ (otherwise the whole wave function will be zero), we obtain

$$\frac{1+\gamma}{1-\gamma} e^{ip_2 a/\hbar} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} e^{-ip_2 a/\hbar}.$$

As long as p_2 is real (in Fig. 9.1 for $m_0c^2 + V_0 < E < m_0c^2$, in Fig. 9.2 in the whole domain $-m_0c^2 < E < m_0c^2$), γ is imaginary (since p_1 is imaginary). Thus (15) means that

$$\left[\frac{1+\gamma}{1-\gamma} e^{-ip_2 a/\hbar} \right]^* = \frac{1+\gamma}{1-\gamma} e^{-ip_2 a/\hbar}$$

whereby "*" denotes complex conjugation, or

$$\text{Im} \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} e^{-ip_2 a/\hbar} \right) = 0.$$

With $\gamma = i\Gamma$ ($\Gamma \in \mathbb{R}$) follows

$$\frac{2\Gamma}{1-\Gamma^2} = \tan \left(p_2 \frac{a}{\hbar} \right).$$

Inserting Γ from (9), we finally have

$$cp_2 \cot \left(p_2 \frac{a}{\hbar} \right) = f(p_2) \quad \text{with}$$

$$f(p_2) = -\frac{EV_0}{c\kappa} - \kappa c,$$

whereby $p_1 = i\kappa$. This is the equation to determine the energy eigenvalues of the bound states, which will be discussed immediately. Before this, one should briefly mention that (15) has no solution, if in Fig. 9.1

$$-m_0c^2 < E < m_0c^2 + V_0,$$

i.e. if p_2 is imaginary:

$$\frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma)^2} e^{2\kappa_2 a/\hbar} \neq 1 \quad (p_2 = i\kappa_2),$$

because $(1 + \gamma)^2 > 1$, $(1 - \gamma)^2 < 1$, $e^{2\kappa_2 a/\hbar} > 1$, which is the reason why the wave functions in this domain vanish identically. The condition (19) can be approximately solved graphically (take a look at Fig.9.3); this is sufficient to get a qualitative overview about the behaviour of bound states. Let us do this first; afterwards we shall obtain the exact energy spectrum for bound states by numerical solution of (19).

First we note that

$$y := cp_2 \cot \left(p_2 \frac{a}{\hbar} \right) = \frac{\hbar c}{a} \left(p_2 \frac{a}{\hbar} \right) \cot \left(p_2 \frac{a}{\hbar} \right) \xrightarrow{p_2 \rightarrow 0} \frac{\hbar c}{a},$$

$$f(p_2) \xrightarrow{p_2 \rightarrow 0} \frac{m_0c^2 V_0}{\sqrt{-2m_0c^2 V_0 - V_0^2}},$$

$$f(p_2) \xrightarrow{cp_2 \rightarrow \sqrt{V_0^2 - 2m_0c^2V_0}} +\infty$$

(corresponding to $E \rightarrow +m_0c^2$).

In the case of $V_0 < 2m_0c^2$, $f(p_2 \rightarrow 0)$ becomes imaginary. This looks, if graphically presented, somewhat like Fig. 9.3. We note immediately, that a bound state always exists, independent of the depth and width of the potential well. This is in accordance with the corresponding nonrelativistic problem, but is opposite to the corresponding threedimensional problem. Because of the angular momentum barrier occuring in the latter case, not every three-dimensional potential well has a bound state, but only those below a certain depth V_0 .

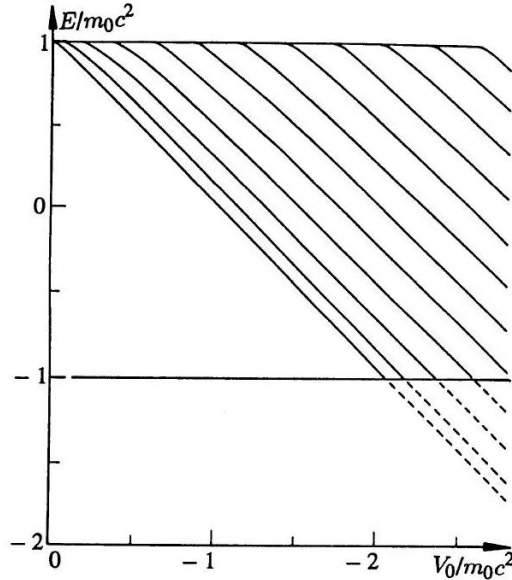


Fig. 9.4. Eigenvalue spectrum of bound electrons in a one-dimensional potential well of width $a = 10\lambda_e$. The energies of the dived states corresponding to resonances are depicted by dashed lines, as they can be extracted from the maxima of the transmission coefficients (see Fig. 9.5)

One can solve (19) numerically and thus determine the energy spectrum of the bound solutions for several sets of parameters V_0 , a . This is depicted in Fig. 9.4 for the case of $a = 10\lambda_e$. We note that, with increasing V_0 , more and more states appear. For $V_0 \simeq -2.04m_0c^2$ the well becomes supercritical, the lowest bound states enter the lower continuum and can there be realized as a resonance in the transmission coefficient (s.b).

Now we want to consider the scattering states. Again there are several domains:

1. p_2 and γ are real. This is the case for $E > m_0c^2$ and for $E < -m_0c^2 + V_0$. In the overcritical case there is an additional domain $m_0c^2 + V_0 < E < -m_0c^2$.
2. p_2 and γ are imaginary. Obviously this is the case for $V_0 - m_0c^2 < E < V_0 + m_0c^2$.

We will discuss both cases successively. First we make use of the possibility that we can choose one of the coefficients A, A', C, C' freely. We assume that from the rhs no wave enters the potential; thus $C' = 0$ and C is interpretable as that part resulting from a wave with amplitude A which arrives from the left, travelling through the potential pocket or well. The term proportional to A' stems from the wave reflected at the potential. Now we can define a transmission coefficient T and a phase shift δ by $\frac{C}{A} = \sqrt{T}e^{-i\delta}$,

i.e. the amplitude of the outgoing wave is reduced by a factor $\sqrt{T}$ and shifted by the phase δ compared to the wave impacting from the left. From (12) we obtain for real p_2 :

$$\begin{aligned}
T &= \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \left[\cos^2 \left(p_2 \frac{a}{\hbar} \right) + \left(\frac{1+\gamma^2}{2\gamma} \right)^2 \sin^2 \left(p_2 \frac{a}{\hbar} \right) \right]^{-1} \\
&= \left[1 + \left(\frac{1-\gamma^2}{2\gamma} \right)^2 \sin^2 \left(p_2 \frac{a}{\hbar} \right) \right]^{-1} \leq 1
\end{aligned} \tag{23}$$

The phase follows from [see (12)]

$$\frac{1}{\sqrt{T}} = e^{i\delta} e^{-(i/\hbar)p_1 a} = \cos \left(p_2 \frac{a}{\hbar} \right) - i \frac{1+\gamma^2}{2\gamma} \sin \left(p_2 \frac{a}{\hbar} \right)$$

and

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \left[i \sin \left(\delta - \frac{p_1 a}{\hbar} \right) + \cos \left(\delta - \frac{p_1 a}{\hbar} \right) \right] \tag{24}$$

$$= \cos \left(\frac{p_2 a}{\hbar} \right) - i \frac{1+\gamma^2}{2\gamma} \sin \left(\frac{p_2 a}{\hbar} \right). \tag{25}$$

The separation of real and imaginary parts and the elimination of $\sqrt{T}$ yields

$$-\tan \left(\frac{p_1 a}{\hbar} - \delta \right) = -\frac{1+\gamma^2}{2\gamma} \tan \left(\frac{p_2 a}{\hbar} \right),$$

$$\delta = \left(\frac{p_1 a}{\hbar} \right) - \arctan \left(\frac{1+\gamma^2}{2\gamma} \tan \left(\frac{p_2 a}{\hbar} \right) \right).$$

If, however, p_2 is imaginary, then instead of (23) we get from (12) the transmission coefficient

$$T = \left[1 + \left(\frac{1+\Gamma^2}{2\Gamma} \right)^2 \sinh^2 \left(\frac{\kappa_2 a}{\hbar} \right) \right]^{-1} \leq 1$$

(whereby $\gamma = i\Gamma$ and $p_2 = i\kappa_2$ as before), and instead of (27) the phase shift reads

$$\delta = \left(\frac{p_1 a}{\hbar} \right) - \arctan \left(\frac{1-\gamma^2}{2\Gamma} \tanh \left(\frac{\kappa_2 a}{\hbar} \right) \right).$$

In Fig. 9.5 the transmission coefficient for a potential of the depth $V_0 = -3m_0c^2$ and the width $a = 300\hbar/m_0c$ is depicted. Now we choose an overcritical potential, since the undercritical case differs only by the omission of the

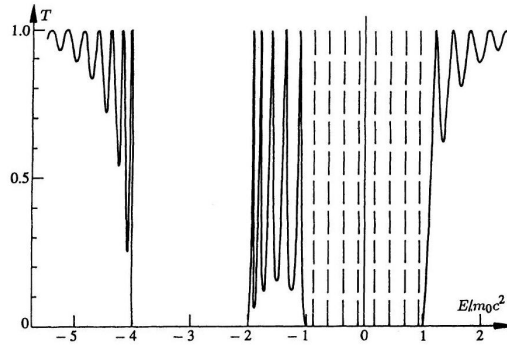


Fig. 9.5. The transmission coefficient for scattered states of a one-dimensional square-well potential of depth $V_0 = -3m_0c^2$ and width $a = 10\lambda_e$. The energies of the bound states are depicted by dashed lines

domain $m_0c^2 + V_0 < E < -m_0c^2$. We have significant structures of resonance in the electron continuum for $E > m_0c^2$ and in the positron continuum for positron energies above the potential barrier $|E| > |V_0 - m_0c^2|$; ($E < -m_0c^2 + V_0$). Positrons with lower kinetic energy ($-m_0c^2 + V_0 < E < m_0c^2 + V_0$) only penetrate the barrier with a probability which decreases exponentially with the width a of the barrier. Hence T is about zero in our case. In the domain $m_0c^2 + V_0 < E < -m_0c^2$, however, there is the possibility that the incoming wave meets an overcritical, quasibound state, and thus penetrates the potential domain more or

less unhindered. At the point where by extrapolation of the spectrum of the bound states in Fig. 9.4 one would expect the quasi-bound state. T is equal to 1. The dived bound state in this way becomes perceptible as a resonance in the scattering spectrum below $E = -m_0c^2$. These resonances do not exist for subcritical potentials; their interpretation as a signature for spontaneous pair creation has already been discussed in the qualitative discussion above ¹.

Finally we look at the scattering phase in Fig. 9.6. As can already be seen from (23), (27), (28), (29), one gets $T = 1$ for $\delta - p_1(a/\hbar) = 0(\text{mod}\pi)$, and T becomes minimal for $\delta - p_1(a/\hbar) = \frac{\pi}{2}(\text{mod}\pi)$. If T is minimal the reflection coefficient becomes maximal. Hence this statement is in agreement with the well-known statement from scattering

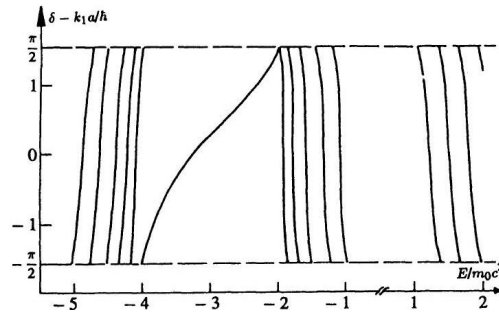


Fig. 9.6. The phase shifts of scattering states of a one-dimensional well of depth $V_0 = -3m_0c^2$ and with width $a = 10\lambda_e$ as a function of energy E . The energy E is given in units of m_0c^2

theory that the scattering cross-section becomes maximal if the scattering phase passes through $\frac{\pi}{2}$. "Scattering" in the one-dimensional case is identified with reflection at the potential well).

Thus in the domain $m_0c^2 + V_0 < E < -m_0c^2$ we can determine the energies of the dived states, where $(\delta - p_1 a/\hbar) = 0(\text{mod}\pi)$. These energies lie exactly where one would expect them by extrapolation of the bound spectrum (see Fig. 9.4).

9.2 Eigenvalues of the Dirac Equation in a One-Dimensional Square Potential Well with Scalar Coupling

Problem. Investigate the eigenvalues of the Dirac equation in a one-dimensional square-well potential, with depth V_0 and width a , if this potential is not coupled as a time-like component of a four-vector, but like a scalar.

Solution

As in Example 9.1 we define three domains I($z < a/2$), II($-a/2 \leq z \leq a/2$) and III($z > a/2$). In these cases the Dirac equation takes the following respective forms:

$$\text{I, III: } (\hat{\alpha} \cdot \hat{p}c + \hat{\beta}m_0c^2) \psi = E\psi,$$

$$\text{II: } (\hat{\alpha} \cdot \hat{p}c + \hat{\beta}(m_0c^2 + V_0)) \psi = E\psi \quad (V_0 < 0).$$

In contrast to the vector coupling, which in domain II leads to the replacement $E \rightarrow E - V_0$, we now must replace m_0c^2 by $m_0c^2 + V_0$ in II. While vector coupling acts differently on electron and positron states, respectively (if electrons in the square-well are attracted, positrons are repelled, and

vice versa) and thus the eigenvalue spectrum is not symmetric (bound states exist for only one of the two kinds of particles), scalar coupling acts equally on particles and antiparticles.

¹ For greater detail see W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski: Quantum Electrodynamics of Strong Fields (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1985).

Alternatively, one can say: For vector coupling the potential couples to the charge (which is different for particles and antiparticles); for scalar coupling the potential couples to the mass (which is equal for both particles and antiparticles). In the latter case we thus expect a symmetrical energy eigenvalue spectrum, i.e. for both electrons and positrons there will exist bound states. Hence we expect a supercritical behaviour even for $V_0 \leq -m_0c^2$. In this case, in principle electron and positrons states can cross. What happens then will be discussed in detail a little later. Now, though, let us proceed analogously to the case of vector coupling. Again the momentum in the regions I, II is given by

$$p_1^2 = \frac{E^2}{c^2} - m_0^2c^2.$$

In domain II, however, we get

$$p_2^2 = \frac{E^2}{c^2} - (m_0c + \frac{V_0}{c})^2.$$

Again we can write down the conditions for continuity of the wave functions at $z = -a/2$ and $z = a/2$. Analogously to the case of vector coupling, we define

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv \frac{p_1c}{E + m_0c^2} \frac{E + m_0c^2 + V_0}{p_2c} \\ &= \sqrt{\frac{(E - m_0c^2)(E + m_0c^2 + V_0)}{(E + m_0c^2)(E - m_0c^2 - V_0)}}. \end{aligned} \quad (4)$$

One should note that $\gamma \rightarrow 1/\gamma$ if $E \rightarrow -E$. Using the same notation as in the case of vector coupling, we can work with (12) from Exercise 9.1, if we observe that γ is now given by (4):

$$\begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix} = \frac{1}{4\gamma} \begin{pmatrix} (1 + \gamma)^2 e^{i(p_1 - p_2)a/\hbar} - (1 - \gamma)^2 e^{i(p_1 + p_2)a/\hbar} \\ - (1 - \gamma^2) (e^{-ip_2a/\hbar} - e^{ip_2a/\hbar}) \end{pmatrix}$$

We divide the further discussion into several steps:

1. $|E| < m_0c^2$: bound states
2. $|E| > m_0c^2$: scattering states in the bound electron or positron continuum.

Let us first consider the bound states. For these the following eigenvalue equation holds:

$$\frac{1+\gamma}{1-\gamma} e^{-ip_2a/\hbar} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} e^{ip_2a/\hbar}.$$

This equation only has solutions if p_2 is real, i.e. $|E| > |m_0c^2 + V_0|$ [$E > m_0c^2 + V_0$ for electrons, $E < -(m_0c^2 + V_0)$ for positrons]. Thus, it again follows from (6) that

$$\tan(p_2 \frac{a}{\hbar}) = \frac{2\Gamma}{1-\Gamma^2}, \text{ with}$$

$$\gamma = i\Gamma (\Gamma \in \mathbb{R}) \text{ and}$$

$$cp_2 \cot(p_2 \frac{a}{\hbar}) = - \left(\frac{m_0c^2 V_0}{\kappa_1 c} + \kappa_1 c \right) =: f(p_2),$$

whereby $p_1 = i\kappa_1$. Of course this equation is symmetric in $\pm E$, too. Furthermore the following relations hold:

$$\begin{aligned} f(p_2) &= \frac{m_0c^2 V_0 + V_0^2 + p_2^2 c^2}{\sqrt{-2m_0c^2 V_0 - V_0^2 - p_2^2 c^2}} \\ &\quad \left(0 \leq p_2 < \sqrt{-2m_0c^2 V_0 - V_0^2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

$$f(p_2) \xrightarrow{p_2 \rightarrow 0} \frac{m_0c^2 V_0 + V_0^2}{\sqrt{-2m_0c^2 V_0 - V_0^2}} \begin{cases} < 0 & \text{for } |V_0| < m_0c^2 \\ > 0 & \text{for } |v_0| > m_0c^2 \\ \rightarrow \infty & \text{for } V_0 \rightarrow -2m_0c^2 \end{cases}, \quad (10)$$

$$\left(\text{corresponding to } p_2 \rightarrow \sqrt{-2m_0V_0 - V_0^2/c^2} \right). \quad (11)$$

Since $V_0 < m_0 c^2$, the graphical solution of (9) looks similar to the case of vector coupling (see Fig. 9.7), except that

$$\begin{pmatrix} (1 - \gamma^2) (e^{-ip_2 a/\hbar} - e^{ip_2 a/\hbar}) \\ (1 + \gamma^2) e^{-i(p_1 - p_2)a/\hbar} - (1 - \gamma)^2 e^{-i(p_1 + p_2)a/\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C' \end{pmatrix} = 0.$$

one has to imagine Fig. 9.3 in Example 9.1 to be continued to negative energies in a symmetric way.

If now $|V_0|$ increases, the intersection point of $f(p_2)$ with the ordinate in Fig. 9.7 is shifted upwards. Corre-

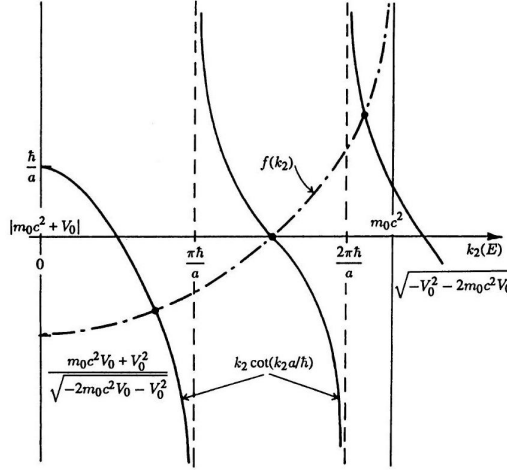


Fig. 9.7. Graphical solution of (8)

spondingly the lowest eigenvalue decreases to smaller values of p_2 . In case of

$$\frac{(m_0 c^2 V_0 + V_0^2)}{\sqrt{-2m_0 c^2 V_0 - V_0^2}} > \frac{\hbar c}{a},$$

the lowest eigenvalue vanishes, namely at $p_2 = 0$ or $|E| = |m_0 c^2 + V_0| > 0$. Consequently the deepest bound state never reaches the energy $E = 0$ and the corresponding electron and positron states never overlap. This does however not mean that the eigenstate does not exist any longer for larger values of $|V_0|$. Rather, now there exists a solution of (6) with imaginary momentum $p_2 = i\kappa_2$, $\kappa_2 = \sqrt{(m_0 c + V_0/c)^2 + E^2/c}$. The transcendental eigenvalue equation analogous to (8) reads in this case

$$c\kappa_2 \coth\left(\frac{\kappa_2 a}{\hbar}\right) = -\left(\frac{m_0 c^2 V_0}{\kappa_1 c} + \kappa_1 c\right) =: \tilde{f}(\kappa_2).$$

A graphical construction similar to the one in Fig. 9.1 reveals that there is always exactly one solution for

$$\frac{m_0 c^2 V_0 + V_0^2}{\sqrt{-2m_0 c^2 V_0 - V_0^2}} > \frac{\hbar c}{a}.$$

For $V_0 \rightarrow \infty$ it monotonically decreasingly approaches the value $\kappa_2 \rightarrow -m_0 c - V_0/c$ corresponding to $E \rightarrow \pm 0$.

If we further increase $|V_0|$, the ordinate cut of $f(p_2)$ still moves upwards and the higher states approach the eigenvalues $p_2 = n\pi\hbar/a$ with the eigenenergies $E^2 = (n\pi/a)^2(\hbar c)^2 + (m_0 c^2 + V_0)^2$. For $|V_0| \rightarrow 2m_0 c^2$, the quantity $f(p_2 = 0)$ diverges and the eigenenergies come close to the value $E^2 = (n\pi/a)^2(\hbar c)^2 + m_0^2 c^4 > m_0^2 c^4$. That means no more bound states exist for $|V_0| \rightarrow 2m_0 c^2$; with increasing potential depth all bound states vanish, one after another. This behaviour is illustrated in Fig. 9.8, which was obtained by solving (8) numerically. The energy diagram shown is characteristic for the square-well potential. [One can also consider the same problem in three dimensions with a Coulomb-like potential of the form $-\alpha'/r$ (see Example 9.8); then, all states in the diagram are conserved for arbitrary high coupling strength α' , too. However, their binding energies approach the value $|E| = 0$ only asymptotically (cf. Fig. 9.9) and also in this case electron and positron states do not cross.]

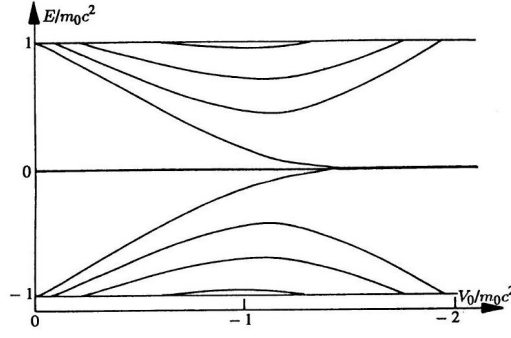


Fig. 9.8. Spectrum of eigenvalues of the Dirac equation with a one-dimensional square-well potential of width $a = 10\lambda_e$ as a function of the potential strength V_0 (scalar coupling)

Therefore we find, in contrast to vector coupling, that in the case of scalar coupling spontaneous $e^+ - e^-$ pair creation never occurs, no matter how strong the potential chosen. This qualitatively different behaviour of the bound states in case of the α'/r potential is easily understood in the following way: Due to the scalar potential the electrons obtain an effective mass $m_{\text{eff}} c^2 = m_0 c^2 + V_0$. Figure 9.10 schematically shows this effective mass as a function of r for the α'/r potential, together with some bound states.

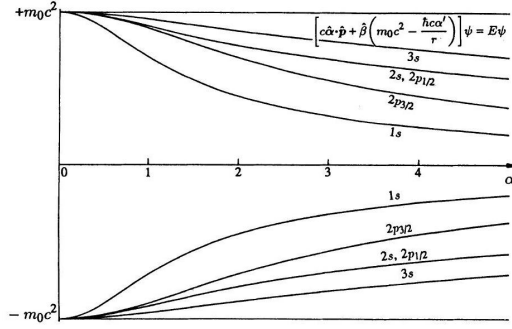


Fig. 9.9. Eigenvalue spectrum of the three-dimensional Dirac equation with α'/r -potential (scalar coupling)

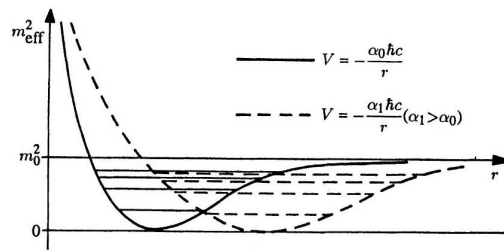


Fig. 9.10. Square of the effective mass $(m_{\text{eff}} c^2)^2 = [m_0 c^2 + V(r)]^2$ as a function of the radius r

One sees that a region with $m_{\text{eff}} < m_0$ always exists, so that bound states are always possible (i.e. for all values of the coupling strength α'). With increasing parameter α' the wave functions are shifted to larger values of r . Simultaneously the potential bag is broadened and hence the energy eigenvalues $|E|$ decrease and become zero in the limit $\alpha' \rightarrow \infty$. Since $m_{\text{eff}} \geq 0$ always holds, then $|E| > 0$ is always valid, too, and electron and positron states can never cross. The energy gap between electrons and positrons becomes smaller and smaller, but never zero; therefore, $e^+ - e^-$ pair creation without energy (i.e. spontaneous pair creation) can never occur (see Figs. 9.8 and 9.9).

Finally we give a brief qualitative discussion of the scattering states $|E| > m_0 c^2$. Again we consider the case $C' = 0$ and study the transmission coefficient $T = |C/A|^2$. Of course,

the relation $|E| > m_0c^2 + V_0$ also holds in the energy region $|E| > m_0c^2$. For $V_0 < -2m_0c^2$ the electrons feel a potential barrier if they lie in the energy interval $m_0c^2 < E < |m_0c^2 + V_0|$ (similar statements hold for positrons). While for $|V_0| < 2m_0c^2$ resonances occur in both continua (in complete analogy to Fig. 9.5 in Example 9.1), in the region $E > m_0c^2$ one obtains for $|V_0| < 2m_0c^2$ an additional energy region, where electrons and positrons feel a potential barrier, and the transmission coefficient becomes very small (corresponding to the behaviour in the energy interval $-m_0c^2 + V_0 < E < m_0c^2 + V_0$ in Fig. 9.5).

9.3 Separation of the Variables for the Dirac Equation with Central Potential (minimally coupled)

The Dirac-Hamiltonian in this case reads

$$\hat{H}_D = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0c^2 + V(r),$$

where $V(r) = eA_0(r)$. Because of the spherical symmetry of the field ², the angular-momentum operator $\hat{\mathbf{J}}$ and the parity operator $\hat{P} = e^{i\varphi}\hat{\beta}(\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}) = e^{i\varphi}\gamma^0\hat{P}_0$ [see (4.9)] with respect to the origin of the coordinate system commute with the Hamiltonian. Hence states with definite energy, angular momentum and parity occur. The corresponding wave functions are denoted by

$$\psi_{jm} = \begin{pmatrix} \varphi_{jlm}(\mathbf{x}, t) \\ \chi_{jl'm}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}.$$

Here φ_{jlm} and $\chi_{jl'm}$ are two-spinors which are to be determined. Since ψ_{jm} must have good parity and the parity operator reads $\hat{P} = e^{i\varphi}\hat{\beta}\hat{P}_0$ ($\hat{P}_0$ changes $\mathbf{x}$ into $-\mathbf{x}$), we have

$$\psi'_{jm}(\mathbf{x}', t) \stackrel{!}{=} \lambda \psi_{jm}(\mathbf{x}', t') \quad \text{or} \quad \hat{P}\psi_{jm}(x') \stackrel{!}{=} \lambda \psi_{jm}(x'),$$

$$\hat{P}\psi_{jm} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \hat{P}_0 \begin{pmatrix} \varphi_{jlm}(\mathbf{x}, t) \\ \chi_{jl'm}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} &= e^{i\varphi} \begin{pmatrix} \hat{P}_0\varphi_{jlm}(\mathbf{x}, t) \\ -\hat{P}_0\chi_{jl'm}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{!}{=} \lambda\psi_{jm} = \lambda \begin{pmatrix} \varphi_{jlm}(\mathbf{x}, t) \\ \chi_{jl'm}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3b)$$

where $|\lambda| = 1$ [in (3b) we have replaced x' by x]. One should clearly recognize the content of (3a): the demand for "good parity" of the wave function means that the wave function is an eigenfunction of the parity operator $\hat{P}$ [see (4.9)]. Equation (3b) shows that the parity of the two-spinor φ_{jlm} must be equal to the negative parity of $\chi_{jl'm}$. We can also understand this statement in the following way: Starting with the stationary Dirac equation $\hat{H}_D\psi = E\psi$, we get with

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}$$

that

$$c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\chi + m_0c^2\varphi + V\varphi = E\varphi, \quad$$

$$c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\varphi - m_0c^2\chi + V\chi = E\chi,$$

or

$$(E - m_0c^2 - V)\varphi = c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\chi,$$

$$(E + m_0c^2 - V)\chi = c(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\varphi.$$

Since the operator $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ changes parity, these equations show that the two spinors φ and χ must have opposite parity.

² See Vol. 2 of this series, Quantum Mechanics - Symmetries (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

Eigenfunctions of the angular momentum and the parity operator are the well-known spherical spinors. To avoid confusion with the complete wave function Ψ , we shall denote the spherical spinors here by Ω_{jlm} . They are defined by

$$\Omega_{jlm} = \sum_{m', m_s} (l \frac{1}{2} j | m' m_s m) Y_{lm'} \chi_{\frac{1}{2} m_s}.$$

Here the two-spinors $\chi_{\frac{1}{2} m_s}$ are eigenfunctions of the spin operators $\hat{S}^2 = \hbar^2 \hat{\sigma}^2 / 4$ and $\hat{S}_3 = \hbar \hat{\sigma}_3 / 2$; they read explicitly:

$$\chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

The parity of Ω_{jlm} is given by Y_{lm} :

$$\hat{P}_0 \Omega_{jlm} = (-1)^l \Omega_{jlm}.$$

We make the following ansatz

$$\varphi_{jlm} = ig(r) \Omega_{jlm} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad \chi_{jl'm} = -if(r) \Omega_{jl'm} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

with

$$l' = 2j - l =: \begin{cases} 2(l + \frac{1}{2}) - l = l + 1 & \text{for } j = l + \frac{1}{2} \\ 2(l - \frac{1}{2}) - l = l - 1 & \text{for } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Let us repeat this once more: Because of (6) either $j = l + \frac{1}{2}$ or $j = l - \frac{1}{2}$. If $j = l + \frac{1}{2}$, the orbital angular momentum l' of $\chi_{jl'm}$ is $l' = l + 1$. This is the only way to realize the opposite parity of χ compared to φ . The value $l' = l - 1$ must be excluded, because no total angular momentum $j = l + \frac{1}{2}$ can be constructed by $l' = l - 1$ and $S = \frac{1}{2}$. The arguments follow a similar pattern for the second case of (9). One has

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \varphi_{jlm} &= \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} (ig(r)) \Omega_{jlm} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \\ &= (\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} ig(r)) \Omega_{jlm} + ig(r) \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \Omega_{jlm} \\ &= \hbar \frac{dg(r)}{dr} \left(\hat{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \Omega_{jlm} + ig(r) \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \Omega_{jlm} \end{aligned} \quad (10)$$

With respect to (6) the spherical spinors are eigenfunctions of the operators $\hat{L}^2$, $\hat{J}^2$ and $\hat{S}^2 = (\frac{1}{2} \hat{\sigma})^2$ with eigenvalues $l'(l' + 1) \hbar^2$, $j(j + 1) \hbar^2$ and $\frac{3}{4} \hbar^2$ respectively. To be complete we once more give the explicit form of the Ω_{jlm} for the useful cases $j = l + \frac{1}{2}$ and $j = l - \frac{1}{2}$ ($j \geq \frac{1}{2}$):

$$\begin{aligned} \Omega_j^{l+\frac{1}{2}, l, m} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}} Y_{l, m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}} Y_{l, m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \\ \Omega_j^{l-\frac{1}{2}, l, m} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} Y_{l, m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} Y_{l, m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

The root factors (11) are the Clebsch-Gordon-coefficients in explicit form. Now we make use of the following relation between the spherical spinors

$$\left(\hat{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \Omega_{jlm} = -\Omega_{jl'm} \quad (12)$$

which is easily proven, because $(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{r}/r)$ is a scalar operator of negative parity [see (10.54) and the following]. With (12) we get

$$-(\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \Omega_{jlm} = (\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \left(\hat{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \Omega_{jl'm}.$$

Now we take the already familiar relation

$$(\hat{\sigma} \cdot A)(\hat{\sigma} \cdot B) = A \cdot B + i\hat{\sigma} \cdot (A \times B)$$

to change (13) into

$$-(\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \Omega_{jlm} = \left(\hat{\mathbf{p}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} + i\hat{\sigma} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \right) \Omega_{jl'm}.$$

With $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$ and $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}$, Eq. (15) can further be transformed into

$$\begin{aligned}
& (\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r} + i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{r})) \frac{1}{r} \Omega_{jl'm} \\
&= (-i\hbar(\nabla \cdot \mathbf{r}) - i\hbar \mathbf{r} \cdot \nabla - i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}})) \frac{1}{r} \Omega_{jl'm} \\
&= \left(-i\hbar \frac{3}{r} - i\hbar r \left(-\frac{1}{r^2} \right) - i \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}}{r} \right) \Omega_{jl'm} \\
&= -i \left(\frac{2\hbar}{r} + \frac{1}{r} \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right) \Omega_{jl'm}.
\end{aligned} \tag{16}$$

From

$$\hat{J}^2 = \left(\hat{L} + \frac{\hbar}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right)^2 = \hat{L}^2 + \left(\frac{\hbar}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right)^2 + \hbar \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{L}$$

follows

$$\begin{aligned}
\hbar \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \Omega_{jl'm} &= \left(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 \left(\frac{\hbar}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right)^2 \right) \Omega_{jl'm} \\
&= \left\{ j(j+1) - l'(l'+1) - \frac{3}{4} \right\} \hbar^2 \Omega_{jl'm}
\end{aligned} \tag{18}$$

Now and in the following it is convenient to define a quantum number κ by

$$\begin{aligned}
\kappa &= \mp \left(j + \frac{1}{2} \right) \\
&= \begin{cases} -(l+1) & \text{for } j = l + \frac{1}{2} \\ l & \text{for } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}.
\end{aligned} \tag{19a}$$

Obviously there is always

$$|\kappa| = j + \frac{1}{2} \quad \text{or} \quad j = |\kappa| - \frac{1}{2}.$$

With this and taking $l' = 2j - 1$ into account one can rewrite the expectation value on the rhs of (18). For $j = l + \frac{1}{2}$ one gets:

$$\begin{aligned}
& \left(l + \frac{1}{2} \right) \left(l + \frac{1}{2} + 1 \right) \\
& - \left[2 \left(l + \frac{1}{2} \right) - l \right] \left[2 \left(l + \frac{1}{2} \right) - l + 1 \right] - \frac{3}{4} \\
&= l^2 + \frac{1}{2}l + l + \frac{1}{2}l + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - (l+1)(l+2) - \frac{3}{4} \\
&= l^2 + 2l - l^2 - 2l - l - 2 = -(l+2) = \kappa - 1
\end{aligned} \tag{20a}$$

Similarly for $j = l - \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
& \left(l - \frac{1}{2} \right) \left(l + \frac{1}{2} \right) \\
& - \left[2 \left(l - \frac{1}{2} \right) - l \right] \left[2 \left(l - \frac{1}{2} \right) - l + 1 \right] - \frac{3}{4} \\
&= l^2 - \frac{1}{4} - (l-1)l - \frac{3}{4} = l - 1 = \kappa - 1.
\end{aligned} \tag{20b}$$

Now (16) can be written as

$$(2\hbar + \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\Omega_{jl'm} = (1 + \kappa)\hbar\Omega_{jl'm}.$$

If in (18) we had started with Ω_{jlm} we would have obtained $(2\hbar + \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})\Omega_{jlm} = (1 - \kappa)\hbar\Omega_{jlm}$ by the same procedure. In the literature ³ the following notation is often used for (21): One writes

$$\chi_{\kappa,m} \equiv \Omega_{jlm} \quad , \quad \chi_{-\kappa,m} \equiv \Omega_{jl'm}$$

and defines the operator

$$\hat{\kappa} = \hbar + \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

so that due to (21) the eigenvalue equation

$$\hat{\kappa}\chi_{\kappa,m} = -\hbar\kappa\chi_{\kappa,m} \quad , \quad \hat{\kappa}\chi_{-\kappa,m} = \hbar\kappa\chi_{-\kappa,m}$$

holds, where

$$\kappa = \begin{cases} -(l+1) = -(j + \frac{1}{2}) & \text{for } j = l + \frac{1}{2} \\ l = +(j + \frac{1}{2}) & \text{for } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

and $|\kappa| = j + \frac{1}{2}$.

Consequently, the spherical spinors of (8) can also be denoted by $\chi_{\kappa,m} = \Omega_{jlm}$ and $\chi_{-\kappa,m} = \Omega_{jl'm}$ and we can therefore write for the four-spinor in a central field

$$\begin{aligned} \psi_{jm} &= \begin{pmatrix} \varphi_{jlm}(\mathbf{x}, t) \\ \chi_{jl'm}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ig(r)\Omega_{jlm}(\frac{\mathbf{r}}{r}) \\ -f(r)\Omega_{jl'm}(\frac{\mathbf{r}}{r}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ig(r)\chi_{\kappa,m} \\ -f(r)\chi_{-\kappa,m} \end{pmatrix} = +i \begin{pmatrix} g(r)\chi_{\kappa,m} \\ if(r)\chi_{-\kappa,m} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sometimes we shall use this alternative notation. With this and (15) and (12), equation (10) finally takes the form

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \varphi_{jlm} = -\Omega_{jl'm} \left(\hbar \frac{dg}{dr} + \frac{\kappa+1}{r} \hbar g(r) \right), \text{ namely}$$

Analogously one derives an expression for $(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\chi$,

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\chi_{jl'm} = -i\Omega_{jlm} \left(\hbar \frac{df}{dr} - \frac{\kappa-1}{r} \hbar f(r) \right).$$

Now the expressions (22) and (23) are inserted into (5). The angular functions from both sides of the equation can be eliminated. So we obtain the differential equations for the radial functions f and g :

$$\hbar c \frac{dg(r)}{dr} + (1 + \kappa) \hbar c \frac{g(r)}{r} - [E + m_0 c^2 - V(r)] f(r) = 0,$$

$$\hbar c \frac{df(r)}{dr} + (1 - \kappa) \hbar c \frac{f(r)}{r} + [E - m_0 c^2 - V(r)] g(r) = 0.$$

With the substitution

$$G = rg \quad \text{and} \quad F = rf \quad \text{with} \quad \frac{dG}{dr} = g + r \frac{dg(r)}{dr} \quad \text{and} \quad \frac{dF}{dr} = f + r \frac{df(r)}{dr},$$

one finally gets

$$\hbar c \frac{dG(r)}{dr} + \hbar c \frac{\kappa}{r} G(r) - [E + m_0 c^2 - V(r)] F(r) = 0,$$

$$\hbar c \frac{dF(r)}{dr} - \hbar c \frac{\kappa}{r} F(r) + [E - m_0 c^2 - V(r)] G(r) = 0.$$

These are the frequently used coupled differential equations for the radial wave functions F and G of the Dirac equation in the case of a spherically symmetric potential $V(r)$. In the literature one occasionally sets $G = u_1$ and $F = u_2$.

³ See, for example, M.E. Rose: Relativistic Electron Theory (Wiley, New York, London).

9.4 Commutation of the Total Angular Momentum Operator with the Hamiltonian in a Spherically Symmetric Potential

Problem. Show that the operator of the total angular momentum $\hat{\mathbf{J}}$ commutes with the Hamiltonian of a Dirac particle in a spherically symmetric potential.

Solution

In analogy to the Pauli theory for electrons with spin we define the total angular momentum as the sum of the orbital angular momentum $\hat{\mathbf{L}}$ and the spin angular momentum $\frac{1}{2}\hbar\hat{\Sigma}$ with

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \frac{1}{2}\hbar\hat{\Sigma} \equiv \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}.$$

The one-particle Dirac Hamiltonian for a spherically symmetric potential $A_0(r)$ which is minimally coupled as the fourth component of a four-potential reads

$$\hat{H}_D = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0c^2 + \frac{e}{c}A_0(\mathbf{r}).$$

First we investigate the commutator $[\hat{\mathbf{L}}, \hat{H}_D]_-$. Since $\hat{\mathbf{L}}$ commutes with $\hat{\beta}$ and the spherical symmetric potential $A_0(r)$, it only remains to calculate $[\hat{\mathbf{L}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}]_-$. We restrict ourselves to the calculation of the commutator for the $\hat{L}_x$ component and get:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}]_- &= \hat{L}_x (\hat{\alpha}_x \hat{p}_x + \hat{\alpha}_y \hat{p}_y + \hat{\alpha}_z \hat{p}_z) \\ &\quad - (\hat{\alpha}_x \hat{p}_x + \hat{\alpha}_y \hat{p}_y + \hat{\alpha}_z \hat{p}_z) \hat{L}_x \end{aligned} \quad (4)$$

$$\hat{L}_x = y\hat{p}_z - z\hat{p}_y \quad (5)$$

Since $\hat{L}_x$ commutes with $\hat{p}_x$, it follows from (4) that

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}]_- &= \hat{\alpha}_y [\hat{L}_x, \hat{p}_y]_- + \hat{\alpha}_z [\hat{L}_x, \hat{p}_z]_- \\ &= \hat{\alpha}_y (y\hat{p}_z\hat{p}_y - z\hat{p}_y\hat{p}_y - \hat{p}_y y\hat{p}_z + \hat{p}_y z\hat{p}_y) \\ &\quad + \hat{\alpha}_z (y\hat{p}_z\hat{p}_z - z\hat{p}_y\hat{p}_z - \hat{p}_z y\hat{p}_z + \hat{p}_z z\hat{p}_y) \\ &= \hat{\alpha}_y (y\hat{p}_z\hat{p}_y - \hat{p}_y y\hat{p}_z) \\ &\quad + \hat{\alpha}_z (\hat{p}_z z\hat{p}_y - z\hat{p}_y\hat{p}_z) \\ &= \hat{\alpha}_y (y\hat{p}_z\hat{p}_y - (\hat{p}_y y) p_z - y\hat{p}_y\hat{p}_z) \\ &\quad + \hat{\alpha}_z ((\hat{p}_z z) \hat{p}_y + z\hat{p}_z\hat{p}_y - z\hat{p}_y\hat{p}_z) \\ &= \hat{\alpha}_y (-\hat{p}_y y) \hat{p}_z + \hat{\alpha}_z (\hat{p}_z z) \hat{p}_y. \end{aligned} \quad (6)$$

With $\hat{p}_i = i\hbar\partial/\partial x_i$ we then have

$$[\hat{L}_x, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}]_- = i\hbar(\hat{\alpha}_y\hat{p}_z - \hat{\alpha}_z\hat{p}_y),$$

and generally

$$[\hat{L}_i, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}]_- = i\hbar(\hat{\alpha}_j\hat{p}_k - \hat{\alpha}_k\hat{p}_j).$$

By cyclical permutations of the indices the final result is

$$[\hat{\mathbf{L}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}]_- = i\hbar(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \times \hat{\mathbf{p}}) \neq 0.$$

Equation (8) states that the orbital angular momentum $\hat{\mathbf{L}}$ does not commute with the Hamiltonian and hence it is not a constant of motion. Now we investigate the commutator of spin angular momentum with the Hamiltonian: $[\hbar\hat{\Sigma}/2, \hat{H}_D]_-$. In this case we restrict ourselves to the component $[\hbar\hat{\Sigma}_x/2]_-$, too. It is convenient to introduce the 4×4 matrix γ'_5 :

$$\gamma'_5 \begin{pmatrix} 0 & -11 \\ -11 & 0 \end{pmatrix} \text{ with } \gamma_5'^2 = 11.$$

The following relations hold:

$$-\gamma'_5 \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix} = \hat{\Sigma}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} -\hat{\alpha} \gamma'_5 &= \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\sigma} \\ -\hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -11 \\ -11 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix} = \hat{\Sigma}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} -\gamma'_5 \hat{\Sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \hat{\alpha}, \\ -\hat{\Sigma} \gamma'_5 &= \begin{pmatrix} -\hat{\sigma} & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -11 \\ -11 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \hat{\alpha}, \\ \hat{\beta} \hat{\Sigma} &= \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma} \end{pmatrix}, \\ \hat{\Sigma} \hat{\beta} &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma} \end{pmatrix}, \text{ and therefore} \end{aligned}$$

$$[\hat{\beta}, \hat{\Sigma}]_- = 0, \quad (16a)$$

$$[\gamma'_5, \hat{\alpha}]_- = 0 \text{ and} \quad (16b)$$

$$[\gamma'_5, \hat{\Sigma}]_- = 0. \quad (16c)$$

Thus there remains only the calculation of the following commutator:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hbar [\hat{\Sigma}_x, \hat{\alpha} \cdot \hat{p}]_- &\stackrel{\text{due to (16b)}}{=} -\frac{1}{2} \hbar \gamma'_5 [\hat{\alpha}_x, \hat{\alpha} \cdot \hat{p}] \\ &= -\frac{1}{2} \hbar \gamma'_5 (\hat{\alpha}_x \{\hat{\alpha}_x \hat{p}_x + \hat{\alpha}_y \hat{p}_y + \hat{\alpha}_z \hat{p}_z\} \\ &\quad - \{\hat{\alpha}_x \hat{p}_x + \hat{\alpha}_y \hat{p}_y + \hat{\alpha}_z \hat{p}_z\} \hat{\alpha}_x) \\ &= -\frac{1}{2} \hbar \gamma'_5 \{\hat{\alpha}_x \hat{\alpha}_y \hat{p}_y + \hat{\alpha}_x \hat{\alpha}_z \hat{p}_z \\ &\quad - \hat{\alpha}_y \hat{p}_y \hat{\alpha}_x - \hat{\alpha}_z \hat{p}_z \hat{\alpha}_x\} \\ &= -\frac{1}{2} \hbar \gamma'_5 \{(\hat{\alpha}_x \hat{\alpha}_y - \hat{\alpha}_y \hat{\alpha}_x) \hat{p}_y \\ &\quad + (\hat{\alpha}_x \hat{\alpha}_z - \hat{\alpha}_z \hat{\alpha}_x) \hat{p}_z\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Because of the commutation relations of the α matrices,

$$\hat{\alpha}_x \hat{\alpha}_y = -\hat{\alpha}_y \hat{\alpha}_x, \quad \hat{\alpha}_x \hat{\alpha}_z = -\hat{\alpha}_z \hat{\alpha}_x,$$

and it follows that

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\hbar \left[\hat{\Sigma}_x, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right]_- &= \hbar\gamma'_5 \{ \hat{\alpha}_y \hat{\alpha}_x \hat{p}_y + \hat{\alpha}_z \hat{\alpha}_x \hat{p}_z \} \\
&= \gamma'_5 \hbar \left\{ -\gamma'_5 \hat{\Sigma}_y \left(-\gamma'_5 \hat{\Sigma}_x \right) \hat{p}_y \right. \\
&\quad \left. -\gamma'_5 \hat{\Sigma}_z \left(-\gamma'_5 \hat{\Sigma}_x \right) \hat{p}_z \right\} \\
&\stackrel{\text{due to (16c)}}{=} \gamma'_5 \hbar \left\{ \hat{\Sigma}_y \hat{\Sigma}_x \hat{p}_y + \hat{\Sigma}_z \hat{\Sigma}_x \hat{p}_z \right\}
\end{aligned} \tag{19}$$

Now the commutation relations of the Pauli matrices are

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y &= -\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x = i\hat{\sigma}_z, \\
\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z &= -\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y = i\hat{\sigma}_x \\
\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x &= -\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z = i\hat{\sigma}_y
\end{aligned} \tag{20}$$

Hence one gets

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\hbar \left[\hat{\Sigma}_x, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right]_- &= \hbar\gamma'_5 \left(-i\hat{\Sigma}_z \hat{p}_y + i\hat{\Sigma}_y \hat{p}_z \right) \\
&= i\hbar (\hat{\alpha}_z \hat{p}_y - \hat{\alpha}_y \hat{p}_z)
\end{aligned} \tag{21}$$

Comparing (21) with (7) we recognize that the component $\hat{J}_x$ of total angular momentum indeed commutes with the Hamiltonian. Cyclical permutation of the indices results in

$$\left[\hat{\mathbf{J}}, \hat{H}_D \right]_- = [\hat{\mathbf{J}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}]_- = 0.$$

We know that $\hat{\mathbf{J}}^2$ and any component of $\hat{\mathbf{J}}$, for example $\hat{J}_z$, can be simultaneously diagonalised with $\hat{H}$. The fact that $\hat{\mathbf{J}}$, but not $\hat{\mathbf{L}}$ and $\hat{\mathbf{S}}$, provide good quantum numbers in the Dirac theory (i.e. that $\hat{\mathbf{J}}$ commutes with $\hat{H}_D$) is due to the spin-orbit coupling $\sim \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ contained in $\hat{H}_D$ (see Chap. 11, the Foldy-Wouthuysen transformation). It causes a coupling between spin and orbital angular momentum, and hence only the total angular momentum is a constant of motion.

12.6.3 Dirac Particles in External Fields: Examples and Problems 2

9.5 A Dirac Particle in a Spherical Potential Box

Problem. Establish the solutions of the Dirac equation

$$\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \psi(\mathbf{r}) = [E - V(r)] \psi(\mathbf{r})$$

in a spherical square-well potential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 < 0 & \text{for } r \leq R \\ 0 & \text{for } r > R \end{cases}.$$

Solution

First we write the operator $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ of kinetic energy in spherical polar coordinates. This is achieved by using the identity

$$\begin{aligned}\nabla &= e_r \cdot (e_r \cdot \nabla) - e_r \times (e_r \times \nabla) \\ &= e_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mathbf{i}}{\hbar} \frac{e_r}{r} \times \hat{\mathbf{L}}\end{aligned}\quad (3)$$

with $\hat{\mathbf{L}} = -i\hbar(\mathbf{r} \times \nabla)$. It follows that

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \hat{\alpha}_r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\mathbf{e}_r \times \hat{\mathbf{L}}).$$

Making use of

$$(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{A})(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}),$$

we obtain (with $A = e_r, B = L$)

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_r \cdot (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{L}}) &= e_r \cdot \hat{\mathbf{L}} + i\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot (\mathbf{e}_r \times \hat{\mathbf{L}}) \\ &= i\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot (\mathbf{e}_r \times \hat{\mathbf{L}})\end{aligned}\quad (6)$$

Multiplying by

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$$

from the right results in

$$\hat{\alpha}_r \cdot (\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}) = i\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\mathbf{e}_r \times \hat{\mathbf{L}}).$$

Therefore (4) reads

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} &= -i\hbar \hat{\alpha}_r \frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\hat{\alpha}_r}{r} (\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}) \\ &= -i\hat{\alpha}_r \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar}{r} - \frac{\hat{\beta}}{r} \hat{K} \right)\end{aligned}\quad (8)$$

where we have introduced

$$\hat{K} = \hat{\beta}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \hbar).$$

We obtain the eigensolutions of (1) by a separation ansatz, i.e.

$$\psi(r) = \begin{pmatrix} g(r)\chi_{\kappa,\mu}(\vartheta, \varphi) \\ if(r)\chi_{-\kappa,\mu}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix},$$

where the $\chi_{\kappa,\mu}$ are the eigenfunctions of the angular dependent part:

$$\begin{aligned}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \hbar)\chi_{\kappa,\mu} &= -\hbar\kappa\chi_{\kappa,\mu} \\ (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \hbar)\chi_{-\kappa,\mu} &= \hbar\kappa\chi_{-\kappa,\mu} \\ \hat{J}_z\chi_{\kappa,\mu} &= \hbar\mu\chi_{\kappa,\mu}, \\ \kappa &= (-1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots)\end{aligned}\quad (11)$$

[see Example 9.3, Eqs. (21) and also Chap. 10, (10.3037)].

With the help of the results of Example 9.3, two coupled differential equations for $g(r)$ and $f(r)$ follow from (1), namely

4 This is covered in detail in Vols. 1 and 2 of this series: Quantum Mechanics - An Introduction and Symmetries (Springer, Berlin, Heidelberg 1989).

$$\begin{aligned}
[E - V(r) - m_0 c^2] g(r) &= \hbar c \left[- \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) + \frac{\kappa}{r} \right] f(r), \\
[E - V(r) + m_0 c^2] f(r) &= \hbar c \left[\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{\kappa}{r} \right] g(r)
\end{aligned} \tag{12}$$

Often it is more convenient to use

$$u_1(r) = r g(r) \quad , \quad u_2(r) = r f(r)$$

for which the differential equations read:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} u_1(r) \\ u_2(r) \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\kappa}{r} & \frac{1}{\hbar c} (E + m_0 c^2 - V(r)) \\ -\frac{1}{\hbar c} (E - m_0 c^2 - V(r)) & \frac{\kappa}{r} \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} u_1(r) \\ u_2(r) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{14}$$

For constant values of V_0 , Eq. (14) has the following solutions:

i) If

$$\hbar^2 k^2 c^2 \equiv (E + V_0)^2 - m_0^2 c^4 > 0$$

$$u_1(r) = r (a_1 j_{l_\kappa}(kr) + a_2 y_{l_\kappa}(kr)),$$

$$u_2(r) = \frac{\kappa}{|\kappa|} \frac{\hbar c k r}{E + V_0 + m_0 c^2} (a_1 j_{l_{-\kappa}}(kr) + a_2 y_{l_{-\kappa}}(kr))$$

with

$$l_{-\kappa} = \begin{cases} -\kappa & \text{for } -\kappa > 0 \\ \kappa - 1 & \text{for } -\kappa < 0 \end{cases}.$$

$$l_\kappa = \begin{cases} \kappa & \text{for } \kappa > 0 \\ -\kappa - 1 & \text{for } \kappa < 0 \end{cases},$$

ii) If

$$\hbar^2 K^2 c^2 \equiv m_0^2 c^4 - (E + V_0)^2 > 0$$

$$u_1(r) = r \sqrt{\frac{2Kr}{\pi}} (b_1 K_{l_\kappa+1/2}(Kr) + b_2 I_{l_\kappa+1/2}(Kr)),$$

$$\begin{aligned}
u_2(r) &= \frac{\hbar c K r}{E + V_0 + m_0 c^2} \sqrt{\frac{2Kr}{\pi}} \\
&\quad \times (-b_1 K_{l_{-\kappa}+1/2}(Kr) + b_2 I_{l_{-\kappa}+1/2}(Kr)).
\end{aligned} \tag{17}$$

The j_l and y_l are the spherical Bessel functions of the first and second kind ⁵ and the $K_{l+1/2}$ are the modified spherical Bessel functions. Their asymptotic behaviour is:

$$j_n(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2n+1)!!} z^n,$$

$$y_n(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} -(2n-1)!! z^{-n-1},$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{n+1/2}(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2n+1)!!} z^n,$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2z}} K_{n+1/2}(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \sim (2n-1)!! z^{-n-1}, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{n+1/2}(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \sim \frac{e^z}{z},$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2z}} K_{n+1/2}(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \sim \frac{e^{-z}}{z}.$$

Before continuing, we want to give the representation of the $\chi_{\kappa,\mu}(\vartheta, \varphi)$ in (11) [see Example 9.3 and Chap. 10, Eq. (10.32)]:

$$\begin{aligned} \chi_{\kappa,\mu}(\vartheta, \varphi) &= \sum_{m=-1/2, 1/2} \left(l_{\kappa} \frac{1}{2} j \middle| \mu - m, m \right) Y_{l_{\kappa}, \mu-m}(\vartheta, \varphi) \chi_{\frac{1}{2}, m} \end{aligned} \quad (21)$$

with

$$\chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Let us now find the bound states ⁶. For these, $E > V_0 + m_0 c^2$ and $-m_0 c^2 < E < m_0 c^2$. In the inner region of the potential field we must therefore take the solutions (15) and set $a_2 = 0$, in order that the wave functions remain normalizable at the origin. On the other hand in the outer region we must set $b_2 = 0$ in (17), so that the wave functions are normalizable at infinity. Both solutions must be joined at $r = R_0$. One can eliminate the normalizing constants a_1, b_1 by adjustment of the ratio u_1/u_2 at $r = R_0$. This gives

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa}{|\kappa|} \frac{R_0 j_{l_{\kappa}}(k R_0)}{k R_0 j_{l_{-\kappa}}(k R_0)} (E + V_0 + m_0 c^2) \\ &= - \frac{R_0 K_{l_{\kappa} + \frac{1}{2}}(K R_0)}{K R_0 K_{l_{-\kappa} + \frac{1}{2}}(K R_0)} (E + m_0 c^2) \end{aligned} \quad (23)$$

and

$$\frac{j_{l_{\kappa}}(k R_0)}{j_{l_{-\kappa}}(k R_0)} = - \frac{\kappa}{|\kappa|} \frac{k}{K} \frac{K_{l_{\kappa} + \frac{1}{2}}(K R_0)}{K_{l_{-\kappa} + \frac{1}{2}}(K R_0)} \frac{E + m_0 c^2}{E + V_0 + m_0 c^2} \quad (24)$$

with

$$\hbar c k = \sqrt{(E + V_0)^2 - m_0^2 c^4},$$

$$\hbar c K = \sqrt{m_0^2 c^4 - E^2}.$$

For $|\kappa| = 1$ one can further simplify the equations analytically, and for s states ($\kappa = -1, l_{\kappa} = 0, l_{-\kappa} = 1$) this results in

$$\begin{aligned} & \frac{k R_0 \sin k R_0}{\sin k R_0 - k R_0 \cos k R_0} \\ &= + \frac{k}{K} \frac{e^{-K R_0}}{e^{-K R_0} (1 + 1/K R_0)} \frac{E + m_0 c^2}{E + V_0 + m_0 c^2}. \end{aligned}$$

After some transformations one gets

$$\begin{aligned} & \tan \left[\frac{R_0}{\hbar c} \sqrt{(E + V_0)^2 - m_0^2 c^4} \right] \sqrt{\frac{E + V_0 + m_0 c^2}{E + V_0 - m_0 c^2}} \\ & \left\{ \frac{\hbar c}{R_0} \left[\frac{1}{E + V_0 + m_0 c^2} - \frac{1}{E + m_0 c^2} \right] - \sqrt{\frac{m_0 c^2 - E}{m_0 c^2 + E}} \right\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Analogously one obtains for $p_{1/2}$ states ($\kappa = 1, l_{\kappa} = 1, l_{-\kappa} = 0$):

⁵ The irregular solutions y_l are also noted in the literature as spherical Neumann functions n_l .

⁶ W. Pieper, W. Greiner: Z. Phys. 218, 327 (1969).

$$\begin{aligned} & \frac{kR_0 \sin kR_0}{\sin kR_0 - kR_0 \cos kR_0} \\ &= -\frac{K}{k} \frac{1}{1 + 1/KR_0} \frac{E + V_0 + m_0c^2}{E + m_0c^2} \end{aligned} \quad (28)$$

and

$$\begin{aligned} & \tan \left[\frac{R_0}{\hbar c} \sqrt{(E + V_0)^2 - m_0^2c^4} \right] \sqrt{\frac{E + V_0 - m_0c^2}{E + V_0 + m_0c^2}} \\ & \left\{ \frac{\hbar c}{R_0} \left[\frac{1}{E + V_0 - m_0c^2} + \frac{1}{m_0c^2 - E} \right] + \sqrt{\frac{m_0c^2 + E}{m_0c^2 - E}} \right\} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (29)$$

Table 9.1. Energy eigenvalues for $s_{1/2}$ and $p_{1/2}$ states in a small potential box

E	$V_0(\kappa = -1)$	$V_0(\kappa = +1)$
m_0c^2	$\frac{\hbar}{m_0c} \frac{n\pi}{R_0} - 3m_0c^2$	$\frac{\hbar}{m_0c} \frac{n\pi}{R_0} - m_0c^2$
0	$\frac{\hbar}{m_0c} \frac{n\pi}{R_0} - m_0c^2$	$\frac{\hbar}{m_0c} \frac{n\pi}{R_0} + m_0c^2$
$-m_0c^2$	$\frac{\hbar}{m_0c} \frac{n\pi}{R_0} + m_0c^2$	$\frac{\hbar}{m_0c} \frac{n\pi}{R_0} + 3m_0c^2$

$$n = 1, 2, 3, \dots (m_0cR_0/\hbar) \ll 1$$

Another form for (26) is (defining $\alpha = kR_0$)

$$\begin{aligned} \alpha \cot \alpha - 1 &= \frac{(m_0c^2/\hbar c) R_0 \sqrt{1 - (E^2/m_0^2c^4)} + 1}{1 + E/m_0c^2} \\ &\times \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha \hbar c}{m_0c^2 R_0} \right)^2} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

and for (28) one can write:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha \cot \alpha &= \frac{(m_0c^2/\hbar c) R_0 \sqrt{1 - (E^2/m_0^2c^4)} + 1}{1 - E/m_0c^2} \\ &\times \left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha \hbar c}{m_0c^2 R_0} \right)^2} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

From (27) and (29) we can now calculate the energy eigenvalues of $s_{\frac{1}{2}}$ and $p_{\frac{1}{2}}$ states. If we assume R_0 to be small ($m_0cR_0/\hbar \ll 1$), we may solve (27) and (29) approximately by expanding in terms of $m_0cR_0/\hbar$. A short calculation (which is left as an exercise for the reader) leads to the following Table 9.1, where $n = 1, 2, 3, \dots$ labels the states. Similarly, one can find approximate solutions for (30) and (31) for the opposite limiting case of a very large potential box ($m_0cR_0/\hbar \gg 1$), and this is shown in Table 9.2. One sees that the $p_{\frac{1}{2}}$ states are energetically higher than the s states, which can be understood intuitively because of the orbital angular momentum $l = 1$ for the p states. But even for the s states (with $l = 0$), for a given R_0 a minimal potential depth V_0 is required in order to get at least one bound state, in contrast to the one-dimensional problem, where at least one bound state always exists. This is due to the fact that for the s state of a Dirac particle in a three-

Table 9.2. Energy eigenvalues for $s_{1/2}$ and $p_{1/2}$ states in a large potential box

E	$V_0(\kappa = -1)$	$V_0(\kappa = +1)$
m_0c^2	$\frac{(n-1/2)^2\pi^2\hbar^2}{2m_0R_0^2}$	$\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m_0R_0^2}$
0	$m_0c^2 \left(1 + \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m_0^2c^2R_0^2}\right)$	$m_0c^2 \left(1 + \frac{(n+1/2)^2\pi^2\hbar^2}{2m_0^2c^2R_0^2}\right)$
$-m_0c^2$	$2m_0c^2 \left(1 + \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{4m_0^2c^2R_0^2}\right)$	$2m_0c^2 \left(1 + \frac{(n+1/2)^2\pi^2\hbar^2}{4m_0^2c^2R_0^2}\right)$

$$n = 1, 2, 3, \dots (m_0cR_0/\hbar) \gg 1$$

dimensional potential well there is an angular momentum barrier due to the spin. Indeed, this can be easily seen by decoupling (14), differentiating again with constant V_0 and reinserting:

$$g'' - \left\{ \frac{1}{(\hbar c)^2} [(E + V_0)^2 - m_0^2c^4] - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} \right\} g = 0,$$

$$f'' + \left\{ \frac{1}{(\hbar c)^2} [(E + V_0)^2 - m_0^2c^4] - \frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2} \right\} f = 0.$$

On the one hand, for s states ($\kappa = -1$) the angular momentum barrier is zero for the large components. On the other, the equation for f contains an angular momentum term, which increases the energy in the three-dimensional case even for s states.

In Fig. 9.11 the eigenvalues ⁷ [found numerically from (27)] for the $1s$ state in potential wells with different values of R_0 have been plotted. One sees that for $(m_0cR_0/\hbar) \ll 1$ as well as for $(m_0cR_0/\hbar) \gg 1$ the energy eigenvalue $E(V_0)$ grows almost linearly with V_0 . As in the one-dimensional case, we can determine the scattering phase shifts of the continuum. For the s waves this can be done with little effort, whereas for the waves with higher angular momentum the matching condition at $r = R_0$ cannot be evaluated easily. Let us therefore look at the scattering phase shifts of the s waves. First we have to match solutions of the interior region,

$$u_1^i(r) = a_1 \sin k_i r,$$

$$u_2^i(r) = -a_1 \sqrt{\frac{E+V_0-m_0c^2}{E+V_0+m_0c^2}} \left(\frac{\sin k_i r}{k_i r} - \cos k_i r \right), \text{ at } r = R_0 \text{ to the solution } ((\hbar c k_0)^2 = E^2 - m_0^2c^4)$$

of the outside region:

$$u_1^o(r) = b_1 \sin k_0 r - b_2 \cos k_0 r,$$

$$u_2^o(r) = -\sqrt{\frac{E-m_0c^2}{E+m_0c^2}} \left[b_1 \left(\frac{\sin k_0 r}{k_0 r} - \cos k_0 r \right) - b_2 \left(\frac{\cos k_0 r}{k_0 r} + \sin k_0 r \right) \right]. \quad (34)$$

Introducing

$$\gamma \equiv \sqrt{\frac{(E+V_0-m_0c^2)(E+m_0c^2)}{(E+V_0+m_0c^2)(E-m_0c^2)}},$$

and making use of the fact that the wave function is continuous at $r = R_0$, we conclude with

$$\Delta_i \equiv k_i R_0 \quad , \quad \Delta_o \equiv k_0 R_0$$

that

$$b_1 = a_1 \left[-\gamma \frac{\sin \Delta_i}{\Delta_i} \cos \Delta_o + \gamma \cos \Delta_o \cos \Delta_i + \sin \Delta_i \frac{\cos \Delta_o}{\Delta_o} + \sin \Delta_i \sin \Delta_o \right],$$

$$b_2 = a_1 \left[-\gamma \frac{\sin \Delta_i}{\Delta_i} \sin \Delta_o + \gamma \sin \Delta_o \cos \Delta_i + \sin \Delta_i \frac{\sin \Delta_o}{\Delta_o} - \sin \Delta_i \cos \Delta_o \right]. \quad (36)$$

From the asymptotic behaviour of the outside solution one can derive a phase shift δ :

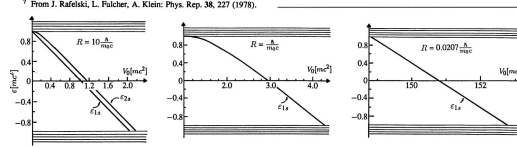


Fig.9.11. 1 s eigenvalues as a function of the potential strength for a spherical potential well. One example of the results for the 2s level are also shown

$$u_1^0(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A a_1 \sin(k_0 r + \delta),$$

$$u_2^0 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A \sqrt{\frac{E - m_0 c^2}{E + m_0 c^2}} a_1 \cos(k_0 + \delta).$$

Inserting (36) into (34) and comparing this with (37), one derives the equations

$$\cos \delta = \frac{b_1}{A a_1}, \quad \sin \delta = -\frac{b_2}{A a_1}$$

and after some algebraic rearrangements the result

$$\begin{aligned} \delta &= -\Delta_0 + \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{\Delta_0} - \frac{\gamma}{\Delta_i} + \gamma \cot \Delta_i \right) \\ &= -k_0 R_0 \\ &\quad + \operatorname{arccot} \left[\gamma \cot(k_i R_0) + \frac{\hbar c}{R_0} \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{E - m_0 c^2}} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{E + m_0 c^2} - \frac{1}{E + V_0 + m_0 c^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

As in the one-dimensional case the term $k_0 R_0$ is the same for all states and therefore this term is usually absorbed into the definition of the phase shift:

$$\begin{aligned} \delta'_{\kappa=-1} &= \delta + k_0 R_0 \\ &= \operatorname{arccot} \left(\gamma \cot(k_i R_0) + \frac{\hbar c}{R_0} \sqrt{\frac{E + m_0 c^2}{E - m_0 c^2}} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{E + m_0 c^2} - \frac{1}{E + V_0 + m_0 c^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (40)$$

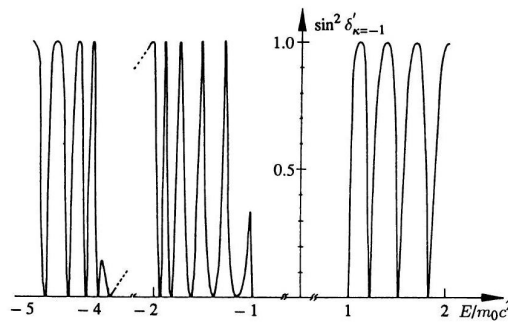


Fig. 9.12. Phase shift $\sin^2 \delta'_{\kappa=-1}$ (for s -waves) of a spherical potential box as a function of energy

In Fig. 9.12 the phase shift of the s states for a potential of depth $V_0 = 3m_0 c^2$ and radius $R_0 = 10\lambda_e$ has been depicted. Once again the zeros of $\delta'_{\kappa=-1}$ and $\sin^2 \delta'$ correspond to resonances; also resonances in the range $m_0 c^2 - V_0 < E < -m_0 c^2$ of "dived" s states in a supercritical potential appear. A comparison with Fig.9.11 shows that the positions of the resonances are just where one would expect them to be by extrapolating the curve $E(V_0)$ of the binding energies.

9.6 Solution of the Radial Equations for a Dirac Particle in a Coulomb Potential

Problem. Solve the coupled radial equations for a Dirac particle in a Coulomb potential and determine the energy values for the bound states.

Solution

The Coulomb interaction energy of a point nucleus and a particle of charge $-e$ is $V = -Ze^2/r$, so that the radial equations (cf. Example 9.3) for a Dirac particle read

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{\kappa}{r}G + \left[\frac{E+m_0c^2}{\hbar c} + \frac{Z\alpha}{r} \right] F(r),$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\kappa}{r}F - \left[\frac{E-m_0c^2}{\hbar c} + \frac{Z\alpha}{r} \right] G(r),$$

where $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ is the fine structure constant. First we shall examine the solution of the equations (1) for small r , i.e. near the origin ($r \sim 0$). In this case the terms with $E \pm m_0c^2$ can be omitted and one gets

$$\frac{dG}{dr} + \frac{\kappa}{r}G - \frac{Z\alpha}{r}F(r) = 0,$$

$$\frac{dF}{dr} - \frac{\kappa}{r}F + \frac{Z\alpha}{r}G(r) = 0.$$

Using a power series expansion as an ansatz for the solution of (2), the first term of this series dominates in the region near the origin. This motivates the ansatz $G = ar^\gamma$ and $F = br^\gamma$. Using this it follows that

$$a\gamma r^{\gamma-1} + \kappa ar^{\gamma-1} - Z\alpha br^{\gamma-1} = 0,$$

$$b\gamma r^{\gamma-1} - \kappa br^{\gamma-1} + Z\alpha ar^{\gamma-1} = 0$$

or

$$a(\gamma + \kappa) - bZ\alpha = 0, \quad aZ\alpha + b(\gamma - \kappa) = 0.$$

The determinant of the coefficients must vanish, yielding $\gamma^2 = \kappa^2 - (Z\alpha)^2$,

$$\gamma = \pm \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2} = \pm \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2}.$$

Since the wave function has to be normalizable we must choose the positive sign for γ . For the negative solution $\gamma = -|\gamma|$ it follows that $F^2 + G^2 \sim r^{-2|\gamma|}$ near $r = 0$, which would yield a divergent integral for the norm if $|\gamma| \leq \frac{1}{2}$. However, we should mention that for $\kappa^2 = 1$ and $Z\alpha\sqrt{3}/2$ or $Z \gtrsim 118$, regular solutions with negative γ seem possible. Indeed, to have $F^2 + G^2 \sim r^{-2\sqrt{1-(Z\alpha)^2}}$ still integrable for $r \rightarrow 0$, the inequality $2\sqrt{1-(Z\alpha)^2} < 1$ should be fulfilled, which leads to $(Z\alpha)^2 > \frac{3}{4}$. In Exercise 9.12 we shall show that these "solutions" do, in fact, not exist. Here we only give a plausibility argument: these solutions must be discarded because of the following postulates: Not only the normalization integral $\int \psi^\dagger \hat{H}_D \psi d^3r$ must exist, but also the expectation value of each partial operator within $\hat{H}_D$, especially the expectation value of the Coulomb energy:

$$\int \psi^\dagger \left(-\frac{Ze^2}{r} \right) \psi d^3x = \int (F^2 + G^2) \left(-\frac{Ze^2}{r} \right) dr.$$

Note that the usual factor r^2 from the volume element, according to (25) of Example 9.3, is already contained in $(F^2 + G^2)$. The integrand behaves like $(r^{+2\gamma})/r dr = r^{+2\gamma-1} dr$ in the limit $r \rightarrow 0$, yielding a finite contribution only if $2\gamma - 1 > -1$, i.e. $\gamma > 0$. This, on the other hand, means that only the positive root in (5) is physically meaningful. Furthermore one can conclude from relation (5) that for states with $j + \frac{1}{2} = 1$ only solutions up to $Z = \alpha^{-1} \sim 137$ can be constructed. For larger values of Z the root becomes imaginary and the wave functions are no longer normalizable. For $(Z\alpha)^2 > \kappa^2$, in general the real part of the wave function shows an oscillatory behaviour of the form $\text{Re}(F, G) \sim \cos(|\gamma| \ln r)$ for small r . We shall deal with this strange situation later when we treat electrons in the fields of extended nuclei and discuss the supercritical vacuum. In order to solve Eq. (1) we make the following substitutions:

$$\varrho = 2\lambda r \text{ with } \lambda = \frac{(m_0^2c^4 - E^2)^{1/2}}{\hbar c}.$$

With $d\varrho/dr = 2\lambda$ and $d/dr = 2\lambda d/d\varrho$ and dividing by 2γ it follows that

$$\begin{aligned}\frac{dG(\varrho)}{d\varrho} &= -\frac{\kappa G(\varrho)}{\varrho} + \left[\frac{E + m_0 c^2}{2\lambda \hbar c} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] F(\varrho), \\ \frac{dF(\varrho)}{d\varrho} &= -\left[\frac{E - m_0 c^2}{2\lambda \hbar c} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] G(\varrho) + \frac{\kappa}{\gamma} F(\varrho).\end{aligned}\quad (7)$$

Using this form of the equations one can get the behaviour of $F(\varrho)$ and $G(\varrho)$ for $\varrho \rightarrow \infty$, since neglecting the terms proportional to $1/\varrho$ the differential equations (7) read

$$\begin{aligned}\frac{dG(\varrho)}{d\varrho} &= \frac{E + m_0 c^2}{2\hbar c \lambda} F(\varrho), \\ \frac{dF(\varrho)}{d\varrho} &= -\frac{E - m_0 c^2}{2\hbar c \lambda} G(\varrho).\end{aligned}$$

Combined with (6) it follows immediately that

$$\frac{d^2 G(\varrho)}{d\varrho^2} = -\frac{(E^2 - m_0^2 c^4)}{(2\hbar c \lambda)^2} G(\varrho) = \frac{1}{4} G(\varrho).$$

One gets two possible solutions with $G(\varrho) \sim e^{\pm \varrho/2}$, but only the exponentially decreasing one can be used since only this one is normalizable. A similar result holds for $F(\varrho)$. This motivates the ansatz

$$\begin{aligned}G(\varrho) &= (m_0 c^2 + E)^{1/2} e^{-\varrho/2} (\phi_1(\varrho) + \phi_2(\varrho)), \\ F(\varrho) &= (m_0 c^2 - E)^{1/2} e^{-\varrho/2} (\phi_1(\varrho) - \phi_2(\varrho)),\end{aligned}$$

which we insert into (7) to give:

$$\begin{aligned}& (m_0 c^2 + E)^{1/2} e^{-\varrho/2} \left[-\frac{1}{2} (\phi_1 + \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\varrho} + \frac{d\phi_2}{d\varrho} \right] \\ &= \frac{-\kappa}{\varrho} (m_0 c^2 + E)^{1/2} e^{-\varrho/2} (\phi_1 + \phi_2) \\ &+ \left[\frac{E + m_0 c^2}{2\hbar c \lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] (m_0 c^2 - E)^{1/2} e^{-\varrho/2} (\phi_1 - \phi_2), \\ & (m_0 c^2 - E)^{1/2} e^{-\varrho/2} \left[-\frac{1}{2} (\phi_1 - \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\varrho} - \frac{d\phi_2}{d\varrho} \right] \\ &= -\left[\frac{E - m_0 c^2}{2\hbar c \lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] (m_0 c^2 + E)^{1/2} e^{-\varrho/2} (\phi_1 + \phi_2) \\ &+ \frac{\kappa}{\varrho} (m_0 c^2 - E)^{1/2} e^{-\varrho/2} (\phi_1 - \phi_2).\end{aligned}$$

Dividing by $e^{-\varrho/2}$ and furthermore the first equation by $(m_0 c^2 + E)^{1/2}$ and the second one by $(m_0 c^2 - E)^{1/2}$ yields the result

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\rho} + \frac{d\phi_2}{d\rho} \\
& = -\frac{\kappa}{\varrho}(\phi_1 + \phi_2) \\
& \quad + \left[\frac{E + m_0c^2}{2\hbar c\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] \frac{(m_0c^2 - E)^{1/2}}{(m_0c^2 + E)^{1/2}} (\phi_1 - \phi_2), \\
& -\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\rho} - \frac{d\phi_2}{d\rho} \\
& = -\left[\frac{E - m_0c^2}{2\hbar c\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] \frac{(m_0c^2 + E)^{1/2}}{(m_0c^2 - E)^{1/2}} (\phi_1 - \phi_2) \\
& \quad + \frac{\kappa}{\varrho}(\phi_1 - \phi_2). \tag{10}
\end{aligned}$$

On the other hand we have

$$\frac{(m_0c^2 - E)^{1/2}}{(m_0c^2 + E)^{1/2}} = \frac{m_0c^2 - E}{\hbar c\lambda}$$

and

$$\frac{(m_0c^2 + E)^{1/2}}{(m_0c^2 - E)^{1/2}} = \frac{m_0c^2 + E}{\hbar c\lambda}$$

and therefore

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\rho} + \frac{d\phi_2}{d\rho} \\
& = -\frac{\kappa}{\varrho}(\phi_1 + \phi_2) + \left[\frac{E + m_0c^2}{2\hbar c\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] \\
& \quad \times \frac{(m_0c^2 - E)^{1/2}}{\hbar c\lambda} (\phi_1 - \phi_2) - \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) \\
& \quad + \frac{d\phi_1}{d\rho} - \frac{d\phi_2}{d\rho} \\
& = -\left[\frac{E - m_0c^2}{2\hbar c\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] \frac{m_0c^2 + E}{\hbar c\lambda} (\phi_1 + \phi_2) \\
& \quad + \frac{\kappa}{\varrho}(\phi_1 - \phi_2). \tag{12}
\end{aligned}$$

Adding both equations of (12) yields

$$-\phi_1 + 2\frac{d\phi_1}{d\rho}$$

$$\begin{aligned}
& = -\frac{2\kappa}{\varrho}\phi_2 + \phi_1 + \frac{Z\alpha}{\varrho} \frac{(m_0c^2 - E)}{\hbar c\lambda} (\phi_1 - \phi_2) \\
& \quad - \frac{Z\alpha}{\varrho} \frac{(m_0c^2 + E)}{\hbar c\lambda} (\phi_1 + \phi_2), \tag{13}
\end{aligned}$$

whereas by subtracting them we get

$$\begin{aligned}
& -\phi_2 + 2\frac{d\phi_2}{d\rho} \\
& = -\frac{2\kappa}{\rho}\phi_1 - \phi_2 + \frac{Z\alpha}{\rho}\frac{(m_0c^2 - E)}{\hbar c\lambda}(\phi_1 - \phi_2) \\
& \quad + \frac{Z\alpha}{\rho}\frac{(m_0c^2 + E)}{\hbar c\lambda}(\phi_1 + \phi_2),
\end{aligned} \tag{14}$$

Summarizing all this yields

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_1}{d\rho} & = \left(1 - \frac{Z\alpha E}{\hbar c\lambda\rho}\right)\phi_1 - \left(\frac{\kappa}{\rho} + \frac{Z\alpha m_0c^2}{\hbar c\lambda\rho}\right)\phi_2, \\
\frac{d\phi_2}{d\rho} & = \left(-\frac{\kappa}{\rho} + \frac{Z\alpha m_0c^2}{\hbar c\lambda\rho}\right)\phi_1 + \frac{Z\alpha E}{\hbar c\lambda\rho}\phi_2.
\end{aligned} \tag{15}$$

In order to find the solutions for ϕ_1 and ϕ_2 we make the ansatz of a power series expansion. Separating out a factor ρ^γ , which describes the behaviour of the solution for $\rho \rightarrow 0$, we write

$$\phi_1 = \rho^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \rho^m, \quad \phi_2 = \rho^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \rho^m.$$

Inserting this into (15) yields

$$\begin{aligned}
& \sum (m + \gamma) \alpha_m \rho^{m+\gamma-1} \\
& = \sum \alpha_m \rho^{m+\gamma} - \frac{Z\alpha E}{\hbar c\lambda} \sum \alpha_m \rho^{m+\gamma-1} \\
& \quad - \left(\kappa + \frac{Z\alpha m_0c^2}{\hbar c\lambda}\right) \sum \beta_m \rho^{m+\gamma-1}, \\
& \sum \beta_m (m + \gamma) \rho^{m+\gamma-1} \\
& = \left(-\kappa + \frac{Z\alpha m_0c^2}{\hbar c\lambda}\right) \sum \alpha_m \rho^{m+\gamma-1} \\
& \quad + \frac{Z\alpha E}{\hbar c\lambda} \sum \beta_m \rho^{m+\gamma-1}.
\end{aligned}$$

Comparing the coefficients we conclude that

$$\alpha_m(m + \gamma) = \alpha_{m-1} - \frac{Z\alpha E}{\hbar c\lambda} \alpha_m - \left(\kappa + \frac{Z\alpha m_0c^2}{\hbar c\lambda}\right) \beta_m$$

$$\beta_m(m + \gamma) = \left(-\kappa + \frac{Z\alpha m_0c^2}{\hbar c\lambda}\right) \alpha_m + \frac{Z\alpha E}{\hbar c\lambda} \beta_m$$

From the second equation of (18) it follows that

$$\frac{\beta_m}{\alpha_m} = \frac{-\kappa + Z\alpha m_0c^2/\hbar c\lambda}{m + \gamma - Z\alpha E/\hbar c\lambda} = \frac{\kappa - Z\alpha m_0c^2/\hbar c\lambda}{n' - m},$$

with

$$n' = \frac{Z\alpha E}{\hbar c\lambda} - \gamma.$$

For $m = 0$ one gets

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{\kappa - Z\alpha m_0c^2/\hbar c\lambda}{n'} = \frac{\kappa - (n' + \gamma)m_0c^2/E}{n'}.$$

Inserting the result (19) into the first equation of (18) yields

$$\begin{aligned}
& \alpha_m \left[m + \gamma + \frac{Z\alpha E}{\hbar c\lambda} \right. \\
& \quad \left. + \left(\kappa + \frac{Z\alpha m_0c^2}{\hbar c\lambda}\right) \left(\frac{\kappa - Z\alpha m_0c^2/\hbar c\lambda}{n' - m}\right) \right] = \alpha_{m-1}
\end{aligned} \tag{22}$$

or

$$\begin{aligned} \alpha_m \left[\left(m + \gamma + \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \right) (n' - m) + \kappa^2 - \frac{Z^2 \alpha^2 m_0^2 c^4}{\hbar c^2 \lambda^2} \right] \\ = \alpha_{m-1} (n' - m). \end{aligned} \quad (23)$$

We calculate both brackets on the lhs of (23):

$$\begin{aligned} \left(m + \gamma + \frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \right) \left(\frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} - \gamma - m \right) \\ = -2m\gamma - m^2 - \gamma^2 + \left(\frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \right)^2 \end{aligned} \quad (24)$$

with $\gamma^2 = \kappa^2 - (Z\alpha)^2$ and it follows that

$$\begin{aligned} \alpha_m \left[-m(2\gamma + m) + (Z\alpha)^2 + \left(\frac{Z\alpha E}{\hbar c \lambda} \right)^2 - \left(\frac{Z\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda} \right)^2 \right] \\ = \alpha_{m-1} (n' - m), \end{aligned} \quad (25)$$

which can be further summarized as

$$\begin{aligned} \alpha_m &= -\frac{(n' - m)}{m(2\gamma + m)} \alpha_{m-1} \\ &= \frac{(-1)^m (n' - 1) \dots (n' - m)}{m!(2\gamma + 1) \dots (2\gamma + m)} \alpha_0 \\ &= \frac{(1 - n') (2 - n') \dots (m - n')}{m!(2\gamma + 1) \dots (2\gamma + m)} \alpha_0. \end{aligned} \quad (26)$$

According to (19) β_m is found to be

$$\beta_m = \frac{(\kappa - Z\alpha m_0 c^2 / \hbar c \lambda)}{n' - m} \frac{(-1)^m (n' - 1) \dots (n' - m)}{m!(2\gamma + 1) \dots (2\gamma + m)} \alpha_0 \quad (27)$$

Using (21) this yields

$$\beta_m = (-1)^m \frac{n' (n' - 1) \dots (n' - m + 1)}{m! (2\gamma + 1) \dots (2\gamma + m)} \beta_0.$$

This power series turns out to be the confluent hypergeometrical function

$$F(a, c; x) = 1 + \frac{a}{c} x + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

We thus find that

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \alpha_0 \varrho^\gamma F(1 - n', 2\gamma + 1; \varrho), \\ \phi_2 &= \beta_0 \varrho^\gamma F(-n', 2\gamma + 1; \varrho) \\ &= \left(\frac{\kappa - Z\alpha m_0 c^2 / \hbar c \lambda}{n'} \right) \alpha_0 \varrho^\gamma F(-n', 2\gamma + 1; \varrho). \end{aligned} \quad (30)$$

In order that the wave functions remain normalizable we must require that the series for ϕ_1 and ϕ_2 terminate; thus the hypergeometric functions have to be simple polynomials. This can only be achieved if n' is a non-negative integer, i.e. $n' = 0, 1, 2, \dots$

We define a principal quantum number

$$n = n' + |\kappa| = n' + j + \frac{1}{2} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

With this we can calculate the energy eigenvalue from (20) of this example and obtain

$$\frac{Z\alpha E}{(m_0^2 c^4 - E^2)^{1/2}} = n' + \gamma = n - j - \frac{1}{2} + \gamma$$

and consequently

$$\begin{aligned} & \left[(Z\alpha)^2 + \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2 \right] E^2 \\ & = m_0^2 c^4 \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2 \end{aligned} \quad (33)$$

$$E = \begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} m_0 c^2$$

$$\times \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left[n - j - \frac{1}{2} + \left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - (Z\alpha)^2 \right]^{1/2}} \right]^{-1/2},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\kappa = \pm \left(j + \frac{1}{2} \right) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

The negative sign in (34) must be excluded because negative energies E do not fulfill the original equation (32), since its rhs is positive. We therefore write the negative sign in (34) in parenthesis, and we thus obtain the Sommerfeld fine structure formula for the energy eigenvalues of electrons in atoms with a Coulomb potential and point nuclei.

Finally we want to quote the complete expression for the radial wave functions. Here the wave functions are normalized according to the prescription $\int \psi^\dagger \psi dV = 1$, which explicitly implies for $f(r)$ and $g(r)$ that

$$\int_0^\infty (f^2 + g^2) r^2 dr = 1 \quad (35)$$

This leads to the final expressions for the normalized radial wave functions ⁸:

$$\begin{aligned} g(r) \} &= \frac{\pm (2\lambda)^{3/2}}{\Gamma(2\gamma + 1)} \\ f(r) & \times \sqrt{\frac{(m_0 c^2 \pm E) \Gamma(2\gamma + n' + 1)}{4 m_0 c^2 \frac{(n' + \gamma) m_0 c^2}{E} \left(\frac{(n' + \gamma) m_0 c^2}{E} - \kappa \right) n'!}} \\ & \times (2\lambda r)^{\gamma-1} e^{-\lambda r} \left\{ \left(\frac{(n' + \gamma) m_0 c^2}{E} - \kappa \right) \right. \\ & \times F(-n', 2\gamma + 1; 2\lambda r) \\ & \left. \mp n' F(1 - n', 2\gamma + 1; 2\lambda r) \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

⁸ The integral of normalization can be derived by a lengthy but clearly stated calculation. We refer to Vol. 1 of this series: Quantum Mechanics - An Introduction (Springer, Berlin, Heidelberg 1989). See Chap. 7 (Exercise 7.1).

9.7 Discuss the Sommerfeld Fine Structure Formula and the Classification of the Electron Levels in the Dirac Theory

Solution

In the preceding problem, for the electron eigenvalues in a Coulomb potential we derived

$$E = +m_0c^2 \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left[n - j - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - (Z\alpha)^2} \right]^2} \right]^{-1/2} \quad n' = n - j - \frac{1}{2} = n - |\kappa|,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

The energy eigenvalues thus only depend on the principal quantum number n , on $|\kappa|$ and on Z . For a vanishing potential ($Z = 0$) the energy eigenvalue is $+m_0c^2$. The bound electron states thus adjoin the continuum of positive energy beginning at $+m_0c^2$. This is plausible because, due to a "switching on of the potential", that is, due to a continuous increase of the coupling strength $Z\alpha$ from $Z\alpha = 0$, electron states from the positive energy continuum can be "pulled" into the energy gap between m_0c^2 and $-m_0c^2$, thus becoming bound states. The limit of ionization of an electronic atom is obviously m_0c^2 , and the ionization energy of an electron in the state n_j therefore reads

$$\begin{aligned} E_{\text{ioniz}} &= m_0c^2 \left\{ 1 - \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left[n - |\kappa| + \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2} \right]^2} \right]^{-1/2} \right\} \\ &\approx m_0c^2 (Z\alpha)^2 \left\{ \frac{1}{2n^2} + \frac{(Z\alpha)^2}{2n^3} \left(\frac{1}{|\kappa|} - \frac{3}{4n} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

which is equal to the negative binding energy, i.e. $E_{\text{bind}} = -E_{\text{ioniz}}$. We draw attention to the existence of bound states even for negative nuclear charge $Z\alpha < 0$ with energies corresponding to the negative of the solutions for $Z\alpha > 0$. This seemingly paradoxical result will be explained later in connection with charge conjugation in Chap. 12.

For states with $j = 1/2$, energy values can be calculated up to $Z\alpha \leq 1$, i.e. up to $Z \sim 137$; for $j = 1/2, n = 1$ we have

$$E = m_0c^2 \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{1 - Z^2\alpha^2} \right]^{-1/2} = m_0c^2 \sqrt{1 - Z^2\alpha^2}.$$

$Z\alpha = 1$ yields $E = 0$ or $E_{\text{bind}} = E - m_0c^2 = -m_0c^2$. With increasing Z the absolute value of the binding energy also increases, as it should do. The "slope" dE/dZ approaches infinity for this $1s_{1/2}$ state ($n = 1, l = 0, j = 1/2$) at $Z\alpha = 1$, while for $Z\alpha > j + 1/2$ the energy becomes imaginary. Thus it seems that there exist no bound $ns_{1/2}$ or $np_{1/2}$ states for point nuclei with charge greater than $Z = 1/\alpha = 137$. This strange result can be understood in connection with the supercritical phenomena as a collapse of the vacuum; a new, fundamental process.

To calculate actual numbers, we replace m_0c^2 by the electron's rest mass $m_0c^2 = 0.5110041\text{MeV}$. For $n' = 0$ the confluent series terminates only for $\kappa < 0$. For $\kappa > 0$ they diverge even for $n' = 0$. It thus follows that

$$n' = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & \text{for } \kappa < 0 \\ 1, 2, 3, \dots & \text{for } \kappa > 0 \end{cases}.$$

For $Z\alpha \ll 1$ the energy formula can be expanded:

$$\frac{E - m_0c^2}{m_0c^2} = -(Z\alpha)^2 \left\{ \frac{1}{2n^2} + \frac{(Z\alpha)^2}{2n^3} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right\}$$

The degeneracy of levels with equal $|\kappa|$ but different l , already stated previously, remains unaffected. The first term in (3) represents the Bohr formula for the energy levels of the atom

calculated according to the Schrödinger equation. Accordingly, relativistic corrections for the energy levels in a Coulomb field are of the order $(Z\alpha)^2$. These corrections are only significant for small principal quantum numbers and in heavy nuclei. Furthermore we note that the relativistic wave functions $f(r)$ and $g(r)$ show for $|\kappa| = 1$ a weak (but quadratically integrable) divergence at the origin $r = 0$, in contrast to the nonrelativistic case. The states are classified in complete accordance to the levels of the hydrogen atom ($Z = 1$), as summarized in detail in the following Table 9.3. Table 9.4 shows the binding energy for the $1s_{1/2}$ electron as a function of Z . The situation is illustrated in Fig. 9.13.

Table 9.3. The classification of bound states of the electron according to the Dirac equation for $Z = 1$ (hydrogen atom)

Notation	n	l	j	n'	κ	$E_{\text{bind}} [\text{eV}]$
$1s_{1/2}$	1	0	$1/2$	0	-1	-13.606
$2s_{1/2}$	2	0	$1/2$	1	-1	-3.402
$2p_{1/2}$	2	1	$1/2$	1	1	-3.402
$2p_{3/2}$	2	1	$3/2$	0	-2	-3.401
$3s_{1/2}$	3	0	$1/2$	2	-1	-1.512
$3p_{1/2}$	3	1	$1/2$	2	1	-1.512
$3p_{3/2}$	3	1	$3/2$	1	-2	-1.512
$3d_{3/2}$	3	2	$3/2$	1	2	-1.512
$3d_{5/2}$	3	2	$5/2$	0	-3	-1.512
$4s_{1/2}$	4	0	$1/2$	3	-1	-0.850
$4p_{1/2}$	4	1	$1/2$	3	1	-0.850
$4p_{3/2}$	4	1	$3/2$	2	-2	-0.850
$4d_{3/2}$	4	2	$3/2$	2	2	-0.850
$4d_{5/2}$	4	2	$5/2$	1	-3	-0.850
$4f_{5/2}$	4	3	$5/2$	1	3	-0.850
$4f_{7/2}$	4	3	$7/2$	0	-4	-0.850

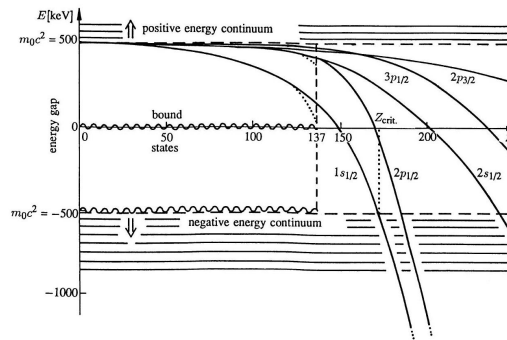


Fig. 9.13.

The solutions of the Dirac equation for an electron in a Coulomb central potential:... for point nuclei (for $s_{1/2}$ and $p_{1/2}$ existing only up to $Z = 137$), - for extended nuclei (see Example 9.9). The supercritical case $Z > Z_{\text{crit}} \approx 172$ will be discussed later in detail

Table 9.4. Table of binding energies for $1s_{1/2}$ electrons as a function of Z according to the Sommerfeld fine structure formula

Z	$E_{\text{bind}} [\text{eV}]$	Z	$E_{\text{bind}} [\text{eV}]$
10	-1362	80	-96117
20	-5472	90	-125657
30	-12396	100	-161615
40	-22254	110	-206256
50	-35229	120	-264246
60	-51585	130	-349368
70	-71699	137	-499288

12.6.4 Dirac Particles in External Fields: Examples and Problems 3

9.8 Solution of the Dirac Equation for a Coulomb and a Scalar Potential

We shall solve the Dirac equation for a mixed potential consisting of a scalar potential and Coulomb potential. Both cases differ in the manner of coupling into the Dirac equation. In the case of the Coulomb potential minimal coupling is used as usual, whereas the scalar potential is added to the mass term of the Dirac equation. Therefore it can be interpreted as an effective, position-dependent mass. In the same way that the Coulomb potential is derived from the exchange of massless photons between the nucleus and the leptons orbiting around it, the scalar potential of the form $V_2 = -\alpha'/r$ is created by the exchange of massless scalar mesons.⁹ The σ meson frequently quoted in the literature has a very high mass and therefore the corresponding potential has a very short range. Our investigations concerning the potential V_2 and its influence on the energy eigenvalues can therefore be regarded as a model study. The scalar potential can be interpreted as a Newtonian potential of the form $V_2 = V_N = GM_0m_0/r \equiv -\hbar c\alpha'/r$.

For a mixed scalar and electrostatic potential, the Dirac equation thus reads

$$\left[c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta} (m_0c^2 + V_2) - (E - V_1) \right] \psi = 0.$$

With the assumption of spherical symmetric potentials, we can again derive the coupled radial differential equations in the usual way:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dr} &= -\frac{\kappa}{r}G + \frac{1}{\hbar c} [E + m_0c^2 + V_2 - V_1] F(r), \\ \frac{dF}{dr} &= +\frac{\kappa}{r}F - \frac{1}{\hbar c} [E - m_0c^2 - V_2 - V_1] G(r). \end{aligned}$$

⁹ For a more detailed discussion, see Vol. 4 of this series: Quantum Electrodynamics (Springer, Berlin, Heidelberg), to be published.

Defining

$$V_1 = -\hbar c \frac{\alpha}{r} \quad \text{and} \quad V_2 = -\hbar c \frac{\alpha'}{r},$$

with α and α' being the electrostatic and the scalar coupling constants, respectively, we get

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dr} &= -\frac{\kappa}{r}G + \left[\frac{E+m_0c^2}{\hbar c} + \frac{1}{r}(\alpha - \alpha') \right] F(r), \\ \frac{dF}{dr} &= \frac{\kappa}{r}F - \left[\frac{E-m_0c^2}{\hbar c} + \frac{1}{r}(\alpha + \alpha') \right] G(r). \end{aligned}$$

In the subsequent calculations we follow a very similar procedure to that used for finding the solutions of the Coulomb potential, so that it is not necessary to repeat every single step in detail (see Exercises 9.6 and 9.7). We first consider the region $r \sim 0$, where the constant terms proportional to mass and energy can be neglected:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dr} &= -\frac{\kappa}{r}G + \frac{(\alpha - \alpha')}{r}F(r), \\ \frac{dF}{dr} &= \frac{\kappa}{r}F - \frac{(\alpha + \alpha')}{r}G(r). \end{aligned}$$

The ansatz

$$G = ar^\gamma, \quad F = br^\gamma,$$

yields

$$\begin{aligned} a\gamma r^{\gamma-1} + \kappa ar^{\gamma-1} - (\alpha - \alpha') br^{\gamma-1} &= 0, \\ b\gamma r^{\gamma-1} - \kappa br^{\gamma-1} + (\alpha + \alpha') ar^{\gamma-1} &= 0 \end{aligned}$$

or

$$a(\gamma + \kappa) - b(\alpha - \alpha') = 0,$$

$$a(\alpha + \alpha') + b(\gamma - \kappa) = 0.$$

These are two linear homogeneous equations for a and b , and the coefficient determinant yields

$$\gamma^2 = \kappa^2 - \alpha^2 + \alpha'^2$$

or

$$\gamma = \pm \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2 + \alpha'^2}.$$

To allow for the normalization of the wave functions, we again choose the positive sign for γ and introduce the substitution

$$\varrho = 2\lambda r \quad \text{with} \quad \lambda = \frac{(m_0^2 c^4 - E^2)^{1/2}}{\hbar c}.$$

The differential equations thus have the form

$$\frac{dG}{d\varrho} = -\frac{\kappa}{\varrho} G + \left[\frac{E + m_0 c^2}{\hbar c 2\lambda} + \frac{(\alpha - \alpha')}{\varrho} \right] F,$$

$$\frac{dF}{d\varrho} = -\left[\frac{E - m_0 c^2}{\hbar c 2\lambda} + \frac{(\alpha + \alpha')}{\varrho} \right] G + \frac{\kappa}{\varrho} F,$$

which with the choice of

$$G = (m_0 c^2 + E)^{1/2} e^{-\varrho/2} (\phi_1 + \phi_2),$$

$$F = (m_0 c^2 - E)^{1/2} e^{-\varrho/2} (\phi_1 - \phi_2),$$

lead to:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\varrho} + \frac{d\phi_2}{d\varrho} = -\frac{\kappa}{\varrho}(\phi_1 + \phi_2) \\ & + \left[\frac{E + m_0 c^2}{2\hbar c \lambda} + \frac{(\alpha - \alpha')}{\varrho} \right] \frac{m_0 c^2 - E}{\hbar c \lambda} (\phi_1 - \phi_2), \\ & -\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\varrho} - \frac{d\phi_2}{d\varrho} \\ & = -\left[\frac{E - m_0 c^2}{2\hbar c \lambda} + \frac{(\alpha + \alpha')}{\varrho} \right] \frac{m_0 c^2 + E}{\hbar c \lambda} (\phi_1 + \phi_2) \\ & + \frac{\kappa}{\varrho}(\phi_1 - \phi_2). \end{aligned}$$

Adding and subtracting the equations yields

$$\begin{aligned} & -\phi_1 + \frac{2d\phi_1}{d\varrho} \\ & = -\frac{2\kappa}{\varrho}\phi_2 + \phi_1 + \frac{(\alpha - \alpha')}{\varrho} \frac{m_0 c^2 - E}{\hbar c \lambda} (\phi_1 - \phi_2) \\ & - \frac{(\alpha + \alpha')}{\varrho} \frac{m_0 c^2 + E}{\hbar c \lambda} (\phi_1 + \phi_2) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & -\phi_2 + \frac{2d\phi_2}{d\varrho} \\ & = -\frac{2\kappa}{\varrho}\phi_1 - \phi_2 + \frac{(\alpha - \alpha')}{\varrho} \frac{m_0 c^2 - E}{\hbar c \lambda} (\phi_1 - \phi_2) \\ & + \frac{(\alpha + \alpha')}{\varrho} \frac{m_0 c^2 + E}{\hbar c \lambda} (\phi_1 + \phi_2), \end{aligned}$$

respectively. We now collect terms and obtain:

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_1}{d\varrho} &= \left(1 - \frac{\alpha E}{\hbar c \lambda \rho} - \frac{\alpha' m_0 c^2}{\hbar c \lambda \rho}\right) \phi_1 \\
&\quad - \left(\frac{\kappa}{\varrho} + \frac{\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda \rho} + \frac{\alpha' E}{\hbar c \lambda \rho}\right) \phi_2, \\
\frac{d\phi_2}{d\varrho} &= \left(-\frac{\kappa}{\varrho} + \frac{\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda \rho} + \frac{\alpha' E}{\hbar c \lambda \rho}\right) \phi_1 \\
&\quad + \left(\frac{\alpha E}{\hbar c \lambda \rho} + \frac{\alpha' m_0 c^2}{\hbar c \lambda \rho}\right) \phi_2.
\end{aligned} \tag{13}$$

For ϕ_1 and ϕ_2 we make the power series ansatz:

$$\phi_1 = \varrho^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \varrho^m, \quad \phi_2 = \varrho^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \varrho^m$$

and insert them into the differential equations, giving

$$\begin{aligned}
&\sum (m + \gamma) \alpha_m \varrho^{m+\gamma-1} \\
&= \sum \alpha_m \varrho^{m+\gamma} - \frac{\alpha E}{\hbar c \lambda} \sum \alpha_m \varrho^{m+\gamma-1} \\
&\quad - \frac{\alpha' m_0 c^2}{\hbar c \lambda} \sum \alpha_m \varrho^{m+\gamma-1} \\
&\quad - \left(\kappa + \frac{\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda} + \frac{\alpha' E}{\hbar c \lambda}\right) \sum \beta_m \varrho^{m+\gamma-1}; \\
&\sum \beta_m (m + \gamma) \varrho^{m+\gamma-1} \\
&= \left(-\kappa + \frac{\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda} + \frac{\alpha' E}{\hbar c \lambda}\right) \sum \alpha_m \varrho^{m+\gamma-1} \\
&\quad + \left(\frac{\alpha E}{\hbar c \lambda} + \frac{\alpha' m_0 c^2}{\hbar c \lambda}\right) \sum \beta_m \varrho^{m+\gamma-1}.
\end{aligned} \tag{15}$$

A comparison of coefficient yields

$$\begin{aligned}
\alpha_m (m + \gamma) &= \alpha_{m-1} - \left(\frac{\alpha E}{\hbar c \lambda} + \frac{\alpha' m_0 c^2}{\hbar c \lambda}\right) \alpha_m \\
&\quad - \left(\kappa + \frac{\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda} + \frac{\alpha' E}{\hbar c \lambda}\right) \beta_m, \\
\beta_m (m + \gamma) &= \left(-\kappa + \frac{\alpha m_0 c^2}{\hbar c \lambda} + \frac{\alpha' E}{\hbar c \lambda}\right) \alpha_m \\
&\quad + \left(\frac{\alpha E}{\hbar c \lambda} + \frac{\alpha' m_0 c^2}{\hbar c \lambda}\right) \beta_m,
\end{aligned} \tag{16}$$

and from the second equation we get

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_m}{\alpha_m} &= \frac{-\kappa + \alpha m_0 c^2 / \hbar c \lambda + \alpha' E / \hbar c \lambda}{m + \gamma - \alpha E / \hbar c \lambda - \alpha' m_0 c^2 / \hbar c \lambda} \\
&= \frac{\kappa - \alpha m_0 c^2 / \hbar c \lambda - \alpha' E / \hbar c \lambda}{n' - m}, \text{ with}
\end{aligned} \tag{17}$$

$$n' = \frac{\alpha E}{\hbar c \lambda} + \frac{\alpha' m_0 c^2}{\hbar c \lambda} - \gamma.$$

As in the case of a pure Coulomb potential, this is the equation for determining the energy eigenvalues. Only for $n' = 0, 1, 2, \dots$ do the resulting confluent hypergeometric functions for the wave functions degenerate to polynomials, and we get standing waves.

Defining $n = n' + j + \frac{1}{2} = 1, 2, 3, \dots$,

we get

$$\frac{\alpha E + \alpha' m_0 c^2}{(m_0^2 c^4 - E^2)^{1/2}} = n - j - \frac{1}{2} + \gamma,$$

which leads to

$$\begin{aligned} & \left[\alpha^2 + \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2 \right] E^2 + 2\alpha\alpha' m_0 c^2 E \\ &= m_0^2 c^4 \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2 - \alpha'^2 m_0^2 c^4 \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} & E^2 + \frac{2\alpha\alpha' m_0 c^2}{\alpha^2 + \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2} E \\ &+ m_0^2 c^4 \frac{\alpha'^2 - \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2}{\alpha'^2 + \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Finally we obtain the energy eigenvalue

$$\begin{aligned} E = m_0 c^2 & \left\{ \frac{-\alpha\alpha'}{\alpha^2 + \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2} \right. \\ & \mp \left[\left(\frac{\alpha\alpha'}{\alpha^2 + \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2} \right)^2 \right. \\ & \left. \left. - \frac{\alpha'^2 - \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2}{\alpha^2 + \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2} \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Let us now consider several special cases:

1.

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \gamma = \sqrt{\kappa^2 + \alpha'^2}, \\ E &= \pm m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha'^2}{\left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2}}. \end{aligned}$$

Obviously there exist two branches of solutions in the bound region: the solutions for positive and negative energies exhibit identical behaviour, which reflects the fact that the scalar interaction does not distinguish between positive and negative charges. The order of the levels is striking: $1s_{1/2}, 2p_{3/2}, 2s_{1/2}$ and $2p_{1/2}, 3s_{1/2}$, and so on. For $\alpha' \rightarrow \infty$, E approaches the value $E = 0$ (see Fig. 9.9 in Exercise 9.2).

States with negative energies correspond to anti-particles. The particle and anti-particle states approach each other with increasing coupling constant, without touching. Critical behaviour, as in the case of the Coulomb potential, does not occur; the Dirac vacuum remains stable in the case of scalar potentials (see Exercise 9.2).

2.

$$\alpha' = 0, \gamma = \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2},$$

$$E = m_0 c^2 \left[1 + \frac{\alpha^2}{(n-j-\frac{1}{2}+\gamma)^2} \right]^{-1/2}$$

We have here to choose the positive square root, because in the case of very weak fields the electron states dive from the upper continuum into the region of bound states. Furthermore the negative square root yields a contradiction to (18). The obtained result is, of course, identical with Sommerfeld's fine-structure formula (see Exercises 9.6 and 9.7).

3) $\alpha = \alpha'$.

This yields $\gamma = |\kappa|$ and $n - j - \frac{1}{2} + \gamma = n$.

$$E = m_0 c^2 \left\{ \frac{-\alpha^2}{\alpha^2 + n^2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^4}{(\alpha^2 + n^2)^2} - \frac{\alpha^2 - n^2}{\alpha^2 + n^2}} \right\}$$

$$= m_0 c^2 \left\{ \frac{-\alpha^2}{\alpha^2 + n^2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^4 - \alpha^4 + n^4}{(\alpha^2 + n^2)^2}} \right\}$$

$$= m_0 c^2 \left\{ \frac{-\alpha^2}{\alpha^2 + n^2} \pm \frac{n^2}{\alpha^2 + n^2} \right\}.$$

The negative sign would seem to yield a solution $E_2 = -m_0 c^2$, and the large and the small component in the potential term of the Hamiltonian decouple. However, this is an invalid solution, because $E = -m_0 c^2$ contradicts (18). For the positive sign, it follows that

$$E = m_0 c^2 \left\{ 1 - \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + n^2} \right\}.$$

For $\alpha \rightarrow \infty$, E approaches the value $-m_0 c^2$ asymptotically, but the state never dives into the negative energy continuum. For $n = 1$ and $\alpha = 1$ the energy becomes zero.

9.9 Stationary Continuum States of a Dirac Particle in a Coulomb Field

Again we start with the coupled radial differential equations for F and G :

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{\kappa}{r} G + \left[\frac{E + m_0 c^2}{\hbar c} + \frac{Z\alpha}{r} \right] F,$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\kappa}{r} F + \left[\frac{E - m_0 c^2}{\hbar c} + \frac{Z\alpha}{r} \right] G,$$

and perform the substitution $x = 2ipr$, where

$$p = \frac{[E^2 - (m_0 c^2)^2]^{1/2}}{\hbar c} = i\lambda.$$

With $dx/dr = 2ip$ followed by the division by $2ip$, one gets

$$\frac{dG}{dx} = -\frac{\kappa}{x} G + \left[\frac{E + m_0 c^2}{2ip\hbar c} + \frac{Z\alpha}{x} \right] F,$$

$$\frac{dF}{dx} = +\frac{\kappa}{x} F - \left[\frac{E - m_0 c^2}{2ip\hbar c} + \frac{Z\alpha}{x} \right] G.$$

For F and G we make the following ansatz:

a) for positive energies $E > m_0 c^2$:

$$G = \sqrt{E + m_0 c^2} (\phi_1 + \phi_2),$$

$$F = i\sqrt{E - m_0 c^2} (\phi_1 - \phi_2),$$

and b) for negative energies $E < -m_0 c^2$: $G = \sqrt{-E - m_0 c^2} (\phi_1 + \phi_2)$,

$$F = -i\sqrt{-E + m_0 c^2} (\phi_1 - \phi_2).$$

Inserting (4) into (3) and dividing by $\sqrt{E + m_0 c^2}$ and $i\sqrt{E - m_0 c^2}$, respectively, yields

$$\begin{aligned}
& \frac{d\phi_1}{dx} + \frac{d\phi_2}{dx} \\
&= -\frac{\kappa}{x}(\phi_1 + \phi_2) \\
&+ \left[\frac{E + m_0c^2}{2ip\hbar c} + \frac{Z\alpha}{x} \right] \frac{i\sqrt{E - m_0c^2}}{\sqrt{E + m_0c^2}} (\phi_1 - \phi_2) \\
\\
& \frac{d\phi_1}{dx} - \frac{d\phi_2}{dx} \\
&= \frac{\kappa}{x}(\phi_1 - \phi_2) \\
&- \left[\frac{E - m_0c^2}{2ip\hbar c} + \frac{Z\alpha}{x} \right] \frac{\sqrt{E + m_0c^2}}{i\sqrt{E - m_0c^2}} (\phi_1 + \phi_2). \tag{6}
\end{aligned}$$

Analogously, inserting equation (5) into (3) and dividing by $\sqrt{-E - m_0c^2}$ and $-i\sqrt{-E + m_0c^2}$, respectively, yields

$$\begin{aligned}
& \frac{d\phi_1}{dx} + \frac{d\phi_2}{dx} \\
&= -\frac{\kappa}{x}(\phi_1 + \phi_2) \\
&+ \left[\frac{E + m_0c^2}{2ip\hbar c} + \frac{Z\alpha}{x} \right] \frac{(-i)\sqrt{-E + m_0c^2}}{\sqrt{-E - m_0c^2}} (\phi_1 - \phi_2), \\
\\
& \frac{d\phi_1}{dx} - \frac{d\phi_2}{dx} \\
&= \frac{\kappa}{x}(\phi_1 - \phi_2) \\
&- \left[\frac{E - m_0c^2}{2ip\hbar c} + \frac{Z\alpha}{x} \right] \frac{i\sqrt{-E - m_0c^2}}{-i\sqrt{-E + m_0c^2}} (\phi_1 + \phi_2)
\end{aligned}$$

Let us now consider the factors on the rhs of Eqs (6):

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{E + m_0c^2}{2ip\hbar c} + \frac{Z\alpha}{x} \right] \frac{i(E - m_0c^2)}{\hbar c p} \\
&= \frac{i(\hbar c)^2 p^2}{2ip^2(\hbar c)^2} + \frac{Z\alpha}{x} \frac{iE}{\hbar c p} - \frac{iZ\alpha m_0c^2}{x\hbar c p}, \\
\\
& - \left[\frac{E - m_0c^2}{2ip\hbar c} + \frac{Z\alpha}{x} \right] \frac{(E + m_0c^2)}{i\hbar c p} \\
&= \frac{-(\hbar c)^2 p^2}{2i^2 p^2(\hbar c)^2} - \frac{Z\alpha}{x} \frac{E}{i\hbar c p} - \frac{Z\alpha m_0c^2}{i\hbar c p}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Adding the Eqs. (6) and division by 2 yields

$$\frac{d\phi_1}{dx} = -\frac{\kappa}{x}\phi_2 + \frac{1}{2}\phi_1 + \frac{iZ\alpha E}{\hbar c p x}\phi_1 + \frac{iZ\alpha m_0c^2}{x\hbar c p}\phi_2. \tag{9a}$$

Similarly, by subtracting Eqs. (6) from each other and dividing by 2 we get

$$\frac{d\phi_2}{dx} = -\frac{\kappa}{x}\phi_1 - \frac{1}{2}\phi_2 - \frac{iZ\alpha m_0c^2}{\hbar c p x}\phi_1 - \frac{iZ\alpha E}{\hbar c p x}\phi_2,$$

or together:

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_1}{dx} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{iZ\alpha E}{\hbar c p x} \right) \phi_1 + \left(-\frac{\kappa}{x} + \frac{iZ\alpha m_0 c^2}{x \hbar c p} \right) \phi_2, \\
\frac{d\phi_2}{dx} &= \left(-\frac{\kappa}{x} - \frac{iZ\alpha m_0 c^2}{\hbar c p x} \right) \phi_1 \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2} - \frac{iZ\alpha E}{\hbar c p x} \right) \phi_2.
\end{aligned} \tag{10}$$

The factors on the rhs of Eqs. (7) yields

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{E + m_0 c^2}{2i\hbar c} + \frac{Z\alpha}{x} \right] \frac{(-i)\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}}{-E - m_0 c^2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{Z\alpha(-i)\hbar c p}{-(E + m_0 c^2)x}, \\
&\left[\frac{E - m_0 c^2}{2i\hbar c} + \frac{Z\alpha}{x} \right] \frac{\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}}{i(-E + m_0 c^2)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{Z\alpha\hbar c p}{x(-i)(E - m_0 c^2)}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Addition of Eqs. (7) followed by division by 2 leads to

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_1}{dx} &= -\frac{\kappa}{x}\phi_2 + \frac{1}{2}\phi_1 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{iZ\alpha\hbar c p}{(E + m_0 c^2)x} + \frac{Z\alpha\hbar c p}{x(-i)(E - m_0 c^2)} \right] \phi_1 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{-Z\alpha(-i)\hbar c p}{-(E + m_0 c^2)x} + \frac{Z\alpha\hbar c p}{x(-i)(E - m_0 c^2)} \right] \phi_2 \\
&= -\frac{\kappa}{x}\phi_2 + \frac{1}{2}\phi_1 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{Z\alpha\hbar c p(E - m_0 c^2) + Z\alpha\hbar c p(E + m_0 c^2)}{(-i)x(E^2 - m_0^2 c^4)} \right] \phi_1 \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{-Z\alpha\hbar c p(E - m_0 c^2) + Z\alpha\hbar c p(E + m_0 c^2)}{-ix(E^2 - m_0^2 c^4)} \right] \phi_2 \\
&= -\frac{\kappa}{x}\phi_2 + \frac{1}{2}\phi_1 + \frac{iZ\alpha E}{x\hbar c p}\phi_1 + \frac{iZ\alpha m_0 c^2}{x\hbar c p}\phi_2
\end{aligned} \tag{12}$$

and analogously, the difference of Eqs. (7) yields

$$\frac{d\phi_2}{dx} = -\frac{\kappa}{x}\phi_1 - \frac{1}{2}\phi_2 - \frac{iZ\alpha m_0 c^2}{\hbar c p x}\phi_1 - \frac{iZ\alpha E}{\hbar c p x}\phi_2.$$

Comparison of (12) and (13) with the system (10) shows that both systems of differential equations are identical, and that for positive and negative energies we have to solve the same system of differential equations.

Now we consider the complex conjugate of the Eqs.

(10) (x is purely imaginary):

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_1^*}{dx} &= -\left(\frac{1}{2} + \frac{iZ\alpha E}{\hbar c p x} \right) \phi_1^* - \left(\frac{\kappa}{x} + \frac{iZ\alpha m_0 c^2}{x \hbar c p} \right) \phi_2^*, \\
\frac{d\phi_2^*}{dx} &= -\left(\frac{\kappa}{x} - \frac{iZ\alpha m_0 c^2}{\hbar c p x} \right) \phi_1^* + \left(\frac{1}{2} + \frac{iZ\alpha E}{\hbar c p x} \right) \phi_2^*.
\end{aligned}$$

Equations (14) are identical to (10) if we set

$\phi_1 = \phi_2^*$ or $\phi_2 = \phi_1^*$.

This is the necessary condition for G and F to be realvalued functions and thus to describe standing waves at infinity. We now eliminate ϕ_2 from the system of Eqs. (10) to give:

$$\begin{aligned}
 \phi_2 &= \left(-\frac{\kappa}{x} + \frac{iZ\alpha m_0 c^2}{x\hbar c p} \right)^{-1} \frac{d\phi_1}{dx} \\
 &\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{iZ\alpha E}{\hbar c p x} \right) \phi_1 \left(-\frac{\kappa}{x} + \frac{iZ\alpha m_0 c^2}{x\hbar c p} \right)^{-1} \\
 &= \frac{\hbar c p x}{-\kappa\hbar c p + iZ\alpha m_0 c^2} \frac{d\phi_1}{dx} \\
 &\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{iZ\alpha E}{\hbar c p x} \right) \frac{\hbar c p x}{-\kappa\hbar c p + iZ\alpha m_0 c^2} \phi_1 \\
 &= \frac{\hbar c p x}{iZ\alpha m_0 c^2 - \kappa\hbar c p} \frac{d\phi_1}{dx} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{\hbar c p x}{iZ\alpha m_0 c^2 - \kappa\hbar c p} \phi_1 - \frac{iZ\alpha E}{iZ\alpha m_0 c^2 - \kappa\hbar c p} \phi_1,
 \end{aligned} \tag{16}$$

and calculate its derivative

$$\begin{aligned}
 \frac{d\phi_2}{dx} &= \frac{\hbar c p}{iZ\alpha m_0 c^2 - \kappa\hbar c p} \frac{d\phi_1}{dx} + \frac{\hbar c p x}{iZ\alpha m_0 c^2 - \kappa\hbar c p} \frac{d^2\phi_1}{dx^2} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{\hbar c p}{iZ\alpha m_0 c^2 - \kappa\hbar c p} \phi_1 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{\hbar c p x}{iZ\alpha m_0 c^2 - \kappa\hbar c p} \frac{d\phi_1}{dx} \\
 &\quad - \frac{iZ\alpha E}{iZ\alpha m_0 c^2 - \kappa\hbar c p} \frac{d\phi_1}{dx} \quad [\text{see Eq. (13)}] \\
 &= - \left(\frac{\kappa\hbar c p + iZ\alpha m_0 c^2}{\hbar c p x} \right) \phi_1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{iZ\alpha E}{\hbar c p x} \right) \\
 &\quad \times \left(\frac{\hbar c p x}{iZ\alpha m_0 c^2 - \kappa\hbar c p} \left(\frac{d\phi_1}{dx} - \frac{1}{2} \phi_1 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{iZ\alpha E}{iZ\alpha m_0 c^2 - \kappa\hbar c p} \phi_1 \right).
 \end{aligned} \tag{17}$$

This yields

$$\begin{aligned}
& \frac{\hbar c p x}{i Z \alpha m_0 c^2 - \kappa \hbar c p} \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + \frac{\hbar c p - i Z \alpha E}{i Z \alpha m_0 c^2 - \kappa \hbar c p} \frac{d \phi_1}{dx} \\
& + \frac{i Z \alpha E}{i Z \alpha m_0 c^2 - \kappa \hbar c p} \frac{d \phi_1}{dx} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\hbar c p}{i Z \alpha m_0 c^2 - \kappa \hbar c p} \phi_1 + \frac{\kappa}{x} \phi_1 + \frac{i Z \alpha m_0 c^2}{\hbar c p x} \phi_1 \\
& - \frac{i Z \alpha E}{2 (i Z \alpha m_0 c^2 - \kappa \hbar c p)} \phi_1 \\
& - \frac{i Z \alpha E}{2 (i Z \alpha m_0 c^2 - \kappa \hbar c p)} \phi_1 \\
& + \frac{(Z \alpha E)^2}{\hbar c p x (i Z \alpha m_0 c^2 - \kappa \hbar c p)} \phi_1 \\
& - \frac{1}{4} \frac{\hbar c p x}{i Z \alpha m_0 c^2 - \kappa \hbar c p} \phi_1 = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

To summarize:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d \phi_1}{dx} - \frac{1}{2x} \phi_1 + \frac{\kappa (i Z \alpha m_0 c^2 - \kappa \hbar c p)}{x \hbar c p x} \phi_1 \\
& + \frac{i Z \alpha m_0 c^2 (i Z \alpha m_0 c^2 - \kappa \hbar c p)}{(\hbar c p x)^2} \phi_1 - \frac{i Z \alpha E}{2 \hbar c p x} \phi_1 \\
& - \frac{i Z \alpha E}{2 \hbar c p x} \phi_1 + \frac{(Z \alpha E)^2}{(\hbar c p x)^2} \phi_1 - \frac{1}{4} \phi_1 = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d \phi_1}{dx} - \frac{1}{2x} \phi_1 + \frac{i Z \alpha m_0 c^2 \kappa}{x \hbar c p x^2} \phi_1 - \frac{\kappa^2}{x^2} \phi_1 \\
& - \frac{1}{4} \phi_1 + \frac{(i Z \alpha m_0 c^2)^2}{(\hbar c p x)^2} \phi_1 - \frac{i Z \alpha m_0 c^2 \kappa \hbar c p}{(\hbar c p x)^2} \phi_1 \\
& - \frac{i Z \alpha E}{\hbar c p x} \phi_1 + \frac{(Z \alpha E)^2}{(\hbar c p x)^2} \phi_1 = 0,
\end{aligned} \tag{20}$$

and finally

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d \phi_1}{dx} - \frac{1}{4} \phi_1 - \frac{1}{2x} \phi_1 - \frac{\kappa^2}{x^2} \phi_1 \\
& + \frac{(Z \alpha)^2}{x^2} \phi_1 - \frac{i Z \alpha E}{\hbar c p x} \phi_1 = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Rewriting (21) leads to

$$\frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d \phi_1}{dx} - \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{i Z \alpha E}{\hbar c p} \right) \frac{1}{x} + \frac{\gamma^2}{x^2} \right] \phi_1 = 0$$

where $\gamma^2 = \kappa^2 - (Z \alpha)^2$. It is sufficient to know $\phi_1(x)$; then $\phi_2(x)$ results from (15). To solve the differential equation (22) we substitute

$$W = x^{1/2} \phi_1,$$

and a second-order differential equation for ϕ_1 results:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x^{-1/2} \frac{dW}{dx} - \frac{1}{2} x^{-3/2} W \right] + \frac{1}{x} \left[x^{-1/2} \frac{dW}{dx} - \frac{1}{2} x^{-3/2} W \right] \\ - \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{iZ\alpha E}{\hbar c p} \right) \frac{1}{x} + \frac{\gamma^2}{x^2} \right] x^{-1/2} W = 0. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} x^{-3/2} \frac{dW}{dx} + x^{-1/2} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{3}{4} x^{-5/2} W - \frac{1}{2} x^{-3/2} \frac{dW}{dx} \\ + x^{-3/2} \frac{dW}{dx} - \frac{1}{2} x^{-5/2} W \\ - \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{iZ\alpha E}{\hbar c p} \right) \frac{1}{x} + \frac{\gamma^2}{x^2} \right] x^{1/2} W = 0, \end{aligned}$$

so that the final results reads

$$\frac{d^2 W}{dx^2} - \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{iZ\alpha E}{\hbar c p} \right) \frac{1}{x} + \frac{\gamma^2 - 1/4}{x^2} \right] W(x) = 0 \quad (24)$$

The regular solution (at $x = 0$) of the second-order differential equation, in which there appears now no first order

derivative, is the Whittaker function¹⁰

$$W_{-(iy+1/2), \gamma}(x) = x^{\gamma+1/2} e^{-x/2} F(\gamma+1+iy, 2\gamma+1; x),$$

with

$$y = \frac{Z\alpha E}{\hbar c p}.$$

Thus, [and with (23) and (2)], ϕ_1 becomes

$$\begin{aligned} \phi_1 &= N(\gamma+iy) e^{i\eta} (2pr)^\gamma e^{-ipr} F(\gamma+1+iy, 2\gamma+1; 2ipr) \\ &\equiv N(\gamma+iy) e^{i\eta} (2p)^\gamma \phi(r) \end{aligned} \quad (27)$$

where we have introduced the phase η , which has to be adjusted to make $\phi_2 = \phi_1^*$ valid. Now we rewrite the first equation of the system (10): With $x = 2ipr$ and $d/dr = 2ipd/dx$ then

$$\frac{d\phi_1}{dr} = \left(ip + \frac{iZ\alpha E}{\hbar c pr} \right) \phi_1 + \left(-\frac{\kappa}{r} + \frac{iZ\alpha m_0 c^2}{\hbar c pr} \right) \phi_2.$$

Inserting ϕ_1 of (27) into (28) yields

$$\begin{aligned} N(\gamma+iy) e^{i\eta} (2p)^\gamma \frac{d\phi(r)}{dr} \\ = \left(ip + \frac{iZ\alpha E}{\hbar c pr} \right) N(\gamma+iy) e^{i\eta} (2p)^\gamma \phi(r) \\ + \left(-\frac{\kappa}{r} + \frac{iZ\alpha m_0 c^2}{\hbar c pr} \right) N(\gamma-iy) e^{-i\eta} (2p)^\gamma \phi^*(r). \end{aligned} \quad (29)$$

Solving the equation with respect to $e^{i\eta}$ produces

$$\begin{aligned}
e^{-2i\eta} &= \frac{\gamma + iy}{\gamma - iy} \left(-\frac{\kappa}{r} + \frac{iZ\alpha m_0 c^2}{\hbar c p r} \right)^{-1} \frac{1}{\phi^*} \frac{d\phi}{dx} \\
&\quad - \frac{\gamma + iy}{\gamma - iy} \frac{(ip + iZ\alpha E/\hbar c p r)}{(-\kappa/r + iZ\alpha m_0 c^2/\hbar c p r)} \frac{\phi}{\phi^*} \\
&= -\frac{\gamma + iy}{\gamma - iy} \left[\frac{-r\hbar c p}{-\kappa\hbar c p + iZ\alpha m_0 c^2} \frac{1}{\phi^*} \frac{d\phi}{dr} \right. \\
&\quad \left. + \frac{i\hbar c p^2 r + iZ\alpha E}{-\kappa\hbar c p + iZ\alpha m_0 c^2} \frac{\phi}{\phi^*} \right]. \tag{30}
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\frac{i\hbar c p^2 r + iZ\alpha E}{-\kappa\hbar c p + iZ\alpha m_0 c^2} &= \frac{\hbar c p(ipr + iZ\alpha E/\hbar c p)}{-\hbar c p(\kappa - iZ\alpha m_0 c^2/\hbar c p)} \\
&= \frac{-ip(r + Z\alpha E)/\hbar c p^2}{\kappa - iZ\alpha m_0 c^2/\hbar c p} \\
&= \frac{-ipr(1 + Z\alpha E/\hbar c p^2 r)}{\kappa - iZ\alpha m_0 c^2/\hbar c p} \tag{31}
\end{aligned}$$

holds. Thus it follows that

$$\begin{aligned}
e^{-2i\eta} &= -\frac{\gamma + iy}{\gamma - iy} \frac{r}{\kappa - iym_0 c^2/E} \\
&\quad \times \left[\frac{1}{\phi^*} \frac{d\phi}{dr} - ip \left(1 + \frac{y}{pr} \right) \frac{\phi}{\phi^*} \right], \tag{32}
\end{aligned}$$

and in accordance with (27) we have

$$\phi(r) = r^\gamma e^{-ipr} F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr).$$

Hence we may apply the following relations for the confluent hypergeometric function:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} F(a, c; x) &= \frac{a}{c} F(a + 1, c + 1; x) \\
&= \frac{a - c}{c} F(a, c + 1; x) + F(a, c; x), \\
e^{-x/2} F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; x) \\
&= e^{x/2} F(\gamma - iy, 2\gamma + 1; -x), \quad xF(a + 1, c + 1; x) = c[F(a + 1, c; x) - F(a, c; x)] \tag{34}
\end{aligned}$$

and obtain

$$\begin{aligned}
\phi^* &= r^\gamma e^{ipr} F(\gamma + 1 - iy, 2\gamma + 1; -2ipr) \\
&= r^\gamma e^{-ipr} F(\gamma + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \tag{37}
\end{aligned}$$

and

10 See, e.g. M. Abramowitz, I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York).

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dr} &= r^\gamma e^{-ipr} \frac{d}{dr} F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \\
&\quad + F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) e^{-ipr} (\gamma r^{\gamma-1} - ipr^\gamma) \\
&= r^\gamma e^{-ipr} \left[\frac{\gamma + 1 + iy - 2\gamma - 1}{2\gamma + 1} \right. \\
&\quad \times 2ip F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 2; 2ipr) \\
&\quad \left. + 2ip F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \right] \\
&\quad + F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) e^{-ipr} (\gamma r^{\gamma-1} - ipr^\gamma) \\
&= -\frac{\gamma + iy}{2\gamma + 1} r^\gamma 2ipe^{-ipr} F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 2; 2ipr) \\
&\quad + F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \\
&\quad \times (ipr^\gamma e^{-ipr} + \gamma r^{\gamma-1} e^{-ipr}) \\
&= \frac{-\gamma + iy}{2\gamma + 1} r^{\gamma-1} e^{-ipr} (2\gamma + 1) \\
&\quad \times [F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \\
&\quad - F(\gamma + iy, 2\gamma + 1; 2ipr)] \\
&\quad + F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \\
&\quad \times [ipr^\gamma e^{-ipr} + \gamma r^{\gamma-1} e^{-ipr}] \\
&= ipr^{\gamma-1} e^{-ipr} F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \\
&\quad - (-\gamma + iy) r^{\gamma-1} e^{-ipr} F(\gamma + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \\
&\quad + ipr^\gamma e^{-ipr} F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \\
&= e^{-ipr} r^{\gamma-1} [(iy + ipr) F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \\
&\quad - (-\gamma + iy) F(\gamma + iy, 2\gamma + 1; 2ipr)]. \tag{38}
\end{aligned}$$

Now we state that

$$\frac{r}{\gamma - iy} \frac{[d\phi/dr - ip(1+y/pr)\phi]}{\phi^*} = 1$$

or

$$\left[r \frac{d\phi}{dr} - ipr\phi - iy\phi \right] = \phi^*(\gamma - iy) \tag{40}$$

which can indeed easily be proved:

$$\begin{aligned}
&(iy + ipr) F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \\
&\quad - (-\gamma + iy) F(\gamma + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \\
&\quad - (ipr + iy) F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) \\
&\quad = (\gamma - iy) F(\gamma + iy, 2\gamma + 1; 2ipr), \quad \text{qed,} \tag{41}
\end{aligned}$$

From the statement (39), the phase (32) follows as

$$e^{2i\eta} = -\frac{\kappa - iym_0 c^2/E}{\gamma + iy}.$$

For the radial functions of equations (4) and (5) we may write

$$\begin{aligned}
G &= C_1 N (2pr)^\gamma \left\{ (\gamma + iy)^{-ipr + i\eta} \right. \\
&\quad \times F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) + \text{c.c.} \left. \right\}, \\
F &= iC_2 N (2pr)^\gamma \left\{ (\gamma + iy)e^{-ipr + i\eta} \right. \\
&\quad \times F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) - \text{c.c.} \left. \right\},
\end{aligned} \tag{43}$$

taking (27) and (15) into account, (by c.c. we mean here the complex conjugate) where

$$\begin{aligned}
C_1 &= \begin{cases} \sqrt{E + m_0 c^2} & \text{for } E > m_0 c^2 \\ \sqrt{-E - m_0 c^2} & \text{for } E < -m_0 c^2 \end{cases}, \\
C_2 &= \begin{cases} \sqrt{E - m_0 c^2} & \text{for } E > m_0 c^2 \\ -\sqrt{-E - m_0 c^2} & \text{for } E < -m_0 c^2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Let us now determine the normalization factor N . We normalize the continuum wave functions with respect to the energy axis, i.e. to delta functions of energy:

$$\int d^3r \psi_{E'}^\dagger \psi_E = \delta(E' - E).$$

Furthermore, we assume that for $r \rightarrow \infty$

$$G = AC_1 \cos(pr + \delta),$$

$$F = -AC_2 \sin(pr + \delta)$$

holds. We will discuss the proof of (47) later on. According to (4) and (15), for ϕ_1 this means that

$$\phi_1 = \frac{1}{2} A \exp[i(pr + \delta)].$$

Now we show that for

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi p}}$$

the normalization condition (46) is fulfilled. Indeed, for $E > m_0 c^2$ it follows that

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty dr \left\{ \sqrt{E + m_0 c^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi p}} \left[e^{i(pr + \delta)} + e^{-i(pr + \delta)} \right] \right. \\
&\quad \times \sqrt{E' + m_0 c^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi p'}} \left[e^{i(p'r + \delta')} + e^{-i(p'r + \delta')} \right] \\
&\quad - \sqrt{E - m_0 c^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi p}} \left[e^{i(pr + \delta)} - e^{-i(pr + \delta)} \right] \\
&\quad \times \sqrt{E' - m_0 c^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi p'}} \left[e^{i(p'r + \delta')} - e^{-i(p'r + \delta')} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dr \left\{ \sqrt{E + m_0 c^2} \sqrt{E' + m_0 c^2} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(pp')^{1/2}} \right. \\
&\quad \times \left[e^{i(p+p')r+\delta+\delta'} + e^{-i(p-p')r+\delta-\delta'} \right. \\
&\quad \left. + e^{i(p'-p)r+\delta'-\delta} + e^{-i(p+p')r-\delta-\delta'} \right] \\
&\quad - \sqrt{E - m_0 c^2} \sqrt{E' - m_0 c^2} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(pp')^{1/2}} \\
&\quad \times \left[e^{i(p+p')r+\delta+\delta'} - e^{i(p-p')r+\delta-\delta'} \right. \\
&\quad \left. - e^{i(p'-p)r-\delta+\delta'} + e^{-i(p+p')r-\delta-\delta'} \right] \left. \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left[\sqrt{E + m_0 c^2} \sqrt{E' + m_0 c^2} \frac{1}{2} \frac{1}{(pp')^{1/2}} \right. \\
&\quad \times [\delta(p - p') + \delta(p - p')] \\
&\quad + \sqrt{E - m_0 c^2} \sqrt{E' - m_0 c^2} \frac{1}{2} \frac{1}{(pp')^{1/2}} [\delta(p - p') \\
&\quad \left. + \delta(p - p')] \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{(E + m_0 c^2)}{p} \delta(p - p') + \frac{(E - m_0 c^2)}{p} \delta(p - p') \right] \\
&= \frac{E}{p} \delta(p - p') = \frac{E}{p} \frac{\delta(E - E')}{dp/dE} = \frac{E}{p} \frac{\delta(E - E')}{E/p} \\
&= \delta(E - E'), \tag{50}
\end{aligned}$$

where we have set

$$p = \sqrt{E^2 - m_0 c^2}.$$

The derivation of relation (50) is only valid in a strict sense if the phase δ does not depend on r . Moreover, the following relations for the δ function were used:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \delta(x),$$

$$\delta(-x) = \delta(x),$$

$$f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a),$$

$\delta[\varphi(x') - \varphi(x)] = \frac{1}{|d\varphi(x)/dx|} \delta(x' - x)$, $\delta(x) = 0$ for $x > 0$. The result (50) is also valid for $E < -m_0 c^2$. In order to describe the asymptotics of the functions (43), we apply the asymptotic behaviour of the confluent hypergeometric functions for $r \rightarrow \infty$:

$$F(a, c; r) \rightarrow \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} r^{a-c} e^r.$$

Thereby from (43) we obtain for $r \rightarrow \infty$ that

$$\begin{aligned}
G &= C_1 N (2pr)^\gamma \Gamma(2\gamma + 1) \\
&\quad \times \left[\frac{(\gamma + iy)e^{ipr+iy}}{\Gamma(\gamma + 1 + iy)} (2ipr)^{iy-\gamma} + \text{c.c.} \right], \\
F &= iC_2 N (2pr)^\gamma \Gamma(2\gamma + 1) \\
&\quad \times \left[\frac{(\gamma + iy)e^{ipr+iy}}{\Gamma(\gamma + 1 + iy)} (2ipr)^{iy-\gamma} - \text{c.c.} \right]. \tag{57}
\end{aligned}$$

Now we perform some transformations:

$$i^{-\gamma} = e^z \Rightarrow z = -\gamma \ln(i).$$

For $z = x + iy = re^{i\theta}$, $\ln z = \ln r + i\theta \Rightarrow \ln i = i\frac{\pi}{2}$ and it follows that

$$i^{-\gamma} = e^{-\pi i \gamma / 2}.$$

Analogously one gets

$$\begin{aligned} (2ipr)^{iy} = e^z \Rightarrow z &= iy \ln(2ipr) = iy(\ln i + \ln(2pr)) \\ &= i y i \frac{\pi}{2} + iy \ln(2pr) \end{aligned}$$

i.e.

$$(2ipr)^{iy} = e^{-\pi y / 2} e^{iy \ln(2pr)}.$$

Furthermore, with $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ one calculates

$$\begin{aligned} \frac{\gamma + iy}{\Gamma(\gamma + 1 + iy)} &= \frac{1}{\Gamma(\gamma + iy)} = \frac{1}{|\Gamma(\gamma + iy)| e^{i \arg \Gamma(\gamma + iy)}} \\ &= \frac{e^{-i \arg \Gamma(\gamma + iy)}}{|\Gamma(\gamma + iy)|} \end{aligned} \quad (60)$$

With that the radial functions from (57) have the asymptotic form (47). In doing so, one gets

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi p}} = \frac{2N e^{-\pi y / 2} \Gamma(2\gamma + 1)}{|\Gamma(\gamma + iy)|}.$$

The normalization constant N is fixed by this equation. For a phase δ we obtain

$$\delta = y \ln(2pr) - \arg \Gamma(\gamma + iy) - \frac{\pi \gamma}{2} + \eta.$$

This is the Coulomb phase, which is already known to us from the nonrelativistic problem.

Thus, the final results for the wave function are

$$\begin{aligned} G_\kappa &= \frac{C_1 (2pr)^\gamma e^{\pi y / 2} |\Gamma(\gamma + iy)|}{2(\pi p)^{1/2} \Gamma(2\gamma + 1)} \\ &\quad \times \left\{ e^{-ipr + i\eta} (\gamma + iy) F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) + \text{c.c.} \right\}, \\ F_\kappa &= \frac{i C_2 (2pr)^\gamma e^{\pi y / 2} |\Gamma(\gamma + iy)|}{2(\pi p)^{1/2} \Gamma(2\gamma + 1)} \\ &\quad \times \left\{ e^{-ipr + i\eta} (\gamma + iy) F(\gamma + 1 + iy, 2\gamma + 1; 2ipr) - \text{c.c.} \right\}. \end{aligned} \quad (63)$$

We see that the calculation of the continuum wave function is a difficult task. Besides the partial waves we have discussed here, one can also construct travelling waves¹¹. Let us merely remark that for the calculation of all scattering processes with heavier nuclei, and also for the calculation of quantum electrodynamic processes, the here-determined continuum waves represent the necessary and appropriate technical tools. For the study of "new" quantum electrodynamic processes in the strong fields of heavy ion collisions, the continuum waves have even to be calculated for extended nuclei.

9.10 Muonic Atoms

A muon is a particle which has the same properties as the electron in almost every attribute, except that it is about 207 times heavier than the electron, i.e.

$$\begin{aligned} m_\mu &= 207 m_e \\ (m_e c^2 &= 0.511004 \text{ MeV}, m_\mu c^2 = 105.655 \text{ MeV}). \end{aligned}$$

Since it also has spin $\frac{1}{2}$ and negative charge (the antiparticle of the μ^- is the μ^+ , which has positive charge), it also obeys the Dirac equation. Some effects, which play only a minor

role for the electron in usual atoms, become important for the μ^- when it "circles" around the nucleus forming a muonic atom. These effects are linked to the large mass of the muon, which implies that the Bohr radius

of the μ^- is smaller than that of the electron by a factor of

$$\frac{m_e}{m_\mu} = \frac{1}{207} \quad (1)$$

Thereby all the effects which are connected with the extension of the nucleus (modified Coulomb potential at smaller distances, quadrupole interaction, etc.) are more important in the case of the muon than for the electron. Some of these effects we will briefly explain in the following. Before that, though, a brief abstract of the formation and the most important physical processes involved in the creation of muonic atoms seems appropriate.

Production of Muonic Atoms. Muons are created by performing inelastic scattering experiments of high-energy protons with protons (hydrogen). There, pions are produced according to the reactions:

$$p + p \begin{cases} \rightarrow p + p + \pi^- + \pi^+ \dots \\ \rightarrow p + n + \pi^+ + \dots \end{cases}.$$

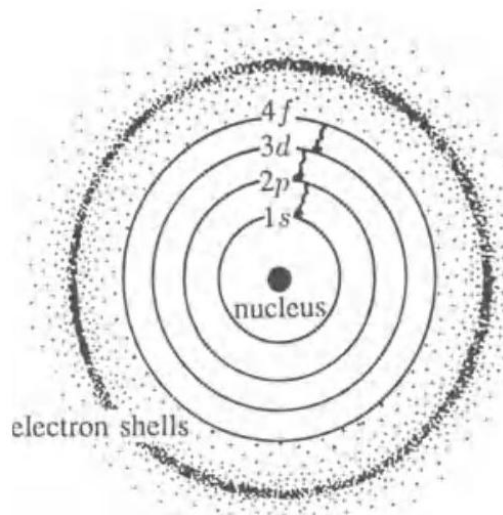
The pions are separated from the beam with magnetic fields. They decay into muons within about 10^{-8} s due to the weak interaction:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu.$$

The μ^- produced in this way are now decelerated; then, the slow μ^- are bombarded onto ordinary electronic atoms, e.g. Pb. Through the interaction of the μ^- with the electrons, some electrons will be knocked out of the atom, the μ^- will be further decelerated and finally captured by the nucleus. The "capture orbit" of a muon is one of the outer orbits with principal quantum number $n \approx 14$. Such a muonic atom (with one muon and still many electrons) is then in a highly excited state. In the first step, the de-excitation takes place via transitions within the outer shells in which the muon transfers energy to further electrons, which are consequently emitted (Auger emission). The transitions between inner muonic atom shells result in γ emission, which can be observed and measured (see Fig. 9.14).

We now discuss a few remarkable differences between muonic atoms and electronic atoms.

a) **Recoil Effects.** Since, in comparison to the muon, the nucleus does not have infinitely high mass, both particles move around a common centre of mass, which is not in the centre of the nucleus. For the Schrödinger equation



11 For a detailed discussion of this calculation, see M.E. Rose: Relativistic Electron Theory (Wiley, New York, London)

Fig. 9.14. Illustration of the inner μ orbits around an atomic nucleus. The influence of the electrons, which are positioned far out, is schematically indicated by a cloud

the centre-of-mass motion can, as in classical mechanics, easily be separated. Then the relative motion is simply described by a one-particle equation with the reduced mass μ_μ ,

$$\mu_\mu = \frac{m_\mu \cdot M_{\text{nucleus}}}{m_\mu + M_{\text{nucleus}}}.$$

Here m_μ is the mass of the muon. In the case of the Dirac equation, this separation does not work, because:

1. A satisfying two-body Dirac equation ¹² does not exist.
2. The centre-of-mass system can no longer be defined geometrically (as in classical mechanics), but only dynamically; namely as a Lorentz system, in which the sum of the momenta of all the involved particles vanishes, i.e. $\sum_{\nu=1}^A \mathbf{p}_\nu = \mathbf{0}$. In an approximation one can manage the problem by assigning the above-mentioned reduced mass μ_μ to the muon in the Dirac equation. The binding energies of the muons are considerably influenced by the thus (approximately) considered recoil effect. In view of the experimental precision of $\Delta E/E \leq 10^{-4} - 10^{-5}$, there appears no difficulty in verifying these effects.

b) Retardation Effects. If one considers the interaction between the nucleus and the muon in the form of a static Coulomb potential in the Dirac equation, one thereby

¹² Recently a relativistic many-body mechanics has been proposed by F. Rohrlich [see Annals of Physics 117, 292 (1979)]. It remains, though, to be seen if this theory can be quantized in a satisfactory way. We refer also to the Bethe-Salpeter equation, which is discussed in Vol. 4 of this series: Quantum Electrodynamics (Springer, Berlin, Heidelberg), to be published. performs an external field approximation. The interaction within this approximation takes place without time delay; the effects of retardation which are due to the recoil motion are neglected. If the velocity of the muon in the inner shells of heavy nuclei becomes comparable to velocity of light c , the retardational effects should become large and then also the previously mentioned "reduced mass approximation" turns out to be insufficient. In this case it is necessary to consider a two-body equation derived from the quantized theory (field theory), the so-called Bethe-Salpeter equation. Since these effects are just near to the edge of the maximal precision of present experiments, we will not discuss them in this context any further.

c) Screening by Electrons. Though the Bohr radius of the many electrons in the atom is much larger than the one of the muon, the tails of the electrons' wave functions reach into the inner region (see Fig. 9.15).

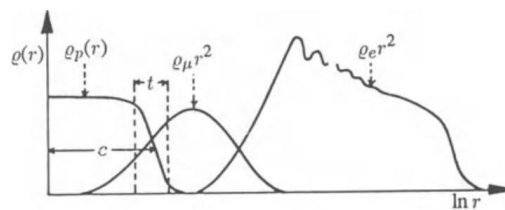


Fig. 9.15. Qualitative picture of the charge distribution of a nucleus $q_p(r)$ with half-value radius c and surface thickness t . The charge distributions of the muon q_μ and the electrons q_e are multiplied by r^2 . It can be recognized that the muon stays partly in the interior of the nucleus and the electrons stay partly within the muonic orbit. Note the logarithmic r scale!

Thereby the electrons cause a screening potential for the muons which is not negligible. For symmetric charge distributions $q_e(r)$ it can easily be calculated that

$$V_{\text{screening}}(r) = 4\pi e^2 \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r \varrho_e(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \varrho_e(r') r' dr' \right\}. \quad (5)$$

Here

$$\varrho_e(r) = \sum_{i=1}^N \psi_i^* \psi_i(r)$$

is the charge density of the N electrons still bound within the atom, ψ_i being their wave function. For more precise calculations one even has to determine the wave function of the muon and those of the electrons self-consistently. As a typical case for the screening of the muon by the electrons, we consider the $5g - 4f$ transition in muonic lead, whose transition energy amounts to $\Delta E \sim 400\text{keV}$. Due to the electron screening, the single muon levels will be less bound by an energy of about 17keV . Calculating the transition energy, the effect of screening then reduces to a few eV, because both levels are shifted in the same direction (to weaker binding).

d) Vacuum Polarisation, Self-energy and Anomalous Magnetic Moment. In Chap. 12¹³ we will learn about fieldtheoretical effects, which cause small, but measurable, deviations from the Coulomb interaction of the electrons or muons with the nucleus. One has to consider the effect of vacuum polarization, the self-energy and the anomalous magnetic moment. The vacuum polarization describes the creation virtual electron-positron pairs in a strong electromagnetic fields. The virtual electron-positron pairs form a cloud of dipoles, leading to a modification of the Coulomb potential (see Fig. 9.16).

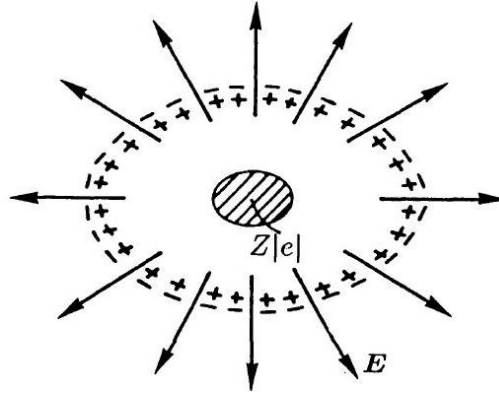


Fig. 9.16. Illustration of the vacuum polarization as a "dipole cloud" in the electric field of the nucleus

The properties of the vacuum are similar to a dielectric medium. The dominant part of the vacuum polarization potential is the so-called Uehling potential given by

$$V_{\text{vp}}(r) = -e^2 \frac{4\alpha}{3} \frac{\lambda_e}{2} \int_0^\infty \varrho(r') \times [Z_1(|r - r'|) - Z_1(r + r')] dr', \quad (7)$$

where the structure function is

¹³ In particular this is discussed (with more precise calculations) in Vol. 4 of this series: Quantum Electrodynamics (Springer, Berlin, Heidelberg), to be published.

$$Z_1(r) = \int_1^{\infty} \exp \left\{ -\frac{2}{\lambda_e} r \xi \right\} \times \left(1 + \frac{1}{2\xi^2} \right) \frac{(\xi^2 - 1)^{1/2}}{\xi^2} \frac{1}{\xi} d\xi, \quad (8)$$

with $\lambda_e = 386.1592 \text{ fm}$ being the Compton wavelength of the electron. For $r > \lambda_e$, i.e. in the region where mainly atomic electrons are present, the vacuum polarization potential falls off exponentially. Therefore very heavy particles, like the muons (and pions), whose probability is large in the region $R_{\text{nucleus}} < r < \lambda_e$, are particularly suitable for examining the vacuum polarization potential. Nowadays the precision of experiments with muonic atoms is so accurate that processes of higher order than those in (7) and (8) also have to be considered. The self-energy describes the interaction of one particle with itself by emission and reabsorption of a photon (see Fig. 9.17). There is a similar cause for the so-called anomalous magnetic moment, whose contribution to the energy is illustrated by the graph in Fig. 9.17. Here we only note that the self-energy and the anomalous magnetic moment are of the order $1/m$. Therefore they are more important in the case of electrons than for muons. In view of the present experimental accuracy the latter only play a minor role.

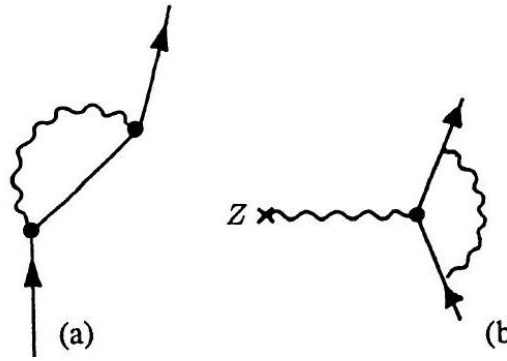


Fig. 9.17. (a) Self-energy diagram, (b) anomalous magnetic moment

e) Nuclear Deformation. Until now we have assumed that nuclei have a spherical symmetric charge distribution, which may be well described by means of a two-parameter charge distribution with half-density radius c and surface thickness t as parameters. The most common one is the so-called Fermi-distribution, which is given by

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + e^{(r-c)/t}}.$$

The half-density radius c and the surface thickness t are free parameters, which are determined from fits to ex-

perimental cross-sections of fast electrons. Another method for their determination is the following: When measuring the transition energies of various γ transitions in a muonic atom, accurate values for c and t can be determined by means of so-called $c - t$ diagrams. In other words: The transition energies of the muonic atom depend on the parameters c and t of the nuclear charge distribution (9). However, many nuclei show deviations from the spherical shape. For this reason one has to expand the nuclear charge distribution into multipole moments:

$$\varrho(r) = \varrho_0(r) + \sum_{lm} \varrho_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

In most cases nuclei are axially symmetric, but deformed in a cigar-like manner, i.e. they exhibit a prolate deformation. Then (10) reduces to

$$\varrho(\mathbf{r}) = \varrho_0(r) + \varrho_2(r) Y_{20} + \dots,$$

where $\varrho_2 \equiv \varrho_{20}$. The second term describes the quadrupole deformation. Accordingly, the quadrupole moment of the nucleus is defined as

$$Q_0 = \int \varrho(r) r^2 Y_{20}^* dV = 2\sqrt{\frac{4\pi}{5}} \int_0^\infty \varrho_2(r) r^4 dr.$$

Not only the absolute values, but also signs of these quadrupole moments can be determined from the pronounced hyperfine structure of the muonic atoms. Hyperfine structure means observable level shifts, additional to the $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ splitting (fine structure).

In order to reproduce transition energies, e.g., in a muonic uranium atom one introduces even four-parametric charge distributions, like

$$\begin{aligned} \varrho(r, c, t, \beta, \gamma) \\ = \varrho_0 \left[1 + \exp \left(4 \ln 3 \frac{r - c(1 + \beta Y_{20})}{t(1 + \beta \gamma Y_{20})} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

In comparison to (9) the half-value radius and the surface thickness are now treated as angular-dependent quantities, implying that the density of the "atmosphere" at the tip of the "nuclear cigar" is different from that on its short axis. A typical spectrum of a heavy muonic atom is sketched for uranium in Fig. 9.18. Furthermore it illustrates the difference between the solutions for point-like and extended nuclei, and the different effects discussed above are indicated as far as their order of magnitude allow.

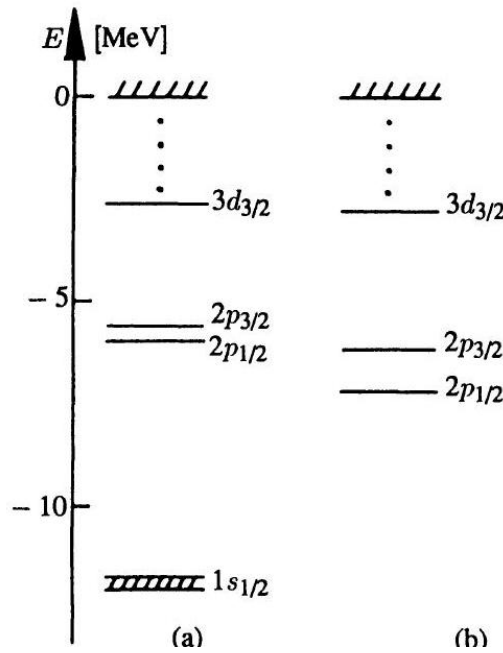


Fig. 9.18a, b. Binding energies of muons in a uranium atom. (a) The more realistic spectrum with extended nucleus. The hyperfine splitting due to the quadrupole moments of the uranium nucleus is indicated for the $1s$ level. (b) The same spectrum for a point-like U nucleus. The $1s_{1/2}$ state lies at -27.35MeV , i.e. outside the diagram

f) Nuclear Polarization. Until now the nucleus has been assumed to be static. This implies that the nucleus will not be influenced by the presence of the muon. However, the nucleus behaves like a dielectric medium and thus it is polarizable. It can be excited by the muon and its charge distribution can be slightly changed. We write the total Hamiltonian

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{nucleus}}(\mathbf{r}') + \hat{H}_{\text{meson}}(\mathbf{r}) + \hat{H}_{\text{int}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

where $\hat{H}_{\text{int}} = -Ze^2/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ describes the electromagnetic interaction between nucleus and meson. One performs a multipole expansion

$$\hat{H}_{\text{int}} = - \sum_{l,m} \left[\frac{4\pi e^2}{2l+1} \right] \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}(\Omega') Y_{lm}^*(\Omega_{\text{meson}})$$

and treats $\hat{H}_{\text{int}}$ in higher-order perturbation theory.¹⁴

Let us note a typical value for the contribution of nuclear polarization effects. In muonic Pb the transition from $2p_{1/2}$ to $1s_{1/2}$ has a transition energy of $\Delta E \sim 10\text{MeV}$, whereas the contribution due to nuclear polarization ΔE_{np} is of the order of 10keV . g) Isomeric Shift. The ground and excited states of a nucleus do not need to have equal charge radii. If a nucleus has been excited, then usually the average quadratic nuclear radius changes by Δr^2 . Such an isomeric shift gives rise to a level shift in muonic atoms and can be deduced (measured) from studying the level structure. For the first excited nuclear state one finds typical changes of the radius of the order of

$$\frac{\Delta\langle r^2 \rangle}{\langle r^2 \rangle} \sim 10^{-4} \text{ to } 2 \times 10^{-3}.$$

Such an excited state may be formed during the cascade of a muon within the atom. The mesonic transition energy is not always emitted by radiation of a real photon, but can also be absorbed directly in the nucleus. Accordingly, the nucleus will be excited into higher states. During the subsequent transitions the meson feels a different charge radius.¹⁵

h) Polarization of Muons and Pions. In our previous considerations the muon and pion have been considered as structureless particles, disregarding their internal degrees of freedom. However, one knows that the pion has a charge radius of $r_{\text{pion}} \cong 0.8\text{fm}$. Moreover, considering that a pion consists of two quarks, it becomes obvious that also the pion can be polarized in the presence of the strong field of a nucleus. However, the corresponding energy shifts turn out to be just too small for an experimental verification at the present time. Concerning the muon, which belongs to the lepton family, an "extension" (a substructure) is still unknown, and up to now leptons (electrons, muons, taus) also seem to be point-like particles.

9.11 Dirac Equation for the Interaction Between a Nuclear and an External Field Taking Account of the Anomalous Magnetic Moment

The Dirac equation for a nucleon interacting with an external electromagnetic field contains an additional term describing the interaction between the anomalous magnetic moment of the nucleon with the electromagnetic field:

$$\left(i\hbar c \gg -\frac{e_j}{c}A + K_j \frac{e\hbar}{4M_j c} \hat{\sigma}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - M_j c^2 \right) \psi(x) = 0,$$

where $j = p$ and $e_p = |e|$ for the proton and $j = n$ and $e_n = 0$ for the neutron, respectively.

Problem. a) Show that the additional term does not violate the relativistic invariance of the Dirac equation.

b) Show that this term satisfies the hermiticity condition

$$\gamma_0 \left(K_j \frac{e\hbar}{4M_j c} \hat{\sigma}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)^\dagger \gamma_0 = K_j \frac{e\hbar}{4M_j c} \hat{\sigma}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Remembering that when turning from the matrices $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ to the gamma matrices in the Dirac equation, a term γ_0 has been factorized out; see (3.8).

c) Show that the choice $K_p = 1.79$ and $K_n = -1.91$ corresponds to the experimentally observed magnetic moment.

¹⁴ We refer to the literature: See, e.g., J.M. Eisenberg, W. Greiner: Nuclear Theory, Vol.II: Excitation Mechanisms of the Nucleus (North Holland, Amsterdam, third edition 1988).

¹⁵ See: J.M. Eisenberg, W. Greiner: Nuclear Theory, Vol.I: Nuclear Models (North Holland, Amsterdam, third edition 1987) p. 73.

Solution

a) Relativistic invariance of the term $\hat{\sigma}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ as a contraction of two Lorentz tensors (covariants) is obviously manifest.

b) Since $\hat{\sigma}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ represents a product of an operator $\hat{\sigma}_{\mu\nu}$ with a real tensor $F^{\mu\nu} = (F^{\mu\nu})^*$ [see (1.15)], i.e.

$$\hat{\sigma}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \sum_{\mu,\nu} \hat{\sigma}_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

with the field strength tensor $F^{\mu\nu}$, it is sufficient to show that

$$\gamma_0 \hat{\sigma}_{\mu\nu}^\dagger \gamma_0 = \hat{\sigma}_{\mu\nu}$$

holds. For this purpose we use the relation $\gamma_0^\dagger = \gamma_0$ and $\gamma^\dagger = -\gamma$, and in shorthand notation we have $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0$. We explicitly derive

$$\begin{aligned} \gamma_0 \hat{\sigma}_{\mu\nu}^\dagger \gamma_0 &= \gamma_0 \left[\frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \right]^\dagger \gamma_0 \\ &= -\frac{i}{2} \gamma_0 (\gamma_\nu^\dagger \gamma_\mu^\dagger - \gamma_\mu^\dagger \gamma_\nu^\dagger) \gamma_0 \\ &= -\frac{i}{2} \gamma_0 (\gamma_0 \gamma_\nu \gamma_0^2 \gamma_\mu \gamma_0 - \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0^2 \gamma_\nu \gamma_0) \gamma_0 \\ &= -\frac{i}{2} (\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu) = \hat{\sigma}_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

where $\gamma_0^2 = \hat{1}$ has been used.

c) First we rewrite the interaction term:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu} - \frac{i}{2} \gamma_\nu \gamma_\mu F^{\mu\nu} \\ &= \frac{i}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu} - \frac{i}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\nu\mu} = i \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

where we have renamed the dummy indices, and the relation $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ has been used.

By considering that

$$E^i = F^{0i} \text{ and } \mathbf{B} = (F^{23}, F^{31}, F^{12})$$

and $\gamma_k \gamma_l = i \hat{\Sigma}_j$, with

$$\hat{\Sigma}_j = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_j & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_j \end{pmatrix}$$

as well as $\gamma_k \gamma_0 = \hat{\alpha}_k$, the sum reads explicitly:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu} &= \sum_{j<k} \gamma_j \gamma_k F^{jk} + \sum_{k<j} \gamma_k \gamma_j F^{kj} - \gamma_0 \gamma_k F^{0k} \\ &\quad - \gamma_k \gamma_0 F^{k0} + \gamma_0 \gamma_0 F^{00} \end{aligned}$$

In view of the relation $F^{00} = 0$, $\gamma_j \gamma_k = -\gamma_k \gamma_j$ and $F^{jk} = -F^{kj}$, the sum becomes

$$\sum_{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu} = 2 \left(\sum_{j<k} \gamma_j \gamma_k F^{jk} - \sum_j \gamma_j \gamma_0 F^{j0} \right).$$

We obtain

$$\gamma_1 \gamma_2 F^{12} = i \hat{\Sigma}_3 B_3, \quad \gamma_2 \gamma_3 F^{23} = i \hat{\Sigma}_1 B_1,$$

$$\gamma_3 \gamma_1 F^{31} = i \hat{\Sigma}_2 B_2 = \gamma_1 \gamma_3 F^{13},$$

and thus

$$\sum_{j<k} \gamma_j \gamma_k F^{jk} = i \hat{\Sigma} \cdot \mathbf{B} \text{ and } \sum_j \gamma_j \gamma_0 F^{j0} = -\hat{\alpha} \cdot \mathbf{E},$$

which yields

$$\sum_{\mu,\nu} \hat{\sigma}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2i \{ i \hat{\Sigma} \cdot \mathbf{B} + \hat{\alpha} \cdot \mathbf{E} \}.$$

Instead of the original Dirac equation we obtain

$$\begin{aligned} & \left(i\hbar c \phi - \frac{e_j}{c} A - M_j c^2 \right) \psi(x) \\ &= K_j \frac{e\hbar}{2M_j c} \{ \hat{\Sigma} \cdot \mathbf{B} - i\hat{\alpha} \cdot \mathbf{E} \} \psi(x). \end{aligned} \quad (1)$$

The lhs exclusively describes the coupling with the electromagnetic field. We know that this part of the equation leads to a nonvanishing magnetic moment if $e_j \neq 0$ (i.e. only for a proton), namely

$$\mu_p = \mu_B = \frac{e\hbar}{2M_p c} \quad \text{and} \quad \mu_n = 0.$$

In the nonrelativistic limit the rhs of (1) takes the form

$$K_j \frac{e\hbar}{2M_j c} \{ \hat{\sigma} \cdot \mathbf{B} - i\frac{v}{c} \hat{\sigma} \cdot \mathbf{E} \},$$

since

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{\alpha} \sim \frac{v}{c} \hat{\sigma}.$$

We can neglect the second term, because in the nonrelativistic case $v/c \ll 1$ it is small compared with the first term, which just corresponds to the interaction of the magnetic moment with the magnetic field. Thus, we obtain the total magnetic moment

$$\mu_p = (1 + K_p) \frac{e\hbar}{2M_p c}$$

for the proton, i.e. $\mu_p = 2.79\mu_B$, with $K_p = 1.79$ and

$$\mu_n = K_n \frac{e\hbar}{2M_n c} = -1.91\mu_B$$

for the neutron.

9.12 The Impossibility of Additional Solutions for the Dirac-Coulomb Problem Beyond $Z = 118$

Motivation: For an electron coupled to a point particle with charge Z we can rewrite the Dirac equation into the two coupled equations

$$G' + \frac{\kappa G}{r} - \left(\frac{E + m_0 c^2}{\hbar c} + \frac{Z\alpha}{r} \right) F = 0,$$

$$F' - \frac{\kappa F}{r} + \left(\frac{E - m_0 c^2}{\hbar c} + \frac{Z\alpha}{r} \right) G = 0.$$

To study the asymptotic behavior of the solutions for $r \rightarrow 0$ we have to take into account only the derivative terms and the terms containing a factor $1/r$, whereas we can neglect the terms proportional to m and E . The resulting equations can be solved with the ansatz $F(r) = F_0 r^\gamma$, $G(r) = G_0 r^\gamma$, yielding

$$(\kappa + \gamma)G_0 - Z\alpha F_0 = 0,$$

$$Z\alpha G_0 - (\kappa - \gamma)F_0 = 0.$$

This leads to the condition

$$\frac{F_0}{G_0} = \frac{Z\alpha}{\kappa - \gamma} = \frac{\kappa + \gamma}{Z\alpha},$$

which requires

$$\gamma = \pm \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2}.$$

One of the two independent solutions is regular at the origin, while the other diverges like $r^{-|\gamma|}$. If the charge Z is small, this divergence is so strong that the wave function cannot be normalized and thus is to be rejected as a physical

Solution

However, for a sufficiently weak divergence the normalization integral $\int d^3r (F^2 + G^2)$ is finite. This happens in the case $\gamma > -\frac{1}{2}$, which means that $Z\alpha > \sqrt{\kappa^2 - \frac{1}{4}}$. For $s_{\frac{1}{2}}$ and $p_{\frac{1}{2}}$ states ($\kappa = \pm 1$) the charge has to exceed $Z > \sqrt{\frac{3}{4}} \times 137 \approx 118$. Under this condition it

might appear that both types of solution of the Dirac equation are admissible since they both are normalizable. This would have drastic consequences because the rejection of the irregular solution is essential for obtaining discrete energy eigenvalues. If both solutions were acceptable then there would exist a continuum of solutions for the following reason. For any given energy one can find a solution which is well behaved for $r \rightarrow \infty$. For $r \rightarrow 0$, on the other hand, this solution contains admixtures behaving like $r^{+|\gamma|}$ and $r^{-|\gamma|}$ as well. For $|\gamma| < \frac{1}{2}$ this cannot be accepted since the solution is no longer normalizable. Only for certain values of the energy does the component $r^{-|\gamma|}$ vanish. These are the energy eigenvalues. For $|\gamma| > \frac{1}{2}$, on the other hand, any linear combination of $r^{\pm|\gamma|}$ leads to a solution normalizable at $r \rightarrow 0$. For any given solution one only has to make sure that the wave function is normalizable also at $r \rightarrow \infty$, which can be done for every energy.

Are these solutions physically relevant? A static point charge represents a very singular object which we actually do not find in nature, since any particle of finite mass cannot be localized at a single point. Furthermore, only nuclei (in fact superheavy nuclei¹⁶ have charges of the order $Z\alpha \approx \sqrt{\frac{3}{4}}$, and these are clearly extended objects. Even if such a singular point source of such a high charge does not exist, it is still interesting to study the problem of an extended source in the limit that its extension gets smaller and smaller, either by shrinking the nuclear radius artificially or by studying a hypothetical elementary particle of that charge in the limit that its mass goes to infinity and the particle is localized more and more. The following exercise gives some insight into the problem.

Exercise: Study $\kappa = -1$ states of Dirac electrons in the potential of a hollow sphere of charge $Z\alpha > \sqrt{\frac{3}{4}}$ and radius R and show that in the limit $R \rightarrow 0$ only the solution behaving like $r^{+\sqrt{1-(Z\alpha)^2}}$ is recovered.¹⁷

Solution: We proceed in the usual way. We solve the wave function for the inside and outside regions separately and then try to match the ratio F/G . In the outside region the differential equation contains the ordinary Coulomb potential. In the inside of a charged spherical shell the potential takes on the constant value $Z\alpha/R$, so that the differential equation becomes ($\kappa = -1$):

$$\begin{aligned} G' - \frac{G}{r} - \left(\frac{E+m_0c^2}{\hbar c} + \frac{Z\alpha}{R} \right) F &= 0, \\ F' - \frac{F}{r} + \left(\frac{E-m_0c^2}{\hbar c} + \frac{Z\alpha}{R} \right) G &= 0. \end{aligned}$$

This is just the free Dirac equation for a particle with energy $\varepsilon = E + \hbar c Z\alpha/R$. The general solution is given by

$$\begin{aligned} F &= k \cos(kr + \delta) - \frac{1}{2} \sin(kr + \delta) \\ G &= \left(\frac{m_0c^2}{\hbar c} + \varepsilon \right) \sin(kr + \delta) \end{aligned}$$

with $\hbar ck = \sqrt{\varepsilon^2 - (m_0c^2)^2}$. Taking $\delta = 0$ this is the solution found in (33), Exercise 9.5. The validity of the generalization to $\delta \neq 0$ is easily checked by insertion into the differential equation. However, even without performing this calculation explicitly it is clear that the constant phase shift δ can have no influence on the neutral cancellation of the sine or cosine terms.

In contrast to the Coulomb problem with $Z > 118$ the constant potential admits only one normalizable solution, namely $\delta = 0$. Thus we get

$$\left. \frac{F}{G} \right|_{r=R, \text{ inside}} = -\frac{\hbar c}{m_0c^2 + \varepsilon} \left(\frac{1}{R} - k \cot(kR) \right). \quad (7)$$

¹⁶ See J.M. Eisenberg, W. Greiner: Nuclear Theory, Vol. III: Microscopic theory of the nucleus (North Holland, Amsterdam, third edition 1990).

¹⁷ This exercise has been worked out by M. Grabiak.

Now we are interested in the limit $R \rightarrow 0$. In this limit m and E can be neglected against $Z\alpha/R$, so that we can set $\varepsilon/\hbar c = k = Z\alpha/R$, and (7) becomes

$$\frac{F}{G} \longrightarrow \frac{-1}{Z\alpha} + \cot(Z\alpha).$$

Now we have to study the behaviour of the wave function in the outside region. For a given energy the wave function will in general have admixtures behaving both like $r^{+|\gamma|}$ and $r^{-|\gamma|}$ for $r \rightarrow 0$, but the latter will dominate its asymptotic behaviour. In this limit we can also neglect the mass as well as the energy. According to (3) the F/R ratio then reads

$$\frac{F}{G} \Big|_{r \rightarrow R} \longrightarrow -\frac{1+|\gamma|}{Z\alpha} = -\frac{1+\sqrt{1-(Z\alpha)^2}}{Z\alpha}$$

in the limit $R \rightarrow 0$. Comparing (7) and (9), we see that the matching condition becomes

$$\frac{1+\sqrt{1-(Z\alpha)^2}}{Z\alpha} = \frac{1}{Z\alpha} - \cot(Z\alpha)$$

in this limit. It is impossible to solve this equation, since for $\alpha < 1$ the lhs is greater than $1/Z\alpha$, whereas the rhs is smaller. We conclude that we cannot find a solution in the limit $R \rightarrow 0$, i.e. if the potential approaches the potential of a point charge, if the component $r^{-|\gamma|}$ dominates the behaviour of the wave function for small r . Only in the special-case limit where this component vanishes does (9) no longer hold and is it possible to get a

Solution

But this happens only if the energy approaches an energy eigenvalue. Thus one retrieves the usual energy eigenvalues of the Dirac equation, whereas no new solutions are found.

The same result is found for a homogeneously charged sphere. The potential in the inside region is too small to produce an F/G which could fulfil the matching condition. We can convince ourselves of this in the following way: we can ask which value of the potential is needed on the inside in order to fulfil the matching condition, assuming that there is a constant potential V_0 on the inside which is not equal to $Z\alpha/R$. The ratio F/G in the outside region is at most 1, and matching is only possible if the potential in the inside is larger than $2.04/R$ (the solution for $F/G = 1$).¹⁸

The fact that one can find solutions if the potential in the inside region is large enough is not surprising. Even without the $1/r$ part on the outside one can get arbitrarily deeply bound states if only the strength of the potential is big enough. On the other hand, if one decreases the potential in the inside region, the energy of these solutions increases until they are finally turned into ordinary solutions of the $1/r$ potential. Thus no new type of solution is found for the limiting case of a well-behaved potential approaching $1/r$ variation.

12.6.5 The Two-Center Dirac Equation

Introduction

The description of one or more electrons in the field of two nuclei is one of the fundamental problems in quantum mechanics. Among other things it contains the theoretical understanding of the phenomenon of chemical binding and thus it connects physics and chemistry. In 1927 W. Heitler and F. London¹ showed for the first time the possibility of the existence of the H_2 molecule. They used an approximation procedure and were able to calculate its physical properties (binding energy, binding length).

Soon afterwards E. Teller² (1930) and E.A. Hylleraas³ (1931) gave, independently of each other, methods for a mathematically exact solution of the nonrelativistic singleelectron two-centre problem. Later, G. Jaff⁴ (1934) came up with a third solution. But the numerical

¹⁸ This solution also determines the energy eigenvalues for the MIT bag - see Volumes 5 and 6 of this series.

evaluation of these procedures is very costly, so that the energies of the higher states can be calculated only with computers. Good nonrelativistic calculations in recent times - also including some deviations from the Coulomb potential - came from K. Helfrich and H. Hartmann⁵ (1968).

Calculations for many-electron systems, similar to the Hartree-Fock model only became available in the early 1970s, e.g. those by F.P. Larkins⁶ (1972). Here one uses a finite set of basis functions (one-, two-, or even three-centre functions), which are combined with the intention of finding the lowest total energy. In view of these difficulties, and the fact that experiments up to now were possible only in a small energy range (some eV up to a few keV), an extensive study of the corresponding relativistic equations did not take place. Solely S.K. Luke et al.⁷ have treated the relativistic corrections of the single-electron problem in first-order perturbation theory in $Z\alpha$. However, especially from the experimental point of view, one urgently needs a solution of the two-centre Coulomb problem which is exact in all orders of $Z\alpha$. Heavy-ion accelerators allow highly charged nuclei to approach for a short time so closely that even the innermost electron shells belong to both nuclei and form molecular orbitals (cf. Fig. 10.1).

- 1 W. Heitler, F. London: Z. Phys. 44, 455 (1927).
- 2 E. Teller: Z. Phys. 61, 458 (1930).
- 3 F.A. Hylleraas: Z. Phys. 71, 739 (1931).
- 4 G. Jaff: Z. Phys. 87, 535 (1934).
- 5 K. Helfrich, H. Hartmann: Theor. Chim. Acta 10, 406 (1968).
- 6 F. Larkins: J. Phys. B5, 571 (1972).
- 7 S.K. Luke et al.: J. Chem. Phys. 50, 1644 (1969).

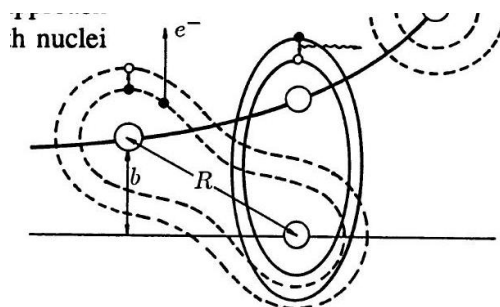


Fig. 10.1. Quasimolecular orbitals: The projectile ion moves along a curved trajectory. The individual atomic orbitals reappear when the colliding ions are separated enough (upper right). During the collision electrons (so-called δ electrons - marked by $\uparrow e^-$) and X rays $\sim$ are emitted. The emission is caused by the varying molecular orbitals, which adjust themselves with respect to the varied internuclear separation

Theory

Now we consider collisions of heavy ions with kinetic energies near the Coulomb barrier, so that both nuclei can just touch. An overlap of the involved nuclei and the related inelastic processes shall be excluded here. If both nuclei are very heavy, it is possible to generate for a short period ($\tau \sim 10^{-17}$ s) superheavy quasimolecules with total charge $Z = Z_1 + Z_2$, which are far above the end of the periodic system: $107 < Z_1 + Z_2 \lesssim 190$. For these systems the velocity of the heavy ions is about 1/10 the velocity of light, while the "velocity" of the electrons in the inner most states is near the velocity of light. This becomes obvious if we remember that for $Z\alpha \sim 1$ the binding energy of the 1s electrons becomes comparable with their rest mass. This means that the electrons of the inner shells during a heavy-ion collision have time enough

to adjust with respect to the varying distance R between the two Coulomb centres. Thus the properties of the quasimolecular electronic orbitals are determined by the sum of the projectile charge Z_p and the target charge Z_t .

If the distance R between both colliding ions becomes less than the radius of the K shell, we call the system a superheavy quasiatom. For a Pb – Pb collision this situation arises for $R \lesssim 500\text{fm}$. Induced by the varying Coulomb field during the collision, the possibility is given that inner-shell ionization occurs by excitation of electrons into vacant higher bound states or by direct excitation into the continuum. The highly energetic parts of these final-state continuum electrons are called "delta rays" or "delta electrons", a term originating from when these radioactive rays were discovered: At that time, one bombarded different targets with protons and discovered a highly energetic component of radiation which could not be explained by the classical laws of collisions. Therefore it was assumed that beside the known alpha, beta, and gamma rays, a new kind of radiation had been discovered; hence "delta rays". Nowadays it is well-known that the high-energy component of the momentum distribution of the bound electrons allows very much higher energy transfers that can be expected in accordance with the classical laws of collisions. Clearly, the mentioned momentum distribution of the quasimolecularly bound electrons depends on the distance between the colliding ions.

These facts suggest the use of the measurement of delta electrons for the spectroscopy of electronic states in these superheavy quasimolecules. Further possibilities are given by the measurement of the decay of the electron-hole pair which has been created during the collision. Indeed, during the collision the so-called quasimolecular γ radiation will be emitted or - as long as the hole is filled a long time after the collision - the ordinary characteristic radiation of the single atoms can be measured. Some of these processes are illustrated in Fig. 10.1. Such spectroscopy allows the extension of the periodic system by a factor two with respect to the atomic number Z , at least as far as interior electronic shell structure is concerned. Furthermore, the search for the vacuum decay in supercritical fields (see, e.g. Exercises 9.5-9.7 and Chap. 12) necessitates the precise knowledge of the electronic structure in the course of a heavy-ion collision.⁸ Fundamental to all such investigations is the solution of the Dirac equation for two charged centres. Therefore the energies and the wave functions of the electrons need to be determined for the given distance R between the nuclei.

In 1973, the two centre Dirac equation was solved for the first time by Mller and Greiner.⁹ The solution was given in terms of prolate elliptic (spheroidal) coordinates ξ, η, ϕ with

$$\begin{aligned} x &= R\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, \\ y &= R\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \\ z &= R\xi\eta \end{aligned} \quad (10.1)$$

defined in the domain

$$1 \leq \xi, \quad -1 \leq \eta \leq +1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

The problem is rotationally symmetric round the z axis; thus the component J_z of angular momentum is a good quantum number and the eigenfunction in the φ variable is easily separated. It is given by $\exp(im\varphi)$. However, the resulting differential equations in the variables ξ and η do not decouple. The differential equations were diagonalized in the so-called Hylleraas

⁸ See Vol. 4 of this series W. Greiner, J. Reinhardt: Quantum Electrodynamics (Springer, Berlin, Heidelberg) to be published and especially W. Greiner, B. Mller, J. Rafelski: Quantum Electrodynamics of Strong Fields (Springer, Berlin, Heidelberg 1985).

⁹ B. Mller, W. Greiner: Phys. Lett. 47B, 5 (1973); Z. Naturf. 31a, 1 (1976).

basis, which is essentially composed of Laguerre polynomials in ξ and Legendre polynomials in η .

Meanwhile two centre Hartree-Fock solutions were also obtained, by Fricke et al.¹⁰ (1975). Here, however, we restrict ourselves to the study of a very successful procedure by Mller et al. for the solution of the two-centre Dirac equation, which is essentially based on a multipole expansion of the two-centre potential.

For that purpose let us consider again the general form of the Dirac equation in polar coordinates. Using the relation

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

we obtain

$$-e_r \times (e_r \times \nabla) = -e_r (e_r \cdot \nabla) + \nabla (e_r \cdot e_r), \quad (10.2)$$

where e_r denotes the unit vector in the r direction. Using this, the ∇ operator may be written as

$$\begin{aligned} \nabla &= e_r (e_r \cdot \nabla) - e_r \times (e_r \times \nabla) \\ &= e_r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{\hbar} \left(\frac{e_r}{r} \times \hat{\mathbf{L}} \right) \end{aligned} \quad (10.3)$$

where $\hat{\mathbf{L}} = -i\hbar(r \times \nabla)$ is the orbital angular momentum operator. Hence it follows for the operator of the kinetic energy

$$c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar c\hat{\alpha}_r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (e_r \times \hat{\mathbf{L}}), \quad (10.4)$$

with $\hat{\alpha}_r = \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{e}_r$. Now we use

$$(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{A})(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{A})(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{B}) \quad (10.5)$$

and insert $A = e_r$ and $B = \hat{\mathbf{L}}$, which gives

$$(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot e_r)(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{L}}) = e_r \cdot \hat{\mathbf{L}} + i\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot (e_r \times \hat{\mathbf{L}}) = (\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot e_r)(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}) = \hat{\Sigma}_r(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}) \quad (10.6)$$

because

$$e_r \cdot \hat{\mathbf{L}} = 0,$$

since e_r is orthogonal to $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. We multiply by $-\gamma'_5$ from the left, where

$$\gamma'_5 = \begin{pmatrix} 0 & -11 \\ -11 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.7)$$

and remember that

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = -\gamma'_5 \hat{\boldsymbol{\alpha}} = -\hat{\boldsymbol{\alpha}} \gamma'_5, \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}} = -\gamma'_5 \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = -\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \gamma'_5 \quad (10.8)$$

Hence it results that

$$i\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (e_r \times \hat{\mathbf{L}}) = \hat{\alpha}_r(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}) \quad (10.9)$$

and for the operator of kinetic energy

¹⁰ B. Fricke, K. Rashid, P. Bertoncini, A.C. Wahl: Phys. Rev. Lett. 34, 243 (1975).

$$c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar c\hat{\alpha}_r \frac{\partial}{\partial r} + ic\frac{\hat{\alpha}_r}{r}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}) \quad (10.10)$$

Now it is convenient to introduce the operator $\hat{K}$, defined as

$$\hat{K} = \hat{\beta}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \hbar), \quad (10.11)$$

and one obtains the stationary Dirac equation in polar coordinates:

$$E\psi = \hat{H}\psi = \left[ic\gamma'_5 \hat{\Sigma}_r \left(\hbar \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{\beta}}{r} \hat{K} + \frac{\hbar}{r} \right) + V(\mathbf{r}) + \hat{\beta}m_0c^2 \right] \psi(\mathbf{r}) \quad (10.12)$$

Let us analyze the properties of the spin-orbit operator $\hat{K}$ in more detail. First we show that it commutes with $\hat{\beta}$:

$$[\hat{K}, \hat{\beta}] = \hat{\beta}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}})\hat{\beta} - \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}} = 0 \quad (10.13)$$

because

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & -\hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} \text{ and } \\ \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & -\hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix}.$$

Furthermore we have

$$\hat{\beta}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) - (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\hat{\beta} = 2\hat{\beta}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \quad (10.14)$$

and also

$$\begin{aligned} [\hat{\beta}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}), \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}]_- &= \hat{\beta}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}})(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) - (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\hat{\beta}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}) \\ &= \hat{\beta}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}})(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \hat{\beta}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}})(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}) \\ &= \hat{\beta}[\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}]_+. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Now

$$\begin{aligned} [\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}, \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}]_+ &= -\gamma'_5[\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{L}} + i\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot (\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{L}})], \\ \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{p}} &= (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}) \cdot \hat{\mathbf{p}} = 0, \\ \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{L}} &= 0 \end{aligned} \quad (10.16)$$

and we calculate further that

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{p}} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \hat{L}_x & \hat{L}_y & \hat{L}_z \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_x (\hat{L}_y \hat{p}_z - \hat{L}_z \hat{p}_y) - \mathbf{e}_y (\hat{L}_x \hat{p}_z - \hat{L}_z \hat{p}_x) + \mathbf{e}_z (\hat{L}_x \hat{p}_y - \hat{L}_y \hat{p}_x), \\ \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{L}} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \\ \hat{L}_x & \hat{L}_y & \hat{L}_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_x (\hat{p}_y \hat{L}_z - \hat{p}_z \hat{L}_y) - \mathbf{e}_y (\hat{p}_x \hat{L}_z - \hat{p}_z \hat{L}_x) + \mathbf{e}_z (\hat{p}_x \hat{L}_y - \hat{p}_y \hat{L}_x). \end{aligned} \quad (10.17)$$

Summing, we obtain

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{L}} \\
&= \mathbf{e}_x \left(\hat{L}_y \hat{p}_z - \hat{p}_z \hat{L}_y - \hat{L}_z \hat{p}_y + \hat{p}_y \hat{L}_z \right) - \mathbf{e}_y \left(\hat{L}_x \hat{p}_z - \hat{p}_z \hat{L}_x - \hat{L}_z \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{L}_z \right) \\
&+ \mathbf{e}_z \left(\hat{L}_x \hat{p}_y - \hat{p}_y \hat{L}_x - \hat{L}_y \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{L}_y \right). \tag{10.18}
\end{aligned}$$

Now we look at the first commutator of the e_x component:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_y, \hat{p}_z \right]_- &= (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}})_y \hat{p}_z - \hat{p}_z (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}})_y \\
&= -x \hat{p}_z \hat{p}_z + z \hat{p}_x \hat{p}_z + \hat{p}_z x \hat{p}_z - \hat{p}_z z \hat{p}_x \\
&= z \hat{p}_x \hat{p}_z - \hat{p}_z z \hat{p}_x \tag{10.19}
\end{aligned}$$

By use of

$$[x_i, \hat{p}_k]_- = i\hbar \delta_{ik}$$

it follows that

$$\left[\hat{L}_y, \hat{p}_z \right]_- = z \hat{p}_x \hat{p}_z + i\hbar \hat{p}_x - z \hat{p}_z \hat{p}_x = i\hbar \hat{p}_x.$$

In an analogous way the second commutator of the e_x component is obtained:

$$\begin{aligned}
-\left[\hat{L}_z, \hat{p}_y \right]_- &= -\{(\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}})_z \hat{p}_y - \hat{p}_y (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}})_z\} \\
&= -x \hat{p}_y \hat{p}_y + y \hat{p}_x \hat{p}_y + \hat{p}_y x \hat{p}_y - \hat{p}_y y \hat{p}_x \\
&= y \hat{p}_x \hat{p}_y - \hat{p}_y y \hat{p}_x = y \hat{p}_x \hat{p}_y + i\hbar \hat{p}_x - y \hat{p}_y \hat{p}_x = i\hbar \hat{p}_x
\end{aligned}$$

In vector notation we can generally sum up and get

$$\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{L}} = 2i\hbar \hat{\mathbf{p}} \tag{10.20}$$

Finally, for the commutator of $\hat{K}$ with the kinetic energy we obtain

$$\begin{aligned}
[\hat{K}, c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}]_- &= 2\hbar c \hat{\beta} (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \hat{\beta} (-\gamma'_5) i\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot (2i\hbar c \hat{\mathbf{p}}) \\
&= \hbar c \left(2\hat{\beta} (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + 2\hat{\beta} \gamma'_5 (\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \right) \\
&= \hbar c (2\hat{\beta} (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) - 2\hat{\beta} (\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}})) = 0, \tag{10.21}
\end{aligned}$$

i.e. $\hat{K}$ commutes with the Hamiltonian for free particles. The commutator of $\hat{K}$ and $\hat{j}$ can be obtained in a similar way, namely

$$\left[\hat{\beta} (\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}), \hat{\mathbf{L}} + \frac{1}{2} \hbar \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \right]_- = \hat{\beta} [\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{L}}]_- + \frac{1}{2} \hbar \hat{\beta} [\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}]_- \tag{10.22}$$

First we investigate the second commutator, obtaining

$$\begin{aligned}
[\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}]_- &= (\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}) \hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \hat{\boldsymbol{\Sigma}} (\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}) \\
&= \left(\hat{\Sigma}_x \hat{L}_x + \hat{\Sigma}_y \hat{L}_y + \hat{\Sigma}_z \hat{L}_z \right) \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_x \\ \hat{\Sigma}_y \\ \hat{\Sigma}_z \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_x \\ \hat{\Sigma}_y \\ \hat{\Sigma}_z \end{pmatrix} \left(\hat{\Sigma}_x \hat{L}_x + \hat{\Sigma}_y \hat{L}_y + \hat{\Sigma}_z \hat{L}_z \right).
\end{aligned}$$

Now we use the assertion

$$[\hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{L}}, \hat{\Sigma}]_- = 2i(\hat{\Sigma} \times \hat{\mathbf{L}}) \quad (10.23)$$

verifying this for the x component. (The proof for the other components proceeds analogously). Thus

$$\left(\hat{\Sigma}_y \hat{L}_y + \hat{\Sigma}_z \hat{L}_z \right) \hat{\Sigma}_x - \hat{\Sigma}_x \left(\hat{\Sigma}_y \hat{L}_y + \hat{\Sigma}_z \hat{L}_z \right) = -i\hat{\Sigma}_z \hat{L}_y + i\hat{\Sigma}_y \hat{L}_z - i\hat{\Sigma}_z \hat{L}_y + i\hat{\Sigma}_y \hat{L}_z$$

On the other hand

$$i[\hat{\Sigma} \times \hat{\mathbf{L}}]_- = i\hat{\Sigma}_y \hat{L}_z - i\hat{\Sigma}_z \hat{L}_y \quad (10.24)$$

holds, where we have used the following relations for the $\hat{\Sigma}$ matrices:

$$\hat{\Sigma}_y \hat{\Sigma}_x = -i\hat{\Sigma}_z, \quad \hat{\Sigma}_z \hat{\Sigma}_x = i\hat{\Sigma}_y$$

Hence the relation (10.23) stated above results, and, furthermore, we suspect the validity of

$$[\hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{L}}]_- = -i\hbar(\hat{\Sigma} \times \hat{\mathbf{L}}) \quad (10.25)$$

By use of the commutation relations of angular momentum

$$\hat{L}_y \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_y = -i\hbar \hat{L}_z, \quad \hat{L}_z \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_z = i\hbar \hat{L}_y$$

the x component of the commutator is found to satisfy

$$\hat{\Sigma}_y \hat{L}_y \hat{L}_x + \hat{\Sigma}_z \hat{L}_z \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{\Sigma}_y \hat{L}_y - \hat{L}_x \hat{\Sigma}_z \hat{L}_z = -i\hbar \hat{\Sigma}_y \hat{L}_z + i\hbar \hat{\Sigma}_z \hat{L}_y$$

The x component of the vector product yields

$$-i\hbar(\hat{\Sigma} \times \hat{\mathbf{L}})_x = -i\hbar(\hat{\Sigma}_y \hat{L}_z - \hat{\Sigma}_z \hat{L}_y)$$

so that in total we have

$$\hat{\beta}[\hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{L}}]_- = -i\hbar \hat{\beta}(\hat{\Sigma} \times \hat{\mathbf{L}}) \quad (10.26)$$

and finally we obtain

$$[\hat{K}, \hat{j}]_- = 0. \quad (10.27)$$

For $\hat{K}^2$ it follows that

$$\begin{aligned} \hat{K}^2 &= (\hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \hbar)^2 = \hat{\mathbf{L}}^2 + i\hat{\Sigma} \cdot (\hat{\Sigma} \times \hat{\mathbf{L}}) + 2\hbar \hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \hbar^2 \\ &= \hat{\mathbf{L}}^2 + \hbar \hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \hbar^2. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Now we denote the Dirac equation for the Coulomb potential of two centres of charge, $Z_1 e$ and $Z_2 e$, separated by the distance R , as

$$\begin{aligned} &\left[ic\gamma'_5 \hat{\Sigma}_r \left(\hbar \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar}{r} - \frac{\hat{\beta}}{r} \hat{K} \right) - \frac{Z_1 e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}/2|} - \frac{Z_2 e^2}{|\mathbf{r} + \mathbf{R}/2|} + \hat{\beta} m_0 c^2 \right] \phi_\mu(\mathbf{r}) \\ &= E \phi_\mu(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (10.29)$$

The magnetic quantum number μ is the eigenvalue of the projection of the total angular momentum onto the axis connecting the two nuclei (z axis). The nuclei are assumed to be point-like, and at this stage a multipole expansion of the wave function suggests itself:

$$\phi_\mu(r) = \sum_{\kappa} \phi_{\kappa,\mu}(r) = \sum_{\kappa} \begin{pmatrix} g_\kappa(r) \chi_{\kappa,\mu} \\ i f_\kappa(r) \chi_{-\kappa,\mu} \end{pmatrix}, \quad (10.30)$$

where $f_\kappa(r)$ and $g_\kappa(r)$ are the radial wave functions; κ was defined by

$$\kappa = \begin{cases} l & \text{for } j = l - \frac{1}{2} \\ -l - 1 & \text{for } j = l + \frac{1}{2} \end{cases}; \quad (10.31)$$

and the spinor spherical harmonics are given by

$$\chi_{\kappa,\mu} = \sum_{m=\pm\frac{1}{2}} \left(l \frac{1}{2} j \middle| \mu - m, m \right) Y_{l,\mu-m}(\vartheta, \varphi) \chi_m \quad (10.32)$$

Now we have the unity spinors χ_m

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

and the Clebsch-Gordan coefficients, which explicitly read

$$\left(l \frac{1}{2} j \middle| \mu - m, m \right) = \begin{vmatrix} j/m & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ l + \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{l+\mu+\frac{1}{2}}{2l+1}} & \sqrt{\frac{l-\mu+\frac{1}{2}}{2l+1}} \\ l - \frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{l-\mu+\frac{1}{2}}{2l+1}} & \sqrt{\frac{l+\mu+\frac{1}{2}}{2l+1}} \end{vmatrix}. \quad (10.33)$$

Next we apply various operators to the two spinors $\chi_{\kappa,\mu}$ and get

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z \chi_{\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\sigma}_z \chi_{-\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}^2 \chi_m &= 3 \chi_m, \\ \hat{J}_z \chi_{\kappa,\mu} &= \hbar \mu \chi_{\kappa,\mu}, \\ \hat{J}^2 \chi_{\kappa,\mu} &= \hbar^2 j(j+1) \chi_{\kappa,\mu}, \\ \hat{S}^2 \chi_{\kappa,\mu} &= \hbar^2 s(s+1) \chi_{\kappa,\mu} = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_{\kappa,\mu}, \\ \hat{L}^2 \chi_{\kappa,\mu} &= \hbar^2 l(l+1) \chi_{\kappa,\mu}, \\ 2\hat{L} \cdot \hat{S} \chi_{\kappa,\mu} &= \left(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2 \right) \chi_{\kappa,\mu} \\ &= \hbar^2 [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \chi_{\kappa,\mu}. \end{aligned} \quad (10.34)$$

With $\hbar \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}} = 2\hat{L} \cdot \hat{S}$, it follows that

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \hbar) \chi_{\kappa,\mu} = \hbar [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) + 1] \chi_{\kappa,\mu}. \quad (10.35)$$

This relation can be evaluated in both cases of (10.31):

a):

$$l = j + \frac{1}{2}, \quad \kappa = l = j + \frac{1}{2}$$

and b):

$$l' = j - \frac{1}{2}, \quad \kappa = -l' - 1 = -j + \frac{1}{2} - 1$$

$$= -\left(j + \frac{1}{2}\right) = -|\kappa|,$$

with the result

a):

$$j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) + 1 = \left(l - \frac{1}{2}\right) \left(l + \frac{1}{2}\right) - l(l+1) - \frac{3}{4} + 1$$

$$= l^2 - \frac{1}{4} - l^2 - 1 + \frac{1}{4} = -l = -\kappa,$$

and b):

$$j(j+1) - l'(l'+1) - s(s+1) + 1 = \left(l' + \frac{1}{2}\right) \left(l' + \frac{3}{2}\right) - l'(l'+1) + \frac{1}{4}$$

$$= 2l' - l' + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = l' + 1 = -\kappa, \quad (10.36)$$

so that generally

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \hbar)\chi_{\kappa,\mu} = -\hbar\kappa\chi_{\kappa,\mu} \quad (10.37)$$

holds. We now move on to investigate the multipole decomposition of the two-centre potential. It is generally known that

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}},$$

where γ is the angle between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$ and

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r_{>} \sqrt{1 - 2\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \cos \gamma + \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}}\right)^2}},$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r_{>} \sqrt{1 + 2\frac{r_{\leq}}{r_{>}} \cos \gamma + \left(\frac{r_{\leq}}{r_{>}}\right)^2}}, \quad (10.38)$$

with

$$r_{<} = \min(|\mathbf{r}|, |\mathbf{r}'|), \quad r_{>} = \max(|\mathbf{r}|, |\mathbf{r}'|).$$

Expansion of the root yields

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{\leq}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma)$$

and correspondingly

$$\frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{r_{\leq}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad (10.39)$$

with the Legendre polynomials

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= x, \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1),
\end{aligned}$$

etc.

In general, the recursion relation

$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)P_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0 \quad (10.40)$$

holds. For point-like nuclei the two-centre Coulomb potential reads

$$V = -\frac{Z_1 e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}/2|} - \frac{Z_2 e^2}{|\mathbf{r} + \mathbf{R}/2|}, \quad (10.41)$$

which, after expansion into multipoles, yields

$$\begin{aligned}
V(r, R, \gamma) &= -Z_1 e^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{(R/2)^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \\
&\quad - Z_2 e^2 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{r^l}{(R/2)^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad \text{for } r < \frac{R}{2}, \\
V(r, R, \gamma) &= -Z_1 e^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(R/2)^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \\
&\quad - Z_2 e^2 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(R/2)^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad \text{for } r \geq \frac{R}{2}.
\end{aligned} \quad (10.42)$$

The monopole part for point nuclei of the two-centre Coulomb-potential can easily be derived from the multipole expansions, and is given by the $l = 0$ term of (10.42), i.e.

$$V_0(r) = \begin{cases} -2 \frac{(Z_1 + Z_2) e^2}{R} & \text{for } r < \frac{R}{2} \\ -\frac{(Z_1 + Z_2) e^2}{r} & \text{for } r \geq \frac{R}{2} \end{cases}. \quad (10.43)$$

Remark on multipole expansions of potentials: We write generally

$$V(r, R) = \sum_{l=0}^{\infty} V_l(r, R) P_l(\cos \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} V_l(r, R) P_l(x) \quad , \text{ with} \quad (10.44)$$

$$x = \cos \vartheta$$

and use the following normalization condition:

$$\int_{-1}^1 P_{l'}(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l} \quad (10.45)$$

Here ϑ is the polar angle of $r = \{r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta\}$. Multiplying by $P_l(x)$ and integrating over x from -1 to +1 yields

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} V(r, R) P_l(x) dx &= V_l(r, R) \frac{2}{2l+1} \text{ or} \\
V_l(r, R) &= \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 V(r, R) P_l(x) dx.
\end{aligned} \tag{10.46}$$

Now we will show that the operator $\hat{K}$ has the eigenvalue $-\hbar\kappa$:

$$\begin{aligned}
\hat{K}\phi_{\kappa,\mu}(\mathbf{r}) &= \hat{\beta}(\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \hbar)\phi_{\kappa,\mu}(\mathbf{r}) \\
&= \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \hbar & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \hbar \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r)\chi_{\kappa,\mu}(\vartheta, \varphi) \\ if_{\kappa}(r)\chi_{-\kappa,\mu}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \hbar & 0 \\ 0 & -(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \hbar) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r)\chi_{\kappa,\mu}(\vartheta, \varphi) \\ if_{\kappa}(r)\chi_{-\kappa,\mu}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix} \\
&= \hbar \begin{pmatrix} -\kappa g_{\kappa}(r)\chi_{\kappa,\mu}(\vartheta, \varphi) \\ -\kappa if_{\kappa}(r)\chi_{-\kappa,\mu}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix} = (-\hbar\kappa)\phi_{\kappa,\mu}(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{10.47}$$

In order to obtain the differential equations for the radial wave functions we write down the stationary two-centre Dirac equation (10.29) once more, though in greater detail:

$$\begin{aligned}
&\left[ic \begin{pmatrix} 0 & -11 \\ -11 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_r & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_r \end{pmatrix} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar}{r} + \frac{\hbar\kappa}{r} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \right) \right. \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} V_l P_l + \left. \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} m_0 c^2 \right] \sum_{\kappa=\pm 1}^{\pm\infty} \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r)\chi_{\kappa,\mu} \\ if_{\kappa}(r)\chi_{-\kappa,\mu} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\kappa=\pm 1}^{\pm\infty} \begin{pmatrix} E g_{\kappa}(r)\chi_{\kappa,\mu} \\ iE f_{\kappa}(r)\chi_{-\kappa,\mu} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

where the two-centre potential in the form (10.44) has been inserted. Equation (10.48) can be further transformed into

$$\begin{aligned}
&\left[i\hbar c \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\sigma}_r \\ -\hat{\sigma}_r & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{\kappa}{r} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \right) \right. \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} V_l P_l + \left. \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} m_0 c^2 - E \right] \sum_{\kappa=\pm 1}^{\pm\infty} \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r)\chi_{\kappa,\mu} \\ if_{\kappa}(r)\chi_{-\kappa,\mu} \end{pmatrix} = 0 \\
&\sum_{\kappa=\pm 1}^{\pm\infty} \left(\begin{aligned} &\hbar c \frac{d}{dr} f_{\kappa} \hat{\sigma}_r \chi_{-\kappa,\mu} + \hbar c \frac{f_{\kappa}}{r} \hat{\sigma}_r \chi_{-\kappa,\mu} - \hbar c \frac{\kappa}{r} f_{\kappa} \hat{\sigma}_r \chi_{-\kappa,\mu} + \sum_{l=0}^{\infty} V_l P_l g_{\kappa} \chi_{\kappa,\mu} + (m_0 c^2 - E) g_{\kappa} \chi_{\kappa,\mu} \\ &- i\hbar c \frac{d}{dr} g_{\kappa} \hat{\sigma}_r \chi_{\kappa,\mu} - i\hbar c \frac{g_{\kappa}}{r} \hat{\sigma}_r \chi_{\kappa,\mu} - i\hbar c \frac{\kappa}{r} g_{\kappa} \hat{\sigma}_r \chi_{\kappa,\mu} + \sum_{l=0}^{\infty} V_l P_l if_{\kappa} \chi_{-\kappa,\mu} - (m_0 c^2 + E) if_{\kappa} \chi_{-\kappa,\mu} \end{aligned} \right) = 0
\end{aligned}$$

Later on we shall prove the relation

$$\hat{\sigma}_r \chi_{\kappa,\mu} = -\chi_{-\kappa,\mu}, \tag{10.50}$$

from which

$$\begin{aligned}
& \sum_{\kappa=\pm 1}^{\pm\infty} \left[-\hbar c \frac{d}{dr} f_{\kappa} \chi_{\kappa,\mu} - \hbar c \frac{f_{\kappa}}{r} \chi_{\kappa,\mu} + \hbar c \frac{\kappa}{r} f_{\kappa} \chi_{\kappa,\mu} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=0}^{\infty} V_l P_l g_{\kappa} \chi_{\kappa,\mu} + (m_0 c^2 - E) g_{\kappa} \chi_{\kappa,\mu} \right] = 0 \\
& \sum_{\kappa=\pm 1}^{\pm\infty} \left[-\hbar c \frac{d}{dr} g_{\kappa} \chi_{-\kappa,\mu} - \hbar c \frac{g_{\kappa}}{r} \chi_{-\kappa,\mu} - \hbar c \frac{\kappa}{r} g_{\kappa} \chi_{-\kappa,\mu} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{l=0}^{\infty} V_l P_l f_{\kappa} \chi_{-\kappa,\mu} + (m_0 c^2 + E) f_{\kappa} \chi_{-\kappa,\mu} \right] = 0
\end{aligned} \tag{10.51}$$

follows.

According to (10.32) the spinors $\chi_{\kappa,\mu}$ are orthonormal. Using this property and multiplying the first differential equation of the two-centre Dirac equation by $-\langle \chi_{\bar{\kappa},\mu} |$ and the second one by $-\langle \chi_{-\bar{\kappa},\mu} |$, we obtain

$$\begin{aligned}
& \left\{ \hbar c \frac{d}{dr} f_{\bar{\kappa}} + \hbar c \frac{f_{\bar{\kappa}}}{r} - \hbar c \frac{\bar{\kappa}}{r} f_{\bar{\kappa}} - (m_0 c^2 - E) g_{\bar{\kappa}} - \sum_{l=0}^{\infty} V_l \sum_{\kappa=\pm 1}^{\pm\infty} g_{\kappa} \langle \chi_{\bar{\kappa},\mu} | P_l | \chi_{\kappa,\mu} \rangle \right\} \\
& = 0 \\
& \left\{ \hbar c \frac{d}{dr} g_{\bar{\kappa}} + \hbar c \frac{g_{\bar{\kappa}}}{r} + \hbar c \frac{\bar{\kappa}}{r} g_{\bar{\kappa}} - (m_0 c^2 + E) f_{\bar{\kappa}} + \sum_{l=0}^{\infty} V_l \sum_{\kappa=\pm 1}^{\pm\infty} f_{\kappa} \langle \chi_{-\bar{\kappa},\mu} | P_l | \chi_{-\kappa,\mu} \rangle \right\} \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{10.52}$$

This - in principle infinite - system of coupled radial first-order differential equations must be solved numerically in order to determine the energy E .

As a special case we examine these differential equations for a spherically symmetric monopole potential $V(r) = V_0(r)$ for a special κ ; therefore

$$\begin{aligned}
& \hbar c \frac{d}{dr} f + \hbar c \frac{f}{r} - \hbar c \frac{\kappa}{r} f - (m_0 c^2 - E) g - V_0 g = 0, \\
& \hbar c \frac{d}{dr} g + \hbar c \frac{g}{r} + \hbar c \frac{\kappa}{r} g - (m_0 c^2 + E) f + V_0 f = 0.
\end{aligned} \tag{10.53}$$

These are the already known radial differential equations for spherically symmetric potentials (cf. Example 9.3). The matrix elements $\langle \chi_{\bar{\kappa},\mu} | P_l | \chi_{\kappa,\mu} \rangle$ can be obtained easily by the usual angular momentum algebra, though we will not pursue that here any further.

However, to conclude our formal derivations we will prove the relation

$$\hat{\sigma}_r \chi_{\kappa,\mu} = -\chi_{-\kappa,\mu} \quad \text{with} \quad r \hat{\sigma}_r = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{\sigma}_i \tag{10.54}$$

where $\hat{\sigma}_r$ is a scalar operator, so $\hat{\sigma}_r \chi_{\kappa,\mu}$ has the same eigenvalues j and μ as $\chi_{\kappa,\mu}$. First we note some properties of the parity of a state. Parity is determined by the transformation properties of the spherical harmonics. For the transformation $(\vartheta, \varphi) \rightarrow (\pi - \vartheta, \varphi + \pi)$,

$$Y_{l,m}(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) \tag{10.55}$$

follows. Hence the parity of a state is determined by the orbital angular momentum, and is thus given by $(-1)^l$. Therefore we can make the ansatz

$$\hat{\sigma}_r \chi_{\kappa, \mu} = a \chi - \kappa, \mu + b \chi_{\kappa, \mu} \quad (10.56)$$

As $\hat{\sigma}_r$ changes its sign under parity transformations, b must be zero; thus we can write

$$\pi_l = (-1)^l = (-1)^{(j+1/2S_\kappa)}, \quad (10.57)$$

too, with $S_\kappa = \kappa/|\kappa|$ and
or

$$\begin{aligned} \kappa &= \begin{cases} l & \text{for } j = l - \frac{1}{2} \\ -l - 1 & \text{for } j = l + \frac{1}{2} \end{cases} \\ l &= \begin{cases} \kappa & \text{for } \kappa > 0 \\ -\kappa - 1 & \text{for } \kappa < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (10.58)$$

Furthermore we define the $\bar{l}$ related to $-\kappa$:

$$\begin{aligned} \bar{l} &= \kappa - 1 \text{ for } \kappa > 0, \bar{l} = -\kappa \text{ for } \kappa < 0, \text{ and} \\ l - \bar{l} &= 1 = S_\kappa \quad \text{for } \kappa > 0, \\ l - \bar{l} &= -1 = S_\kappa \text{ for } \kappa < 0, \end{aligned}$$

holds. Hence we can write the total angular momentum as

$$j = l - \frac{1}{2} S_\kappa,$$

which we have used already in (10.57).

Changing parity yields, for constant j , a change of the orbital angular momentum by one unit. Hence the sign of κ changes under the parity transformation, too.

With

$$(\hat{\sigma} \cdot A)(\hat{\sigma} \cdot B) = A \cdot B + i\hat{\sigma}(A \times B)$$

we find

$$\hat{\sigma}_r^2 = 11 \quad (10.59)$$

and therefore

$$a^2 = 1.$$

Consequently, the phase of a remains to be determined. For that purpose we choose e_r along the z axis and set $\vartheta = 0$ in the spherical harmonics. With

$$Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{l,m}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

and

$$P_{l,m}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

we obtain for $\vartheta = 0$

$$Y_{l,m}(\vartheta = 0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}$$

Moreover, we have

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_r = \hat{\sigma}_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ with} \\ \hat{\sigma}_z \chi_{\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } \hat{\sigma}_z \chi_{-\frac{1}{2}} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Thereby we obtain for fixed μ :

$$\chi_{\kappa,\mu} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left(l \frac{1}{2} j \middle| 0 \mu \right) \chi_{\mu}.$$

If we use 2μ as the eigenvalue of $\hat{\sigma}_z$, we arrive at the defining equation for a :

$$a \sqrt{2\bar{l}+1} \left(\bar{l} \frac{1}{2} j \middle| 0 \mu \right) = 2\mu \sqrt{2l+1} \left(l \frac{1}{2} j \middle| 0 \mu \right).$$

It is useful to investigate the four cases $j = l \pm \frac{1}{2}$ and $\mu = \pm \frac{1}{2}$ separately:

$$1. \quad j = l + \frac{1}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2}:$$

$$\bar{l} = l - S_{\kappa} = l + 1;$$

hence it follows that $j = \bar{l} - \frac{1}{2}$, and

$$a \sqrt{2\bar{l}+1} (-1) \sqrt{\frac{\bar{l}}{2\bar{l}+1}} = \sqrt{2l+1} \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \quad (10.60)$$

From this we get $a = -1$.

$$2. \quad j = l + \frac{1}{2}, \quad \mu = -\frac{1}{2}:$$

$$a \sqrt{\bar{l}} = -\sqrt{l+1}, \quad a = -1. \quad (10.61)$$

$$3. \quad j = l - \frac{1}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2}:$$

$$\bar{l} = l - S_{\kappa} = l - 1.$$

From this follows $j = \bar{l} + \frac{1}{2}$ and

$$a \sqrt{\bar{l}+1} = -\sqrt{\bar{l}}, \quad a = -1. \quad (10.62)$$

$$4. \quad j = l - \frac{1}{2}, \quad \mu = -\frac{1}{2}:$$

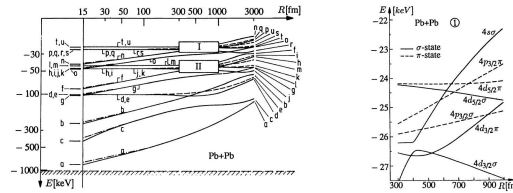
$$a\sqrt{1+1} = \sqrt{-1}, \quad a = -1. \quad (10.63)$$

This proves the assertion of (10.54). By numerically solving the coupled differential equations (10.52) one finally obtains the R -dependent wave functions $\phi_i(r, R)$ and the energies $E_i(R)$. The latter are usually represented by a so-called correlation diagram, where the energies of the states of the separated systems (Z_1, Z_2) are connected to those of the combined system ($Z_1 + Z_2$). The molecular states are classified according to the good quantum numbers j_z , with the eigenvalues $|\mu| = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$, which are also specified by $\sigma, \pi, \delta, \dots$. In most cases one assigns to the molecular state, in addition, the quantum numbers of the appertaining state in the combined system $R = 0$, so that altogether we obtain the designation

$$1s_{1/2}\sigma, 2p_{1/2}\sigma, 2p_{3/2}\sigma, 2p_{3/2}\pi \dots$$

In the case of identical partners in the molecule, there exists a further constant of motion. Indeed the parity operator commutes with the Hamiltonian and with $\hat{j}_z$, so that additionally one can distinguish between even (positive parity) and odd (negative parity with respect to the centre of mass of both nuclei) states.

As an example of a relativistic correlation diagram we show the calculated binding energies of some bound states in the Pb – Pb system (Figs. 10.2-10.4). In order to emphasize the various dependences of the energy eigenvalues on the two-centre distance R we have chosen different representations of the Pb – Pb correlation diagram. First we have displayed in a double logarithmic scale the 21 lowest σ (full lines) and π states (dashed lines) in the range between $R = 15\text{fm}$ and $R = 3000\text{fm}$ (see Fig. 10.2). The relativistic fine structure splitting between the states $2p_{3/2}\sigma$ and $2p_{1/2}\sigma$ at $R = 15\text{fm}$ with the magnitude of about 316.6keV is especially noteworthy. The finite extension of the Pb nuclei was considered in these calculations, too; however the interaction between the electrons was not regarded. Furthermore the delayed crossings between the $3p_{1/2}\sigma$ and the $2p_{3/2}\sigma$ state at $R = 18\text{fm}$ and between the $4p_{1/2}\sigma$ and the $3p_{3/2}\sigma$ state at $R = 15.5\text{fm}$ are interesting. The energy



Expanded sections from Fig. 10.3. The non-crossing of levels with at least one different quantum number is clearly noticeable

Fig. 10.3. Correlation diagram for the lowest levels in the Pb – Pb system in a linear scale illustrates the strong increase of the binding energies for small distances ($R \rightarrow 0$)

levels in the squares I and II between 300fm and 1000fm are displayed separately with a linear scale (Fig. 10.3) for greater clarity. The rapid change in the energy of the most strongly bound electrons in the range of small two-centre distances is most impressive if one chooses a linear scale for the representation of E as a function of R (see Fig. 10.4).

Here the left column (ordinate) represents the binding energies in the combined atom with $Z = 164$. In the range $15\text{fm} \leq R \leq 100\text{fm}$ we find the following energy changes: 330keV for the $1s\sigma$ state, 208keV for the $2p_{1/2}\sigma$ state and 91keV for the $2s\sigma$ state. For comparison, we mention that the $1s$ binding energy in the element Fermium ($Z = 100$) "only" amounts to 141keV while it is close to 900keV for $Z = 164$. The rapid increase of the binding energies of the interior electron shells with decreasing two-centre distance R reflects the fast approach of overcriticality in the limit $R \rightarrow 0$ of these superheavy systems. This is most important with the "decay of the vacuum" in supercritical fields.

12.6.6 The Two-Center Dirac Equation 2: Discussion

(there are many questions which I'd like to discuss)

12.6.7 The Foldy-Wouthuysen Representation for Free Particles

As discussed in the previous chapters, the spinors in the Dirac theory consist of four components. In the nonrelativistic limit, for spinors belonging to positive (negative) energy states, the upper (lower) two components become large compared to the lower (upper) two components [cf. Chap. 2, Eqs. (2.44), (2.72)]. The question arises, whether there exists a representation that reflects this property as a general feature, i.e. also for large velocities of the particles.

Thus, we will search for a unitary transformation that, when applied to the wave function of a free spin- $\frac{1}{2}$ particle, yields for fixed sign of the energy a wave function completely determined by only two of the four components. However, as mentioned before, in the Dirac representation the wave function is generally determined by four components. In the following we will first discuss two different possibilities of such a unitary transformation and subsequently we will illustrate the transformation of some operators into the new representation, called the Foldy-Wouthuysen representation or, alternatively, Φ representation.

The change from the original Dirac representation to the Φ representation can be achieved by a unitary transformation

$$\hat{U} = \frac{\hat{\beta}\hat{H}_f + E_p}{\sqrt{2E_p(m_0c^2 + E_p)}}, \quad (11.1)$$

where $\hat{H}_f = c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0c^2$ denotes the Hamiltonian of a free particle, as before. If we use $\hat{\alpha}_k^\dagger = \hat{\alpha}_k$, $\hat{\beta}^\dagger = \hat{\beta}$ and take into account that $\hat{\mathbf{p}}$ is a Hermitian operator, we can prove that $\hat{U}$ is indeed a unitary operator:

$$\begin{aligned}
 \hat{U}^\dagger \hat{U} &= \frac{1}{2E_p(m_0c^2 + E_p)} \left(c\hat{\beta}\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m_0c^2 + E_p \right)^\dagger \left(c\hat{\beta}\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m_0c^2 + E_p \right) \\
 &= \frac{1}{2E_p(m_0c^2 + E_p)} \left(c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}\hat{\beta} + m_0c^2 + E_p \right) \left(c\hat{\beta}\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m_0c^2 + E_p \right) \\
 &= \frac{1}{2E_p(m_0c^2 + E_p)} \left(c^2\hat{\mathbf{p}}^2 + (m_0c^2 + E_p) c\hat{\beta}\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}\hat{\beta} (m_0c^2 + E_p) \right. \\
 &\quad \left. + (m_0c^2 + E_p)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2E_p(m_0c^2 + E_p)} (E_p^2 - m_0^2c^4 + m_0^2c^4 + 2E_pm_0c^2 + E_p^2) = 1.
 \end{aligned} \tag{11.2}$$

Sometimes $\hat{U}$ is specified in a slightly modified form, which we quote here for completeness:

$$\begin{aligned}
 \hat{U} &= \frac{\hat{\beta}\hat{H}_f + E_p}{\sqrt{2E_p(m_0c^2 + E_p)}} = \frac{\hat{\beta}\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{\sqrt{2E_p(m_0c^2 + E_p)}} + \sqrt{\frac{m_0c^2 + E_p}{2E_p}} \\
 &= \sqrt{\frac{2E_p}{m_0c^2 + E_p}} \frac{1}{2} \left[1 + \hat{\beta}\frac{\hat{H}_f}{E_p} \right] \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{m_0c^2}{E_p}} + \hat{\beta}\hat{\alpha} \cdot \frac{\hat{\mathbf{p}}}{p} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_0c^2}{E_p} \right)},
 \end{aligned} \tag{11.3}$$

where $p = |\mathbf{p}|$.

The wave functions in the Φ representation are related to the original representation by

$$\phi = \hat{U}\psi. \tag{11.4}$$

Simultaneously, all operators need to be transformed according to

$$\hat{A}_\Phi = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger \tag{11.5}$$

Since the operator of momentum $\hat{\mathbf{p}}$ commutes with $\hat{U}$, it remains invariant under the transformation, i.e.

$$\hat{\mathbf{p}}_\Phi = \hat{\mathbf{p}}. \tag{11.6}$$

With respect to (11.5) we transform the Hamiltonian $\hat{H}_f$ into Φ representation:

$$\hat{H}_\Phi = \frac{\hat{\beta} \left(c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0c^2 \right) + E_p}{\sqrt{2E_p(m_0c^2 + E_p)}} \left(c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0c^2 \right) \frac{\left(c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0c^2 \right) \hat{\beta} + E_p}{\sqrt{2E_p(m_0c^2 + E_p)}}. \tag{11.7}$$

It is useful to evaluate $\hat{H}_f^2$ first. Using the relation $\hat{\beta}\hat{\alpha}_k = -\hat{\alpha}_k\hat{\beta}$, we find

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_f^2 &= \left(c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0c^2 \right) \left(c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0c^2 \right) \\
 &= c^2\hat{\mathbf{p}}^2 + c(\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}})\hat{\beta}m_0c^2 + \hat{\beta}m_0c^2 c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m_0^2c^4 = c^2\hat{\mathbf{p}}^2 + m_0^2c^4 \\
 &\equiv \hat{E}_p^2 = E_p^2
 \end{aligned}$$

where the last equality is justified if the operator $\hat{H}_f^2$ acts on plane waves. Furthermore we evaluate

$$\hat{\beta}\hat{H}_f\hat{\beta} = \hat{\beta} \left(c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0c^2 \right) \hat{\beta} = -c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0c^2 = 2m_0c^2\hat{\beta} - \hat{H}_f,$$

and hence, we finally have

$$\begin{aligned} \hat{H}_\Phi &= \frac{1}{2E_p(m_0c^2 + E_p)} \left(\hat{\beta}E_p^2 + E_p\hat{H}_f \right) \left(\hat{H}_f\hat{\beta} + E_p \right) \\ &= \frac{1}{2E_p(m_0c^2 + E_p)} \left(\hat{\beta}E_p^2\hat{H}_f\hat{\beta} + \hat{\beta}E_p^3 + E_p^3\hat{\beta} + E_p\hat{H}_fE_p \right) \\ &= \frac{1}{2E_p(m_0c^2 + E_p)} \left(E_p^2 2m_0c^2\hat{\beta} + 2\hat{\beta}E_p^3 \right) \\ &= \frac{2E_p^2\hat{\beta}(m_0c^2 + E_p)}{2E_p(m_0c^2 + E_p)} = E_p\hat{\beta}. \end{aligned} \quad (11.8)$$

The Dirac equation

$$\hat{H}_f\psi = \varepsilon\psi \quad (11.9)$$

now reads

$$\hat{\beta}E_p\phi = \varepsilon\phi. \quad (11.10)$$

This concept has already been illustrated in Chap. 1 for the Klein-Gordon equation (c.f. the Feshbach-Villars representation). Now we want to introduce a different method to find the Hamiltonian in the Φ representation, originally proposed by Foldy and Wouthuysen. Again the idea is to search for a unitary transformation $\hat{U}$ which will remove from the Dirac equation all operators of the type $\hat{\alpha}$ that couple the large to the small components. We will term any such operator an odd operator, e.g. $\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\gamma}_i, \hat{\gamma}_5$, whereas an operator that does not couple large and small components, such as $\hat{1}, \hat{\beta}, \hat{\Sigma}$, is called an even operator.

We write

$$\phi = \hat{U}\psi = e^{i\hat{S}}\psi, \text{ where} \quad (11.11)$$

$$\hat{U}^\dagger\hat{U} = e^{-i\hat{S}}e^{i\hat{S}} = 11 \quad (11.12)$$

and $\hat{S}$ is a yet unknown Hermitian operator. From

$$\hat{H}_\Phi\phi = i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (11.13)$$

it follows that

$$\hat{H}_\Phi e^{i\hat{S}}\psi = i\hbar e^{i\hat{S}}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \hbar\frac{\partial\hat{S}}{\partial t}e^{i\hat{S}}\psi = e^{i\hat{S}}\hat{H}\psi - \hbar\frac{\partial\hat{S}}{\partial t}e^{i\hat{S}}\psi \quad (11.14)$$

Multiplication by $e^{-i\hat{S}}$ from the rhs results in

$$\hat{H}_\phi = e^{i\hat{S}}\hat{H}e^{-i\hat{S}} - \hbar\frac{\partial\hat{S}}{\partial t} \quad (11.15)$$

If $\hat{S}$ is explicitly known, this relation enables us to determine the Hamiltonian in Φ representation $\hat{H}_\Phi$ from the original Hamiltonian $\hat{H}$. In the following we will restrict ourselves to time-independent transformations $\hat{S}$, i.e. we presume $\partial\hat{S}/\partial t = 0$. For $\hat{S}$ we try the following

ansatz (note that the field-free case, as considered here, implies that one simply may move over to the momentum space representation, where $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}$):

$$\hat{S} = - \left(\frac{i}{2m_0c} \right) \hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} \omega \left(\frac{p}{m_0c} \right), \quad (11.16)$$

where the function $\omega(p/m_0c)$ will be specified later. It is obvious that $\hat{S}$ is Hermitian. For the Hamiltonian of free Dirac particles in the Φ representation it holds that

$$\begin{aligned} \hat{H}_\Phi &= e^{i\hat{S}} \left(c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} + \hat{\boldsymbol{\beta}} m_0 c^2 \right) e^{-i\hat{S}} = e^{i\hat{S}} \hat{\boldsymbol{\beta}} \left(c\hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} + m_0 c^2 \right) e^{-i\hat{S}} \\ &= e^{i\hat{S}} \hat{\boldsymbol{\beta}} e^{-i\hat{S}} \hat{\boldsymbol{\beta}} \left(c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} + \hat{\boldsymbol{\beta}} m_0 c^2 \right), \end{aligned} \quad (11.17)$$

since $\hat{S}$ commutes with $\hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}}$. Using the relation

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} (\hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})^n = (-1)^n (\hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})^n \hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad (11.18)$$

we can write

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}} e^{-i\hat{S}} &= \hat{\boldsymbol{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2m_0c} \right)^n \frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})^n}{n!} \omega^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2m_0c} \right)^n \frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})^n}{n!} \omega^n \hat{\boldsymbol{\beta}} = e^{i\hat{S}} \hat{\boldsymbol{\beta}}, \end{aligned} \quad (11.19)$$

where we have expanded $e^{-i\hat{S}}$ in a power series. Hence (11.17) becomes

$$\hat{H}_\Phi = e^{2i\hat{S}} \left(c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} + \hat{\boldsymbol{\beta}} m_0 c^2 \right). \quad (11.20)$$

Next, we expand $e^{2i\hat{S}}$, i.e.

$$\begin{aligned} e^{2i\hat{S}} &= \exp \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}}{m_0c} \omega \left(\frac{p}{m_0c} \right) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m_0c} \right)^n \frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})^n}{n!} \omega^n \\ &= 1 + \frac{\hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}}{m_0c} \omega + \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}}{m_0c} \right)^2 \frac{\omega^2}{2!} + \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}}{m_0c} \right)^3 \frac{\omega^3}{3!} + \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}}{m_0c} \right)^4 \frac{\omega^4}{4!} + \dots \end{aligned} \quad (11.21)$$

With regard to the expansions

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{p}{m_0c} \omega \right) &= 1 - \frac{(p/m_0c)^2 \omega^2}{2!} + \frac{(p/m_0c)^4 \omega^4}{4!} - \dots, \\ \frac{\hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}}{p} \sin \left(\frac{p}{m_0c} \omega \right) &= \frac{\hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}}{p} \left[\frac{p}{m_0c} \omega - \frac{[(p/m_0c) \omega]^3}{3!} + \dots \right] \end{aligned} \quad (11.22)$$

and $(\hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})^2 = -p^2$, we see immediately that $\hat{H}_\Phi$ can also be written as follows:

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_\Phi &= \left[\cos\left(\frac{p}{m_0 c} \omega\right) + \hat{\beta} \frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}}{p} \sin\left(\frac{p}{m_0 c} \omega\right) \right] \left[c \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} + \hat{\beta} m_0 c^2 \right] \\
 &= \hat{\beta} \left[m_0 c^2 \cos\left(\frac{p}{m_0 c} \omega\right) + c p \sin\left(\frac{p}{m_0 c} \omega\right) \right] \\
 &\quad + \frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}}{p} \left[p c \cos\left(\frac{p}{m_0 c} \omega\right) - m_0 c^2 \sin\left(\frac{p}{m_0 c} \omega\right) \right].
 \end{aligned} \tag{11.23}$$

We will have reached our aim to remove all odd operators, if we can specify ω such that the bracket $\sim \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}/p$ is eliminated. Rearranging this expression yields

$$\begin{aligned}
 &\left[p c \cos\left(\frac{p}{m_0 c} \omega\right) - m_0 c^2 \sin\left(\frac{p}{m_0 c} \omega\right) \right] \\
 &= p c \cos\left(\frac{p}{m_0 c} \omega\right) \left[1 - \frac{m_0 c}{p} \frac{\sin[(p/m_0 c) \omega]}{\cos[(p/m_0 c) \omega]} \right] \\
 &= p c \cos\left(\frac{p}{m_0 c} \omega\right) \left[1 - \frac{m_0 c}{p} \tan\left(\frac{p}{m_0 c} \omega\right) \right].
 \end{aligned} \tag{11.24}$$

If we now choose

$$\omega = \frac{m_0 c}{p} \arctan\left(\frac{p}{m_0 c}\right), \tag{11.25}$$

it follows that

$$\begin{aligned}
 &p c \cos\left(\frac{p}{m_0 c} \omega\right) \left[1 - \frac{m_0 c}{p} \tan\left(\arctan\left(\frac{p}{m_0 c}\right)\right) \right] \\
 &= p c \cos\left(\frac{p}{m_0 c} \omega\right) [1 - 1] = 0,
 \end{aligned}$$

i.e. with our choice of ω the odd part of $\hat{H}_\Phi$ vanishes and we get

$$\hat{H}_\Phi = \hat{\beta} \left[m_0 c^2 \cos\left(\frac{p}{m_0 c} \omega\right) + c p \sin\left(\frac{p}{m_0 c} \omega\right) \right]. \tag{11.26}$$

Using the trigonometric relation

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

which holds for $x > 0$, then

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_\Phi &= \hat{\beta} \left[m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1+p^2/m_0^2 c^2}} + c p \frac{p/m_0 c}{\sqrt{1+p^2/m_0^2 c^2}} \right] \\
 &= \hat{\beta} \left[m_0 c^2 \frac{m_0 c}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}} + \frac{p}{p^2 + m_0^2 c^2} \right] \\
 &= \hat{\beta} c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} = \hat{\beta} E_p.
 \end{aligned} \tag{11.27}$$

Obviously this result is the same as in our previous calculations [see (11.8)].

Next we calculate the sign operator $\hat{\Lambda}$ in the Φ representation. $\hat{\Lambda}$ was defined as [see (2.48)]:

$$\hat{\Lambda} = \frac{\hat{H}_f}{\sqrt{\hat{H}_f^2}} = \frac{c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}m_0c^2}{c\sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 + m_0^2c^2}} \quad (11.28)$$

or in the momentum representation:

$$\hat{\Lambda} = \frac{c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} + \hat{\beta}m_0c^2}{E_p} \quad (11.29)$$

By use of $\hat{H}_\Phi$ we get

$$\hat{\Lambda}_\Phi = \hat{U}\hat{\Lambda}\hat{U}^\dagger = \hat{\beta} \quad (11.30)$$

For the following calculations it is necessary to know the Φ representation for the operator $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$. Therefore we calculate

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_\Phi &= \hat{U}\hat{\boldsymbol{\alpha}}\hat{U}^\dagger = \frac{\hat{\beta}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}c + m_0c^2 + E_p}{2E_p(m_0c^2 + E_p)}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \left(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}c\hat{\beta} + m_0c^2 + E_p \right) \\ &= -\frac{c^2(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})}{2E_p(m_0c^2 + E_p)} + \frac{c\hat{\beta}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})\hat{\boldsymbol{\alpha}} + \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})c\hat{\beta}}{2E_p} + \frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}}(m_0c^2 + E_p)}{2E_p}, \end{aligned}$$

and replace

$$c^2p^2 = E_p^2 - m_0^2c^4 = (E_p + m_0c^2)(E_p - m_0c^2).$$

By use of the commutation relation

$$\hat{\alpha}_k\hat{\alpha}_l + \hat{\alpha}_l\hat{\alpha}_k = 2\delta_{kl}$$

follows

$$-\frac{c^2(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})}{2E_p(m_0c^2 + E_p)} = -\frac{2c^2\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})}{2E_p(m_0c^2 + E_p)} + \frac{c^2\mathbf{p}^2\hat{\boldsymbol{\alpha}}}{2E_p(m_0c^2 + E_p)}$$

and

$$\frac{c\hat{\beta}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})\hat{\boldsymbol{\alpha}} + \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})c\hat{\beta}}{2E_p} = \frac{c\hat{\beta}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})\hat{\boldsymbol{\alpha}} + 2c\hat{\beta}\mathbf{p} - c\hat{\beta}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})\hat{\boldsymbol{\alpha}}}{2E_p} = \frac{c\hat{\beta}\mathbf{p}}{E_p}$$

Next we collect terms:

$$\frac{(E_p^2 - m_0^2c^4)\hat{\boldsymbol{\alpha}} + \hat{\boldsymbol{\alpha}}(m_0^2c^4 + E_p^2 + 2E_pm_0c^2)}{2E_p(m_0c^2 + E_p)} = \frac{\hat{\boldsymbol{\alpha}}(2E_p^2 + 2E_pm_0c^2)}{2E_p(m_0c^2 + E_p)} = \hat{\boldsymbol{\alpha}},$$

and finally get

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_\Phi = \boldsymbol{\alpha} - \frac{c^2\mathbf{p}(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p})}{E_p(E_p + m_0c^2)} + \frac{c\hat{\beta}\mathbf{p}}{E_p} \quad (11.31)$$

By a similar calculation it can be shown that the even part of the position operator is given in the Φ representation by

$$[\mathbf{r}]_\Phi = \hat{U}[\mathbf{r}]\hat{U}^\dagger = \mathbf{r} - \frac{\hbar c^2(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \times \mathbf{p})}{2E_p(E_p + m_0c^2)} \quad (11.32)$$

where

$$[r] = \frac{1}{2}(r + \hat{\Lambda}r\hat{\Lambda}) = r + \frac{i\hbar c\hat{\Lambda}}{2E_p}\hat{\alpha} - \frac{i\hbar c^2p}{2E_p^2} \quad (11.33)$$

while the odd part reads

$$\{\mathbf{r}\}_\Phi = U\{\mathbf{r}\}U^\dagger = \frac{i\hbar c}{2E_p} \left(\hat{\alpha}\hat{\beta} + \frac{c^2\hat{\beta}(\hat{\alpha} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}}{E_p(E_p + m_0c^2)} \right) \quad (11.34)$$

with

$$\{r\} = \frac{1}{2}(r - \hat{\Lambda}r\hat{\Lambda})$$

For calculation of $\mathbf{r}_\Phi$ the relation

$$\mathbf{r}_\Phi = \hat{U}\mathbf{r}\hat{U}^\dagger = \mathbf{r} + i\hbar\hat{U} \left(\nabla_p \hat{U}^\dagger \right) \quad \mathbf{r} = i\hbar\nabla_p \quad (11.35)$$

is quite useful (see Exercise 1.18).

Finally we want to transform explicitly the Dirac plane waves into the Φ representation. The projection operators $\hat{\Pi}_{+\Phi}$ and $\hat{\Pi}_{-\Phi}$, which project out from an arbitrary Dirac wave the states with positive or negative energy respectively, read in the Φ representation:

$$\hat{\Pi}_{+\Phi} = \frac{1}{2}(1 + \hat{\beta}) \quad , \quad \hat{\Pi}_{-\Phi} = \frac{1}{2}(1 - \hat{\beta}) \quad (11.36)$$

where $\frac{1}{2}(1 \pm \hat{\beta})$ has the explicit form

$$\frac{1 + \hat{\beta}}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{1 - \hat{\beta}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.37)$$

With these relations we may show that in the Φ representation the wave function for a given sign of energy is completely described by two components. In the usual representation the orthonormalized wave functions for states with a given momentum in the z direction, given sign $\lambda(= +1 \text{ or } -1)$ of energy and given spin projection $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}$ or $-\frac{1}{2}$, follows from (2.34):

$$\begin{aligned} \psi_{p,\lambda,1/2} &= \sqrt{\frac{m_0c^2 + \varepsilon}{2\varepsilon}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{cp}{m_0c^2 + \varepsilon} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{e^{ipz/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}, \quad \varepsilon = \lambda E_p \quad , \quad \mathbf{p} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = p \\ \psi_{p,\lambda,-1/2} &= \sqrt{\frac{m_0c^2 + \varepsilon}{2\varepsilon}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-cp}{m_0c^2 + \varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{e^{ipz/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}, \quad \mathbf{p} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = -p, \end{aligned} \quad (11.38)$$

Transforming according to $\phi = \hat{U}\psi$, we need

$$\hat{\beta}\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ -\hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

then it follows that

$$\hat{\beta}\hat{\alpha}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and, using $c^2 p^2 = (E_p - m_0 c^2)^2$, we obtain

$$\begin{aligned}
 \phi = \hat{U}\psi &= \frac{1}{2E_p} \frac{e^{ipz/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \begin{pmatrix} \frac{c^2 p^2}{m_0 c^2 + E_p} + m_0 c^2 + E_p \\ 0 \\ -cp + cp \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{e^{ipz/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} = p \quad \text{and} \\
 \phi_{p,1,-1/2} &= \frac{1}{2E_p} \frac{e^{ipz/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \begin{pmatrix} \frac{c^2 p^2}{m_0 c^2 + E_p} + m_0 c^2 + E_p \\ 0 \\ cp - cp \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{e^{ipz/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} .
 \end{aligned}$$

The states with negative energy read

$$\begin{aligned}
 \psi_{p,-1,1/2} &= \sqrt{\frac{E_p - m_0 c^2}{2E_p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{e^{ipz/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \cdot \mathbf{p} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = p \quad \text{and} \\
 \psi_{p,-1,-1/2} &= \sqrt{\frac{E_p - m_0 c^2}{2E_p}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ cp \\ 0 \end{pmatrix} \frac{e^{ipz/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \cdot \mathbf{p} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = -p .
 \end{aligned}$$

From $\phi = \hat{U}\Psi$ we calculate

$$\phi_{p,-1,1/2} = \frac{1}{2E_p} \frac{\sqrt{E_p - m_0 c^2}}{\sqrt{E_p + m_0 c^2}} \frac{e^{ipz/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \begin{pmatrix} \frac{-c^2 p^2}{E_p - m_0 c^2} + m_0 c^2 + E_p \\ 0 \\ -cp + \frac{(m_0 c^2 + E_p)(-cp)}{E_p - m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11.41)$$

The first element of this column matrix is zero, the third element results in $-2cpE_p/(E_p - m_0 c^2)$ and we get

$$\frac{\sqrt{E_p - m_0 c^2}}{\sqrt{E_p + m_0 c^2}} = \frac{E_p - m_0 c^2}{\sqrt{E_p + m_0 c^2} \sqrt{E_p - m_0 c^2}} = \frac{E_p - m_0 c^2}{\sqrt{E_p^2 - (m_0 c^2)^2}} = \frac{E_p - m_0 c^2}{cp}$$

This yields

$$\phi_{p,-1,1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{e^{ipz/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} = p \quad (11.42)$$

and, similarly,

$$\phi_{p,-1,-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{e^{ipz/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} = -p \quad (11.43)$$

Now, Φ can always be written as

$$\Phi = \Phi_+ + \Phi_- = \begin{pmatrix} w(p) \\ v(p) \end{pmatrix} \quad (11.44)$$

and using the projection operators one obtains

$$\Phi_+ = (\hat{\Pi}_{+\Phi}) \Phi = \begin{pmatrix} w(p) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_- = (\hat{\Pi}_{-\Phi}) \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v(p) \end{pmatrix} \quad (11.45a)$$

where $w(p)$ and $v(p)$ can, in fact, be written as two-component functions

$$w(p) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad v(p) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (11.45b)$$

12.6.8 11.1 The Foldy-Wouthuysen Representation in the Presence of External Fields

If external fields are coupled to a Hamiltonian $\hat{H}$, then $\hat{H}$ always contains parts coupling together the free positive and negative energy solutions. In the case of weak fields the role of the odd parts of this operator can be neglected. The Foldy-Wouthuysen transformation, as an approximation of the exact solution, is therefore only applicable to weak fields, where it systematically improves the approach. In performing the transformation we are guided by the example of the case of free fields. Again, we split up the Hamiltonian into

$$\hat{H} = \hat{\beta}m_0c^2 + \hat{\varepsilon} + \hat{O}, \quad (11.46)$$

where $\hat{\varepsilon}$ corresponds to the remaining even part of $\hat{H}$ ($\hat{\varepsilon} \Leftrightarrow$ even) and $\hat{O}$ to the odd part ($\hat{O} \Leftrightarrow$ odd). Inclusion of external electromagnetic fields yields

$$\hat{O} = c\hat{\alpha} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \quad \text{and} \quad \hat{\varepsilon} = eV(\mathbf{r}) \quad (11.47)$$

where $V(r)$ is the Coulomb potential. In analogy to the case of free fields (11.16) we introduce a transformation of the following kind:

$$\hat{H}' = e^{i\hat{S}} \hat{H} e^{-i\hat{S}} \quad (11.48)$$

with the intention of minimizing the odd parts of the Hamiltonian $\hat{H}'$, or even to make them vanish. In analogy to (11.16) we choose

$$\hat{S} = -\frac{i}{2m_0c^2} \hat{\beta} \hat{O} \quad (11.49)$$

i.e. $\hat{S}$ shall not explicitly depend on time. If the fields occurring in (11.47) depend explicitly on time (and thus also the Hamiltonian) the transformation $\hat{S}$ must generally also be time dependent. Then it is usually not possible to construct $\hat{S}$ in a way that all odd parts of $\hat{H}'$ disappear in any order. Therefore, we restrict ourselves to a nonrelativistic expansion of the Hamiltonian $\hat{H}'$ into an exponential series of $1/m_0c^2$. More precisely, we taken into account only terms of order

$$\left(\frac{\text{kinetic energy}}{m_0 c^2} \right)^3 \text{ and } \frac{(\text{kinetic energy}) \cdot (\text{field energy})}{m_0^2 c^4}.$$

We expand the exponential function into a power series

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \left(1 + \frac{i\hat{S}}{1!} + \frac{i^2\hat{S}^2}{2!} + \dots \right) \hat{H} \left(1 + \frac{(-i)\hat{S}}{1!} + \frac{(-1)^2\hat{S}^2}{2!} + \dots \right) \\ &= \hat{H} + i[\hat{S}, \hat{H}]_- + \frac{i^2}{2!} [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]_-]_- + \dots \\ &\quad + \frac{i^n}{n!} [\hat{S}, [\hat{S}, \dots, [\hat{S}, \hat{H}]_- \dots]_-]_- + \dots \end{aligned} \quad (11.50)$$

To verify this we write down the second-order terms of $\hat{S}$ separately,

$$\begin{aligned} &\hat{H} \frac{(-i)^2}{2!} \hat{S}^2 + \frac{i^2 \hat{S}^2}{2!} \hat{H} + i\hat{S}\hat{H}(-i)\hat{S} \\ &= \frac{i^2}{2} [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]_-]_- = \frac{i^2}{2} [\hat{S}, \hat{S}\hat{H} - \hat{H}\hat{S}]_- \\ &= \frac{i^2}{2} (\hat{S}^2\hat{H} - \hat{S}\hat{H}\hat{S} - \hat{S}\hat{H}\hat{S} + \hat{H}\hat{S}^2) \end{aligned} \quad (11.51)$$

We can check the validity of this general commutator expansion (11.52) by considering the operator function

$$\hat{F}(\lambda) = e^{i\lambda\hat{S}} \hat{H} e^{-i\lambda\hat{S}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{d^n \hat{F}}{d\lambda^n} \right)_{\lambda=0}$$

and by verifying

$$\frac{d\hat{F}}{d\lambda}(\lambda) = e^{i\lambda\hat{S}} i[\hat{S}, \hat{H}]_- e^{-i\lambda\hat{S}},$$

as well as

$$\frac{d^n \hat{F}}{d\lambda^n} = e^{i\lambda\hat{S}} i^n [\hat{S}, [\hat{S}, \dots, [\hat{S}, \hat{H}]_-]_- \dots]_- e^{-i\lambda\hat{S}}$$

Thus the validity of (11.50) easily follows for $\lambda = 1$.

In the following we make use of the relations

$$\hat{\beta}\hat{O} = -\hat{O}\hat{\beta} \text{ and } \hat{\beta}\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}\hat{\beta}. \quad (11.52)$$

Expanding the Hamiltonian $\hat{H}'$ into powers of $1/m_0 c^2$, we restrict ourselves to terms up to order $1/m_0^3 c^6$. Then we can write $\hat{H}'$ as

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \hat{H} + i[\hat{S}, \hat{H}]_- - \frac{1}{2} [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]_-]_- - \frac{i}{6} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]_-]_-]_- \\ &\quad + \frac{1}{24} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{\beta} m_0 c^2]_-]_-]_-]_- + \dots \end{aligned} \quad (11.53)$$

Up to terms of order "one", $\hat{H}'$ is given by

$$\hat{H}' = \hat{\beta}m_0c^2 + \hat{\varepsilon} + \hat{O} + i[\hat{S}, \hat{\beta}]_- m_0c^2. \quad (11.54)$$

Now we calculate the various commutators of $\hat{S}$ and $\hat{H}$:

$$\begin{aligned} i[\hat{S}, \hat{H}]_- &= i \left(\left(-\frac{i}{2m_0c^2} \hat{\beta} \hat{O} \right) (\hat{\beta}m_0c^2 + \hat{O} + \hat{\varepsilon}) - (\hat{\beta}m_0c^2 + \hat{O} + \hat{\varepsilon}) \left(\frac{i}{2m_0c^2} \hat{\beta} \hat{O} \right) \right) \\ &= i \left(\frac{i}{2} \hat{O} - \frac{i}{2m_0c^2} \hat{\beta} \hat{O}^2 - \frac{i}{2m_0c^2} \hat{\beta} \hat{O} \hat{\varepsilon} + \frac{i}{2} \hat{O} + \frac{i}{2m_0c^2} \hat{\beta} \hat{O}^2 + \frac{i}{2m_0c^2} \hat{\varepsilon} \hat{\beta} \hat{O} \right) \\ &= -\hat{O} + \frac{\hat{\beta} \hat{O}^2}{m_0c^2} + \frac{\hat{\beta}}{2m_0c^2} [\hat{O}, \hat{\varepsilon}]_-, \end{aligned} \quad (11.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{i^2}{2} [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]_-]_- &= \frac{i^2}{2} \left\{ \left(-\frac{i}{2m_0c^2} \hat{\beta} \hat{O} \right) \left(-\hat{O} + \frac{\hat{\beta} \hat{O}^2}{m_0c^2} + \frac{\hat{\beta}}{2m_0c^2} [\hat{O}, \hat{\varepsilon}]_- \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(-\hat{O} + \frac{\hat{\beta} \hat{O}^2}{m_0c^2} + \frac{\hat{\beta}}{2m_0c^2} [\hat{O}, \hat{\varepsilon}]_- \right) \left(-\frac{i}{2m_0c^2} \hat{\beta} \hat{O} \right) \right\} \\ &= \frac{i^2}{2} \left(\frac{i}{2m_0c^2} \hat{\beta} \hat{O}^2 + \frac{i}{2m_0^2c^4} \hat{O}^3 + \frac{i}{4m_0^2c^4} \hat{O} [\hat{O}, \hat{\varepsilon}]_- \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2m_0c^2} \hat{\beta} \hat{O}^2 + \frac{i}{2m_0^2c^4} \hat{O}^3 - \frac{i}{4m_0^2c^4} [\hat{O}, \hat{\varepsilon}]_- \hat{O} \right) \\ &= -\frac{1}{2m_0c^2} \hat{\beta} \hat{O}^2 - \frac{1}{2m_0^2c^4} \hat{O}^3 - \frac{1}{8m_0^2c^4} [\hat{O}, [\hat{O}, \hat{\varepsilon}]_-]_-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{i^3}{3!} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]_-]_-]_- &= \frac{i^3}{3!} \left(\left(-\frac{i}{2m_0c^2} \hat{\beta} \hat{O} \right) \left(-\hat{O} + \frac{\hat{\beta} \hat{O}^2}{m_0c^2} + \frac{\hat{\beta}}{2m_0c^2} [\hat{O}, \hat{\varepsilon}]_- \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(-\hat{O} + \frac{\hat{\beta} \hat{O}^2}{m_0c^2} + \frac{\hat{\beta}}{2m_0c^2} [\hat{O}, \hat{\varepsilon}]_- \right) \left(-\frac{i}{2m_0c^2} \hat{\beta} \hat{O} \right) \right) \\ &= \frac{1}{6m_0^2c^4} \hat{O}^3 - \frac{1}{6m_0^3c^6} \hat{\beta} \hat{O}^4 - \frac{1}{48m_0^3c^6} \hat{\beta} [\hat{O}, [\hat{O}, [\hat{O}, \hat{\varepsilon}]_-]_-]_-. \end{aligned} \quad (11.57)$$

We take into account only terms of the order of $1/m_0^3c^6$; thus we get

$$\frac{i^4}{4!} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]_-]_-]_-]_- \approx \frac{1}{24m_0^3c^6} \hat{\beta} \hat{O}^4 \quad (11.58)$$

Next we collect the terms of (11.54-11.58), which yields

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \hat{\beta}m_0c^2 + \hat{\varepsilon} + \hat{O} - \hat{O} + \frac{1}{2m_0c^2} \hat{\beta} [\hat{O}, \hat{\varepsilon}]_- + \frac{1}{m_0c^2} \hat{\beta} \hat{O}^2 - \frac{1}{2m_0c^2} \hat{\beta} \hat{O}^2 \\ &\quad - \frac{1}{8m_0^2c^4} [\hat{O}, [\hat{O}, \hat{\varepsilon}]_-]_- - \frac{1}{2m_0^2c^4} \hat{O}^3 + \frac{1}{6m_0^2c^4} \hat{O}^3 - \frac{1}{6m_0^3c^6} \hat{\beta} \hat{O}^4 \\ &\quad + \frac{1}{24m_0^3c^6} \hat{\beta} \hat{O}^4 - \frac{1}{48m_0^3c^6} \hat{\beta} [\hat{O}, [\hat{O}, [\hat{O}, \hat{\varepsilon}]_-]_-]_- \\ &= \hat{\beta} \left(m_0c^2 + \frac{1}{2m_0c^2} \hat{O}^2 - \frac{1}{8m_0^3c^6} \hat{O}^4 \right) + \hat{\varepsilon} - \frac{1}{8m_0^2c^4} [\hat{O}, [\hat{O}, \hat{\varepsilon}]_-]_- \\ &\quad + \frac{1}{2m_0c^2} \hat{\beta} [\hat{O}, \hat{\varepsilon}]_- - \frac{1}{3m_0^2c^4} \hat{O}^3 - \frac{1}{48m_0^3c^6} \hat{\beta} [\hat{O}, [\hat{O}, [\hat{O}, \hat{\varepsilon}]_-]_-]_- \\ &\equiv \hat{\beta}m_0c^2 + \hat{\varepsilon}' + \hat{O}'. \end{aligned} \quad (11.59)$$

At this step we might simply argue: Let us omit all odd terms of $\hat{H}'$, i.e. the last term of (11.59) with the odd powers of $\hat{O}$. But we may also formally reduce the odd part of $\hat{H}'$ by further Foldy-Wouthuysen transformations. At this point we perform a second transformation

$$\hat{S}' = -\frac{i}{2m_0c^2}\hat{\beta}\hat{O}' = -\frac{i}{2m_0c^2}\hat{\beta}\left(\frac{1}{2m_0c^2}\hat{\beta}[\hat{O}, \hat{\epsilon}]_- - \frac{1}{3m_0^2c^4}\hat{O}'^3\right) \quad (11.60)$$

and obtain

$$\hat{H}'' = e^{i\hat{S}'}\hat{H}'e^{-i\hat{S}'} = \hat{\beta}m_0c^2 + \hat{\epsilon}' + \frac{1}{2m_0c^2}\hat{\beta}\left[\hat{O}', \hat{\epsilon}'\right]_- - \frac{1}{3m_0^2c^4}\hat{O}'^3 \quad (11.61)$$

The term proportional to $\hat{O}'^3$ contains large powers of $1/m_0c^2$ and therefore it can be neglected; thus $\hat{H}''$ is given by

$$\hat{H}'' = \hat{\beta}m_0c^2 + \hat{\epsilon}' + \frac{1}{2m_0c^2}\hat{\beta}\left[\hat{O}', \hat{\epsilon}'\right]_- = \hat{\beta}m_0c^2 + \hat{\epsilon}' + \hat{O}'' \quad (11.62)$$

$\hat{O}''$ is of the order of $1/m_0^2c^4$. To eliminate $\hat{O}''$ we apply a third transformation

$$\hat{H}''' = e^{i\hat{S}''}\hat{H}''e^{-i\hat{S}''} \quad (11.63)$$

$$\hat{S}'' = -\frac{i}{2m_0c^2}\hat{\beta}\hat{O}'' \quad (11.64)$$

By neglecting the odd terms proportional to $1/m_0^3c^6$ this yields

$$\begin{aligned} \hat{H}''' &\simeq \hat{\beta}m_0c^2 + \hat{\epsilon}' \\ &= \hat{\beta}\left(m_0c^2 + \frac{1}{2m_0c^2}\hat{O}^2 - \frac{1}{8m_0^3c^6}\hat{O}^4\right) + \hat{\epsilon} - \frac{1}{8m_0^2c^4}\left[\hat{O}, [\hat{O}, \hat{\epsilon}]_-\right]_- \\ &\equiv \hat{H}_\Phi \end{aligned} \quad (11.65)$$

To illustrate this procedure we now calculate the various terms of $\hat{H}_\Phi$ explicitly. Here we make use of the following, already known relations for two arbitrary vectors $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$:

$$(\hat{\alpha} \cdot \mathbf{A})(\hat{\alpha} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\hat{\Sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (11.66)$$

with which we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m_0c^2}\hat{O}^2 &= \frac{1}{2m_0c^2}\left(\hat{\alpha} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2m_0}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{i}{2m_0}\hat{\Sigma} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) \times \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) \\ &= \frac{1}{2m_0}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{ie}{2m_0c}\hat{\Sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{p}}). \end{aligned}$$

Here $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ and $\text{curl}(f\mathbf{A}) = f \text{curl} \mathbf{A} + (\text{grad} f) \times \mathbf{A}$. This expression can be further simplified as

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m_0c^2}\hat{O}^2 &= \frac{1}{2m_0}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2m_0c}\hat{\Sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \frac{1}{2m_0}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2m_0c}\hat{\Sigma} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (11.67)$$

Next we look at the commutator $[\hat{O}, \hat{\epsilon}]_-$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8m_0^2c^4}[\hat{O}, \hat{\epsilon}]_- &= \frac{1}{8m_0^2c^4} \left(c\hat{\alpha} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) eV - eV c\hat{\alpha} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{8m_0^2c^4} i\hbar c\hat{\alpha} \cdot \nabla V = \frac{i\hbar}{8m_0^2c^4} c\hat{\alpha} \cdot \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (11.68)$$

and, according to (11.65), at the commutator $[\hat{O}, \hat{\alpha} \cdot \mathbf{E}]_-$

$$\begin{aligned} &\left[\hat{O}, \frac{i\hbar}{8m_0^2c^4} c\hat{\alpha} \cdot \mathbf{E} \right]_- \\ &= \left\{ c\hat{\alpha} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \frac{i\hbar}{8m_0^2c^4} c\hat{\alpha} \cdot \mathbf{E} - \frac{i\hbar}{8m_0^2c^4} c\hat{\alpha} \cdot \mathbf{E} \left(c\hat{\alpha} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \right) \right\} \\ &= \left[\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \frac{i\hbar c^2}{8m_0^2c^4} \hat{\alpha} \cdot \mathbf{E} \right]_- \\ &= \frac{i\hbar}{8m_0^2c^2} (-i\hbar(\nabla \cdot \mathbf{E}) - i\hbar\mathbf{E} \cdot \nabla + i\hbar\mathbf{E} \cdot \nabla + i\hat{\Sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{E}) - i\hat{\Sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{p}})) \\ &= \frac{i\hbar}{8m_0^2c^2} (-i\hbar(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \hbar\hat{\Sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - i\hat{\Sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{p}}) - i\hat{\Sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{p}})) \\ &= \frac{e\hbar^2c^2}{8m_0^2c^4} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{i\hbar^2c^2}{8m_0^2c^4} \hat{\Sigma} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{E} + \frac{e\hbar}{4m_0^2c^2} \hat{\Sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{p}}) \end{aligned} \quad (11.69)$$

Adding the various contributions, we have

$$\begin{aligned} \hat{H}_\Phi &= \hat{H}''' \\ &= \hat{\beta} \left(m_0c^2 + \frac{1}{2m_0} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{8m_0^3c^6} \hat{\mathbf{p}}^4 \right) \\ &\quad + eV - \frac{1}{2m_0c} \hat{\beta} e\hbar(\hat{\Sigma} \cdot \mathbf{B}) - \frac{i\hbar^2c^2}{8m_0^2c^4} \hat{\Sigma} \cdot (\operatorname{curl} \mathbf{E}) \\ &\quad - \frac{e\hbar}{4m_0^2c^2} \hat{\Sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{p}}) - \frac{e\hbar^2c^2}{8m_0^2c^4} \operatorname{div} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (11.70)$$

Now it seems advisable to discuss the individual terms of (11.70). The terms in the first parenthesis result from the expansion of $[(\hat{\mathbf{p}} - e/c\mathbf{A})^2 + m_0]^2$ and describe the relativistic mass increase. Subsequently follow terms describing the electrostatic energy and the magnetic dipole energy. The next two terms, which actually are Hermitian only if taken together, contain the spin-orbit interaction. This can be seen particularly clearly under the assumption of a spherically symmetric potential with $\operatorname{curl} \mathbf{E} = 0$, when

$$\hat{\Sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{p}}) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\Sigma} \cdot (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} (\hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{L}}). \quad (11.71)$$

Thus we have

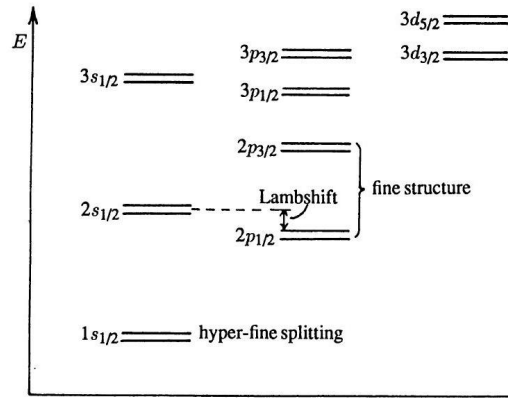
$$\hat{H}_{\text{spin-orbit}} = \frac{e\hbar}{4m_0^2c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} (\hat{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{L}}) \quad (11.72)$$

This spin-orbit interaction is responsible for the splitting of states with the same orbital angular momentum l , but with different total angular momentum j . This interaction also is

very important in nuclear physics for the classification of single-particle states of nucleons, but there the spin-orbit interaction is not of electromagnetic origin. The last term of (11.70) is the so called Darwin term. It results from the Zitterbewegung of the electron over a region of a magnitude comparable to the Compton wavelength (2.61). For point-like nuclei we can write

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\Delta\phi = 4\pi\rho_c = 4\pi e\delta(\mathbf{r}).$$

Fig. 11.1. Qualitative scheme of the energy levels of the hydrogen atom



Considering now that for nonrelativistic wave functions only the s state do not vanish at the origin, and thus only $\Psi_{\text{ns}}(0) \neq 0$, one immediately realizes that for light atoms the Darwin term mainly results in an energy shift of the s levels.

Finally we look qualitatively at the level scheme of the hydrogen atom (see Fig. 11.1). The fine structure splitting due to spin-orbit coupling is quantitatively the largest contribution of the relativistic theory compared to the nonrelativistic Schrödinger description of the hydrogen atom. The previously discussed contributions of the Hamiltonian yield good agreement between the theory and experimental data up to the year 1947, when as an additional effect the hyperfine-splitting had to be taken into account. This splitting is due to the interaction of the magnetic moment of the proton with the magnetic moment of the electron and results in the splitting of the two normally degenerated spin levels. In 1947 Lamb and Retherford discovered a further shift of the $2s_{1/2}$ level against the $2p_{1/2}$ level (indicated in the figure), which should be degenerated if exact solutions of the Dirac equation are considered (refer to Exercise 9.6 and 9.7). The physical origin of this quantum electrodynamical effect is the interaction of the electrons with the fluctuations of the quantized radiation field (self-energy and vacuum polarization), the so-called Lamb shift.¹

¹ This will be discussed in more detail in Vol. 4 of this series: Quantum Electrodynamics (Springer, Berlin, Heidelberg), to be published.

12.6.9 The Hole Theory 1

Until now the solutions of the Dirac equation with negative energy have been a puzzle. Attempts similar to those we performed with the solutions of the Klein-Gordon equation, where the energy turned out to be positive (by the Lagrange formalism) for solutions with positive and negative time evolution factors, proved unsuccessful (cf. Exercise 2.3). Solutions with negative energy appear almost everywhere when we are concerned with processes of high energy or with strongly localized wave packets (see Exercises 8.4, 8.5). At this point we have to confront this dilemma and find a proper solution!

The existence of solutions with negative energy in the previous interpretation, as single particle states of the electron, obviously leads to trouble and physical nonsense. Let us consider the electrons in an atom, the spectrum of which is once more given qualitatively in Fig. 12.1.

The bound states directly below the positive energy continuum, with $E < m_0c^2$, are in general in very good agreement with experiments. It is beyond any doubt that these are the bound states of the (one-electron) atom.

An electron in the lowest atomic state (1s) could lose more and more energy by continuous radiative transitions. Thus an atom would be unstable and, because of the continuous emission of light, a radiation catastrophe would occur. However, such effects have never been observed! If this decay could happen, our world could not exist. Hence we have both a principle to uphold as well as a practical problem to solve to avoid electrons falling of into the states of negative energy. Neglecting the radiation field, the bound state electrons would be stationary. By switching on the field (of course it is always "switched on"), and the use of radiation theory and of the wave functions found in Exercise 9.6, an infinite transition probability is obtained particularly if one takes into account the infinitely large number of final states in the lower continuum (see Exercise 12.1). But this is of course sheer nonsense! We must find a new physical idea to remove this dilemma, and, in its original form, this was provided by Dirac ¹. He assumed all states of negative energy to be occupied with electrons (see Fig. 12.2).

The vacuum state is defined by the absence of real electrons (electrons in states of positive energy), and all the states of negative energy are filled with electrons. The vacuum state is the energetically deepest stable state, which can be realized under certain conditions (constraints such as, e.g., external fields). In the absence of the field the vacuum represents the lower (negative) continuum (it is also called the "Dirac sea"), whose states are completely occupied with electrons. This physical assumption of the negative energy continuum filled with electrons has very important consequences. We perceive at once that

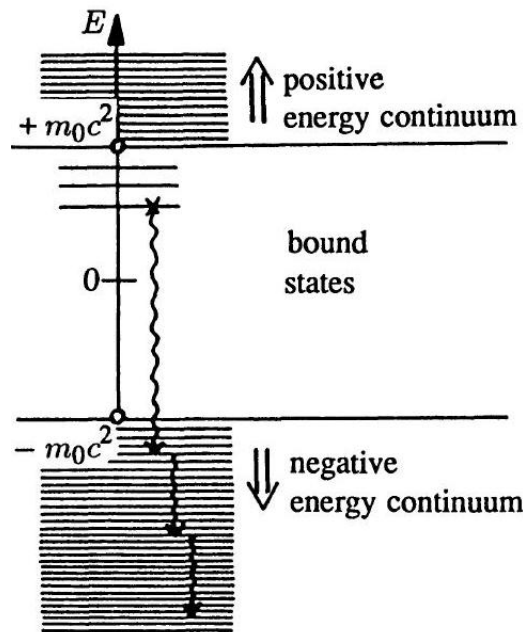


Fig. 12.1. Illustration of the radiation catastrophe of a radiating electron in an atom. It falls deeper and deeper by continued radiative transitions

¹ P.A.M. Dirac: Proc. R. Soc. (London), A 126, 360 (1930); see also J.R. Oppenheimer: Phys. Rev. 35, 939 (1930).

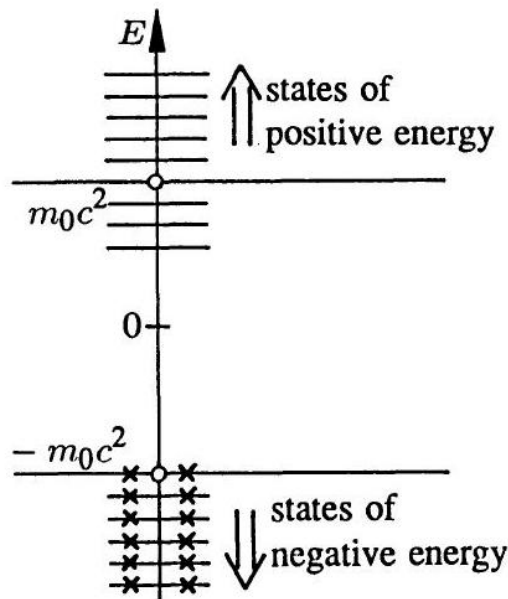


Fig. 12.2. In the hole theory the states of negative energy are occupied with electrons (X). According to the Pauli principle, each state can contain two electrons, namely one with spin up and one with spin down

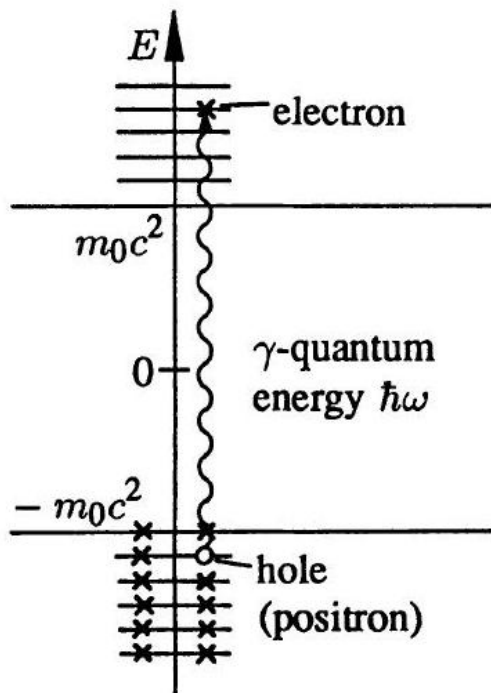


Fig. 12.3. A photon of energy $\hbar\omega > 2m_0c^2$ creates an electron-hole state. The hole is interpreted as a positron; hence the process is just $e^- - e^+$ pair creation. The radiation catastrophe mentioned above is now avoided because of the Pauli principle, which forbids transitions of real electrons into occupied lower states. On the other hand an electron of negative energy can absorb radiation. If the energy $\hbar\omega$ of the absorbed photon is greater than the energy gap ($\hbar\omega > 2m_0c^2$), an electron of negative energy can be excited into a state of positive energy (see Fig. 12.3).

In that case we get a real electron and a hole. The hole behaves like a particle with charge $+|e|$, because it can be annihilated by an electron (e^-) with charge $-|e|$; thus the hole is the antiparticle of the electron and is named positron (e^+). Obviously the creation of an electron

and electron hole by photons is to be identified with electron-positron pair creation, with a threshold energy of

$$\hbar\omega = 2m_0c^2 \quad (12.1)$$

Alternatively, we call the process where an electron drops into a hole, thereby emitting an appropriate photon, pair annihilation (or matter-antimatter annihilation, or e^+e^- annihilation). The energy balance of the pair creation is

$$\begin{aligned} \hbar\omega &= E_{\text{electron with pos. energy}} - E_{\text{electron with neg. energy}} \\ &= \left(+c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2c^2} \right) - \left(-c\sqrt{\mathbf{p}'^2 + m_0^2c^2} \right) \\ &\equiv E_{\text{electron}} + E_{\text{positron}} \end{aligned} \quad (12.2)$$

and we can associate the electron with the positive energy

$$E_{\text{electron}} = +c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2c^2}. \quad (12.3)$$

So far this is nothing new. What is new, however, is that according to (12.2) we have to give the positron (electron of negative energy) a positive energy, namely

$$E_{\text{positron}} = +c\sqrt{\mathbf{p}'^2 + m_0^2c^2}. \quad (12.4)$$

In the special case of vanishing positron momentum $\mathbf{p}'$, it follows that the positron has the rest mass

$$(E_{\text{positron}})_{\text{atrest}} = m_0c^2. \quad (12.5)$$

Therefore positrons (electron holes) have the same rest mass as electrons but opposite charge (as we have shown above). Similarly we obtain the following momentum balance: the photon has momentum $\hbar k$, which is distributed to electrons and positrons. We conclude that initial total momentum = final total momentum, i.e.

$$\hbar k + (\mathbf{p}')_{\text{electron with neg. energy}} = (\mathbf{p})_{\text{electron with pos. energy}} \quad \text{or} \quad (12.6)$$

$$\hbar k = (\mathbf{p})_{\text{electron with pos. energy}} - (\mathbf{p}')_{\text{electron with neg. energy}} \quad (12.7)$$

and write

$$\hbar k = (\mathbf{p})_{\text{electron}} + (\mathbf{p}')_{\text{positron}} \quad (12.8)$$

Hence, the positron has the opposite momentum to the electron, and negative energy. Indeed, a missing electron (negative energy) with momentum $\mathbf{p}'$ should behave like a positively charged particle with the same mass and opposite momentum. In this way we can easily explain the previous paradoxical fact that the mean particle velocity of electrons with negative energy equals

$$-\frac{c^2(\mathbf{p})_{\text{electron with neg. energy}}}{E_p} \quad (12.9)$$

[see (2.62) ff.], since we are now dealing with the positron velocity, i.e.

$$\frac{-c^2(\mathbf{p})_{\text{electron with neg. energy}}}{E_p} = \frac{+c^2(\mathbf{p})_{\text{positron}}}{E_p}. \quad (12.10)$$

The most important result of the hole theory is that it is the first theory which introduces a model for the vacuum, i.e. for particle-free space, in a naive sense. The vacuum is here represented by the Dirac sea, which consists of the states of negative energy occupied by electrons. This vacuum should have zero energy (mass) and no charge. However, it is clear that the model in this simple form does not have these properties. The states occupied with electrons of negative energy together have infinitely large negative energy and infinitely large negative charge. Both have to be renormalized to zero, i.e. the zero point of energy and charge is chosen in such a way that the Dirac sea has no mass and no charge. This renormalization procedure is not very satisfactory (aesthetically) but it is feasible (though soon we will discuss a better model, see Sect. 12.4). At this stage we find the qualitatively important fact that the vacuum can be modified, for instance, by the influence of external fields: these can deform the wave functions of the states of negative energy occupied with electrons. Hence they produce a measurable vacuum polarization with respect to the state without external fields.

Let us stress the point that the hole theory is a many-body theory, describing particles with positive and negative charge. Indeed, infinitely many electrons are needed to constitute the Dirac sea. The simple probability interpretation of the wave functions acclaimed in a single-particle theory cannot be true any longer, because the creation and annihilation of electron-positron pairs must be taken into account in the wave functions.

Resume. In early relativistic quantum mechanics, the Klein-Gordon theory was dismissed because it did not seem to allow a proper probability interpretation, and also, the appearance of states of negative energy was problematic. Hence Dirac formulated the Dirac equation with the intention of establishing a true relativistic single-particle theory. As we now know, the difficulties with the negative energy states of the Dirac equation almost of necessity demand a many-body theory (hole theory), and therefore the question arises whether it should also be dropped. On the other hand, though, we have been very successfully applying the Dirac equation to many problems (e.g. prediction of spin, of spin-orbit coupling, of the g factor, of atomic line structure). Additionally, by extending the single-particle Dirac theory to the hole theory, it has new, impressive success:

The prediction of the positron as the antiparticle of the electron was experimentally confirmed in all points, including the correct threshold (12.1). Equally, the vacuum polarization mentioned above, as well as many other effects, were confirmed by experiments. The previously discussed Zitterbewegung does not vanish in the hole theory, though because of the filled Dirac sea one might naively suppose that the states of negative energy are not available due to the Pauli principle; however, there still exists an exchange interaction and a related scattering. Accordingly, virtual electron-positron pairs are continuously created in the vacuum. The original electron (in a bound or free state) can fill up the virtual hole in the Dirac sea, and the other electron takes its place, this exchange interaction causing the Zitterbewegung. In its physical content the Dirac theory (extended by the hole theory) is the basis of quantum electrodynamics, which currently is the best-established theory of physics.

Dirac originally formulated his equation with a particular set of motives. The relativistic theory for spin- $\frac{1}{2}$ particles developed in this way had to be reinterpreted (hole theory) to get rid of its contradictions and became even more successful. Although the original motivation was not plausible from our present point of view, nevertheless it apparently showed the right direction. Often in the history of physics, a great success is achieved after a series of more or less erroneous investigations, which finally lead to new concepts and insights. In the following, we retain the Dirac equation and its reinterpretation by hole theory and extend it, also improving on the accuracy; however we drop the one-particle probability interpretation (except for illustrative

purposes).

12.1 Radiative Transition Probability from the Hydrogen Ground State to the States of Negative Energy

Problem. Estimate the transition probability for a radiative transition from the hydrogen ground state into an electron state of the empty negative continuum with $-m_0c^2 > E > -2m_0c^2$.

Solution

This problem is to show the idea that the electron states with negative energy have to be considered as occupied. The Dirac theory yields for the electromagnetic interaction ($\hbar = c = 1$):

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{int}} &= -e\hat{\psi}(x)\boldsymbol{\gamma}\hat{\psi}(x) \cdot \hat{\mathbf{A}}(x) \\ &= -e\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\boldsymbol{\alpha}}\hat{\psi}(x) \cdot \hat{\mathbf{A}}(x)\end{aligned}\quad (1)$$

We quantize the electromagnetic field in a box of volume L^3 and insert the expansion

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{\mathbf{k}', \sigma'} \sqrt{\frac{2\pi}{L^3\omega_{k'}}} \varepsilon_{\mathbf{k}', \sigma'} \left(e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}' \sigma'} + \hat{a}_{\mathbf{k}' \sigma'}^\dagger e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \right)$$

Here $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^+$ and $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$ are the creation and annihilation operators for photons of momentum $\hbar\mathbf{k}$ and polarization σ . The initial and the final states are of the following form:

$$\langle 1 \text{ photon with } k, \sigma | \cdot \langle \psi_f | = \langle f |$$

and

$$|i\rangle = |\psi_i\rangle | \text{ photon vacuum } \rangle.$$

With this it follows that

$$\begin{aligned}\langle f | \hat{H}_{\text{int}} | i \rangle &= -\sqrt{\frac{2\pi}{L^3\omega_k}} e \int d^3x \psi_f^\dagger(x) \hat{\boldsymbol{\alpha}} \psi_i(x) \cdot \varepsilon_{k, \sigma} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}\end{aligned}\quad (5)$$

We use the dipole approximation $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \approx 1$ and the relation

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = i[\hat{H}, \hat{\mathbf{x}}]_-,$$

which follows from the Dirac equation. Hence

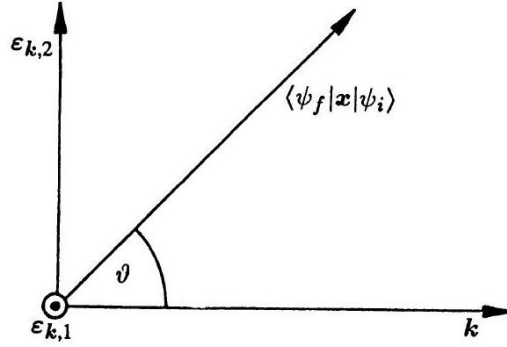
$$\begin{aligned}\langle f | \hat{H}_{\text{int}} | i \rangle &= e (E_i - E_f) \sqrt{\frac{2\pi}{L^3\omega_k}} \\ &\times \left(\int d^3x \psi_f^\dagger(x) \mathbf{x} \psi_i(x) \right) \cdot \varepsilon_{k, \sigma}\end{aligned}\quad (7)$$

Then Fermi's golden rule yields

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\text{transitions}}{\text{time}} \right) \\ &= 2\pi \left[\sum_p \sum_{r=3,4} \right] \sum_{k, \sigma} e^2 (E_i - E_f)^2 \frac{2\pi}{L^3\omega_k} \left| \int d^3x \psi_f^{r\dagger}(x) \mathbf{x} \psi_i(x) \cdot \varepsilon_{k, \sigma} \right|^2 \delta(\omega_k - E_i + E_f)\end{aligned}\quad (8)$$

(summed over all $\mathbf{p}$ with $m_0c^2 < E(\mathbf{p}) < 2m_0c^2$).

The first bracket of (8) contains the summation over all permitted final states of the electron: $r = 3, 4$ characterizes



Sketch of the polarization

the two spin directions of the final negative energy states. Now we can choose the polarization vectors $\varepsilon_{k,\sigma}$ in such a way that at least one of the polarization vectors, say $\varepsilon_{k,1}$, is orthogonal to $\mathbf{k}$ (see figure). With

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{L^3} \Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k$$

one obtains

$$\begin{aligned} \left(\frac{\text{transitions}}{\text{time}} \right) &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{p,r} \right] \iiint d\omega_k d\vartheta d\varphi \omega_k^2 \\ &\quad \times \sin \vartheta e^2 (E_i - E_f)^2 \frac{1}{\omega_k} \\ &\quad \times \left| \int d^3x \psi_f^{r\dagger}(x) x \psi_i(x) \right|^2 |\varepsilon_{k,2}|^2 x \\ &\quad \times \sin^2 \vartheta \delta(\omega_j - E_i + E_f) \end{aligned} \quad (10)$$

The diagram is useful for a better understanding of (10). With

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin^2 \vartheta = \left[\frac{1}{3} \cos^3 \vartheta - \cos \vartheta \right]_0^\pi = \frac{4}{3},$$

Eq. (10) turns out to be

$$\begin{aligned} \left(\frac{\text{transitions}}{\text{time}} \right) &= \frac{4e^2}{3} \sum_{p,r} (E_i - E_f)^3 \\ &\quad \times \left| \int d^3x \psi_f^{r\dagger}(x) x \psi_i(x) \right|^2, \end{aligned} \quad (11)$$

and we also normalize the final electron states in a box with volume L^3 ($E = E_f$):

$$\psi_f^r = \sqrt{\frac{m_0}{L^3 E}} \omega^r(p, s) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}.$$

These wave functions are normalized to 1:

$$\int_{L^3} d^3x \psi_f^r(x) \psi_f^{r'}(x) = \frac{m_0}{L^3 E} \int_{L^3} d^3x \frac{E}{m_0} \delta_{rr'} = \delta_{rr'} \quad (13)$$

similarly to the wave function for the hydrogen ground state (we choose the case with spin up):

$$\begin{aligned}
\psi_i &= \frac{(2m\alpha)^{3/2}}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{1+\gamma}{2\Gamma(1+\gamma)}} (2m\alpha r)^{\gamma-1} \\
&\times e^{-m\alpha r} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{i(1-\gamma)}{\alpha} \cos \vartheta \\ \frac{i(1-\gamma)}{\alpha} \sin \vartheta e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \\
\gamma &= \sqrt{1-\alpha^2}, \quad e^2 = 4\pi\alpha.
\end{aligned} \tag{14}$$

α is the fine structure constant, i.e. $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$. With [cf. Eq. (6.30)]

$$\omega^{3\dagger}(p, s) = \sqrt{\frac{E+m_0}{2m_0}} \left(\frac{p_z}{2m_0}, \frac{p_-}{E+m_0}, 1, 0 \right),$$

$$\omega^{4\dagger}(p, s) = \sqrt{\frac{E+m_0}{2m_0}} \left(\frac{p_+}{E+m_0}, \frac{-p_z}{E+m_0}, 0, 1 \right)$$

one obtains, with the approximations

$$\frac{1-\gamma}{\alpha} \approx \frac{1-(1-\alpha^2/2)}{\alpha} = \frac{\alpha}{2} \ll 1$$

and the abbreviation

$$a(r) = \frac{(2m\alpha)^{3/2}}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{1+\gamma}{2\Gamma(1+\gamma)}} (2m\alpha r)^{\gamma-1} e^{-m\alpha r}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_r \left| \int d^3x \psi_f^{r\dagger}(x) x \psi_i(x) \right|^2 \approx \frac{1}{2m_0(E+m_0)} \frac{m_0}{L^3 E} \\
&\times \left\{ \left| \iiint r^2 dr d\vartheta d\varphi \sin \vartheta x a(r) \right. \right. \\
&\times \left. \left. e^{i|p||x| \cos \vartheta} (p_z^2 + |p_+|^2) \right\} \\
&= \frac{p^2}{2E(E+m_0)L^3} \left\{ \left| \iiint r^2 dr d\vartheta d\varphi \right. \right. \\
&\times \left. \left. \sin \vartheta r \cos \vartheta a(r) e^{ipr \cos \vartheta} \right|^2 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \left| \iint r^2 dr d\vartheta d\varphi \sin \vartheta r \right. \\
&\times \left. \sin \vartheta \sin \varphi a(r) e^{ipr \cos \vartheta} \right|^2 \\
&+ \left| \iiint r^2 dr d\vartheta d\varphi \sin \vartheta r \right. \\
&\times \left. \sin \vartheta \cos \varphi a(r) e^{ipr \cos \vartheta} \right|^2.
\end{aligned}$$

Performing the φ integration yields

$$\begin{aligned}
&\sum_r \left| \int d^3x \psi_f^{r\dagger}(x) x \psi_i(x) \right|^2 \\
&= \frac{p^2 4\pi^2}{2E(E+m_0)L^3} \left| \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\vartheta r^3 a(r) \right. \\
&\times \left. \sin \vartheta \cos \vartheta e^{ipr \cos \vartheta} \right|^2,
\end{aligned} \tag{17}$$

and with $\gamma \approx 1$ it follows that

$$r^3 a(r) \frac{(2m_0\alpha)^{3/2}}{\sqrt{4\pi}\sqrt{2}} r^3 e^{-m\alpha r}.$$

Insertion of (11) results in

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\text{transitions}}{\text{time}} \right) \\
&= \frac{8e^2\pi m_0^3\alpha^3}{3} \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2 (E_i + E)^3}{L'^3 E (E + m_0)} \\
&\quad \times \left| \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\vartheta r^3 e^{-m\alpha r} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{ipr \cos \vartheta} \right|^2
\end{aligned} \tag{18}$$

with $e^2 = 4\pi\alpha$, and now the ϑ integration is performed:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi d\vartheta \underbrace{\cos \vartheta}_u \underbrace{\sin \vartheta e^{ipr \cos \vartheta}}_{v'} = \frac{1}{ipr} \cos \vartheta e^{ipr \cos \vartheta} \Big|_0^\pi \\
& - \frac{1}{ipr} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta e^{ipr \cos \vartheta} \\
&= \frac{1}{ipr} (e^{ipr} + e^{-ipr}) - \frac{1}{p^2 r^2} e^{ipr \cos \vartheta} \Big|_0^\pi \\
&= \frac{1}{ipr} (e^{ipr} + e^{-ipr}) + \frac{1}{p^2 r^2} (e^{ipr} - e^{-ipr})
\end{aligned} \tag{19}$$

With

$$\int_0^\infty r^n e^{-\alpha r} dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}},$$

it follows that

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\vartheta r^3 e^{-m\alpha r} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{ipr \cos \vartheta} \\
&= \frac{1}{ip} \left(\frac{2}{(m\alpha - ip)^3} + \frac{2}{(m\alpha + ip)^3} \right) \\
&+ \frac{1}{p^2} \left(\frac{1}{(m\alpha - ip)^2} - \frac{1}{(m\alpha + ip)^2} \right) \\
&= -\frac{i}{p} \frac{4m^3\alpha^3 - 12m\alpha p^2}{(m^2\alpha^2 + p^2)^3} + \frac{1}{p} \frac{i4m\alpha}{(m^2\alpha^2 + p^2)^2} \\
&= \frac{i}{p} \frac{16m\alpha p^2}{(m^2\alpha^2 + p^2)^3} = i \frac{16m\alpha p}{(m^2\alpha^2 + p^2)^3}.
\end{aligned} \tag{20}$$

In (18) we replace $\sum_{\mathbf{p}} 1/L'^3$ by $\int d^3p / (2\pi)^3$, which yields

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\text{transitions}}{\text{time}} \right) &= \frac{4 \cdot 8 \cdot \pi^2}{3} 16^2 m_0^5 \alpha^6 \int d^3 p \\
&\times \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{p^4}{(m_0^2 \alpha^2 + p^2)^6} \frac{(E_i - E)^3}{E(E + m_0)} \\
&= \frac{16^3}{3} m_0^5 \alpha^6 \int_0^{\sqrt{3m_0}} dp \frac{p^6}{(m_0^2 \alpha^2 + p^2)^6} \\
&\times \frac{\left(E_i + \sqrt{p^2 + m_0^2} \right)^3}{\sqrt{p^2 + m_0^2} \left(\sqrt{p^2 + m_0^2} + m_0 \right)} \\
&= \frac{16^3}{3} m_0 \alpha^6 \int_0^{\sqrt{3}} dx \frac{x^6}{(\alpha^2 + x^2)^6} \\
&\times \frac{\left(E_i m_0 + \sqrt{x^2 + 1} \right)^3}{\sqrt{x^2 + 1} \left(\sqrt{x^2 + 1} + 1 \right)}. \tag{21}
\end{aligned}$$

The hydrogen ground-state energy is approximately $E_i = m_0 - \alpha^2 m_0/2$. The integral (21) is well defined and yields a finite value, for which we want to estimate the lower bound:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{3}} dx \frac{x^6}{(\alpha^2 + x^2)^6} \frac{\left(E_i/m_0 + \sqrt{x^2 + 1} \right)^3}{\sqrt{x^2 + 1} \left(\sqrt{x^2 + 1} + 1 \right)} \tag{22} \\
&> \int_0^3 dx \frac{x^6}{(\alpha^2 + 3)^6} \frac{(1+1)^3}{2 \cdot 3} \\
&\approx \frac{2^3}{3^6 \cdot 2 \cdot 3} \frac{3^3 \sqrt{3}}{7} = \frac{2^2 \sqrt{3}}{3^4 \cdot 7} \\
&\Rightarrow \left(\frac{\text{transitions}}{\text{time}} \right) > 16 m_0 \alpha^6 \\
&= \frac{16}{137^6} \frac{0.51 \text{MeV}}{6.5 \cdot 10^{-22} \text{MeVs}} \approx 10^9 \frac{1}{\text{s}}.
\end{aligned}$$

If the lower (negative) continuum were empty, then the hydrogen atom would decay in a very short time ($\tau < 10^{-9}$ s). In order to ensure the stability of the hydrogen atom (and of all other atoms) one has to regard the negative energy continuum as fully occupied with electrons, so that the Pauli principle blocks those states from being available for radiative transitions.

12.1 Charge Conjugation

The hole theory leads us also to a new, fundamental symmetry: For the electrons there exist antiparticles, the positrons. In general it is true that for every particle in nature there exists an antiparticle. Now we have to formulate this symmetry mathematically in rigorous way. Thereby we shall see how the wave functions for the positrons follow from the wave functions of the electrons with negative energy, and vice versa.

According to the hole theory a positron is a hole in the filled "sea of electrons with negative energy". According to (12.4-12.7) this positron has the same mass as the electron, positive

energy ($E_{\text{positron}} = -E_{\text{electron of neg. energy}}$), and opposite momentum and charge as the electron with negative energy. There exists a one-to-one relation between solutions of the Dirac equation for electrons with negative energy,

$$\left(i\hbar \not{\partial} - \frac{e}{c} \not{A} - m_0 c\right) \psi = 0, \quad (12.11)$$

and the positron eigenfunctions.

The positron wave function ψ_c has to fulfill the equation

$$\left(i\hbar \not{\partial} + \frac{e}{c} \not{A} - m_0 c\right) \psi_c = 0 \quad (12.12)$$

because positrons should have all the properties of positively charged electrons. Note that the positron wave function ψ_c should be a solution of (12.12) with positive energy!

Remark. It is of no consequences which one of (12.11) or (12.12) is labelled as the first (particle). Historically (12.11) was the starting point for electrons, but (12.12) could be considered as the particle equation, as well. The sign of the charge e of the particles described in the initial equation does not matter either: If we had chosen (12.12) to start with, we would have obtained a spectrum of solutions for the free positrons like that known for electrons from (12.11) (see Fig. 12.4). The negative energy states would then have been filled with positrons ($\bullet$) in the framework of the hole theory, while electrons would then have been positron holes with wave functions given by the negative energy solutions of (12.12). It is now our aim to find an operator which connects the solutions ψ_c of (12.12) with ψ of (12.11). This operator must change the relative sign of $i\hbar \not{\partial}$ and

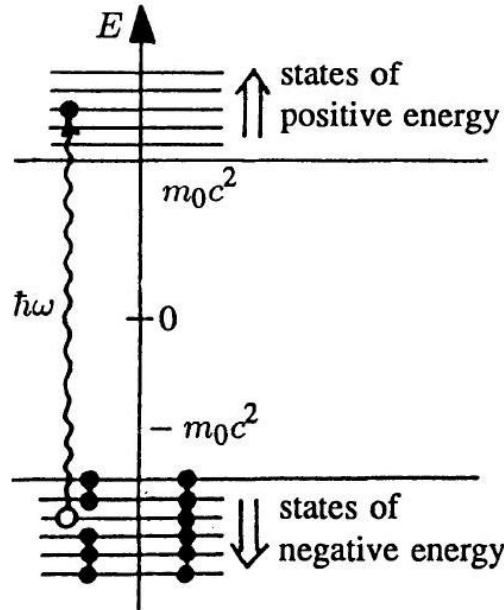


Fig. 12.4. The vacuum of the hole theory based on positrons as initial particles. Here a positron hole is an electron. As marked by the full circles ($\bullet$) the states of negative energy are occupied with positrons

(e/c) $\not{A}$ This is simply done by complex conjugation:

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^* = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad , \quad A_\mu^* = A_\mu \quad (12.13)$$

The electromagnetic four-potential A_μ is always real; thus we take the complex conjugate of (12.11) and after the conversion of all signs we arrive at

$$\left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{e}{c} A_\mu \right) \gamma^{\mu*} + m_0 c \right] \psi^* = 0 \quad (12.14)$$

Now we wish to find a non-singular matrix $\hat{U} \equiv \hat{C}\gamma^0$ in such a way that

$$\hat{U} \gamma^{\mu*} \hat{U}^{-1} = -\gamma^\mu \quad (12.15)$$

holds. Before doing so, however, let us first proceed as if $\hat{U}$ is already known. After multiplication with $\hat{U}$ (12.14) transforms into

$$\left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{e}{c} A_\mu \right) \hat{U} \gamma^{\mu*} \hat{U}^{-1} + m_0 c \right] \hat{U} \psi^* = 0$$

or, with equation (12.15),

$$\begin{aligned} & \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{e}{c} A_\mu \right) \gamma^\mu - m_0 c \right] \hat{U} \psi^* = 0 \text{ or} \\ & \left[i\hbar \phi + \frac{e}{c} A - m_0 c \right] \hat{U} \psi^* = 0. \end{aligned} \quad (12.16)$$

For the positron wave function a comparison of (12.16) with (12.12) yields

$$\psi_c = \hat{U} \psi^* \equiv \hat{C} \gamma^0 \psi^* = \hat{C} \bar{\psi}^{\mathbf{T}}$$

The superscript " T " indicates "transposition" and means

$$\bar{\psi}^{\mathbf{T}} = (\psi^\dagger \gamma^0)^{\mathbf{T}} = \gamma^0{}^{\mathbf{T}} \psi^{\dagger\mathbf{T}} = \gamma^0 (\psi^*)^{\mathbf{T}} = \gamma^0 \psi^* \quad (12.17)$$

because of $\gamma^0{}^{\mathbf{T}} = \gamma^0$ and $\psi^\dagger = \psi^*{}^{\mathbf{T}}$. To determine $\hat{U}$ explicitly we rewrite (12.15) as

$$\hat{C} \gamma^0 \gamma^{\mu*} (\hat{C} \gamma^0)^{-1} = \hat{C} \gamma^0 \gamma^{\mu*} \gamma^0 \hat{C}^{-1} = -\gamma^\mu. \quad (12.18)$$

Now, according to our explicit representation [Chap. 3, (3.13)] for the γ matrices, i.e.

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ -\hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (12.19)$$

the identity

$$\gamma^0 \gamma^{\mu*} \gamma^0 = \gamma^{\mu\mathbf{T}} \quad (12.20)$$

can easily be derived. Thus for (12.18) we get

$$(\hat{C}^{-1})^{\mathbf{T}} \gamma^\mu = (\hat{C})^{\mathbf{T}} = -\gamma^{\mu\mathbf{T}}, \quad (12.21)$$

and, because of

$$\gamma^1{}^{\mathbf{T}} = -\gamma^1, \quad \gamma^2{}^{\mathbf{T}} = \gamma^2, \quad \gamma^3{}^{\mathbf{T}} = -\gamma^3, \quad \gamma^0{}^{\mathbf{T}} = \gamma^0, \quad (12.22)$$

$(\hat{C})^{\mathbf{T}}$ must commute with γ^1 and γ^3 and anticommute with γ^2 and γ^0 . Therefore

$$\hat{C} = i\gamma^2 \gamma^0 \quad (12.23)$$

is a useful choice for the operator $\hat{C}$, and it holds that

$$\hat{C} = i\gamma^2 \gamma^0 = -\hat{C}^{-1} = -\hat{C}^\dagger = -\hat{C}^{\mathbf{T}}. \quad (12.24)$$

This clearly illustrates the non-singularity of $\hat{C}$ (the inverse matrix is explicitly constructed). Of course (12.23) is valid in the special representation (12.19), but $\hat{C}$ can easily be given in every other representation via a unitary transformation. The phase of the operator $\hat{C}$ is rather arbitrarily fixed by the factor i in (12.24). Indeed, the choice of the phase does not influence at all our current investigations. Thus the charge-conjugate state of $\psi(x)$ is given by

$$\psi_c = \hat{C}\psi \equiv \hat{C}\gamma^0 \hat{K}\psi = \hat{C}\gamma^0 \psi^* = \hat{C}\bar{\psi}^T = i\gamma^2 \psi^*(x), \quad (12.25)$$

where $\hat{K}$ is the operator of complex conjugation. According to (12.12) the wave equation for $\psi_c(x)$ differs from the wave equation for $\psi(x)$ (12.11) just by the sign of the charge. Thus it follows: If $\psi(x)$ describes the motion of a Dirac particle with mass m_0 and charge e in a potential $A_\mu(x)$, then $\psi_c(x)$ represents the motion of a Dirac particle with the same mass m_0 and opposite charge $(-e)$ in the same potential $A_\mu(x)$. The spinors ψ and ψ_c are charge conjugate to each other. With the relations (12.20), (12.25) and $\gamma^{2T} = \gamma^2$, it holds that

$$\begin{aligned} (\psi_c)_c &= (i\gamma^2 \psi^*(x))_c = i\gamma^2 (i\gamma^2 \psi^*(x))^* = \gamma^2 \gamma^{2*} \psi(x) = \gamma^2 \gamma^0 \gamma^{2T} \gamma^0 \psi(x) \\ &= \gamma^2 \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \psi(x) = -\gamma^2 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^0 \psi(x) = \psi(x) \end{aligned} \quad (12.26)$$

that is

$$(\psi_c)_c = \psi \quad (12.27)$$

Thus the correspondence between ψ and ψ_c is reciprocal. Besides, we draw the following interesting conclusion about the expectation values of operators. Let

$$\langle \hat{Q} \rangle = \langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle \quad (12.28)$$

be the expectation value of an operator $\hat{Q}$ in the state ψ . Then the expectation value of the same operator $\hat{Q}$ in the charge-conjugate state ψ_c is given by

$$\begin{aligned} \langle \hat{Q} \rangle_c &= \langle \psi_c | \hat{Q} | \psi_c \rangle = \int \psi_c^\dagger \hat{Q} \psi_c d^3x = \int (i\gamma^2 \psi^*)^\dagger \hat{Q} i\gamma^2 \psi^* d^3x = \int \psi^{*\dagger} \gamma^{2\dagger} \hat{Q} \gamma^2 \psi^* d^3x \\ &= \int \psi^{*\dagger} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \hat{Q} \gamma^2 \psi^* d^3x = - \int \psi^{*\dagger} \gamma^2 \gamma^0 \gamma^0 \hat{Q} \gamma^2 \psi^* d^3x \\ &= - \int \psi^{*\dagger} \gamma^2 \hat{Q} \gamma^2 \psi^* d^3x = - \left(\int \psi^\dagger (\gamma^2 \hat{Q} \gamma^2)^* \psi d^3x \right)^* \\ &= - \langle \psi | \gamma^{2*} \hat{Q}^* \gamma^{2*} | \psi \rangle^* = - \langle \psi | \gamma^2 \hat{Q}^* \gamma^2 | \psi \rangle^* \end{aligned} \quad (12.29)$$

In this manner one easily proves the following relations (cf. Exercise 12.2):

- (a) $\langle \hat{\beta} \rangle_c = -\langle \hat{\beta} \rangle$,
- (b) $\langle \mathbf{x} \rangle_c = \langle \mathbf{x} \rangle$,
- (c) $\langle \hat{\alpha}_i \rangle_c = \langle \gamma^0 \gamma^i \rangle_c = \langle \hat{\alpha}_i \rangle$,
- (d) $\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle_c = -\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle$,
- (e) $\psi_c^\dagger \psi_c = \psi^\dagger \psi$,
- (f) $\psi_c^\dagger \hat{\boldsymbol{\alpha}} \psi_c = \psi^\dagger \hat{\boldsymbol{\alpha}} \psi$,
- (g) $\langle \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \rangle_c = -\langle \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \rangle$,
- (h) $\langle \hat{\mathbf{L}} \rangle_c = -\langle \hat{\mathbf{L}} \rangle$, $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}$,
- (i) $\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle_c = -\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle$, $\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}$.

Because the Hamiltonians of both Dirac equations (12.14) and (12.12) are given by

$$\begin{aligned}
\hat{H}(e) &\equiv c\hat{\alpha}^i \left(\hat{p}_i + \frac{e}{c} A_i \right) + eA_0 + \hat{\beta}m_0c^2 \\
&= c\hat{\alpha} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + eA_0 + \hat{\beta}m_0c^2
\end{aligned} \tag{12.31a}$$

or

$$\begin{aligned}
\hat{H}(-e) &\equiv c\hat{\alpha}^i \left(\hat{p}_i - \frac{e}{c} A_i \right) - eA_0 + \hat{\beta}m_0c^2 \\
&= c\hat{\alpha} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) - eA_0 + \hat{\beta}m_0c^2,
\end{aligned} \tag{12.31b}$$

one also deduces with the help of (12.29) the relation (cf. Example 12.3):

$$\langle \hat{H}(-e) \rangle_c = -\langle \hat{H}(e) \rangle. \tag{12.32}$$

The results of (12.30) and (12.31) are quite interesting. Accordingly the charge-conjugate solutions ψ_c have the same probability density and probability current density in all spacetime points (12.30e,f). Therefore the electric charge density and the electric current density for ψ and ψ_c are contragredient. Equations (12.30) and (12.32) express the important result that a charge-conjugated state ψ_c has the opposite momentum and energy to the state ψ . The relations of the hole theory expressed in (12.4) and (12.7) read in their most precise form: charge conjugation changes the sign of the momentum and energy.

12.2 Expectation Values of Some Operators in Charge-Conjugate States

Problem. Prove the relations (12.30).

Solution

According to (12.9) the expectation value of an operator $\hat{Q}$ with regard to a charge-conjugate state ψ_c is given by

$$\begin{aligned}
\langle \hat{Q} \rangle_c &= \langle \psi_c | \hat{Q} | \psi_c \rangle \\
&= - \left[\int \psi^\dagger(x) \gamma^2 \hat{Q}^* \gamma^2 \psi(x) d^3x \right]^* \\
&= - \langle \psi | \gamma^2 \hat{Q}^* \gamma^2 | \psi \rangle^*
\end{aligned} \tag{1}$$

From this we conclude in particular:

a) $\hat{Q} = \hat{\beta} = \gamma^0$:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\beta} \rangle_c &= - \langle \psi | \gamma^2 \gamma^0 \gamma^2 | \psi \rangle^* = \langle \psi | \gamma^2 \gamma^2 \gamma^0 | \psi \rangle^* \\
&= - \langle \psi | \gamma^0 | \psi \rangle^* = - \langle \psi | \gamma^0 | \psi \rangle,
\end{aligned}$$

and therefore

$$\langle \hat{\beta} \rangle_c = -\langle \hat{\beta} \rangle.$$

b) $\hat{Q} = \hat{\alpha}_i = \gamma^0 \gamma^i$: first case ($i = 2$):

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\alpha}_2 \rangle_c &= - \langle \psi | \gamma^2 \gamma^0 (-\gamma^2) \gamma^2 | \psi \rangle^* \\
&= \langle \psi | \gamma^0 \gamma^2 | \psi \rangle = \langle \hat{\alpha}_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Second case ($i = 1, 3$):

$$\begin{aligned}\langle \hat{\alpha}_i \rangle_c &= -\langle \psi | \gamma^2 \gamma^0 (+\gamma^i) \gamma^2 | \psi \rangle^* = -\langle \psi | \gamma^0 \gamma^2 \gamma^2 \gamma^i | \psi \rangle^* \\ &= -\langle \psi | \gamma^i \gamma^0 | \psi \rangle^* = +\langle \psi | \gamma^0 \gamma^i | \psi \rangle \\ &= \langle \hat{\alpha}_i \rangle\end{aligned}$$

and therefore

$$\langle \hat{\alpha}_i \rangle_c = \langle \hat{\alpha}_i \rangle \quad i = 1, 2, 3.$$

c) $\hat{Q} = \hat{\mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mathbf{x}} \rangle_c &= -\left[\int \psi^\dagger(\mathbf{x}) \gamma^2(\hat{\mathbf{x}}) \gamma^2 \psi(\mathbf{x}) d^3x \right]^* \\ &= \left[\int \psi^\dagger(\mathbf{x}) \mathbf{x} \psi(\mathbf{x}) d^3x \right]^* \\ &= \langle \psi | \hat{\mathbf{x}} | \psi \rangle^* = \langle \psi | \hat{\mathbf{x}} | \psi \rangle\end{aligned}$$

and therefore

$$\langle \hat{\mathbf{x}} \rangle_c = \langle \hat{\mathbf{x}} \rangle.$$

d) $\hat{Q} = \hat{\mathbf{p}} = (\hbar/i)\nabla$:

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle_c &= -\left[\int \psi^\dagger(\mathbf{x}) \gamma^2 \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \gamma^2 \psi(\mathbf{x}) d^3x \right]^* \\ &= -\left[\int \psi^\dagger(\mathbf{x}) \frac{\hbar}{i} \nabla \psi(\mathbf{x}) d^3x \right]^* \\ &= -\langle \psi | \hat{\mathbf{p}} | \psi \rangle^* = -\langle \psi | \hat{\mathbf{p}} | \psi \rangle,\end{aligned}$$

and therefore

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle_c = -\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle.$$

e) Because $\psi^\dagger \psi$ is a real number, the following holds:

$$\begin{aligned}\psi_c^\dagger \psi_c &= (\psi^{*\dagger} \gamma^{2\dagger} (-i)) (i \gamma^2 \psi^*) = -\psi^{*\dagger} \gamma^2 \gamma^2 \psi^* = \psi^{*\dagger} \psi^* \\ &= \psi^{\mathbf{T}} \psi^* = (\psi^*{}^{\mathbf{T}} \psi)^{\mathbf{T}} = (\psi^\dagger \psi)^{\mathbf{T}} = \psi^\dagger \psi.\end{aligned}$$

From this we conclude that

$$\psi_c^\dagger \psi_c = \psi^\dagger \psi$$

f) If we apply the identity

$$\psi_c^\dagger \hat{\alpha}_i \psi_c = \psi^{*\dagger} \gamma^{2\dagger} \hat{\alpha}_i \gamma^2 \psi^* = -\psi^{\mathbf{T}} \gamma^2 \gamma^0 \gamma^i \gamma^2 \psi^*$$

to the cases $i = 2$

$$\gamma^2 \gamma^0 \gamma^2 \gamma^2 = -\gamma^2 \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^2 = \hat{\alpha}_2 = -\hat{\alpha}_2^{\mathbf{T}}$$

and $i = 1, 3$

$$\gamma^2 \gamma^0 \gamma^i \gamma^2 = \gamma^2 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^i = -\hat{\alpha}_i = -\hat{\alpha}_i^{\mathbf{T}},$$

we get the relation

$$\psi_c^\dagger \hat{\alpha}_i \psi_c = \psi^{\mathbf{T}} \hat{\alpha}_i^{\mathbf{T}} (\psi^\dagger)^{\mathbf{T}} = (\psi^\dagger \hat{\alpha}_i \psi)^{\mathbf{T}} = \psi^* \hat{\alpha}_i \psi$$

because the expression in parentheses is an ordinary number; hence (compare with b):

$$\psi_c^\dagger \hat{\alpha} \psi_c = \psi^\dagger \hat{\alpha} \psi$$

$$\text{g) } \hat{Q} = \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\sigma} \end{pmatrix}:$$

$$\langle \hat{\Sigma}_i \rangle_c = -\langle \psi | \gamma^2 \hat{\Sigma}_i^* \gamma^2 | \psi \rangle^*,$$

with

$$\begin{aligned}
\gamma^2 \hat{\Sigma}_i^* \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_2 \\ -\hat{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i^* & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_i^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_2 \\ -\hat{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_i^* \\ -\hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_i^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_2 \\ -\hat{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= - \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_i^* \hat{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_i^* \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

We get for $i = 2$

$$-\hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_2^* \hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_2 = -\hat{\sigma}_2^* = \hat{\sigma}_2^{*T},$$

and $i = 1, 3$

$$-\hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_i^* \hat{\sigma}_2 = -\hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_i^{*T},$$

and therefore

$$\begin{aligned}
\langle \Sigma_i \rangle &= - \left\langle \psi \left| \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i^{*T} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_i^{*T} \end{pmatrix} \right| \psi \right\rangle^* \\
&= - \left\langle \psi \left| \Sigma_i^\dagger \right| \psi \right\rangle^* = - \left\langle \psi \left| \hat{\Sigma}_i \right| \psi \right\rangle,
\end{aligned}$$

i.e.

$$\langle \hat{\Sigma}_i \rangle_c = - \langle \hat{\Sigma}_i \rangle.$$

h) $\hat{Q} = \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hbar/i\nabla$:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{L}} \rangle_c &= - \left[\int \psi^\dagger(\mathbf{x}) \gamma^2 \left(\hat{\mathbf{x}} \times \frac{\hbar}{i} \nabla \right)^* \gamma^2 \psi(\mathbf{x}) d^3x \right]^* \\
&= - \left[\int \psi^\dagger(\mathbf{x}) \left(\mathbf{x} \times \frac{\hbar}{i} \nabla \right) \psi(\mathbf{x}) d^3x \right]^* \\
&= - \langle \psi | \hat{\mathbf{L}} | \psi \rangle^* = - \langle \psi | \hat{\mathbf{L}} | \psi \rangle,
\end{aligned}$$

i.e.

$$\langle \hat{\mathbf{L}} \rangle_c = - \langle \hat{\mathbf{L}} \rangle$$

i) $\hat{Q} = \hat{\mathbf{J}}$:

$$\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle_c = \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle_c + \frac{1}{2} \langle \hat{\Sigma} \rangle_c = - \langle \hat{\mathbf{L}} \rangle - \frac{1}{2} \langle \hat{\Sigma} \rangle,$$

i.e.

$$\langle \hat{\mathbf{J}} \rangle_c = - \langle \hat{\mathbf{J}} \rangle.$$

EXERCISE

12.3 Proof of $\langle \hat{H}(-e) \rangle_c = - \langle \hat{H}(e) \rangle$

Problem. Prove the relation $\langle \hat{H}(-e) \rangle_c = - \langle \hat{H}(e) \rangle$ and interpret the result.

Solution

From (12.31a) and (12.31b) we have

$$\hat{H}(e) = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}) + eA_0 + \hat{\beta}m_0c^2,$$

$$\hat{H}(-e) = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}) - eA_0 + \hat{\beta}m_0c^2.$$

Using the relations derived in Exercise 12.2 we find

$$\langle \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \rangle_c = \left[\int \psi^\dagger(\mathbf{x}) (-\gamma^2 \hat{\boldsymbol{\alpha}}^* \gamma^2) \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \psi(\mathbf{x}) d^3x \right].$$

In Exercise (12.2b) we derived the relation $-\gamma^2 \hat{\boldsymbol{\alpha}}^2 \gamma^2 = \gamma^\dagger \gamma^{0\dagger} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}^\dagger$. Therefore

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \rangle_c &= - \langle \psi | \hat{\boldsymbol{\alpha}}^\dagger \cdot \hat{\mathbf{p}} | \psi \rangle = - \langle \psi | \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}}^\dagger | \psi \rangle \\
&= - \langle \psi | \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} | \psi \rangle,
\end{aligned}$$

i.e.

$$\langle \hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \rangle_c = -\langle \hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \rangle. \quad (3)$$

In addition,

$$\langle \hat{\beta} \rangle_c = -\langle \hat{\beta} \rangle,$$

$$\langle e \hat{\alpha} \cdot \mathbf{A} \rangle_c = \langle e \hat{\alpha} \cdot \mathbf{A} \rangle,$$

$$\langle e A_0 \rangle_c = \langle e A_0 \rangle.$$

From (1) to (6) follows

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}(-e) \rangle_c &= -c \langle \hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \rangle + e \langle \hat{\alpha} \cdot \mathbf{A} \rangle \\ &\quad - \langle e A_0 \rangle - \langle \hat{\beta} m_0 c^2 \rangle = -\langle \hat{H}(e) \rangle, \end{aligned}$$

i.e.

$$\langle \hat{H}(-e) \rangle_c = -\langle \hat{H}(e) \rangle.$$

This result means that the negative energy solutions of the Dirac equation correspond to the charge-conjugate solutions of positive energy (and vice versa). In Exercise 12.2 we derived that these solutions have opposite spin and momentum, properties which allow us to interpret the solutions of negative energy (charge e , spin s , momentum p) as wave functions of particles with positive energy (charge $-e$, spin $-s$ and momentum $-\mathbf{p}$). Compare this with the discussion following somewhat later on charge conjugation of bound states!

EXERCISE

12.6.10 The Hole Theory 2

12.4 Effect of Charge Conjugation on an Electron with Negative Energy

Problem. Examine in detail the influence of the transformation

$$\psi_c = \hat{C} \bar{\psi}^T = i\gamma^2 \psi^*$$

on the eigenfunctions of an electron at rest with negative energy.

Solution

A (free) electron at rest is described by the wave function (6.1). For an electron with negative energy and spin down ($\downarrow$) we have

$$\psi^4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+i(m_0 c^2/\hbar)t}.$$

The corresponding solution with positive energy and spin up reads

$$\begin{aligned} (\psi^4)_c &= i\gamma^2 \psi^{4*} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} e^{+i(m_0 c^2/\hbar)t} \right)^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(m_0 c^2/\hbar)t} = \psi^1. \end{aligned} \quad (2)$$

Similarly, for an electron with negative energy and spin up ($\uparrow$)

$$\psi^3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(m_0c^2/\hbar)t},$$

we get the positron wavefunction for positive energy and spin down ($\downarrow$)

$$\begin{aligned} (\psi^3)_c &= i\gamma^2\psi^{3*} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} e^{+i(m_0c^2/\hbar)t} \right)^* \\ &= (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^3}} e^{-i(m_0c^2/\hbar)t}. \end{aligned} \quad (4)$$

Here an inessential phase factor (-1) appears. This example demonstrates explicitly the influence of charge conjugation: The absence of an electron at rest with negative energy and spin $\uparrow$ ($\downarrow$) is equivalent to the presence of a positron at rest with positive energy and spin $\downarrow$ ($\uparrow$). If there are no fields present, there is no difference between electron and positron: From (2) and (4) one sees that the transformation of charge conjugation leads back to other electron solutions in the field-free case. This example makes the rather strange re-definition of the spinors ω^3 and ω^4 [see (6.56)] conceivable: An electron of negative energy with spin $\uparrow$ ($\downarrow$) corresponds to a positron with spin $\downarrow$ ($\uparrow$). The $v(x, s)$ spinors of (6.56) describe positrons with spin projection s .

EXERCISE

12.5 Representation of Operators for Charge Conjugation and Time Reversal

Let γ^μ and $\gamma^{\mu'}$ be two representations of the γ matrices connected by a unitary transformation

$$\gamma^\mu = \hat{U} \gamma^{\mu'} \hat{U}^{-1}.$$

Problem. a) Show that

$$\hat{C}' = \hat{U}^{-1} \hat{C} \left(\hat{U}^T \right)^{-1},$$

where $\hat{C}$ and $\hat{C}'$ are the respective matrices for the transformation of charge conjugation.

b) Are the relations

$$\hat{C} = -\hat{C}^{-1} = -\hat{C}^\dagger = -\hat{C}^T = i\gamma^2\gamma^0$$

also valid for $\hat{C}'$?

c) Analogously free

$$\hat{T}_0 = i\gamma^1\gamma^3$$

from the common representation of γ matrices.

Solution

a) If ψ solves the Dirac equation

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{e}{c}\gamma^\mu A_\mu - m_0c)\psi = 0,$$

the charge conjugated equation is

$$(\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{e}{c}\gamma^\mu A_\mu - m_0c)\psi_c = 0.$$

Inserting the transformation (1) into (5a), one deduces the transformation for the wave functions as $(\gamma^{\mu'} = \hat{U}^{-1}\gamma^\mu\hat{U})$

$$\psi' = \hat{U}^{-1}\psi$$

and analogously

$$\psi'_c = \hat{U}^{-1}\psi_c.$$

The charge conjugated wave function follows from

$$\psi_c = \hat{C}\bar{\psi}^T$$

With (7), (8) and the relation $\gamma^{0*} = \gamma^0 = \gamma^{0T}$

$$\bar{\psi}^T = (\psi^\dagger\gamma^0)^T = \gamma^{0T}\psi^* = \gamma^0\psi^*$$

we obtain

$$\psi'_c = \hat{U}^{-1}\hat{C}\bar{\psi}^T = \hat{U}^{-1}\hat{C}\gamma^0\psi^*.$$

Because of

$$\psi'^* = (\hat{U}^{-1})^*\psi^* \text{ and } \psi^* = \hat{U}^*\psi'^*$$

it is valid that

$$\psi'_c = \hat{U}^{-1}\hat{C}\gamma^0\hat{U}^*\psi'^*.$$

Further we obtain

$$\begin{aligned} \gamma^{0'*} &= (\hat{U}^{-1})^*\gamma^{0*}\hat{U}^* = (\hat{U}^{-1})^*\gamma^0\hat{U}^* \\ &= \hat{U}^T\gamma^0(\hat{U}^{-1})^T = (\hat{U}^{-1}\gamma^0\hat{U})^T = \gamma^{0'T} \end{aligned} \quad (12)$$

Now we use the unitarity of the transformation $\hat{U}$

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger \equiv (\hat{U}^T)^*,$$

so that (11) leads to

$$\begin{aligned} \psi'_c &= \hat{U}^{-1}\hat{C}\gamma^0\hat{U}^*\psi'^* \\ &= \hat{U}^{-1}\hat{C}(\hat{U}^*\hat{U}^{*-1})\gamma^0\hat{U}^*\psi'^* \\ &= \hat{U}^{-1}\hat{C}\hat{U}^*(\hat{U}^{*-1}\gamma^0\hat{U}^*)\psi'^* \\ &= \hat{U}^{-1}\hat{C}\hat{U}^*\gamma^{0'T}\psi'^{*'} \\ &= \hat{U}^{-1}\hat{C}\hat{U}^*(\psi'^{\dagger}\gamma^{0'})^T = \hat{U}^{-1}\hat{C}\hat{U}^*\bar{\psi}'^T \end{aligned} \quad (14)$$

Comparing this equation with the definition of $\hat{C}'$

$$\psi'_c = \hat{C}'\bar{\psi}'^T$$

we immediately get

$$\hat{C}' = \hat{U}^{-1}\hat{C}(\hat{U}^T)^{-1}. \text{ b) We analyse the various relations (3) one after another}$$

$$\begin{aligned} C'^T &= \left[\hat{U}^{-1}\hat{C}(\hat{U}^T)^{-1} \right]^T = \hat{U}^{-1}\hat{C}^T(\hat{U}^{-1})^T \\ &= -\hat{U}^{-1}\hat{C}(U^T)^{-1} = -\hat{C}'. \end{aligned} \quad (17)$$

This relation is thus conserved. For arbitrary unitary matrices $\hat{U}$, with $\hat{U} = \hat{U}^*$, we have on the other hand:

$$\begin{aligned}\hat{C}'^\dagger &= \left[\hat{U}^{-1} \hat{C} (\hat{U}^\text{T})^{-1} \right]^\dagger = \left[(\hat{U}^\text{T})^{-1} \right]^\dagger \hat{C}^\dagger (\hat{U}^{-1})^\dagger \\ &= \hat{U}^\text{T} \hat{C}^\dagger \hat{U} = -\hat{U}^\text{T} \hat{C} \hat{U} \neq \hat{C}',\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}\hat{C}'^* &= \hat{U}^\text{T} \hat{C}^* \hat{U} = \hat{U}^\text{T} \hat{C} \hat{U} \neq \hat{C}' \quad (\hat{C} \text{ is real}), \\ (\hat{C}')^{-1} &= \hat{U}^\text{T} \hat{C}^{-1} \hat{U} = -\hat{U}^\text{T} \hat{C} \hat{U} = \hat{C}'^\dagger \neq -\hat{C}', \\ i\gamma^{0'} \gamma'_0 &= i\hat{U}^{-1} \gamma^2 \hat{U} \hat{U}^{-1} \gamma^0 \hat{U} = i\hat{U}^{-1} \gamma^2 \gamma^0 \hat{U} \\ &= \hat{U}^{-1} \hat{C} \hat{U} \neq \hat{U}^{-1} \hat{C} (\hat{U}^\text{T})^{-1} = \hat{C}'\end{aligned}$$

Remark. For real matrices $\hat{U}$ ($\hat{U} = \hat{U}^*$) all relations are still conserved. equation

c) The operator of time inversion is defined by the

$$\psi_T(t') = \hat{T}_0 \psi^*(t),$$

where $\psi_T(t')$ is the time inverse transformed spinor with $t' = -t$. We will proceed analogously to a) and obtain

$$\begin{aligned}\psi'_T(t') &= \hat{U}^{-1} \psi_T(t') = \hat{U}^{-1} \hat{T}_0 \psi^*(t) \\ &= \hat{U}^{-1} \hat{T}_0 \hat{U}^* \psi'^*(t) = \hat{T}'_0 \psi'^*(t),\end{aligned}\tag{23}$$

i.e.

$$\hat{T}'_0 = \hat{U}^{-1} \hat{T}_0 (\hat{U}^\text{T})^{-1}.$$

12.2 Charge Conjugation of Eigenstates with Arbitrary Spin and Momentum

Let $\psi(x)$ be an arbitrary plane wave with momentum $\mathbf{p}$. We know how by use of the projection operators [see (7.8), (7.21)] to construct from $\psi(x)$ plane waves of the fourmomentum $p^\mu = \{\epsilon p^0, \mathbf{p}\}$ with $p^0 = +c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0 c^2}$ and spin $s^\mu = \{s^0, s\}$, namely

$$\psi_{\epsilon ps}(x) = \left(\frac{\epsilon \not{p} + m_0 c}{2m_0 c} \right) \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \psi(x).\tag{12.33}$$

These plane waves have positive or negative energy for $\epsilon = \pm 1$, respectively and spin in the s direction. Because of

$$[\hat{C}, \gamma_5]_- = [i\gamma^2 \gamma^0, i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3]_- = 0\tag{12.34}$$

and

$$\begin{aligned}\gamma_5^\text{T} &= (i\gamma^0 \gamma^2 \gamma^2 \gamma^3)^\text{T} \\ &= i\gamma^3 \text{ }^\text{T} \gamma^2 \text{ }^\text{T} \gamma^1 \text{ }^\text{T} \gamma^0 \text{ }^\text{T} \\ &= i(-\gamma^3) (\gamma^2) (-\gamma^1) \gamma^0 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma_5 \\ &= i\gamma^0 \gamma^{3*} \gamma^0 \gamma^{0*} \gamma^{2*} \gamma^0 \gamma^{0*} \gamma^{1*} \gamma^0 \gamma^{0*} \gamma^{0*} \gamma^0\end{aligned}$$

[using (12.20)]

$$\begin{aligned}&= i\gamma^0 \gamma^{3*} \gamma^{2*} \gamma^{1*} \gamma^{0*} \gamma^0 = -i\gamma^{3*} \gamma^{2*} \gamma^{1*} \gamma^{0*} \\ &= -i\gamma^{0*} \gamma^{1*} \gamma^{2*} \gamma^{3*} = \gamma_5^*\end{aligned}\tag{12.35}$$

after charge conjugation (12.33) yields the state

$$\begin{aligned}
 (\psi_{\epsilon ps})_c &= \hat{C} \bar{\psi}_{\epsilon ps}^T = \hat{C} \gamma^0 \psi_{\epsilon ps}^* \\
 &= \hat{C} \gamma^0 \left(\frac{\epsilon \not{p} + m_0 c}{2m_0 c} \right)^* \left(\frac{1 + \gamma_5 \phi}{2} \right)^* \psi^* \\
 &= \hat{C} \gamma^0 \left(\frac{\epsilon \not{p} + m_0 c}{2m_0 c} \right)^* \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right)^* (\hat{C} \gamma^0)^{-1} \hat{C} \gamma^0 \psi^*.
 \end{aligned} \tag{12.36}$$

From (12.18) we get

$$\hat{C} \gamma^0 \gamma^{\mu*} (\hat{C} \gamma^0)^{-1} = -\gamma^\mu$$

and, further,

$$p^{\mu*} = +p^\mu, \tag{12.37}$$

because only the momentum (a real number), not the operator of the momentum, appears in the projector [see (7.8)]. Therefore from (12.36), with the aid of (3.1) and with $\gamma^0 \gamma_5 \gamma^0 = -\gamma_5$, we get

$$\begin{aligned}
 (\psi_{\epsilon ps})_c &= \left(\frac{-\epsilon \not{p} + m_0 c}{2m_0 c} \right) \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \hat{C} \gamma^0 \psi^* \\
 &= \left(\frac{-\epsilon \not{p} + m_0 c}{2m_0 c} \right) \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \psi_c.
 \end{aligned} \tag{12.38}$$

The charge conjugated solution of $\psi_{\epsilon ps}$ (12.33) thus has the same polarization s_μ but opposite energy and momentum ($-\epsilon p^\mu$) as the original

Solution

The latter fact is expressed by $-\epsilon p = -\epsilon \{p^0, \mathbf{p}\}$. The inversion of momentum and energy was expected, but (naively) so was the inversion of the polarization s_μ . To understand why the polarization is not changed under charge conjugation, let us remember (6.56), where the spin projection (polarization) of electrons with negative energy is indeed defined with inverted sign. The same is also expressed in (7.19) and (7.20).

12.6.11 The Hole Theory 3

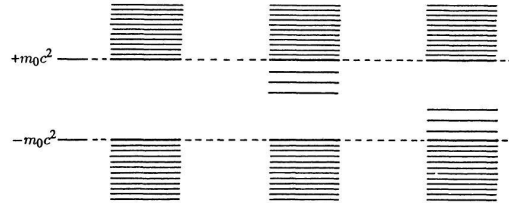
12.3 Charge Conjugation of Bound States

We now consider an electron in an attractive Coulomb potential:

$$eA_0(r) = -\frac{Ze^2}{r} \tag{12.39}$$

An electron state of negative energy corresponds via charge conjugation to a state of positive energy of a particle with the same mass m_0 but opposite charge (i.e. a positron) in the same potential or - which amounts to the same - a state of an electron in a repulsive potential. Due to this correspondence the energy changes its sign, and, because of the γ^2 matrix in the operator $\hat{C} \gamma^0 = i\gamma^2$, the large (upper) and small (lower) components are exchanged under charge conjugation, but the densities and current densities remain the

same.



- (a)
- (b)
- (c)

The spectrum of an electron in a repulsive potential is shown in Fig. 12.5c. It shows a series of bound states (the same number as for an electron in an attractive potential case b) which lie near the lower continuum. Switching on the repulsive potential adiabatically, these bound positron states emerge from the lower continuum; analogously to the bound electron states, which are pulled down from the upper continuum while switching on the attractive potential (Fig. 12.5b). The positive energy continuum in the repulsive potential corresponds exactly to the negative energy continuum in the attractive potential. This has important consequences for the construction of the vacuum ² in the

Fig. 12.5. Energy spectrum of a Dirac electron in an attractive Coulomb potential, a) free electron without potential, b) electron in an attractive potential $-Ze^2/r$, c) electron in a repulsive potential $+Ze^2/r$ hole and field theory. Having defined earlier the vacuum state as a Dirac sea of negative energy states filled up with electrons, we can now, because of the equality of electrons and positrons (charge conjugation symmetry), consider the vacuum as a "symmetrized sea of electrons and positrons" (see Fig. 12.6a below). A one-electron state is visualized in Fig. 12.6b. In this example the electron occupies the second strongest bound level. It is not distinguishable from a corresponding positron hole in its second strongest bound level (emerged out of the positron sea of negative energy into the gap $-m_0c^2 \leq E \leq m_0c^2$). Both configurations exist equally beside each other. If they were distinguishable, then no particle-antiparticle symmetry (charge conjugation symmetry) would exist. The existence of this symmetry allows for the suppression of one half of the figures (usually the positron side) in Figs. 12.6a and b).

We note that the vacuum state defined in this symmetrized form obviously has total charge zero, but infinitely large energy. The latter must be renormalized to zero, a subject that is tackled in quantum electrodynamics.

From earlier studies (Exercises and Examples 9.6 to 9.9), we know that in this case the spectrum consists of the positive energy continuum $m_0c^2 < E < \infty$, of a number (more precisely an infinite number) of discrete bound energy levels with $-m_0c^2 < E < m_0c^2$, and of the negative energy continuum $-\infty < E < -m_0c^2$. The bound states constitute the discrete energy levels in the energy gap between $-m_0c^2$ and $+m_0c^2$ (see Fig. 12.5). The states of negative energy can be obtained from the states of positive energy by charge conjugation, and vice versa. One should realize one point very clearly:

Historical comment. It is amusing to read papers on the quantum theory of radiation ³. Trials were made, e.g., to identify the electron hole as a proton. A number of arguments were given to justify that the mass of a hole should be greater than the mass of the electron, even though they were predicted by the hole-theory to be equal. On the other hand, it should be possible, due to the hole-theory, that an electron and a hole annihilate, with the emission of two photons. This probability was calculated by R. Oppenheimer, P.A.M. Dirac and I. Tamm ⁴ with the result that matter and antimatter annihilate each other in a very short time.

² Refer also to Vol. 4 of this series: W. Greiner, J. Reinhardt: Quantum Electrodynamics (Springer, Berlin, Heidelberg), to be published.

However, when the positron was discovered, that which had previously meant the most serious difficulties became the greatest triumph of the theory. Indeed, the prediction of the existence of the antiparticle must be considered as one of the greatest successes of theoretical physics.

12.4 Time Reversal and PCT Symmetry

In this section we want to investigate the time reversal transformation ($\hat{T}$ transformation) and show its connection with parity transformation and charge conjugation. Similarly to space reflection (parity transformation), time reflection is an improper Lorentz transformation. Yet another symmetry is the gauge-invariance of the Dirac field ψ , which interacts with the electromagnetic fields A_μ , and which is - as we know - ensured by the minimal coupling $\hat{p}_\mu - (e/c)A_\mu$. However, we do not want to elaborate further on this point, because for the present discussion it will be irrelevant. Later on, however (when considering the problems of renormalization in quantum electrodynamics) the gauge invariance will be very important.

From (4.9) we already know the parity transformation or spatial reflection, which is represented by

$$\hat{P}\psi(\mathbf{x}, t) = \psi'(\mathbf{x}', t) = \psi'(-\mathbf{x}, t) = e^{i\varphi}\gamma^0\psi(\mathbf{x}, t) \quad (12.40)$$

with

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{x}.$$

The spinor $\psi'(\mathbf{x}', t)$ is usually referred to as spatial reflected spinor or spatially reflected wave function. In the case of plane waves the momentum, but not the spin is reversed under spatial reflection; exactly as one would expect for classical quantities. The parity transformation has the following effect on the various operators:

$$\hat{P}\mathbf{x}\hat{P}^{-1} = \mathbf{x}' = -\mathbf{x}, \quad (12.41a)$$

$$\hat{P}x_0\hat{P}^{-1} = x'_0 = x_0, \quad (12.41b)$$

$$\hat{P}\hat{\mathbf{p}}\hat{P}^{-1} = \hat{\mathbf{p}}' = -\hat{\mathbf{p}}, \quad (12.41c)$$

³ For example, we recommend Fermi's paper: Rev. Mod. Phys. 4, 87 (1932), which was written between the formulation of the Dirac equation in 1928 and C.D. Anderson's discovery of the positron in 1933.

⁴ J.R. Oppenheimer: Phys. Rev. 35, 939 (1930); P.A.M. Dirac: Proc. Cambr. Phil. Soc. 26, 361 (1930); I. Tamm: Zeitschr. fr Physik 62, 7 (1930).

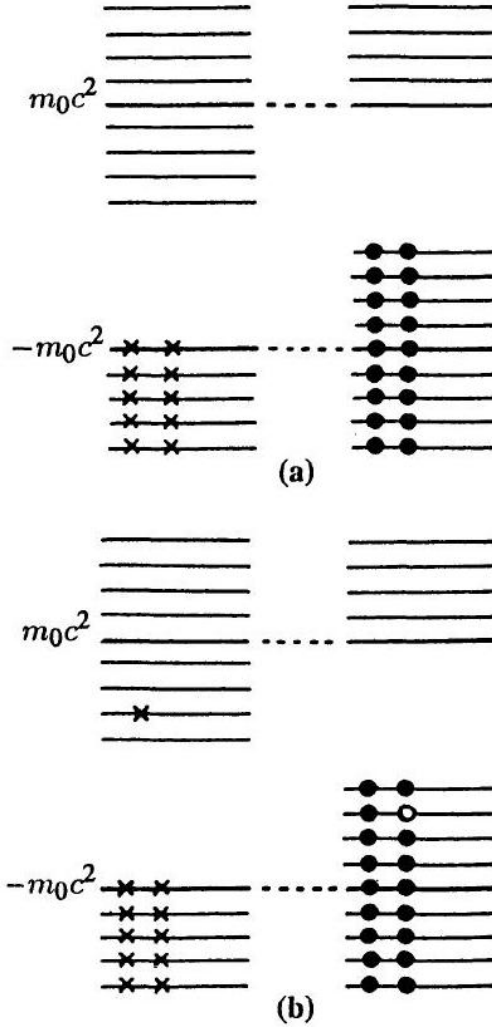


Fig. 12.6. (a) Illustration of the "symmetrized" vacuum state, consisting of states of negative energy filled with electrons (x) and positrons (•). (b) Illustration of a state with an electron in the second strongest bound level, which is indistinguishable from a positron hole in the second strongest bound positron level

$$\hat{P}\hat{p}_0\hat{P}^{-1} = \hat{p}'_0 = \hat{p}_0, \quad (12.41d)$$

$$\hat{P}A_0(\mathbf{x}, t)\hat{P}^{-1} = A'_0(\mathbf{x}', t) = A_0(\mathbf{x}, t), \quad (12.41e)$$

$$\hat{P}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\hat{P}^{-1} = \mathbf{A}'(\mathbf{x}', t) = -\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \quad (12.41f)$$

where

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{x}.$$

The first four relations are immediately understandable, while the last two (12.41e, f) denote the scalar and vectorial nature of the potential $A_0(\mathbf{x}, t)$ and vector potential $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, respectively. Applying the same arguments leading to (3.30), but now with the special parity transformation (12.40) yields

$$\begin{aligned} \left(\not{p} - \frac{e}{c}A - m_0c \right) \psi(x, t) &= 0 \\ \left(\hat{p}_0\gamma^0 + \hat{p}_i\gamma^i - \frac{e}{c}A_0\gamma^0 - \frac{e}{c}A_i(x, t)\gamma^i - m_0c \right) \hat{P}^{-1}\psi'(\mathbf{x}', t) &= 0 \end{aligned}$$

and after multiplying with $\hat{p}$ from the left

$$\begin{aligned}
& \hat{P} \left(\hat{p}_0 \gamma^0 + \hat{p}_i \gamma^i - \frac{e}{c} A_0 \gamma^0 - \frac{e}{c} A_i(\mathbf{x}, t) \gamma^i - m_0 c \right) \hat{P}^{-1} \psi'(\mathbf{x}', t) = 0 \\
& \left(\hat{p}_0 \gamma^0 + (+\hat{p}_i) (-\gamma^i) - \frac{e}{c} A_0 \gamma^0 - \frac{e}{c} (+A_i(\mathbf{x}, t)) (-\gamma^i) - m_0 c \right) \psi'(\mathbf{x}', t) = 0 \\
& \left(\hat{p}'_0 \gamma^0 + \hat{p}'_i \gamma^i - \frac{e}{c} A'_0(\mathbf{x}', t) \gamma^0 - \frac{e}{c} A'_i(\mathbf{x}', t) \gamma^i - m_0 c \right) \psi'(\mathbf{x}', t) = 0 \\
& \left[\not{p}' - \frac{e}{c} \not{A}'(\mathbf{x}', t) - m_0 c \right] \psi'(\mathbf{x}', t) = 0.
\end{aligned} \tag{12.42}$$

Since under the parity-transformation (4.1, 4.2)

$$\begin{aligned}
\hat{p}'_0 &= \hat{p}_0, & t' &= t, \\
\hat{p}'_i &= -\hat{p}_i, & \mathbf{x}' &= -\mathbf{x}, \\
A_0(\mathbf{x}, t) &= A'_0(\mathbf{x}', t'), & \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= -\mathbf{A}'(\mathbf{x}', t')
\end{aligned}$$

one finally arrives at

$$\left(\not{p}' - \frac{e}{c} \not{A}' - m_0 c \right) \psi'(x', t') = 0$$

This means: The parity-transformed wave function $\Psi'(x', t) = \hat{P}\Psi(x, t) = \Psi'(-x, t)$ [see (12.40)] obeys the same Dirac equation as the original wave function $\Psi(x, t)$. We say: The parity transformation $\hat{P}$ leaves the Dirac equation and all physical observables unchanged.

How does the parity invariance express itself physically? One can express this most simply by a sequence of observations of a state described by a wave function $\Psi(x, t)$: These observations are registered on a film, but the pictures are taken via a mirror. In other words: The camera films the observation of a state $\Psi(x, t)$ in a plane mirror (see Fig. 12.7). We then call the dynamics described by a state $\Psi(x, t)$ parity invariant, if the events registered on the film as reflected images can also be possible direct observations of the state $\Psi(x, t)$; i.e. observations of the state without the mirror. From the observation of the events in the mirror image of the film, we must not be able to say whether we are looking at the picture of the mirror image. Both must be equally possible in parity-invariant dynamics.

We remark that a mirror image is not identical with full spatial reflection, since as Fig. 12.7b clearly shows - in the mirror only the z axis is reversed (i.e. the axis $\perp$ to the mirror plane). Around the latter a rotation of π must be performed to obtain a full spatial reflection. However, such a rotation is a proper Lorentz transformation. The reflection described is thus a spatial inversion plus a proper Lorentz transformation (rotation). Since the theory (dynamics) is invariant under proper Lorentz transformations, the "mirror movie" yields exactly the information about parity invariance that we require.

We now move on to discuss time reflection and time-reflection invariance. The physical sense is also explainable with the film example. This time the film registers the observations of the state $\Psi(x, t)$ just in its time sequence: we do not need the mirror, instead we run the film backwards. One calls the dynamics time-reversal invariant, if the observations on the movie running backward, could have happened the same way on the forward running movie. It must not be possible to determine by watching the filmed events, whether the movie is running forwards or backwards. In other words: Both the observations on the forward and backward running movie must be realizable in the state $\Psi(\mathbf{x}, t)$.

In our case of the Dirac theory the dynamics will be time-reversal invariant if, by performing the transformation

$$t' = -t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}, \tag{12.43}$$

the form of the Dirac equation remains unchanged; the interpretation must not be changed, either (cf. Exercise 12.6). Then, the transformed wave function

$$\psi'_n(\mathbf{x}, t') = \hat{T}\psi_n(\mathbf{x}, t) = \psi'_n(\mathbf{x}, -t) \quad (12.44)$$

describes a Dirac particle which propagates backwards in time. This is physically possible if $\psi'_n(\mathbf{x}, t')$ also satisfies the Dirac equation. Equation (12.44) is a special case of the general definition (3.27) and the time inversion (12.43) is a special improper Lorentz transformation. $\hat{T}$ is an operator which acts on the spinor components, but not on space and time coordinates, a fact that should also be made evident in connection with the general scheme (3.27).

Let us now construct the time-inversion transformation explicitly. Therefore we rewrite the Dirac equation in Schrödinger form:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_n(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \hat{H}(\mathbf{x}, t) \psi_n(\mathbf{x}, t) \\ &= \left[c\hat{\alpha} \cdot \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \hat{\beta} m_0 c^2 + eA_0(\mathbf{x}, t) \right] \psi_n(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (12.45)$$

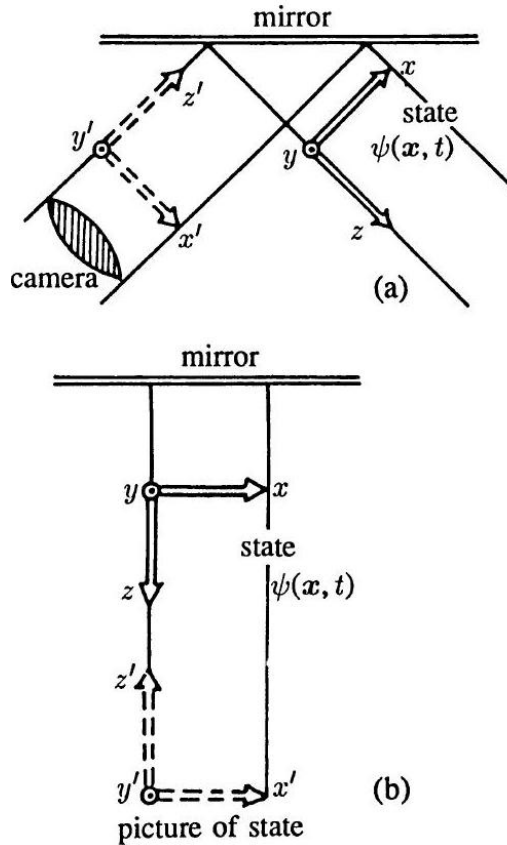


Fig. 12.7. Illustration of parity: The state $\Psi(x, t)$ is represented by a Dreibein (three unit vectors of a Cartesian coordinate system), which is filmed via the mirror. On the film the z axis appears (because of reflection) reversed. If the camera stood directly beside (in front of or under) the state, one would get the picture shown in b), with opposite z axis where n characterizes the spinor's quantum numbers. The time inversion of (12.45) is achieved by multiplying from the left by $\hat{T}$:

$$\hat{T}i\hbar\hat{T}^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\hat{T}\psi_n(x, t) = \hat{T}\hat{H}(x, t)\hat{T}^{-1}\hat{T}\psi_n(x, t) \quad (12.46)$$

The notation $\hat{T}i\hbar\hat{T}^{-1}$ includes the possibility that the $\hat{T}$ operator may also contain complex conjugation. Since the time inversion as a special Lorentz transformation causes

$$t' = -t,$$

it follows, together with (12.44), that

$$-\hat{T}i\hbar\hat{T}^{-1}\frac{\partial}{\partial t'}\psi'_n(\mathbf{x},t') = \hat{T}\hat{H}(\mathbf{x},t)\hat{T}^{-1}\psi'_n(\mathbf{x},t') \quad (12.47)$$

For $\psi'_n(\mathbf{x},t) = \hat{T}\psi_n(\mathbf{x},t)$ the same Schrödinger-like Dirac equation should hold as for $\psi_n(\mathbf{x},t)$ in (12.45); hence

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\psi'_n(\mathbf{x},t') = \hat{H}(\mathbf{x},t')\psi'_n(\mathbf{x},t') \quad (12.48)$$

In case of time-inversion symmetry one obviously has to demand that $\hat{H}(\mathbf{x},t') = \hat{H}(\mathbf{x},-t) = \hat{H}(\mathbf{x},t)$, and in this case an observer can, in principle, not distinguish between a forward and a backward running "movie".

Now the comparison of (12.47) with (12.48) yields a priori two possibilities of procedure: either we demand

$$\hat{T}i\hat{T}^{-1} = i \text{ and } \hat{T}\hat{H}(\mathbf{x},t)\hat{T}^{-1} \equiv \hat{H}(\mathbf{x},-t) = -\hat{H}(\mathbf{x},t) \quad (12.49)$$

or

$$\hat{T}i\hat{T}^{-1} = -i \text{ and } \hat{T}\hat{H}(\mathbf{x},t)\hat{T}^{-1} \equiv \hat{H}(\mathbf{x},t') = \hat{H}(\mathbf{x},-t) \stackrel{!}{=} \hat{H}(\mathbf{x},t) \quad (12.50)$$

The latter possibility is the only possible one, because the operator equation $\hat{T}\hat{H}(\mathbf{x},t)\hat{T}^{-1} = \hat{H}(\mathbf{x},t)$ can be included into the general scheme (3.27) of symmetry transformations. In addition, the condition (12.49) $\hat{T}\hat{H}(\mathbf{x},t)\hat{T}^{-1} = -\hat{H}(\mathbf{x},t)$ would alter the spectrum of $\hat{H}$ by the time inversion in the special case of time-independent Hamiltonians, which can physically not be accepted. We also notice this fact if we look at the explicit form of $\hat{H}(\mathbf{x},t)$:

$$\hat{H}(\mathbf{x},t) = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right) + \hat{\beta}m_0c^2 + eA_0(\mathbf{x},t). \quad (12.51)$$

The conditions (12.49) cannot be satisfied: The vector potential $\hat{A}(\mathbf{x},t)$ is created by electric currents $j(\mathbf{x},t)$, which change sign under the transformation $t \rightarrow -t$; therefore it holds that

$$\hat{T}\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\hat{T}^{-1} = \mathbf{A}(\mathbf{x},-t) = -\mathbf{A}(\mathbf{x},t). \quad (12.52)$$

On the contrary the Coulomb potential is created by the electric charge density $\varrho(\mathbf{x},t)$, which remains unchanged under time inversion, and hence

$$\hat{T}A_0(\mathbf{x},t)\hat{T}^{-1} = A_0(\mathbf{x},-t) = A_0(\mathbf{x},t). \quad (12.53)$$

Furthermore we have

$$\hat{T}\nabla\hat{T}^{-1} = \nabla \quad \text{and} \quad \hat{T}x\hat{T}^{-1} = x \quad (12.54)$$

because the application of $\hat{T}$ does not effect the space coordinates. Therefore we see that, for example, the choice (12.49) would yield

$$\hat{T}\hat{\boldsymbol{\alpha}}\hat{T}^{-1} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}$$

due to the term $\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x},t)$. On the other hand the sign-change of the term $\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot i\nabla$ would imply

$$\hat{T}\hat{\alpha}\hat{T}^{-1} = -\hat{\alpha}$$

Obviously both conditions are contradictory and, as a consequence, only (12.50) remains as a valid choice: It can be satisfied consistently, because with $\hat{T}\hat{T}^{-1} = -i$ it follows that

$$\begin{aligned}\hat{T}\hat{H}(\mathbf{x}, t)\hat{T}^{-1} &= \hat{T}c\hat{\alpha}\hat{T}^{-1} \cdot \left[\left(\hat{T}(-i\hbar)\hat{T}^{-1} \right) \hat{T}\nabla\hat{T}^{-1} - \frac{e}{c}\hat{T}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\hat{T}^{-1} \right] \\ &\quad + m_0c^2\hat{T}\hat{\beta}\hat{T}^{-1} + e\hat{T}A_0(\mathbf{x}, t)\hat{T}^{-1} \\ &= -\hat{T}c\hat{\alpha}\hat{T}^{-1} \cdot \left[-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}, +t) \right] + m_0c^2\hat{T}\hat{\beta}\hat{T}^{-1} + eA_0(\mathbf{x}, -t) \\ &= +\hat{H}(\mathbf{x}, +t)\end{aligned}\tag{12.55}$$

[due to (12.50), (12.52) and (12.53)], if

$$\hat{T}\hat{\alpha}\hat{T}^{-1} = -\hat{\alpha} \quad , \quad \hat{T}\hat{\beta}\hat{T}^{-1} = +\hat{\beta}\tag{12.56}$$

holds. Because of $\hat{T}\hat{T}^{-1} = -i$ the operator $\hat{T}$ must contain the complex conjugation $\hat{K}$, and therefore we set

$$\hat{T} = \hat{T}_0\hat{K}\tag{12.57}$$

where the matrix $\hat{T}_0$ must still be determined. If we insert (12.57) into (12.56), then

$$\begin{aligned}\hat{T}_0\hat{\alpha}\hat{T}_0^{-1} &= -\hat{\alpha} \quad \text{or} \quad \hat{T}_0\gamma^{i*}\hat{T}_0^{-1} = -\gamma^i \\ \hat{T}_0\hat{\beta}\hat{T}_0^{-1} &= \hat{\beta} \quad \text{or} \quad \hat{T}_0\gamma^0\hat{T}_0^{-1} = \gamma^0\end{aligned}\tag{12.58}$$

Since only the matrix $\hat{\alpha}_2$ is purely imaginary, all other matrices being real [see (2.13)], these conditions explicitly read

$$\begin{aligned}\hat{T}_0\hat{\alpha}_1\hat{T}_0^{-1} &= -\hat{\alpha}_1, \quad \hat{T}_0\hat{\alpha}_3\hat{T}_0^{-1} = -\hat{\alpha}_3, \\ \hat{T}_0\hat{\alpha}_2\hat{T}_0^{-1} &= \hat{\alpha}_2, \quad \hat{T}_0\hat{\beta}\hat{T}_0^{-1} = \hat{\beta}.\end{aligned}$$

With the help of the commutation relations (2.8) it can be shown that

$$\hat{T}_0 = -i\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_3 \quad , \quad \hat{T}_0^{-1} = i\hat{\alpha}_3\hat{\alpha}_1\tag{12.60}$$

satisfies these conditions, the factor i guaranteeing the unitarity of $\hat{T}$. With $\gamma^0 = \hat{\beta}$ and $\gamma^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}_i$ [see (3.8)] the complete time-inversion operator can then be written as

$$\hat{T} = -i\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_3\hat{K} = i\gamma^1\gamma^3\hat{K} = \hat{T}_0\hat{K}\tag{12.61}$$

In addition, we mention that the time-inverted Dirac equation (12.48) is form invariant, too. This was our intention. Indeed it was formulated in that way, and the comparison of (12.48) with (12.45) shows this immediately.

Next we want to prove that the time inversion transformation $\hat{T}$ accords to the classical concept of time inversion. To that end we apply $\hat{T}$ to a free-particle solution (a plane Dirac wave) with positive energy. We know how a plane wave with four-momentum $p^\mu = \{\epsilon p^0, \mathbf{p}\}$ [p^0 is given by $p^0 = +c(p^2 + m_0^2c^2)^{1/2}$] and spin $s^\mu = \{s^0, \mathbf{s}\}$ can be constructed (projected) from an arbitrary plane wave $\psi_\alpha(x)$, with the help of the projection operators, namely [see (12.33)]

$$\psi_{\epsilon p s} = \left(\frac{\epsilon \not{p} + m_0c}{2m_0} \right) \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \psi_\alpha(x, t).\tag{12.62}$$

For particles with positive energy one has to set $\epsilon = 1$, and the $\hat{T}$ operator can act on this equation. With $\hat{T}\psi_\alpha(x, t) = \psi'_\alpha(x, t') = \hat{T}_0\psi_\alpha^*(x, t)$ we get

$$\begin{aligned}
\hat{T}\psi_{\epsilon ps} &= \hat{T} \left(\frac{\epsilon \mathbf{p} + m_0 c}{2m_0 c} \right) \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \hat{T}^{-1} \hat{T}\psi_\alpha(x, t) \\
&= \hat{T}_0 \left(\frac{\epsilon \mathbf{p}^* + m_0 c}{2m_0 c} \right) \left(\frac{1 + \gamma_5 b^*}{2} \right) \hat{T}_0^{-1} \psi'_\alpha(x, t') \\
&= \hat{T}_0 \left(\frac{\epsilon \mathbf{p}^* + m_0 c}{2m_0 c} \right) \hat{T}_0^{-1} \hat{T}_0 \left(\frac{1 + \gamma_5 b^*}{2} \right) \hat{T}_0^{-1} \psi'_\alpha(x, t') \\
&= \left(\frac{\epsilon \phi' + m_0 c}{2m_0 c} \right) \left(\frac{1 + \gamma_5 \phi'}{2} \right) \psi'_\alpha(x, t')
\end{aligned} \tag{12.63}$$

(because γ_5 is real). In the last step, equation (12.58) was used and the four-vectors

$$p' = \{p^0, -\mathbf{p}\} \quad \text{and} \quad s' = \{s^0, -\mathbf{s}\} \tag{12.64}$$

were introduced. These projectors yield a free solution with opposite direction of the spatial momentum $\mathbf{p}$ and the spin $\mathbf{s}$, if applied to the time-inverted plane wave $\psi'_\alpha(\mathbf{x}, t')$. This is the so-called Wigner time inversion. It was introduced for the first time by Eugene Wigner in 1932⁵.

Now we want to see how the electron and the positron wave functions can easily be connected with the help of the time-inversion transformation. From our earlier considerations we know that the charge conjugate state ψ_c , which is obtained from the state ψ by

$$\psi_c = \hat{U}\psi^* = \hat{C}\gamma^0\psi^* = \hat{C}\gamma^0\hat{K}\psi \equiv \hat{C}\psi \tag{12.65}$$

($\hat{C} = i\gamma^2\gamma^0$), describes a particle with the same mass m_0 and the same spin direction (polarization), but with opposite charge, opposite sign of energy and opposite momentum [see, for example, (12.38)]. If $\psi(x, t)$ describes an electron with momentum p and negative energy, then $\psi_c(\mathbf{x}, t)$ describes a positron with momentum $-\mathbf{p}$ and positive energy, and both particles propagate forward in time.

Now we combine the parity operation $\hat{P}$ [see (12.40)], the charge conjugation $\hat{C}$ [see (12.25)] and the time inversion $\hat{T}$ (12.61) and construct the wave function

$$\begin{aligned}
\psi_{PCT}(x') &= \hat{P}\hat{C}\hat{T}\psi(x) = \hat{P}\hat{C}\gamma^0(\hat{T}\psi(x, t))^* \\
&= \hat{P}\hat{C}\gamma^0 \left(i\gamma^1\gamma^3\hat{K}\psi(x, -t') \right)^* = \hat{P}\hat{C}\gamma^0 (i\gamma^1\gamma^3\psi^*(x, -t'))^* \\
&= -i\hat{P}\hat{C}\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi(x, -t') = -i\hat{P}i\gamma^2\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi(x, -t') \\
&= e^{i\varphi}\gamma^0\gamma^2\gamma^1\gamma^3\psi(-x', -t') = ie^{i\varphi}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi(-x', -t') \\
&= ie^{i\varphi}\gamma_5\psi(-x')
\end{aligned} \tag{12.66}$$

(here $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ was used). If $\psi(x, t)$ is an electron wave function of negative energy, then ψ_{PCT} is a positron wave function of positive energy, and this is effected by the charge conjugation $\hat{C}$. Therefore, we can also read (12.66) as $\psi_{PCT}(x, t)$ being a positron wave function with positive energy moving forward in time and space (positive t , positive x). It is - up to a factor $ie^{i\varphi}\gamma_5$ - identical with an electron wave function of negative energy, moving backwards in time and space [negative t] and negative $\mathbf{x}$ in the argument of $\psi(-x, -t)$ on the rhs in (12.66)].

⁵ E.P. Wigner: Gttinger Nachrichten 31, 546 (1932)

For a plane wave with definite spin s^μ and momentum p^μ one can deduce this result explicitly. The plane electron wave with negative energy, momentum $-p$ and spin $-s$ is given by

$$\left(\frac{-\not{p} + m_0 c}{2m_0 c} \right) \left(\frac{1 - \gamma_5 b}{2} \right) \psi(-x, -t)$$

and moves backwards in space and time. If we apply the $\hat{P}\hat{C}\hat{T}$ transformation (12.66), we obtain

$$\begin{aligned} \psi_{PCT}(x, t) &= i e^{i\varphi} \gamma_5 \left(\frac{-\not{p} + m_0 c}{2m_0 c} \right) \left(\frac{1 - \gamma_5 b}{2} \right) \psi(-x, -t) \\ &= \left(\frac{\not{p} + m_0 c}{2m_0 c} \right) \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) i e^{i\varphi} \gamma_5 \psi(+x, +t). \end{aligned} \quad (12.67)$$

This is evidently a positron wave function (because of the charge conjugation) with positive energy p_0 , positive momentum p and positive spin s , moving forward in space and time.

12.6 Behaviour of the Current with Time Reversal and Charge Conjugation

If the time inversion $\hat{T}$ is a given symmetry operation of the Dirac theory, then the rules for the interpretation of the wave function

$$\psi'_\alpha(\mathbf{x}, t') = \hat{T} \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad , \quad t' = -t$$

must remain the same for $\psi'_\alpha(x, t')$. This means that observables consisting of bilinear forms of $\psi'_\alpha(\mathbf{x}, t')$ and $\psi'^+_\alpha(x, t')$ must be interpreted (i.e. physically explained) in the same way as those with $\psi_\alpha(x, t)$ and $\psi^+_\alpha(x, t)$. Naturally this is valid only up to the expected behaviour under time reversal of the special observable. The following examples will illustrate this.

Problem. a) Prove that the following relation is valid for the current:

$$j'_\mu(x'^\nu) = j^\mu(x^\nu).$$

Note: The indices on the lhs are lower indices (covariant indices) and on the rhs upper ones (contravariant indices). Similarly, show that

$$\langle \mathbf{r} \rangle' = \langle \mathbf{r} \rangle, \langle \mathbf{p} \rangle' = -\langle \mathbf{p} \rangle.$$

b) Show also the behaviour of these observables under charge conjugation $\hat{C}$. Demonstrate especially that

$$\bar{\psi}_c(x) \gamma_\mu \psi_c(x) = +\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$$

and interpret this result.

Solution

a) The operation of time reversal transforms a spinor $\psi(t)$ into a spinor

$$\psi_T(t') = \hat{T}_0 \psi^*(t) \quad t' = -t$$

or

$$\psi_T^\dagger(t') = \psi^\mathbf{T}(t) \hat{T}_0^\dagger,$$

where the upper index " T " means transposition. In the usual representation of the γ matrices [see (12.60, 12.61)] one finds that

$$\hat{T}_0 = i\gamma^1\gamma^3.$$

Since

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

is valid, it may easily be seen that

$$\begin{aligned} \hat{T}_0^\dagger &= -i\gamma^{3\dagger}\gamma^{1\dagger} = -i\gamma^0\gamma^3\gamma^1\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^0\gamma^3\gamma^1 \\ &= -i(-\gamma^1\gamma^3) = \hat{T}_0 \end{aligned} \quad (8)$$

where we have used the commutation relations of the γ matrices and

$$\begin{aligned}\hat{T}_0 \cdot \hat{T}_0 &= i\gamma^1\gamma^3 i\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^1\gamma^3\gamma^1\gamma^3 \\ &= \gamma^1\gamma^3\gamma^3\gamma^1 = 11\end{aligned}\quad (9)$$

i.e. $\hat{T}_0$ is unitary and Hermitian. From (6) it follows that

$$\begin{aligned}\hat{T}_0\gamma^1\hat{T}_0 &= -\gamma^1 = -\gamma^{1*}, \\ \hat{T}_0\gamma^2\hat{T}_0 &= \gamma^2 = -\gamma^{2*}, \\ \hat{T}_0\gamma^3\hat{T}_0 &= -\gamma^3 = -\gamma^{3*}, \\ \hat{T}_0\gamma^0\hat{T}_0 &= \gamma^0 = \gamma^{0*},\end{aligned}$$

because $\gamma^1, \gamma^3, \gamma^0$ are real and γ^2 is purely imaginary, and we can simply write these four equations as

$$\hat{T}\gamma^\mu\hat{T} = \gamma_\mu^*.$$

Our task is to investigate for the current $j_T^\mu(x')$ the expression $j_T^\mu(x') = \bar{\psi}_T(t')\gamma^\mu\psi_T(t')$, so we obtain from (4), (5) and (11):

$$\begin{aligned}j_T^\mu(t') &= (\psi^\dagger(t')\gamma_0)_T\gamma^\mu\psi_T(t') \\ &= \psi^\dagger(t)\gamma_0\hat{T}_0\gamma^\mu\hat{T}_0\psi^*(t) \\ &= \psi^{\mathbf{T}}(t)\gamma^0\gamma_\mu^*\psi^*(t) = \psi_\alpha(t)[\gamma^0\gamma_\mu^*]_{\alpha\beta}\psi_\beta^*(t) \\ &= \psi_\beta^*(t)[\gamma_0\gamma_\mu^*]_{\beta\alpha}^{\mathbf{T}}\psi_\alpha(t) = \psi^{\mathbf{T}*}(t)\gamma_\mu^{\mathbf{T}*}\gamma^0\psi(t) \\ &= \psi^\dagger(t)\gamma_\mu^\dagger\gamma^0\psi(t) = \psi^\dagger(t)\gamma^0\gamma_\mu\gamma^0\psi(t) \\ &= \bar{\psi}(t)\gamma_\mu\psi(t) = j_\mu(t)\end{aligned}\quad (13)$$

[in the last but one transformation we used (7)]. The time argument alone was noted in $\psi(x, t), \psi(\mathbf{x}', t')$, because the position vector ($x = x'$) remains unchanged under time inversion. The operators r and p commute with $\hat{T}_0$, because they do not carry spinor indices (they are proportional to the unit matrix). For the position operator it holds, in particular, that

$$\begin{aligned}\psi_T^\dagger(t')\mathbf{r}\psi_T(t') &= \psi^{\mathbf{T}}(t)\hat{T}_0\hat{T}_0\mathbf{r}\psi^*(t) \\ &= \mathbf{r}\psi^{\mathbf{T}}(t)\psi^*(t) = \mathbf{r}\psi^{\mathbf{T}*}(t)\psi(t) \\ &= \psi^\dagger(t)\mathbf{r}\psi(t)\end{aligned}\quad (14)$$

[$\psi^{\mathbf{T}}(t)\psi^*(t)$ is purely real], wherefrom $\langle\mathbf{r}\rangle' = \langle\mathbf{r}\rangle$ follows immediately by integration. In the case of the momentum operator $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$, we must explicitly write down the expectation value as an integral, in order to express clearly that $\hat{\mathbf{p}}$ is Hermitian. Because of $\hat{T}_0\hat{\mathbf{p}}\hat{T}_0 = \hat{\mathbf{p}}$, one gets

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle' &= \int \psi_T^\dagger(\mathbf{x}, t') \hat{\mathbf{p}} \psi_T(\mathbf{x}, t') d^3x \\
&= \int \psi^T(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{p}} \psi^*(\mathbf{x}, t) d^3x \\
&= \int (-i\hbar \nabla \psi^\dagger(x)) \psi(x) d^3x \\
&= - \int \psi^\dagger(x) (-i\hbar \nabla) \psi(x) d^3x \\
&\quad - i\hbar \int^\dagger (x) \psi(x) d\mathbf{F} \\
&= - \int \psi^\dagger(x) \hat{\mathbf{p}} \psi(x) d^3x + 0 = -\langle \mathbf{p} \rangle.
\end{aligned} \tag{15}$$

In the last but one line a partial integration has been performed, the surface term vanishing due to the general properties of wave functions at infinity.

b) For $\hat{C} = i\gamma^2\gamma^0$, then, in analogy to (10) and (11):

$$\begin{aligned}
\hat{C}\gamma^0\hat{C} &= \gamma^0 = \gamma^{0*}, \\
\hat{C}\gamma^2\hat{C} &= \gamma^2 = -\gamma^{2*}, \\
\hat{C}\gamma^1\hat{C} &= -\gamma^1 = -\gamma^{1*}, \\
\hat{C}\gamma^3\hat{C} &= -\gamma^3 = -\gamma^{3*}, \\
\hat{C}\gamma^\mu\hat{C} &= \gamma_\mu^*,
\end{aligned}$$

which may be easily checked, so that

$$\begin{aligned}
\psi_c(x) &= \hat{C}\gamma^0\psi^*(x), \\
\psi_c^\dagger(x) &= \psi^T(x)\gamma^0\hat{C}^\dagger, \\
\text{and, further,} \\
\hat{C}^\dagger &= -\hat{C}, \quad \hat{C}^2 = -1.
\end{aligned}$$

Now we can write

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_c\gamma^\mu\psi_c &= \psi_c^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi_c \\
&= \psi^T\gamma^0\hat{C}^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\hat{C}\gamma^0\psi^* \\
&= \psi^T\gamma^0\hat{C}\gamma^0\hat{C}\gamma^\mu\hat{C}\gamma^0\psi^* \\
&= \psi^T\gamma^0\gamma_0^*\gamma_\mu^*\gamma^0\psi^* = \psi^T\gamma_\mu^*\gamma^0\psi^* \\
&= \psi_\alpha(\gamma_\mu^*\gamma^0)_{\alpha\alpha'}\psi_{\alpha'}^* = \psi^T\gamma^0\gamma_\mu^\dagger\psi \\
&= \bar{\psi}\gamma_\mu^\dagger\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi,
\end{aligned} \tag{19}$$

which shows everything that is required. In the penultimate line care is needed since we have to interchange the order of ψ^* and ψ . This is possible if one regards ψ as the wave function of an electron or positron; however, if ψ is regarded as a quantized field operator $\hat{\psi}$, then an additional minus sign appears, due to the fact that $\hat{\psi}$ and $\hat{\psi}^*$ are fermion operators, so that the charge conjugated current operator reads

$$: \hat{\psi}_c\gamma^\mu\hat{\psi}_c := - : \hat{\psi}\gamma^\mu\hat{\psi} :,$$

where: ... : implies normal ordering ⁶. We now have to interpret the result (19) in the hole picture. If ψ is the wave function of a state with positive energy, then ψ_c is a state of negative energy which is already occupied in the vacuum, so that the corresponding current must not be counted, since the current density of the vacuum is defined to be zero. On the other hand, if we create a positron in that state, then this state will be empty and the current $\bar{\psi}_c\gamma^\mu\psi_c$ is

missing, so that we have to ascribe the current density $-\bar{\psi}_c \gamma^\mu \psi_c$ to the positron, which has the opposite sign as the corresponding charge density of the electron. From that we can conclude that electrons and positrons have opposite charges.

The correctness of the interpretation given at the end of Exercise 12.6 can be explicitly verified for the Dirac equation involving electromagnetic interaction. To do this we write the Dirac eigenvalue equation for states with negative energy in the presence of the electromagnetic four-potential $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ as

$$\left[\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \hat{\beta} m_0 c^2 + e A_0(x) \right] \psi(x) = -E \psi(x) \quad (12.68)$$

and operate with the $\hat{P}\hat{C}\hat{T}$ transformation (12.66). Since under space-time inversion $[x'_\mu = -x_\mu]$, see (12.52) and (12.40)]

$$\hat{P}\hat{T}\hat{A}_\mu(x)(\hat{P}\hat{T})^{-1} = A'_\mu(x') = +A_\mu(x) \quad (12.69)$$

is valid, then (12.68) transforms under $\hat{P}\hat{C}\hat{T}$ into

$$\begin{aligned} \hat{P}\hat{C}\hat{T} \left[\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right) + \hat{\beta} m_0 c^2 + e A_0(\mathbf{x}, t) \right] (\hat{P}\hat{C}\hat{T})^{-1} (\hat{P}\hat{C}\hat{T}) \psi(\mathbf{x}, t) \\ = -E (\hat{P}\hat{C}\hat{T}) \psi(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (12.70)$$

This results in

$$\begin{aligned} \psi_{PCT}(x') &= \psi_{PCT}(-\mathbf{x}, -t) \\ &= \hat{P}\hat{C}\hat{T} \psi(\mathbf{x}, t), \\ \left(\hat{P}\hat{C}\hat{T} \hat{\alpha}_i \hat{P}\hat{C}\hat{T} \right)^{-1} &= \hat{P}\hat{C}\hat{T} \hat{\alpha}_i \hat{T}^{-1} \hat{C}^{-1} \hat{P}^{-1} \\ &= -\hat{P}\hat{C} \hat{\alpha}_i \hat{C}^{-1} \hat{P}^{-1} \\ &= -\hat{P} \hat{\alpha}_i \hat{P}^{-1} \\ &= \hat{\alpha}_i, \end{aligned} \quad (12.71)$$

$$\hat{P}\hat{C}\hat{T} \nabla (\hat{P}\hat{C}\hat{T})^{-1} = -\nabla \equiv \nabla', \quad (12.72)$$

$$\hat{P}\hat{C}\hat{T} \hat{\beta} (\hat{P}\hat{C}\hat{T})^{-1} = -\hat{\beta}, \quad (12.73)$$

and therefore (12.70) becomes

$$\left[\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (-i\hbar \nabla' + e \mathbf{A}'(x')) + \hat{\beta} m_0 c^2 - e A'_0(x') \right] \psi_{PCT}(x') = E \psi_{PCT}(x') \quad (12.74)$$

with $x' = -x$.

If (12.68) was the Dirac equation for particles with charge e , rest mass m_0 and negative energy $(-E)$ moving forward in space and time (x, t) , then (12.74) is the Dirac equation for particles with charge $-e$, rest mass m_0 and positive energy $(+E)$ moving backwards in space and time [in the argument of $\psi_{PCT}(x')$, $x' = -x = -\{ct, -x\}$]. We can therefore interpret positrons as electrons of negative energy moving backwards in space and time. This important result serves as one of the fundamental concepts of positron theory,⁷ which was founded by Stckelberg and Feynman. In quantum-electrodynamical perturbation theory, which is based on it, we shall extensively both make use of, and recognize the great advantages of, this formulation⁸.

⁶ See Vol. 4 of this series: W. Greiner, J. Reinhardt: Quantum Electrodynamics (Springer, Berlin, Heidelberg), to be published.

Remark. The form of the interaction between the electron-positron field and the electromagnetic field has been assumed to be

$$j_\mu(x)A^\mu(x) = \frac{e}{c}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x) \quad (12.75)$$

This followed as the simplest interaction which is gauge invariant, and it is equivalent to the interaction between electrons and the electromagnetic field which we know from the nonrelativistic limiting case. This interaction is $\hat{C}$, $\hat{P}$ and $\hat{T}$ invariant (see Exercise 12.6). Whether or not these symmetries are realized depends on the actual interaction. As we know, an additional interaction with the magnetic moment of the form

$$\bar{\psi}\hat{\sigma}_{\mu\nu}\psi(x)F^{\mu\nu}(x) \quad (12.76)$$

for spin- $\frac{1}{2}$ particles with anomalous magnetic moment (g factor $\neq 2$ as for example for protons and neutrons), is in general necessary. This additional interaction also shows all the symmetries mentioned above, as can be easily verified. Extending the Dirac theory to other spin- $\frac{1}{2}$ particles, for example μ mesons, and to other kinds of interactions (e.g. the weak interaction), the assumption that the $\hat{C}$, $\hat{P}$, and $\hat{T}$ symmetries are also valid suggests itself.

This is an assumption which has to be verified by experiment, i.e. success or failure of phenomena predicted by it. Lee and Yang showed⁷ that the symmetry of parity is no longer valid in the weak interaction; however, the much weaker assumption of Lorentz invariance and the connection between spin and statistics (spin- $\frac{1}{2}$ particles obey fermi statistics, spin0 particles obey Bose statistics)¹⁰ always guarantees the invariance of the interaction under the product $\hat{P}\hat{C}\hat{T}$. This is the famous $\hat{P}\hat{C}\hat{T}$ theorem, which was derived by R. Lders¹¹.

12.7 Classical Electrodynamics by Theoretical Approach

12.7.1 Classical Electrodynamics by Stepanyants

Теория

Лагранжиан свободного дираковского поля

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

является инвариантным относительно глобальных калибровочных преобразований $\psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi$ с $\alpha \neq \alpha(x)$, но не инвариантен относительно локальных преобразований с $\alpha = \alpha(x)$. Как и в случае скалярного поля, локальная калибровочная инвариантность может быть достигнута заменой в функции Лагранжа обычных производных на ковариантные:

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu.$$

Поскольку при этом появляется новое поле A_μ , то в теорию необходимо также добавить лагранжиан свободного электромагнитного поля. В результате мы получаем

⁷ E.C.G. Stckelberg: *Helv. Phys. Acta* 14.32L, 588 (1941); R.P. Feynmann: *Phys. Rev.* 76, 749 (1949); *ibid.* 769.

⁸ See Vol. 4 of this series: *Quantum Electrodynamics* (Springer, Berlin, Heidelberg), to be published.

⁹ T.D. Lee, C.N. Yang: *Phys. Rev.* 105, 167 (1957).

This will be extensively discussed in Vol. 5 of this series: *Gauge Theory of Weak Interactions* (Springer, Berlin, Heidelberg), to be published.

¹⁰ This will be discussed in Vol. 4 of this series: *Quantum Electrodynamics* (Springer, Berlin, Heidelberg), to be published.

¹¹ R. Lders: *Kgl. Dansk. Vid. Sels. Mat.-Fys. Medd* 28, no. 5 (1954).

классическую электродинамику, описываемую функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi.$$

При этом векторное поле A_μ описывает фотон, а спинор ψ - электрон. Лагранжиан (3.136) с очевидностью является инвариантным относительно локальных калибровочных преобразований

$$\psi \rightarrow e^{-ie\alpha(x)}\psi; \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\alpha(x)$$

Соответствующие уравнения движения представляют собой замкнутую систему уравнений Максвелла и Дирака, которая записывается в виде

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi; \quad (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi = 0.$$

Как и ранее, несложно проверить, что эрмитово-сопряженное уравнение Дирака запишется как

$$i\mathcal{D}_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

где $\mathcal{D}_\mu \bar{\psi} = (\partial_\mu + ieA_\mu)\bar{\psi}$. Как показано в Задаче 1, ток, соответствующий инвариантности лагранжиана (3.136) относительно калибровочных преобразований с $\alpha \neq \alpha(x)$, по-прежнему оказывается равным

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi.$$

Там же с помощью явного вычисления проверено выполнение закона сохранения $\partial_\mu j'^\mu = 0$.

При умножении уравнения Дирака во внешнем электромагнитном поле на $(-i\gamma^\nu \mathcal{D}_\nu - m)$ (Задача 2) мы получаем уравнение

$$\left(\mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu - \frac{ie}{2}\gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m^2 \right) \psi = 0,$$

которое представляет собой аналог уравнения Клейна-Гордона-Фока.

Нерелятивистский предел уравнения Дирака по Степаньянцу

Исследуем теперь нерелятивистский предел уравнения Дирака во внешнем электромагнитном поле. При этом более удобным оказывается работать не со спинором ψ , а со спинором

$$\psi_M \equiv M\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \psi,$$

две нижние компоненты которого в системе покоя $k_\mu = (m, 0, 0, 0)$ равны 0 при отсутствии внешнего поля, что следует из формулы (3.12). Спинор ψ_M также удовлетворяет уравнению Дирака во внешнем поле, которое отличается от исходного заменой $\gamma^\mu \rightarrow M\gamma^\mu M^{-1}$, соответствующей переходу к другому представлению для γ -матриц.

В Задаче 3 показано, что в нерелятивистском пределе решение уравнения Дирака может быть приближенно записано как

$$\psi_M \approx e^{-imt} \begin{pmatrix} \psi_e \\ 0 \end{pmatrix},$$

где двухкомпонентный столбец ψ_e удовлетворяет уравнению Паули

$$i\frac{\partial \psi_e}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m}(-i\boldsymbol{\partial} + e\mathbf{A})^2 - e\varphi + \frac{e}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}) \right) \psi_e,$$

а φ и $\mathbf{A}$ - скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля, определяемые соотношением $A_\mu = (\varphi, -\mathbf{A})$. Такое уравнение описывает нерелятивистскую частицу заряда $-e$, имеющую отличный от нуля магнитный момент μ_0 , величина которого равна значению коэффициента перед $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H})$. В этом можно убедиться, сравнивая уравнение (3.144) с классическим гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi + \mu_0\mathbf{H}$$

и учитывая, что собственные значения оператора $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H})$ равны $\pm\mathbf{H}$, так как $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H})^2 = \sigma_i\sigma_j H_i H_j = \mathbf{H}^2$. Поэтому на классическом уровне электродинамика предсказывает, что значение магнитного момента электрона равно

$$\mu_0 = \frac{e}{2m}.$$

Если определить т.н. g-фактор Ланде [3] как

$$\boldsymbol{\mu} = -g\frac{e}{2m}\mathbf{s},$$

то, поскольку спин электрона равен $1/2$, из предыдущего равенства получаем, что $g = 2$, что достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными [4]. Однако, на самом деле, экспериментальное значение g все же отличается от 2 благодаря существованию квантовых поправок.

Физический смысл двух нижних компонент спинора

Для того чтобы понять физический смысл двух нижних компонент спинора?, обратим внимание, что уравнение $k_0^2 - \mathbf{k}^2 = m^2$ имеет два решения: положительночастотное с $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ и отрицательночастотное с $k_0 = -\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Первое из них, очевидно, представляет собой связь между энергией и импульсом электрона. Второе решение, на первый взгляд, бессмысленно, поскольку энергия не должна принимать отрицательные значения. Однако можно предположить, что в этом случае волновую функцию необходимо отождествить не со спинором ψ , а с некоторым другим объектом, лостроенным как линейная комбинация элементов $\eta^\times$. Поскольку

$$\psi^*(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik^\nu x_\nu} \delta(k_\sigma^2 - m^2) \psi^*(k)$$

то энергия окажется равной $E = -k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Отождествим волновую функцию для отрицательночастотных решений с зарядово сопряженным спинором ψ^C , определяемым с помощью соотношения

$$\bar{\psi} = \psi^T C$$

где матрица C была построена в Части 3.1.2 и дается выражением (3.52). При этом в наших обозначениях операция дираковского сопряжения выполняется последней, так что $\psi^C \equiv (\psi^C)$. В Задаче 4 показано, что

$$\psi^C = \gamma_0 C^\dagger \psi^*,$$

откуда следует, что компоненты ψ^C действительно являются линейными комбинациями компонент ψ^* . Легко проверить (Задача 4), что спинор ψ^C удовлетворяет уравнению

$$(i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - m) \psi^C = 0,$$

которое отличается от исходного знаком перед зарядом, откуда становится понятным смысл названия «зарядовое сопряжение». Очевидно, что в нерелятивистском пределе уравнение (3.151) сводится к уравнению Паули для частицы с массой m и зарядом e , которая называется позитроном [5]. В общем случае, если уравнение Дирака описывает не электрон, а какую-нибудь другую частицу, говорят, что отрицательночастотные решения соответствуют т.н. античастице. Позитрон является античастицей для электрона. Вскоре после теоретического предсказания он был обнаружен экспериментально [6].

Поскольку в представлении (3.142) матрица C записывается как

$$C_{\Lambda f} = M^* C M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то в этом представлении операция зарядового сопряжения фактически меняет местами верхние и нижние компоненты четырехкомпонентного спинора. Следовательно, нижние компоненты четырехкомпонентного спинора фактически соответствуют позитрону, имеющему противоположный знак электрического заряда и ту же массу, что и электрон. Отметим некоторые свойства операции зарядового сопряжения. В Задаче 5 показано, что зарядово сопряженный спинор при преобразованиях Лоренца меняется точно так же как и любой другой спинор. Квадрат операции зарядового сопряжения (Задача 6) оказывается равным 1:

$$(\psi^C)^C = \psi.$$

Напомним, что таким же свойством обладали операции P и T , определенные в предыдущей части. Во многом зарядовое сопряжение является с ними сходным. В частности, применение зарядового сопряжения к квадратичным комбинациям спинорных полей приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^C \chi^C &= \bar{\chi} \psi; & \bar{\psi}^C \gamma_5 \chi^C &= \bar{\chi} \gamma_5 \psi \\ \bar{\psi}^C \gamma^\alpha \chi^C &= -\bar{\chi} \gamma^\alpha \psi; & \bar{\psi}^C \gamma^\alpha \gamma_5 \chi^C &= \bar{\chi} \gamma^\alpha \gamma_5 \psi \\ \bar{\psi}^C \gamma^{\alpha\beta} \chi^C &= -\bar{\chi} \gamma^{\alpha\beta} \psi \end{aligned}$$

которые доказаны в Задаче 7. Заметим, что при выводе этих равенств существенно используется антикоммутация спинорных полей. Эквивалентная запись формул (3.154) также приведена в таблицах 3.1 и 3.2. Сравнивая различные преобразования, приведенные в этих таблицах, можно заметить, что все дополнительные множители -1 сокращаются, если последовательно выполнить преобразования CPT . При этом (Задача 8) под действием CPT -преобразований

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow i\gamma_5 \psi(-t, -\mathbf{x}).$$

Заметим теперь, что уравнение Дирака будет инвариантно относительно операции зарядового сопряжения, если считать, что под действием этой операции калибровочное поле меняется по закону

$$C : A_\mu \rightarrow (A_\mu)^C \equiv -A_\mu.$$

Уравнения Максвелла также будут инвариантны относительно C -преобразований, поскольку в силу формул (3.154) ток $j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$,

так же как и калибровочное поле, меняет знак при зарядовом сопряжении. Это связано с тем, что, как несложно убедиться, лагранжиан (3.136) инвариантен относительно C -преобразований $\psi \rightarrow \psi^C$; $A_\mu \rightarrow -A_\mu$

Кроме того, из законов преобразования, приведенных в таблице 3.1, следует, что действие электродинамики также будет инвариантно относительно P и T преобразований, если положить

$$P : (A')^\mu(t, \mathbf{x}) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(t, -\mathbf{x}); \quad T : (A')^\mu(t, \mathbf{x}) \rightarrow -\Lambda^\mu_\nu A^\nu(-t, \mathbf{x}),$$

где матрицы Λ^μ_ν для P и T преобразований приведены, например, в таблице 3.1. При CPT -преобразованиях, очевидно,

$$A^\mu(t, \mathbf{x}) \rightarrow -A^\mu(-t, -\mathbf{x}) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(-t, -\mathbf{x}),$$

где $\Lambda^\mu_\nu = \text{diag}(-1, -1, -1, -1)$. Заметим (см. таблицу 3.2), что под действием CPT -преобразований как A_μ , так и все квадратичные комбинации, построенные из спиноров, преобразуются по тензорному закону. То же самое справедливо и для других полей. (Например, для скалярного поля и поля Янга-Миллса, законы преобразования которых приведены далее, см. формулу (4.21).) Поэтому любая теория, инвариантная относительно преобразований Лоренца, также будет инвариантна и относительно CPT -преобразований. Это утверждение называется CPT -теоремой [7].

С-3.1.31. Ток при глобальной калибровочной инвариантности

Найти сохраняющийся ток, соответствующий глобальной калибровочной инвариантности $\psi \rightarrow e^{-ie\alpha}\psi$ лагранжиана классической электродинамики. Проверить его сохранение явным вычислением.

Solution

(!!! теорию тренировать еще нужно!)

Для свободного дираковского поля мы построили сохраняющийся ток, используя утверждение теоремы Нетер (укажу суть еще раз тут!!!). Теперь, для разнообразия, воспользуемся методом Нетер. Формально полагая в преобразованиях

$$\psi \rightarrow e^{-ie\alpha}\psi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu$$

$\alpha = \alpha(x)$, мы нарушаем инвариантность функции Лагранжа. Действительно, при этих преобразованиях

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - i\bar{\psi}\gamma^\mu e^{ie\alpha}(\partial_\mu - ieA_\mu)(e^{-ie\alpha}\psi) - m\bar{\psi}\psi = \\ &= \mathcal{L} + e\partial_\mu\alpha\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned}$$

откуда $\delta\mathcal{L} = e\partial_\mu\alpha\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. Сравнивая это выражение с (2.113) (!!!), мы получаем, что сохраняющийся ток записывается как

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi.$$

что совпадает с выражением, полученным ранее для свободного поля с помощью теоремы Нетер.

Для проверки сохранения тока (3.161) рассмотрим

$$\partial_\mu j^\mu = -e(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi.$$

Выражая $\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ и $(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu$ из уравнения Дирака и сопряженного ему уравнения, получаем, что

$$\partial_\mu j^\mu = -e\bar{\psi}(-ieA_\mu\gamma^\mu + im)\psi - e\bar{\psi}(ieA_\mu\gamma^\mu - im)\psi = 0$$

2.

Получить аналог уравнения Клейна-Гордона-Фока из уравнения Дирака при наличии внешнего электромагнитного поля.

Solution

В случае наличия внешнего электромагнитного поля мы умножаем уравнение $(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m)\psi = 0$ на $(-i\gamma^\nu \mathcal{D}_\nu - m)$ и учитываем, что

$$\gamma^\nu \gamma^\mu = \frac{1}{2} (\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu) + \frac{1}{2} (\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu) = \eta^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}$$

Тогда

$$0 = (-i\gamma^\nu \mathcal{D}_\nu - m)(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m)\psi = (\gamma^\mu \gamma^\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu + m^2)\psi = (\mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu + \gamma^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu + m^2)\psi'.$$

Поскольку в силу антисимметрии матриц $\gamma^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \psi &= \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} ((\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial_\nu - ieA_\nu) - (\partial_\nu - ieA_\nu)(\partial_\mu - ieA_\mu))\psi = \\ &= -\frac{ie}{2} \gamma^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\psi = -\frac{ie}{2} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi, \end{aligned}$$

то окончательно мы получаем, что

$$\left(\mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu - \frac{ie}{2} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m^2 \right) \psi = 0.$$

3. Нерелятивистский предел уравнения Дирака в поле

Исследовать нерелятивистский предел уравнения Дирака во внешнем электромагнитном поле.

Solution

(!?!?!! Киселев же уже решал??? не знаю, в теории должен быть раздел про это. Это разные или одинаковые два решения? похоже, что разные, тогда их рядом и напишу.)

При исследовании нерелятивистского предела наиболее удобным оказывается использование представления (3.142), в котором уравнение Дирака записывается как

$$M(i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m)M^{-1}\psi_M = 0$$

Представляя спинор w_{AI} в виде

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_{12} \\ \psi_{34} \end{pmatrix}$$

и учитывая, что $A_\mu = (\varphi, -\mathbf{A})$, а

$$M\gamma^0 M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad M\gamma^i M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

мы можем представить уравнение Дирака в виде системы

$$\begin{cases} i\left(\frac{\partial}{\partial t} - ie\varphi\right)\psi_{12} - i\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\partial} + ie\mathbf{A})\psi_{34} - m\psi_{12} = 0 \\ -i\left(\frac{\partial}{\partial t} - ie\varphi\right)\psi_{34} + i\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\partial} + ie\mathbf{A})\psi_{12} - m\psi_{34} = 0 \end{cases}$$

В квантовой механике зависимость волновой функции от времени для состояний с определенной энергией E задается множителем $\exp(-iEt)$. В пределе малых скоростей энергия частицы приблизительно равна массе покоя. Поэтому, совершив замену $\psi_M \equiv e^{-imt}\psi'_M$, мы можем считать, что ψ'_M медленно меняется с течением времени:

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \psi'_M \right| \ll |m\psi'_M|$$

В частности, отсюда следует, что в пределе малых скоростей ($|\mathbf{k}| \ll m$) $\psi'_{34} \ll \dot{\psi}'_{12}$. (Именно благодаря этому условию представление (3.142) является особенно удобным при исследовании низкоэнергетического приближения уравнения Дирака.)

При подстановке (3.174) в первое из уравнений системы (3.173), мы приходим к следующему уравнению для столбца ψ'_{12} , который мы далее будем обозначать через ψ_e :

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} - ie_\varphi \right) \dot{\psi}_e + \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\partial} + ie\mathbf{A}))^2 \psi_e = 0$$

Поскольку $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k$, то 1)

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\partial} + ie\mathbf{A}))^2 \psi_e &= \sigma_i \sigma_j (\partial_i - ieA_i) (\partial_j - ieA_j) \psi_e = \\ &= (\partial_i - ieA_i)^2 \psi_e + e\varepsilon_{ijk} \sigma_k (\partial_i (A_j \psi_e) - A_j \partial_i \psi_e). \end{aligned}$$

В силу антисимметрии ε_{ijk} это выражение может быть переписано как

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\partial} + ie\mathbf{A}))^2 \psi_e &= (\boldsymbol{\partial} + ie\mathbf{A})^2 \psi_e + e\varepsilon_{kij} \sigma_k (\partial_i (A_j \psi_e) - A_j \partial_i \psi_e) = \\ &= \left((\boldsymbol{\partial} + ie\mathbf{A})^2 + \frac{e}{2} \sigma_k \varepsilon_{kij} F_{ij} \right) \psi_e = ((\boldsymbol{\partial} + ie\mathbf{A})^2 - e(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H})) \psi_e. \end{aligned}$$

Поэтому окончательно получаем, что

$$\psi_M \approx e^{-imt} \begin{pmatrix} v_e \\ 0 \end{pmatrix},$$

где двухкомпонентный столбец ψ удовлетворяет уравнению Лаули

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_e = \left(\frac{1}{2m} (-i\boldsymbol{\partial} + e\mathbf{A})^2 - e\varphi + \frac{e}{2m} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}) \right) \psi_e.$$

4. Уравнение зарядово сопряженного спинора

Построить уравнение для зарядово сопряженного спинора ψ^C , определяемого соотношением $\bar{\psi}^C = \psi^T C$.

Solution.

Из уравнения $\bar{\psi}^C = \psi^T C$ можно легко выразить как ψ , так и ψ^C . Действительно, поскольку $C^1 = C^1 = -C$, а $(\gamma^0)^T = \gamma^0$ (????), то

$$\psi = (\bar{\psi}^C C^+)^T = C^* (\gamma^0)^T (\psi^C)^* = (C\gamma^0 \psi^C)^*$$

откуда $\psi^C = -\gamma^0 C \psi^*$.

Подставляя полученное выражение для ψ в уравнение Дирака, получаем, что

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m) (C\gamma^0 \psi^C)^\chi = 0.$$

Производя комплексное сопряжение этого уравнения и умножая результат на матрицу $\gamma^0 C''$, с учетом тождеств $C^+ \gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^\top$ и $\gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\mu$ имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma^0 C^+ (-i(\gamma^\mu)^* \partial_\mu + e(\gamma^\mu)^* A_\mu - m) C \gamma^0 \psi^C = \\ &= \gamma^0 \left(i(\gamma^\mu)^\top \partial_\mu - e(\gamma^\mu)^\dagger A_\mu - m \right) \gamma^0 \psi^C = \\ &= (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m) \psi^C. \end{aligned}$$

Поэтому окончательно уравнение для ψ^C запишется так:

$$(i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - m) \psi^C = 0$$

5.

Доказать, что зарядово сопряженный спинор при преобразованиях Лоренца меняется так же как и обычный спинор.

Solution

В Части 3.1.3 было установлено, что при преобразованиях Лоренца спинорное поле изменяется по закону

$$\psi'(x') = \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)\psi(x).$$

Зарядово сопряженный спинор дается формулой $\psi^C = -\gamma^0 C \psi^*$. Поэтому (учитывая, что параметры группы Лоренца $\alpha_{\alpha\beta}$ являются вещественными) при преобразованиях Лоренца

$$\begin{aligned} (\psi^C)'(x') &= -\gamma^0 C \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}(\gamma^{\alpha\beta})^*\right) C \gamma^0 \gamma^0 C^* \psi(x) = \\ &= \gamma^0 C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}(\gamma^{\alpha\beta})^*\right)^n C^{-1} \gamma^0 \psi^C(x) \end{aligned}$$

Для того чтобы упростить это выражение, воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} \gamma^0 C (\gamma^{\alpha\beta})^* C^{-1} \gamma^0 &= \frac{1}{2} \gamma^0 C \left((\gamma^\alpha)^* C^{-1} C (\gamma^\beta)^* - (\gamma^\beta)^* C^{-1} C (\gamma^\alpha)^* \right) C^{-1} \gamma^0 = \\ &= \frac{1}{2} \gamma^0 \left((\gamma^\alpha)^- \gamma^0 \gamma^0 (\gamma^\beta)^+ - (\gamma^\beta)^+ \gamma^0 \gamma^0 (\gamma^\alpha)^+ \right) \gamma^0 = \\ &= \frac{1}{2} (\gamma^\alpha \gamma^\beta - \gamma^\beta \gamma^\alpha) = \gamma^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

С его помощью закон преобразования зарядово сопряженного спинора можно переписать в виде

$$(\psi^C)'(x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)^n \psi^C(x) = \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\right)\psi^C(x).$$

Другими словами, зарядово сопряженный спинор преобразуется точно так же, как и исходный спинор, из которого он был получен.

6.

Вычислить квадрат оператора зарядового сопряжения при действии на спинорное поле.

Принимая во внимание, что $C^* = C^\top = C^{-1}$, а также используя определение операции зарядового сопряжения (3.150) и свойства (3.8) и (3.51), получаем, что

$$(\psi^C)^C = (\gamma^0 C^+ \psi^*)^C = \gamma^0 C^{\dagger} (\gamma^0)^* C^\top \psi = \gamma^0 (\gamma^0)^- \psi = \psi.$$

7.

Найти, как квадратичные комбинации спинорных полей меняются при зарядовом сопряжении. Рассмотрим вначале величину

$$\bar{\psi}^C \chi^C = \psi^T C \gamma^0 C^{-1} \chi^*,$$

которая, очевидно, не будет меняться при транспонировании. При проведении транспонирования необходимо учесть, что при перестановке спиноров меняется знак, а матрица C антикоммутирует с γ^0 :

$$\bar{\psi}^C \chi^C = -\chi^+ C \gamma^0 C^{-1} \psi = \chi^+ \gamma^0 \psi = \bar{\chi} \psi.$$

Аналогичным образом доказываются и остальные тождества:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^C \gamma_5 \chi^C &= (\psi^T C \gamma_5 \gamma^0 C^{-1} \chi^*)^T = -\chi^+ C (\gamma_0)^T (\gamma_5)^T C^{-1} \psi = \chi^+ \gamma^0 \gamma_5 \psi = \bar{\chi} \gamma_5 \psi; \\ \bar{\psi}^C \gamma^\mu \chi^C &= (\psi^T C \gamma^\mu \gamma^0 C^{-1} \chi^*)^T = -\chi^+ C (\gamma_0)^T C^{-1} C (\gamma^\mu)^T C^{-1} \psi = -\chi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \psi = -\bar{\chi} \gamma^\mu \psi; \\ \bar{\psi}^C \gamma^\mu \gamma_5 \chi^C &= (\psi^T C \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^0 C^{-1} \chi^*)^T = -\chi^+ C (\gamma_0)^T C^{-1} C \gamma_5^T C^{-1} C (\gamma^\mu)^T C^{-1} \psi = -\chi^+ \gamma^0 \gamma_5 \gamma^\mu \psi = \bar{\chi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi; \\ \bar{\psi}^C \gamma^{\mu\nu} \chi^C &= (\psi^T C \gamma^{\mu\nu} \gamma^0 C^{-1} \chi^*)^T = -\chi^+ C (\gamma_0)^T C^{-1} C (\gamma^{\mu\nu})^T C^{-1} \psi = -\chi^+ \gamma^0 \gamma^{\mu\nu} \psi = -\bar{\chi} \gamma^{\mu\nu} \psi.\end{aligned}$$

8. спиноры под действием CPT преобразований.

Найти закон преобразования спинорного поля ψ под действием CPT преобразований. Последовательно применяя T -, P - и C -преобразования, имеем:

$$\begin{aligned}T : \psi(t, \mathbf{x}) &\rightarrow \gamma^1 \gamma^3 \psi^*(-t, \mathbf{x}) \\ PT : \psi(t, \mathbf{x}) &\rightarrow i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 \psi(-t, -\mathbf{x}) \\ CPT : \psi(t, \mathbf{x}) &\rightarrow \gamma^0 C^i (i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 \psi(-t, -\mathbf{x}))^* = \\ &= \gamma^0 (-i \gamma^0 \gamma^2) (-i) \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 \psi(-t, -\mathbf{x}) = -\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \psi(-t, -\mathbf{x}) = i \gamma_5 \psi(-t, -\mathbf{x})\end{aligned}$$

(потом подумаю.)

13 Special Models and Methods

(now it is mostly by Greiner, but now only!)

13.1 Other Free Fields

(там много разных конструкций может еще быть, мб потом напишу их.)

13.1.1 The Weyl Equation - The Neutrino

In 1930 W. Pauli postulated the existence of the neutrino in order to guarantee the energy and momentum conservation for the weak interaction, which at that time seemed to be violated in the β -decay experiments. Since the energy of the neutrino could not be determined even in the most sensitive measurements of the β decay of nuclei, the interaction of this postulated particle with matter must be extremely small. For example, it must not have electric charge, and accordingly, mass and magnetic moment must be assumed to be nearly vanishing, or even zero. The particle was named "neutrino" and abbreviated by " ν ". Because of the relativistic mass-energy relation, a particle with rest mass $m_\nu = 0$ moves with the velocity of light. The

experimental upper bound for the rest mass of the electronic neutrino is about a few electron volts and thus less than a thousandth of the electron's rest mass. Therefore the assumption $m_\nu = 0$ seems to be reasonable. Further experimental observations of the angular momentum balance during β decay showed that the neutrino has spin $\frac{1}{2}$. Consequently the Dirac equation for $m_0 = 0$ should be the fundamental equation of motion for the neutrino.

Neutrino and photon can be regarded as equal as far as charge, magnetic moment, mass and velocity are concerned, the main difference between the particles being, respectively, the half-integer and integer half-integer spin. There is also a difference between the neutrino ν that occurs in β^+ decays and the antineutrino $\bar{\nu}$ that is emitted during the β^- decay. Historically the existence of the neutrino can be experimentally proved as an outcome of the β decay (β^- decay) through the recoil of the atomic nucleus in the reaction

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}.$$

Further, the inverse β decay (β^+ -decay) can be initiated by the neutrino and observed in experiments:

$$p + \bar{\nu} \rightarrow n + e^+$$

Another empirical property which has been found by accurate studies of the inverse β decay is that the antineutrino always has the same distinct spin orientation compared to its momentum direction. Assuming in the calculations that the spin of the antineutrino can be oriented parallel as well as antiparallel to its momentum results in theoretical cross-sections half as large as the experimental values. Precise experimental analyses have shown that the spin of the neutrino is antiparallel and the spin of the antineutrino is parallel to its momentum direction (see Fig. 14.1). This is the basic phenomenon of parity violation: If parity was conserved, neutrinos as well as antineutrinos must exist in nature with both spin directions. Finally, in this short introduction we mention that there are different kinds of

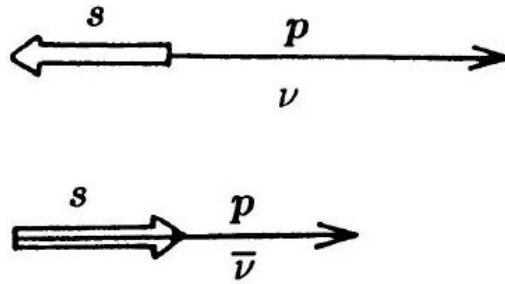


Fig. 14.1. The spin of the neutrino is always directed antiparallel to its direction of motion; the opposite is true for the antineutrino neutrinos, which can be related to electrons, muons and taus by their specific behaviour in weak-interaction processes ¹.

In 1929 Hermann Weyl proposed a two-component equation to describe massless spin $\frac{1}{2}$ particles ², but the Weyl equation violates parity invariance and therefore it was at first rejected. Then, after parity violation of the weak interaction was experimentally proved, in 1957 Landau, Salam as well as Lee and Yang took this proposal ³ and regarded the Weyl equation as the basic equation of motion of the neutrino.

We first consider the Dirac equation of a particle with mass $m_0 = 0$:

$$\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = c \hat{\alpha} \cdot \hat{p} \Psi(x) \quad (14.1)$$

and this equation no longer contains the $\hat{\beta}$ matrix. The anticommutation relations for the three matrices $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ and $\hat{\alpha}_3$,

$$\{\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j\} = 2\delta_{ij} \quad (14.2)$$

can be satisfied by the 2×2 Pauli matrices $\hat{\sigma}_i$. Merely the necessity of constructing $\hat{\beta}$ as the fourth anticommuting matrix requires the introduction of 4×4 matrices, and the necessity of describing particles with spin- $\frac{1}{2}$ by two spinors is obviously connected with the particles' masses; therefore this reason disappears if the mass is zero: The wave equation of such a particle can be set up with only one spinor.

The wave equation for the two-component amplitude $\Phi^{(+)}(x)$ describing the neutrino reads

$$i\hbar \frac{\partial \Phi^{(+)}}{\partial t} = c \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \Phi^{(+)}(x) \quad (14.3)$$

or, after dividing by $i\hbar$,

$$\frac{\partial \Phi^{(+)}}{\partial t} = -c \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla \Phi^{(+)}(x) \quad (14.4)$$

where $\hat{\sigma}_i$ are the 2×2 Pauli matrices. The plane-wave solutions of the Weyl equation are given by

$$\Phi^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}} e^{-ip \cdot x / \hbar} u^{(+)}(p) \quad (14.5)$$

with

$$p = \{p_0, \mathbf{p}\} = \left\{ \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right\}, \quad x = \{x_0, \mathbf{x}\} \quad \text{and} \\ p \cdot x = p_0 x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}. \quad (14.6)$$

Following the plane-wave solutions for electrons, the neutrino wave functions are normalized in such a way that the norm remains invariant under Lorentz transformations (see

Chap. 6). $u^{(+)}(p)$ is a two-component spinor which satisfies the equation

$$p_0 u^{(+)} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} u^{(+)}. \quad (14.7)$$

This relation is of special interest, since we note that due to (14.7) the solution for a given sign of energy p_0 corresponds to a certain orientation of the spin σ with respect to the direction of motion $\mathbf{p}$. By applying the helicity operator $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}/|\mathbf{p}|$ to both sides of the equation and using the relation

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{A})(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

we get $(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p})^2$, and therefore

$$(p_0^2 - \mathbf{p}^2) u^{(+)} = 0, \quad (14.8)$$

so that only non-vanishing solutions for u exist if

$$p_0 = \pm |\mathbf{p}| \quad (14.9)$$

1 The theory of weak interactions is extensively discussed in Vol. 5 of this series: Gauge Theory of Weak Interactions (Springer, Berlin, Heidelberg), to be published.

2 H. Weyl: Z. Physik 56, 330 (1929).

3 L. Landau: Nucl. Phys. 3, 127 (1957); T.D. Lee, C.N. Yang: Phys. Rev. 105, 1671 (1957); A. Salam: Nuovo Cimento 5, 299 (1957).

is valid. This is naturally the relativistic energy of massless particles, and here it again follows that neutrinos move with the velocity of light. But, of course, this result was already implied in our initial demand that the massless particle has non-zero energy. In the common representation of the Pauli matrices, with the z axis in the $\mathbf{p}$ direction, the solution of (14.7) reads

$$u^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14.10)$$

This solution describes right-handed massless particles with spin in the direction of motion. By this we mean

$$\frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u^{(+)} = \hat{\sigma}_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14.11)$$

or, literally: The helicity operator has a positive eigenvalue, the spin is directed parallel to p , which corresponds to a right-handed screw if we look in the direction of motion (i.e. in the direction of $p/|p|$), and which is illustrated in Fig. 14.2.

For states with positive energy ($p_0 = +|\mathbf{p}|$) the wave equation (14.3) only has waves of positive helicity as solutions. With (14.7) and the aid of (14.9) we see immediately that we have the reverse result for states with negative energy ($p_0 = -|\mathbf{p}|$); there, the wave equation (14.3) only contains waves of negative helicity as solutions. This remains valid even in the hole theory, where a wave function with negative energy, negative momentum, and negative spin direction is interpreted as an antiparticle with positive energy, positive momentum, and positive spin direction. This assignment of $\pm p_0 \Leftrightarrow$ particles, antiparticles to the helicity is contrary to the requirement of the experiments dealing with weak interactions (see Fig. 14.1).

To describe left-handed massless particles, we must obviously start with the equation

$$i\hbar \frac{\partial \Phi^{(-)}}{\partial t} = -c \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \Phi^{(-)}(x) \quad (14.12)$$

Replacing $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ by $-\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ also yields a realization of the commutation relation (14.2), so that

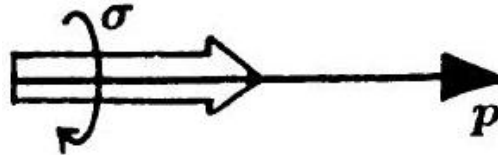


Fig. 14.2. The spin of the massless particle described by the wave equations (14.3) or (14.7) points in the direction of p , corresponding to a right-handed screw. By convention the helicity of the particle $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}| = +1$. A neutrino cannot be such a particle, because it is known from experiments that the neutrino has helicity -1

(14.12) is then a possible Dirac equation for massless spin- $\frac{1}{2}$ particles, in the same way as (14.3). With the ansatz

$$\Phi^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}} e^{-ip \cdot x/\hbar} u^{(-)}(p) \quad (14.13)$$

we find

$$p_0 u^{(-)} = -\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p} u^{(-)}, \text{ with} \quad (14.14)$$

$$u^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14.15)$$

In (14.14), $p_0 = E/c$ can again be either positive or negative. We call solution (14.13) a neutrino state, because, as already mentioned repeatedly, the experiments show that neutrinos appear only as left-handed particles (with negative helicity). In this state the spin is antiparallel to p and can be represented by a left-handed screw (see Fig. 14.1). For the antineutrino state ($p_0 < 0$) we have the opposite case, the particle is right-handed. Results achieved in β -decay experiments show that the neutrino always moves antiparallel to its spin direction. This means that the helicity or longitudinal polarization of a neutrino with positive energy is negative, while the helicity of a neutrino with negative energy is positive. The solution with $p_0 = -|\mathbf{p}|$ yields a spin parallel to $\mathbf{p}$ and can be represented by a right-handed screw.

On the other hand the helicity of a particle with positive energy, described by (14.4), is also positive. Therefore, this particle of (14.4) may be identified with the antineutrino of (14.12). As already mentioned, according to the interpretation of the negative energy states within the hole theory, the antineutrino has a momentum which is opposite to the empty negative energy state, and also the spin flips. Therefore, the relation between spin direction and momentum of the antineutrino is represented by a right-handed screw according to (14.14). The massless antiparticle which belongs to (14.3) or (14.7), respectively, has negative helicity; it obviously behaves exactly like the neutrino described by (14.14). Nevertheless, it should be mentioned that stating that the neutrino (antineutrino) is always left-handed (right-handed), only makes sense if the rest-mass is exactly zero. Otherwise a Lorentz transformation, which transforms a left-handed particle into a right-handed one, can always be found.

To derive the neutrino current we rewrite (14.12) as

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi^{(-)}}{\partial t} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla \Phi^{(-)} = 0 \quad (14.16)$$

Combining the unit matrix and $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ to form a four-vector $\hat{\sigma}_\mu = \{1, +\hat{\boldsymbol{\sigma}}\}$, we can write the Weyl equation in a more compact way:

$$\hat{\sigma}_\mu \nabla^\mu \Phi^{(-)} = 0 \quad (14.17)$$

and the Hermitian conjugate equation reads

$$\nabla^\mu (\Phi^{(-)})^\dagger \hat{\sigma}_\mu = 0 \quad (14.18)$$

We multiply the first equation from the left by $(\Phi^{(-)})^\dagger$, the latter one from the right by $\Phi^{(-)}$ and then add both equations. As usual this yields

$$\nabla^\mu (\Phi^{(-)})^\dagger \hat{\sigma}_\mu \Phi^{(-)} = 0 \quad (14.19)$$

which is a continuity equation with the four-current

$$j_\mu = (\Phi^{(-)})^\dagger \hat{\sigma}_\mu \Phi^{(-)} \quad (14.20)$$

Its space and time components are

$$\mathbf{j} = -(\Phi^{(-)})^\dagger \hat{\boldsymbol{\sigma}} \Phi^{(-)}, \quad (14.21)$$

$$\varrho = (\Phi^{(-)})^\dagger \Phi^{(-)}. \quad (14.22)$$

The normalization constant of the neutrino wave function can be derived from the integral with positive definite density ϱ , if we require that

$$\int \varrho d^3x = 1. \quad (14.23)$$

By considering various types of interactions, neutrinos can appear together with other spin $\frac{1}{2}$ particles which have a finite mass and therefore are described by four-component wave functions. To have a unified description in such cases, it is appropriate to also introduce a bispinor wave function for the neutrino. To provide the connection between the twocomponent solutions of the Weyl equation with the already known four-component electron spinors, we go back to the Dirac equation for a particle with rest mass m_0 . However we choose a different representation of the Dirac matrices $\hat{\alpha}$ and $\hat{\beta}$, namely

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_i \end{pmatrix}, \quad (14.24)$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.25)$$

One proves immediately the anticommutator relations of the Dirac matrices:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_j & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_j & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i \end{pmatrix} = 2\delta_{ij} \\ \hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ -\hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

This representation has the disadvantage that the four-components of the bispinor do not split up into small and large components in the non-relativistic limit. However, as neutrinos have at least approximately zero rest mass and are therefore relativistic particles, this disadvantage is in practice insignificant. In this representation, with the help of the two-component notation

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Phi^{(+)} \\ \Phi^{(-)} \end{pmatrix} \quad (14.28)$$

the Dirac equation can be split up into

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Phi^{(+)}}{\partial t} &= -i\hbar c \hat{\sigma} \cdot \nabla \Phi^{(+)} - m_0 c^2 \Phi^{(-)} \\ &= c \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \Phi^{(+)} - m_0 c^2 \Phi^{(-)}, \end{aligned} \quad (14.29)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Phi^{(-)}}{\partial t} &= i\hbar c \hat{\sigma} \cdot \nabla \Phi^{(-)} - m_0 c^2 \Phi^{(+)} \\ &= -c \hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \Phi^{(-)} - m_0 c^2 \Phi^{(+)}. \end{aligned} \quad (14.30)$$

Note that the upper and the lower components of Ψ are coupled by the mass term. In the limiting case $m_0 \rightarrow 0$ two decoupled two-component equations are obtained, corresponding to the respective Weyl equations. Then $\Phi^{(+)}$ describes right-handed and $\Phi^{(-)}$ left-handed massless particles. Because of the fact that in nature neutrinos or antineutrinos appear only with a definite helicity, we must require that in the four-component description two of the components vanish. This is achieved by applying the projection operators

$$\hat{P}_{\pm} = \frac{1}{2} (11 \pm \gamma_5) \quad (14.31)$$

to the spinor Ψ of (14.28). In the representation used here (14.24) and (14.25) γ_5 is diagonal, and with $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5$ it follows that

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}. \quad (14.32)$$

Thus we get

$$\Psi^{(-)} = \frac{1}{2}(11 - \gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (14.33)$$

$$\Psi^{(+)} = \frac{1}{2}(11 + \gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} \Phi^{(+)} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14.34)$$

Also, by application of $\gamma_5^2 = 11$, one evidently gets

$$\gamma_5\Psi^{(-)} = -\Psi^{(-)} \quad (14.35)$$

$$\gamma_5\Psi^{(+)} = \Psi^{(+)} \quad (14.36)$$

Equations (14.33) and (14.34) are in agreement with the Dirac equation only in the case that the particle mass is exactly zero, i.e. only then are $\Psi^{(+)}$ and $\Psi^{(-)}$ solutions of the Dirac equation. Indeed γ^5 anticommutes with all γ matrices and it obviously commutes with the mass term. Hence, for vanishing rest mass m_0 , $\Psi^{(+)}$ and $\Psi^{(-)}$ are eigenfunctions of the Hamiltonian, the helicity operator and of γ_5 .

The two-component Weyl theory is thus equivalent to a four-component Dirac representation. However, in the framework of the Weyl equation, the distinction between particles and antiparticles is superfluous. The two possible states of the neutrino are only characterized by parallel and antiparallel orientation of the spin with respect to its momentum.

Now, we want to analyse the non-invariance of the two-component theory under parity transformations. Let us have a look at the two-component equations (14.3) and (14.7). By performing a space inversion ($\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$, $\hat{\sigma} \rightarrow \hat{\sigma}$) a state with the energy $p_0 = |\mathbf{p}|$, momentum $\mathbf{p}$ and helicity $\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}| = 1$ will be transformed into a state with $p_0 = |\mathbf{p}|$, momentum $-\mathbf{p}$ and helicity -1. Such a state, though, does not exist in this two-component theory of massless spin- $\frac{1}{2}$ particles.

There is another way to recognize the non-invariance of a two-component theory for space inversion. $\mathbf{p}$ is a polar vector, $\hat{\sigma}$ is an axial vector and thus $\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ is a pseudoscalar under inversion. This is also obvious from (14.35) and (14.36) which give rise to

$$\overline{\Psi^{(\pm)}}\gamma_5\Psi^{(\pm)} = \pm\overline{\Psi^{(\pm)}}\Psi^{(\pm)} \quad (14.37)$$

As the left-hand side is a pseudoscalar density while the right-hand side is a scalar density. Thus helicity eigenstates are no parity eigenstates. The wave equations (14.29) and (14.30), which contain the mass m_0 , are symmetric with respect to reflection. In the description of a particle by only one spinor this symmetry gets lost. This symmetry, though, is not essential, because the reflection symmetry need not be a universal property of nature. Reflection symmetry only exists if the particle is replaced by the antiparticle simultaneously. Equations (14.29) and (14.30) are in fact invariant under $x \leftrightarrow -x$ and $\Psi^{(+)} \leftrightarrow \Psi^{(-)}$. The situation might be further clarified by observing that the mass term in the Dirac equation mixes the two helicity states while the kinetic terms conserve it

$$\begin{aligned}
& \bar{\Psi} \left(\not{\epsilon} - m_0 c \right) \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \Psi^{(\pm)} \\
&= \Psi^\dagger \gamma_0 \left[\frac{1 \mp \gamma_5}{2} (\not{\epsilon} - m_0 c) - \frac{1 \pm \gamma_5}{2} m_0 c \right] \Psi^{(\pm)} \\
&= \left[\left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2} \right) \Psi \right]^\dagger \gamma_0 (\not{\epsilon} - m_0 c) \Psi^{(\pm)} - \left[\frac{1 \mp \gamma_5}{2} \Psi \right]^\dagger \gamma_0 m_0 c \Psi^{(\pm)}. \tag{14.38}
\end{aligned}$$

Left- and right handed fermions are thus strongly coupled if they have non-vanishing mass. Finally we consider the angular-momentum representation of the Weyl equation. With

$$\Phi^{(+)} = \phi^{(+)} e^{-iEt/\hbar}, \tag{14.39}$$

then from (14.4) we get

$$\hbar \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla \phi^{(+)} = i p_0 \phi^{(+)}. \tag{14.40}$$

The operators $\hat{J}^2$ and $\hat{J}_z$ commute with $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla$, while $\hat{\mathbf{L}}^2$ does not. Accordingly, the angular momentum representation of the neutrino and antineutrino wave function, respectively, contain spherical spinors $\chi_{\pm\kappa,\mu}$. As we have already learned from the discussion of electron wave functions including the coupling to external fields (see Chap.9), the spinorbit operator $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ also does not commute with $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla$. The same holds for the parity operator multiplied by any arbitrary 2×2 matrix. Furthermore, there exists no 2×2 matrix which anticommutes with $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. As a consequence of these commutation properties the solutions will not have a definite parity and thus they will become a linear combination of both spherical spinors $\chi \pm \kappa, \mu$. We try the ansatz (see also Exercise 14.3)

$$\phi_{\kappa,\mu}^{(+)} = g(r) \chi_{\kappa,\mu} + i f(r) \chi_{-\kappa,\mu} \tag{14.41}$$

and then proceed to make use of the following relations, which have been derived in the context of the two-centre Dirac equation [see (10.2)ff., (10.37), (10.54)ff.]:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla = \hat{\sigma}_r \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar r} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \right), \tag{14.42}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \chi_{\kappa,\mu} = -\hbar(\kappa + 1) \chi_{\kappa,\mu}, \tag{14.43}$$

$$\hat{\sigma}_r \chi_{\kappa,\mu} = -\chi_{-\kappa,\mu} \tag{14.44}$$

This finally leads to the differential equations for the radial functions $g(r)$ and $f(r)$:

$$\frac{dg}{dr} = \frac{p_0}{\hbar} f - \frac{\kappa + 1}{r} g, \tag{14.45}$$

$$\frac{df}{dr} = \frac{\kappa - 1}{r} f - \frac{p_0}{\hbar} g. \tag{14.46}$$

These are the same differential equations as those we derived previously for the case of electrons in the presence of a constant, spherical-symmetric potential V_0 , assuming that we set $m_0 = 0$ and $V_0 = 0$. The solutions which are regular at $r = 0$ can be directly taken from Exercise 9.5, yielding the results:

$$g(r) = j_l \left(\frac{p_0 r}{\hbar} \right) \quad (14.47)$$

$$f(r) = \frac{\kappa}{|\kappa|} j_l \left(\frac{p_0 r}{\hbar} \right) \quad (14.48)$$

Note that the wave functions with $\kappa = |\kappa|$ and $\kappa = -|\kappa|$ are not linearly independent. Instead, one has

$$\phi_{-\kappa,\mu}^{(+)} = i\phi_{\kappa,\mu}^{(+)} \quad (14.49)$$

As a consequence of the unique helicity of the massless, two-component particle there exist only half as many states as in a four-component description. If we start with (14.11) for left-handed neutrinos, the angular momentum representation reads (see Exercise 14.3):

$$\phi_{\kappa,\mu}^{(-)} = g(r)\chi_{\kappa,\mu} - if(r)\chi_{-\kappa,\mu} \quad (14.50)$$

14.1 Dirac Equation for Neutrinos

Problem. Solve the Dirac equation for neutrinos and determine the eigenvalues of the helicity operator and those of γ_5 for both energy solutions. Make use of the standard representation of the Dirac matrices

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution

Consider the Dirac equation for massless particles:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\hbar c \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \nabla \Psi(x) = \hat{H} \Psi(x).$$

By means of the usual ansatz for the time evolution

$$\Psi = \psi e^{-iEt/\hbar}$$

we obtain

$$E\psi = -i\hbar c \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \nabla \psi$$

The solution of this equation can be represented in terms of plane waves. Accordingly, the ansatz

$$\psi = e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}/\hbar} u(p)$$

yields

$$Eu(p) = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p} u(p),$$

where

$$E = \pm E_p = \pm |\mathbf{p}|c.$$

Using the standard representation of the Dirac matrices, one has $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$,

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix},$$

and obviously

$$\gamma_5 \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}$$

holds. Thus, the Hamiltonian in (1) can also be written as $\hat{H} = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\mathbf{p}} = c\gamma_5 \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$.

The eigenfunctions of the Hamiltonian $\hat{H}$ are simultaneously eigenfunctions of the helicity operator $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}/|\mathbf{p}|$ and γ_5 . The solutions of the eigenvalue equation can be directly taken from the plane-wave solutions of the free Dirac equation (see Chap. 2). We set $m_0 = 0$ and obtain four linearly independent solutions for the spinor u . Hereby the z axis is chosen as the direction of the momentum $\mathbf{p}$. For u it follows that:

helicity:

$$\underbrace{\begin{matrix} +1 & -1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{\text{positive energy}}, \quad \underbrace{\begin{matrix} +1 & -1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{\text{negative energy}},$$

whereby normalization factors have been suppressed. The eigenvalues of γ_5 are found to be

E	Helicity	Eigenvalue of γ_5
$+E_p$	+1	+1
$+E_p$	-1	-1
$-E_p$	+1	-1
$-E_p$	-1	+1

Obviously γ_5 and the helicity operator have equal eigenvalues in the case of positive energy solutions. Opposite signs result for solutions with negative energy, and the eigenvalues of γ_5 are just the negative of the helicity eigenvalues.

14.2 CP as a Symmetry for the Dirac Neutrino

Problem. Show that the product of charge conjugation and parity transformation represents a symmetry transformation of the Dirac neutrino.

Solution

In the standard representation of the Dirac matrices γ_S^μ the charge-conjugated spinor is found via

$$\psi_c(x) = \hat{C}\gamma^0\psi^*.$$

Hereby the charge conjugation operator $\hat{C}$ satisfies the condition

$$\left(\hat{C}\gamma^0\right)\gamma^{\mu*}\left(\hat{C}\gamma^0\right)^{-1} = -\gamma^\mu$$

together with

$$\hat{C} = i\gamma^2\gamma^0 = -\hat{C}^{-1} = -\hat{C}^\dagger = -\hat{C}^T.$$

By means of a unitary transformation $\hat{U}$, which transforms the standard representation of the γ matrices into the one we have used for describing the neutrinos [see (14.24) and (14.25)], the corresponding representation of the charge conjugation operator can be found. The unitary operator $\hat{U}$ reads

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}(11 + \gamma_S^0\gamma_S^5).$$

Using

$$\gamma_S^0\gamma_S^5 = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -11 & 0 \end{pmatrix},$$

it follows that

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ -11 & 11 \end{pmatrix}.$$

Indeed, we obtain

$$\begin{aligned}
 \hat{U}\gamma_S^i\hat{U}^{-1} &= \hat{U}\gamma_S^i\hat{U}^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ -\hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & \hat{\sigma}_i \\ -\hat{\sigma}_i & \hat{\sigma}_i \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ -\hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} = \gamma^i,
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{U}\gamma_S^0\hat{U}^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \gamma^0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Now we transform the charge conjugation operator $\hat{C}$ into the new representation:
 $\hat{C} = \hat{U}\hat{C}_S\hat{U}^{-1}$.

Accordingly, from

$$\begin{aligned}
 \hat{C}_S &= i\gamma_S^2\gamma_S^0 = i \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_2 \\ -\hat{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \\
 &= i \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\sigma}_2 \\ -\hat{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{10}$$

we derive

$$\begin{aligned}
 \hat{C} &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\sigma}_2 \\ -\hat{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{\sigma}_2 & -\hat{\sigma}_2 \\ -\hat{\sigma}_2 & \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} \\
 &= i \begin{pmatrix} -\hat{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Performing a parity transformation of the Dirac spinors we obtain

$$\psi_P(x') = e^{i\varphi}\gamma_S^0\psi(-x, t).$$

In the following considerations the phase factor $e^{i\varphi}$ does not play any role and will be omitted. Combining charge conjugation and parity transformation it clearly follows that

$$\begin{aligned}
 \psi_{CP}(\mathbf{x}, t) &= \hat{C}\gamma_S^0\gamma_S^0\psi^*(-\mathbf{x}, t) = \hat{C}\psi^*(-\mathbf{x}, t) \\
 &= i \begin{pmatrix} -\hat{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} \psi^*(-\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \tag{13}$$

Finally we check whether the spinor ψ_{CP} fulfills the Dirac equation. For this purpose we use the relation

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha} \begin{pmatrix} -\hat{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} \\
&= - \begin{pmatrix} -\hat{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i^* & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_i^* \end{pmatrix} \\
&= - \begin{pmatrix} -\hat{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} \hat{\alpha}^*.
\end{aligned} \tag{14}$$

With $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$ we derive

$$\begin{aligned}
&\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \hat{\alpha} \cdot \nabla_x \right) \psi_{CP}(x, t) \\
&= \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \hat{\alpha} \cdot \nabla_x \right) i \begin{pmatrix} -\hat{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} \psi^*(-x, t) \\
&= i \begin{pmatrix} -\hat{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar \hat{\alpha}^* \cdot \nabla_x \right) \psi^*(-x, t) \\
&= i \begin{pmatrix} -\hat{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \hat{\alpha}^* \cdot \nabla'_x \right) \psi^*(\mathbf{x}', t) \\
&= -i \begin{pmatrix} -\hat{\sigma}_2 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar \hat{\alpha} \cdot \nabla'_x \right) \psi(\mathbf{x}', t) \right]^* \\
&= 0
\end{aligned} \tag{15}$$

In (15) the factor in brackets vanishes; thus the combination of charge conjugation and parity transformation is indeed a symmetry transformation.

14.3 Solutions of the Weyl Equation with Good Angular Momentum

Problem. Derive once more the angular momentum representation of the solutions of the Weyl equation (14.41) and (14.50).

Solution

We start from the Dirac spinor in standard representation:

$$\phi_{\kappa, \mu} = \begin{pmatrix} g(r) & \chi_{\kappa, \mu} \\ if(r) & \chi_{-\kappa, \mu} \end{pmatrix}.$$

The transformation to the new representation is achieved by the unitary matrix

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Furthermore, the neutrino states are generated from $\Psi = \psi e^{-iEt/\hbar}$ by

$$\psi_L = \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) \psi = \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) \hat{U} \psi_{\kappa, \mu},$$

$$\psi_R = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) \psi = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) \hat{U} \psi_{\kappa, \mu}.$$

In view of

$$\begin{aligned}
(11 - \gamma_5) \hat{U} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4}$$

one obtains

$$\begin{aligned}\psi_L &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(r) & \chi_{\kappa,\mu} \\ if(r) & \chi_{-\kappa,\mu} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-g(r)\chi_{\kappa,\mu} + if(r)\chi_{-\kappa,\mu}),\end{aligned}\quad (5)$$

and correspondingly it holds that

$$\begin{aligned}(11 + \gamma_5) \hat{U} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (6)$$

and thus

$$\begin{aligned}\psi_R &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(r) & \chi_{\kappa,\mu} \\ if(r) & \chi_{-\kappa,\mu} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (g(r)\chi_{\kappa,\mu} + if(r)\chi_{-\kappa,\mu})\end{aligned}\quad (7)$$

Since the factors $\sqrt{2}$ and global signs can be absorbed within normalization or phase factors, they can be omitted.

13.1.2 Rarita–Schwinger Field (spin 3/2)

(этот раздел больше в формате отсылки на отдельную запись будет, тут просто укажу разные статьи и идеи. В отдельной записи пока начну прорабатывать, как же конкретно это работает, потом сюда буду суть вписывать.)

О полезности поя Р-III (?????)

On R-Sh equation for Omega barions (?????)

(??? я так и не понял, оно будет вообще для таких частиц использоваться или нет? если да, то как??? информации про это нет. укажу тут, потом в физике частиц про такие частицы большой раздел сделаю)

The omega baryons are a family of subatomic hadron (a baryon) particles that are represented by the symbol Ω and are either neutral or have $a + 2$, $+1$ or -1 elementary charge. They are baryons containing no up or down quarks. ^[1] Omega baryons containing top quarks are not expected to be observed. This is because the Standard Model predicts the mean lifetime of top quarks to be roughly 5×10^{-25} s, ^[2] which is about a twentieth of the timescale for strong interactions, and therefore that they do not form hadrons.

The first omega baryon discovered was the Ω^- , made of three strange quarks, in 1964.^[3] The discovery was a great triumph in the study of quark processes, since it was found only after its existence, mass, and decay products had been predicted in 1961 by the American physicist Murray Gell-Mann and, independently, by the Israeli physicist Yuval Ne'eman. Besides the Ω^- , a charmed omega particle (Ω_c^0) was discovered in 1985, in which a strange quark is replaced by a charm quark. The Ω^- decays only via the weak interaction and has therefore a relatively long lifetime. ^[4] Spin (J) and parity (P) values for unobserved baryons are predicted by the quark model. ^[5] Since omega baryons do not have any up or down quarks, they all have isospin 0.

On R-Sh equation for other particles (?????)

(а про другие частицы вообще ничего не известно, так что хрен его знает, вообще нужно это уравнение или нет?)

13.1.3 Spin-2 Field, Gravitons (!!!)

(проработаю, соединю с ОТО, мб вообще сделаю большой раздел про них)

Закон Эйнштейна как обмен гравитонами (!!!!!!!)

(пропишу, как это конкретно?? важный вопрос, все-таки у нас что с пространством, если оно искривлено, то что, это огромное число гравитонов в нем???? тогда как так, что статистическое поле может быть бесконечно, гравитоны что ли не улетают никуда???)

13.1.4 Other Phenomena with the Dirac Field

Для полноты укажем, где используется поле Дирака.

распад ЭМ поля на частицы

Суслов говорил, что уравнение Дирака может дать предел полей, при которых это получается.

(?? это не эффект Швингера, о котором я ничего не знаю?)

13.1.5 Other Descriptions of Spinor Fields

Для полноты укажем, особые конструкции и приложения.

(этим вряд ли буду пользоваться, но тем не менее, основы этих конструкций тут буду вписывать, если буду их касаться)

Поле Дирака в тетрадах (???)

(?? и как с ним работать?)

$$i\gamma^a e_{(a)}^\mu \partial_\mu + \frac{i}{2} \gamma^a \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} e_{(a)}^\mu \right) - mc$$

Поле Дирака для сверхпроводников

Разные формулы на размышление потом

Смещение вдоль вихря описывается через оператор

$$\mathfrak{h}^{(0)}(y) = -\frac{\xi}{2} \{ \tilde{v}(y), p_y \} \sigma_y + \bar{\epsilon}(y) \sigma_z$$

On Bargmann–Wigner equations

Суть, как я ее понял (???)

(хз вообще, общее уравнение для спиноров что ли?)

Суть по вики

For a free particle of spin j without electric charge, the BW equations are a set of $2j$ coupled linear partial differential equations, each with a similar mathematical form to the Dirac equation. The full set of equations are:[note 1][1][4][5]

$$\begin{aligned} \left(-\gamma^\mu \hat{P}_\mu + mc\right)_{\alpha_1 \alpha'_1} \psi_{\alpha'_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{2j}} &= 0 \\ \left(-\gamma^\mu \hat{P}_\mu + mc\right)_{\alpha_2 \alpha'_2} \psi_{\alpha_1 \alpha'_2 \alpha_3 \dots \alpha_{2j}} &= 0 \\ &\vdots \\ \left(-\gamma^\mu \hat{P}_\mu + mc\right)_{\alpha_{2j} \alpha'_{2j}} \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha'_{2j}} &= 0 \end{aligned}$$

which follow the pattern;

$$\left(-\gamma^\mu \hat{P}_\mu + mc\right)_{\alpha_r \alpha'_r} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha'_r \dots \alpha_{2j}} = 0$$

for $r = 1, 2, \dots, 2j$. (Some authors e.g. Loide and Saar ^[4] use $n = 2j$ to remove factors of 2. Also the spin quantum number is usually denoted by s in quantum mechanics, however in this context j is more typical in the literature). The entire wavefunction $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$ has components

$$\psi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{2j}}(\mathbf{r}, t)$$

and is a rank- $2j$ 4-component spinor field. Each index takes the values 1, 2, 3, or 4, so there are 4^{2j} components of the entire spinor field ψ , although a completely symmetric wavefunction reduces the number of independent components to $2(2j + 1)$. Further, $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma)$ are the gamma matrices, and

$$\hat{P}_\mu = i\hbar\partial_\mu$$

13.2 Special Spinor Fields

(??? мб уменьшу раздел, потому что он очень мало нужен.)

13.2.1 Algebra of many dimensional γ -matrices

Теория

Для того чтобы описывать спинорные поля в произвольной размерности [15], необходимо вначале построить γ -матрицы, которые удовлетворяют условию

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$$

Вид γ -матриц и свойства спинорных полей существенным образом зависят от размерности и сигнатуры пространства. ¹⁾

Вначале мы будем рассматривать случай евклидова пространства, которое имеет сигнатуру $(+ + \dots +)$, и выясним, каким образом можно построить γ -матрицы. Их индексы в евклидовом случае мы будем обозначать латинскими буквами. В случае размерности $D = 2$ в качестве γ -матриц можно взять

$$\gamma^1 = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^2 = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Такие матрицы имеют размер 2×2 . Кроме того, можно определить матрицу

$$\gamma^3 = i\gamma^1\gamma^2 = -\sigma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая, очевидно, антикоммутирует с матрицами γ^1 и γ^2 . Поэтому в случае $D = 3$ в качестве γ -матриц можно взять $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$, определенные в размерности $D = 2$. Но при переходе к следующей размерности $D = 4$ размер γ -матриц необходимо увеличить в два раза. То же самое справедливо в любом случае, когда мы переходим от нечетной размерности к четной. Действительно, если D четно, то D -мерные γ -матрицы $\gamma_{(D)}$ можно построить из γ -матриц в на единицу меньшей размерности следующим образом ($k = 1, \dots, D-1$):

$$\gamma_{(D)}^k = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{(D-1)}^k \\ \gamma_{(D-1)}^k & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_{(D)}^D = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(Матрица γ^D составляется из блоков, пропорциональных единичной матрице, и, конечно, имеет тот же размер, что и остальные матрицы.) В Задаче 1 показано, что определенные таким образом γ -матрицы удовлетворяют антикоммутационному соотношению

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = 2\delta^{ij}.$$

В четной размерности можно определить матрицу

$$\gamma^{D+1} = i^{D/2}\gamma^1\gamma^2 \dots \gamma^D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Последнее равенство доказано в Задаче 1.) Эта матрица является D мерным аналогом матрицы γ_5 . В Задаче 1 также проверено, что такая матрица антикоммутирует со всеми остальными γ -матрицами:

$$\gamma^i\gamma^{D+1} + \gamma^{D+1}\gamma^i = 0; \quad (\gamma^{D+1})^2 = 1.$$

В следующей (нечетной) размерности в качестве γ -матриц можно взять γ -матрицы из предыдущей размерности и матрицу γ^{D+1} .

Таким образом определена процедура, которая позволяет последовательно строить γ -матрицы в произвольной размерности. При этом несложно видеть, что в пространстве четной размерности D γ -матрицы имеют размер $2^{D/2} \times 2^{D/2}$, а в нечетной размерности - $2^{(D-1)/2} \times 2^{(D-1)/2}$.

Заметим, что полученные таким образом γ -матрицы являются эрмитовыми: $(\gamma^i)^+ = \gamma^i$. Кроме того, четные матрицы являются мнимыми антисимметричными, а нечетные - вещественными симметричными. Это позволяет определить матрицу, которая является аналогом матрицы зарядового сопряжения:

$$C = \begin{cases} \gamma^1\gamma^3 \dots \gamma^{D-1}, & \text{если } D \text{ четно;} \\ \gamma^1\gamma^3 \dots \gamma^D, & \text{если } D \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Произведение в данном случае берется по всем симметричным γ -матрицам. Как следствие (Задача 2) такая матрица будет удовлетворять условию

$$C\gamma^iC^{-1} = \begin{cases} -(-1)^{D/2}(\gamma^i)^T, & \text{если } D \text{ четно;} \\ (-1)^{(D-1)/2}(\gamma^i)^T, & \text{если } D \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Нам потребуются следующие свойства матрицы C , доказанные в Задаче 3:

$$C^{-1} = C^+ = C^T = \begin{cases} (-1)^{D(D-2)/8}C, & \text{если } D \text{ четно;} \\ (-1)^{(D^2-1)/8}C, & \text{если } D \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Если пространство не является евклидовым, то для построения γ -матриц необходимо умножить соответствующую γ -матрицу для евклидова пространства на i в случае, если соответствующая компонента метрического тензора равна -1 , и оставить прежней, если она равна 1 . (В первом случае γ -матрица будет антиэрмитова, а во втором - эрмитова.) Матрицы C и γ^{D+1} мы будем брать такими же как и в случае евклидовой сигнатуры. При этом свойство (3.350), очевидно, не будет зависеть от сигнатуры.

В Задаче 4 показано, что если D четно, то в качестве базиса в пространстве матриц $2^{D/2} \times 2^{D/2}$ можно выбрать матрицы

$$1, \gamma^{D+1}, \gamma^{\mu_1}, \gamma^{\mu_1} \gamma^{D-1}, \gamma^{\mu_1 \mu_2}, \gamma^{\mu_1 \mu_2} \gamma^{D-1} \dots, \gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{D/2}},$$

где через $\gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$ обозначено полностью антисимметризованное произведение k γ -матриц:

$$\gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = \frac{1}{k!} (\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_k} \pm \text{перестановки}).$$

Если же D нечетно, то базисом в пространстве матриц размера $2^{(D-1)/2} \times 2^{(D-1)/2}$ будет

$$1, \gamma^{\mu_1}, \gamma^{\mu_1 \mu_2} \dots, \gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{(D-1)/2}}.$$

Если умножить такие матрицы на C , то результат будет представлять собой либо симметричную, либо антисимметричную матрицу. В соответствии с результатом Задачи 5, в четной размерности

$$\begin{aligned} (\gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} C)^T &= (-1)^{(D-2k)(D-2k-2)/8} \gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} C; \\ (\gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \gamma^{D+1} C)^T &= (-1)^{(D-2k)(D-2k-2)/8} \gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \gamma^{D+1} C, \end{aligned}$$

а в нечетной размерности

$$(\gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} C)^T = (-1)^{(D-2k+1)(D-2k-1)/8} \gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} C.$$

Задачи

1. Доказать, что γ -матрицы (3.345) удовлетворяют соотношению (3.346).

Доказательство будем проводить с помощью метода математической индукции по размерности пространства D . При $D = 2$ утверждение является очевидным. Предположим, что оно справедливо для некоторого четного D и проверим, что оно также будет выполняться в размерностях $D + 1$ и $D + 2$. Вначале рассмотрим случай размерности $D + 1$. Тогда, очевидно, достаточно доказать соотношения (3.348). Поскольку матрица γ^D антикоммутирует со всеми остальными γ -матрицами, а ее квадрат равен 1 , то

$$(\gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^D)^2 = (-1)^{D \cdot 1} (\gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^{D-1})^2.$$

Продолжая процесс аналогичным образом, получаем, что

$$(i^{D/2} \gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^D)^2 = (-1)^{D/2} (-1)^{\sum_{k=1}^{D/2} k} = (-1)^{D^2/2} = 1$$

так как $D^2/2$ четно при четном D . Матрица γ^k антикоммутирует со всеми γ -матрицами, кроме самой себя. При этом сама с собой она, очевидно, коммутирует. Поэтому в силу четности I) справедливо равенство

$$(\gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^D) \gamma^k = -\gamma^k (\gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^D)$$

(При перестановке γ^k налево знак меняется $D-1$ раз.) Таким образом в размерности $D+1$ требуемое равенство показано. В размерности $D+2$ оно проверяется непосредственным перемножением матриц (3.345)

В заключение заметим, что свойства матрицы γ^{D-1} могут быть также проверены явно с помощью второго равенства в формуле (3.347). Для того, чтобы его доказать, вновь воспользуемся методом математической индукции. При $D=2$ утверждение очевидно. Предположим, что оно справедливо для некоторого четного D и докажем его для случая $D+2$:

$$\begin{aligned}\gamma_{(D+2)}^{D+3} &= i^{(D-2)/2} \begin{pmatrix} i\gamma_{(D)}^1 \gamma_{(D)}^2 \cdots \gamma_{(D)}^{D+1} & 0 \\ 0 & -i\gamma_{(D)}^1 \gamma_{(D-2)}^2 \cdots \gamma_{(D)}^{D+1} \end{pmatrix} = \\ &= i \begin{pmatrix} i(\gamma_{(D)}^{D+1})^2 & 0 \\ 0 & -i(\gamma_{(D)}^{D+1})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

что и доказывает требуемое утверждение. 2. Убедиться, что матрица зарядового сопряжения, определенная формулой (3.349), удовлетворяет одному из равенств (3.350).

Матрица C была определена как произведение всех симметричных γ -матриц. Поэтому в четной размерности при умножении на некоторую антисимметричную γ -матрицу

$$C\gamma^\mu = (-1)^{D/2} \gamma^\mu C = -(-1)^{D/2} (\gamma^\mu)^T C.$$

Если же матрица γ^μ симметрична, то при последовательных перестановках этой матрицы справа налево нам придется один раз переставить ее саму с собой. Такая перестановка, очевидно, не меняет знака. Поэтому в этом случае

$$C\gamma^\mu = -(-1)^{D/2} \gamma^\mu C = -(-1)^{D/2} (\gamma^\mu)^T C.$$

Случай нечетной размерности рассматривается аналогично. 3. Доказать тождества (3.351). Произведение любой γ -матрицы на ее эрмитово сопряженную всегда равно 1. В евклидовом случае это следует из эрмитовости γ -матриц и антикоммутационного соотношения (3.346). (В случае произвольной сигнатуры γ -матрица может отличаться от евклидовой на i , но тогда сопряженная матрица будет отличаться от нее на $-i$.) Поскольку при эрмитовом сопряжении порядок матриц меняется, то, например, в четной размерности

$$C^+ C = (\gamma^{D-1})^+ \cdots (\gamma^3)^+ (\gamma^1)^+ \gamma^1 \gamma^3 \cdots \gamma^{D-1} = 1.$$

Поэтому $C^+ = C^{-1}$. Матрица C в пространстве с произвольной сигнатурой по определению равна матрице C в евклидовом пространстве, где она равна некоторому произведению вещественных матриц. Это означает, что и в общем случае матрица C вещественна, а, следовательно, $C^- = C^T$.

Вычислим теперь матрицу C^T . Поскольку матрица C получается перемножением симметричных γ -матриц, то, например, в четной размерности

$$\begin{aligned}C^T &= \gamma^{D-1} \cdots \gamma^3 \gamma^1 = (-1)^{D/2-1} \gamma^1 \gamma^{D-1} \cdots \gamma^3 = \\ &= \cdots = (-1)^{D/2} \prod_{m=1}^D \gamma^m C = (-1)^{D(D-2)/8} C\end{aligned}$$

Случай нечетной размерности получается при замене D на $D+1$. 4. Доказать, что матрицы (3.352) и (3.354) образуют базис в пространстве матриц соответствующего размера.

Вначале необходимо вычислить число рассматриваемых матриц. Поскольку антисимметричное поле ранга k имеет C_D^k различных компонент, а $C_D^k = C_D^{D-k}$, то число матриц (3.352) будет равно

$$\sum_{k=0}^D C_D^k = (1+1)^D = 2^D = (2^{D/2})^2$$

и, действительно, совпадает с размерностью пространства матриц размера $2^{D/2} \times 2^{D/2}$. Аналогичным образом, в случае нечетной размерности D число матриц (3.354) будет равно

$$\sum_{k=0}^{(D-1)/2} C_D^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^D C_D^k = 2^{D-1} = (2^{(D-1)/2})^2$$

и вновь совпадает с размерностью пространства соответствующих матриц (размера $2^{(D-1)/2} \times 2^{(D-1)/2}$).

Поэтому остается только доказать линейную независимость рассматриваемых матриц. Проводя рассуждения, аналогичные Задаче 5 Части 3.1.2, несложно видеть, что для этого достаточно убедиться, что для любых двух различных матриц A и B из рассматриваемого набора

$$\text{tr}(AB) = 0.$$

Это проверяется следующим образом. Величина

$$\text{tr}(\gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} \gamma^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}),$$

очевидно, является тензором, инвариантным относительно преобразований Лоренца. Поэтому он должен представлять собой некоторое произведение метрических тензоров, антисимметричное по индексам $\mu_1 \dots \mu_p$ и $\nu_1 \dots \nu_q$. Очевидно, что такое произведение можно составить только в том случае, если $p = q$, а след пропорционален

$$\eta^{\mu_1 \nu_1} \eta^{\mu_2 \nu_2} \dots \eta^{\mu_p \nu_p} \pm \text{перестановки индексов } \nu_1 \nu_2 \dots \nu_p$$

и отличен от 0 только в том случае, если наборы индексов совпадают друг с другом с точностью до перестановки. Аналогичным образом, в четной размерности рассматривается след

$$\text{tr}(\gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} \gamma^{D-1} \gamma_i^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} \gamma^{D-1})$$

Наконец, в четной размерности след

$$\text{tr}(\gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} \gamma^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} \gamma^{\nu})^{+1})$$

представляют собой инвариантный псевдотензор, который отличен от 0 только если $p+q \geq D$ и пропорционален ε -символу. Однако в рассматриваемом случае $p \leq D/2, q \leq D/2$, причем равенство может быть только одно. Поэтому $p+q < D$, и такой след для элементов базиса (3.352) всегда будет равен 0. Таким образом, доказана ортогональность, а, следовательно, и линейная независимость рассматриваемых наборов матриц.

5. Доказать свойства симметрии (3.355) и (3.356).

Рассмотрим вначале случай четной размерности. Используя доказанное в Задаче 3 равенство

$$C^{-1} = C^{--} = C^{y^T} = (-1)^{D(D-2)/8} C.$$

получаем, что

$$(\gamma^\mu C)^T = C^T (\gamma^\mu)^T = (-1)^{D/2-1} C^\gamma C^\gamma \gamma^\mu C^{-1} = (-1)^{(D+1)(D-2)/8} \gamma^\mu C$$

Если квадратными скобками обозначить антисимметризацию по индексам $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k$, то из предыдущего равенства следует, что

$$\begin{aligned} (\gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} C)^T &= \left(\gamma^{[\mu_1} C C^{-1} \gamma^{\mu_2} C C^{-1} \dots \gamma^{\mu_k]} C \right)^T = \\ &= (-1)^{k(D-4)(D-2)/8} \gamma^{[\mu_k} C (C^{-1})^T \dots \gamma^{\mu_2} C (C^{-1})^T \gamma^{\mu_1]} C. \end{aligned}$$

Далее нужно использовать формулу (3.372) и восстановить исходный порядок матриц. В результате получится, что

$$\begin{aligned} (\gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} C)^T &= (-1)^{k(D+4)(D-2)/8} (-1)^{-(k-1)D(D-2)/8} (-1)^{k(k-1)/2} \gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} C = \\ &= (-1)^{(D-2k)(D-2k-2)/8} \gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} C. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда рассматриваемое выражение также содержит матрицу γ^{D+1} . При этом необходимо учитывать, что γ^{D+1} антикоммутирует со всеми γ -матрицами, а матрица зарядового сопряжения в четной размерности представляет собой произведение $D/2$ γ -матриц.

Итак, вначале переносим симметричную матрицу γ^{D+1} налево и выполняем транспонирование, а затем используем уже полученный ранее результат:

$$\begin{aligned} (\gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \gamma^{D+1} C)^T &= (-1)^{-k} (\gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} C)^T \gamma^{D+1} = \\ &= \gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} C \gamma^{D+1} (-1)^{-k} (-1)^{(D-2k)(D-2k-2)/8} = \\ &= (-1)^{(D-2k)/2} (-1)^{(D-2k)(D-2k-2)/8} \gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \gamma^{D+1} C = \\ &= (-1)^{(D-2k)(D-2k+2)/8} \gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \gamma^{D+1} C. \end{aligned}$$

Если размерность D нечетна, то

$$C^- = C^T = (-1)^{(D^2-1)/8} C,$$

а матрица C представляет собой произведение $(D+1)/2$ матриц. Поэтому в случае нечетной размерности требуемое утверждение получается из формулы (3.375) заменой D на $D+1$:

$$(\gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} C)^T = (-1)^{(D-2k+1)(D-2k-1)/8} \gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} C.$$

13.2.2 Majorana and Weyl Spinors in Arbitrary Dimensions

Теория

Из результатов предыдущей части очевидно, что в пространстве четной размерности D спиноры имеют $2^{D/2}$ комплексных компонент, а в пространстве нечетной размерности $-2^{(D-1)/2}$ комплексных компонент. Для того чтобы записать функцию Лагранжа для спинорного поля, необходимо определить вначале операцию дираковского сопряжения:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^{-1} A,$$

где A - некоторая матрица. В Задаче 1 показано, что лагранжиан

$$\mathcal{L} = c_1 \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - c_2 m \bar{\psi} \psi,$$

где c_i - некоторые постоянные, такие что $|c_i| = 1$, будет инвариантен относительно преобразований Лоренца, если матрица A удовлетворяет условию $A \gamma^\mu A^{-1} = \pm (\gamma^\mu)^+$. Такую матрицу можно построить следующим образом:

$$A = \prod_{\text{NM}} \gamma^\mu,$$

причем произведение берется по всем эрмитовым матрицам. В соответствии с результатами предыдущей части, число таких матриц равно числу положительных собственных значений метрического тензора D_+ . В Задаче 2 показано, что

$$(\gamma^\mu)^+ = -(-1)^{D_+} A \gamma^\mu A^{-1}$$

Кроме того, в Задаче 2 доказаны следующие свойства матрицы A :

$$A^{-1} = A^+ = (-1)^{D_+ - (D_+ - 1)/2} A; \quad A^* A = (-1)^k (-1)^{D_+ (D_+ - 1)/2},$$

где k - число антисимметричных γ -матриц, которые входят в произведение (3.381). Используя эти свойства, можно доказать, что лагранжиан (3.380) является вещественным, если (Задача 3)

$$c_1^* = (-1)^{D_+ - (D_+ + 1)/2} c_1; \quad c_2^* = (-1)^{D_+ (D_+ - 1)/2} c_2.$$

Заметим, что если пространство имеет целую размерность, то можно так же построить матрицу

$$A_0 = \begin{cases} A, & \text{если } D_+ \text{ нечетно;} \\ A \gamma^{D_+ + 1}, & \text{если } D_+ \text{ четно,} \end{cases}$$

которая, очевидно, будет удовлетворять условию

$$(\gamma^\mu)^\perp = A_0 \gamma^\mu A_0^{-1}.$$

Поскольку матрица $\gamma^{D_+ - 1}$ существует только в пространствах четной размерности, то и вейлевские спиноры могут существовать для любого четного D . Действительно, по определению вейлевский спинор представляет собой собственный вектор матрицы $\gamma^{D_+ + 1}$ и в силу равенства $(\gamma^{D_+ - 1})^2 = 1$ может быть получен из произвольного дираковского спинора действием одного из киральных проекторов:

$$\psi_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma^{D_+ + 1}) \psi; \quad \psi_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma^{D_+ + 1}) \psi$$

Подставляя в эти равенства явное выражение для матрицы $\gamma^{D_+ + 1}$ (формула (3.347)), получаем, что у левого спинора половина верхних компонент равна 0, а у правого - половина нижних. Поэтому вейлевский спинор имеет в два раза меньше компонент, чем дираковский.

Выясним теперь, в каких случаях можно построить майорановский спинор. По определению майорановский спинор совпадает со своим зарядово сопряженным, т.е. $\psi = \psi'$, причем ψ^C мы будем строить по аналогии с формулой (3.150):

$$\psi^C = X \psi^*,$$

где через X обозначена некоторая матрица, которую необходимо построить. При этом условия, которые определяют эту матрицу, формулируются следующим образом: 1. В силу условия майорановости $(\psi^C)^C = \psi^C = \psi$.

2. Зарядово сопряженный спинор ψ^C при преобразованиях Лоренца меняется так же, как и ψ .

В Задаче 4 показано, что следствием этих условий являются следующие тождества, которым должна удовлетворять матрица X :

$$X^* X = 1; \quad X^{-1} \gamma^\mu X = \pm (\gamma^\mu)^*,$$

причем во втором равенстве знак должен быть одинаков для всех γ -матриц. Оказывается, что возможность одновременного выполнения этих двух условий существенно зависит от размерности D и сигнатуры пространства. При этом сигнатура определяется числом положительных собственных значений метрического тензора D_+ . Через $D_- = D - D_+$ мы будем обозначать число отрицательных собственных значений метрического тензора. В Задаче 5 показано, что условия (3.389) могут быть выполнены в следующих случаях: 1). $D - 2D_+ = 0, 1, 2, 7 \pmod{8}$. ($a = b \pmod{c}$ означает, что $a = b + cn$, где n - произвольное целое число.) Тогда матрица X записывается в виде $X_1 = AC$. 2). $D - 2D_+ = 0, 6 \pmod{8}$, а матрица X равна $X_2 = AC\gamma^{D-1}$. В пространствах с $D - 2D_+ = 3, 4, 5 \pmod{8}$ майорановские спиноры построить нельзя.

В Задаче 5 также показано, что условие существования майорановского спинора одинаково для пространств с $D_+ = d; D_- = D - d$ и $D_+ = D - d; D_- = d$, а в Задаче 6 проверено, что условие майорановости $\psi = X\psi^*$ уменьшает число степеней свободы у майорановского спинора в два раза по сравнению с дираковским. Если спинор одновременно является майорановским и вейлевским, то

$$\eta = AC\psi^* = \pm AC\gamma^{D+1}\psi^*.$$

Поэтому как матрица X_1 , так и матрица X_2 , должны удовлетворять условиям (3.389). Очевидно, что это оказывается возможным только в пространствах размерности $D - 2D_+ = 0 \pmod{8}$. Заметим, что поскольку матрица A есть произведение D_+ - γ -матриц, а матрица C - произведение $D/2$ - γ -матриц, то при $D - 2D_+ = 0 \pmod{8}$ матрицы γ^{D+1} и AC коммутируют, что, как несложно убедиться, гарантирует совместность условий киральности и майорановости.

В Задаче 6 показано, что каждое из условий, киральность и майорановость, уменьшает число степеней свободы в два раза. Поэтому майораново-вейлевский спинор будет иметь в 4 раза меньше степеней свободы, чем исходный дираковский спинор.

Минимальное число степеней свободы (вне массовой поверхности) и тип соответствующего спинора приведены в таблице 3.3. При этом тип спинора обозначается следующим образом: (M) - майорановский спинор, (W) - вейлевский спинор, (MW) - одновременно майорановский и вейлевский спинор, а $(M)(W)$ - майорановский или вейлевский спиноры (майорановский и вейлевский спиноры в данном случае различны). Наиболее интересный физический случай $D = 4, D_+ = 1$ выделен жирным шрифтом. В соответствии с результатом Задачи 6 при использовании уравнений движения число степеней свободы спинора уменьшается еще в два раза.

$D \setminus D_+$	0	1	2	3	4	5	6
1	$1_{(M)}$						
2	$2_{(M)}^{(W)}$	$1_{(MW)}$					
3	4	$2_{(M)}$					
4	$4_{(W)}$	$4_{(M)}^{(W)}$	$2_{(MW)}$				
5	8	8	$4_{(M)}$				
6	$8_{(M)}^{(W)}$	$8_{(W)}$	$8_{(M)}^{(W)}$	$4_{(MW)}$			
7	$8_{(M)}$	16	16	$8_{(M)}$			
8	$8_{(MW)}$	$16_{(M)}^{(W)}$	$16_{(W)}$	$16_{(M)}^{(W)}$	$8_{(MW)}$		
9	$16_{(M)}$	$16_{(M)}$	32	32	$16_{(M)}$		
10	$32_{(M)}^{(W)}$	$16_{(MW)}$	$32_{(M)}^{(W)}$	$32_{(W)}$	$32_{(M)}^{(W)}$	$16_{(MW)}$	
11	64	$32_{(M)}$	$32_{(M)}$	64	64	$32_{(M)}$	
12	$64_{(W)}$	$64_{(W)}$	$32_{(MW)}$	$64_{(M)}^{(W)}$	$64_{(W)}$	$64_{(M)}^{(W)}$	$32_{(MW)}$
13	128	128	$64_{(M)}$	$64_{(M)}$	128	128	$64_{(M)}$

Figure 2: Минимальное число степеней свободы спинорного поля вие массовой поверхности в зависимости от размерности и сигнатуры

1.

Выяснить, каким условиям должна удовлетворять матрица A для того, чтобы лагранжиан (3.380) был бы инвариантен относительно преобразований Лоренца.

Для инвариантности функции Лагранжа, в частности, необходимо, чтобы величина $\bar{\psi}\psi$ была скаляром. Поэтому при преобразованиях Лоренца поле $\bar{\psi}$ должно изменяться как

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \exp \left(-\frac{1}{4} \alpha_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} \right).$$

(В Части 3.1.3 было доказано, что этот закон преобразования гарантирует инвариантность рассматриваемой функции Лагранжа.) С другой стороны, закон преобразования поля $\bar{\psi}$ можно получить непосредственно из закона преобразования поля ψ :

$$\bar{\psi} \rightarrow \psi^* A A^1 \exp \left(\frac{1}{4} \alpha_{\alpha\beta} (\gamma^{\alpha\beta})^+ \right) A = \bar{\psi} A^{-1} \exp \left(\frac{1}{4} \alpha_{\alpha\beta} (\gamma^{\alpha\beta})^{-*} \right) A$$

Сравнивая это выражение с формулой (3.391), получаем, что матрица A должна удовлетворять условию $A^{-1} (\gamma^{\mu\nu})' A = -\gamma^{\mu\nu}$. (Чтобы убедиться в этом, необходимо разложить экспоненту в ряд по α .) Как следствие, получается, что

$$A^{-1} (\gamma^\mu)^+ A = \gamma^\mu \text{ или } A^{-1} (\gamma^\mu) \cdot A = -\gamma^\mu,$$

поскольку в этом случае

$$A^{-1} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)^+ A = A^{-1} (\gamma^\nu)^+ A A^{-1} (\gamma^\mu)^+ A - (\mu \leftrightarrow \nu) = -\gamma^{\mu\nu}$$

2.

Доказать равенства (3.382) и (3.383).

По построению γ -матрицы являются либо эрмитовыми, либо антиэрмитовыми. При этом число эрмитовых матриц равно числу положительных собственных значений метрического тензора D_+ . Поэтому в случае эрмитовых γ^μ

$$A \gamma^\mu = (-1)^{D_+-1} \gamma^\mu A = -(-1)^{D_+} (\gamma^\mu)^{\cdots} A,$$

а в случае антиэрмитовых

$$A\gamma^\mu = (-1)^D + \gamma^\mu A = -(-1)^{D-} (\gamma^\mu)^- A$$

Квадрат любой эрмитовой γ -матрицы равен 1 в силу формулы $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$, поскольку эрмитовы γ -матрицы соответствуют положительным собственным значениям метрического тензора. Поэтому, принимая во внимание, что как при обращении, так и при эрмитовом сопряжении произведения матриц их порядок заменяется на обратный, получаем равенство $A^+ = A^{-1}$.

Поскольку γ -матрицы, входящие в матрицу A , эрмитовы, то симметричные матрицы являются вещественными, а антисимметричные - чисто мнимыми. Поэтому при комплексном сопряжении k антисимметричных матриц, входящих в A , изменят знак:

$$A^* = (-1)^k A.$$

Для того чтобы вычислить квадрат матрицы A , мы будем действовать по аналогии с Задачей 1 предыдущей части, где вычислялся квадрат матрицы $\gamma^{\nu+1}$. Единственным отличием будет число перемножаемых γ -матриц. Поэтому

$$A^2 = (-1)^{\sum_{i=1}^{D-} i} = (-1)^{D-(D-1)/2}.$$

Как следствие,

$$A^* A = (-1)^k (-1)^{D-(D-1)/2}$$

3.

Доказать, что лагранжиан (3.380) является вещественным, если выполняются условия (3.384).

Рассмотрим вначале первое слагаемое лагранжиана (3.380). Поскольку $A^+ = A^{-1} = (-1)^{D+(D-1)/2} A$, то, используя формулу (3.382) и совершая интегрирование по частям, получаем, что

$$\begin{aligned} \int d^D x (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi)^* &= \int d^D x (\psi^+ A \gamma^\mu \partial_\mu \psi)^- = \int d^D x \partial_\mu \psi^+ (\gamma^\mu)^+ A^+ \psi = \\ &= \int d^D x \partial_\mu \psi^+ A^+ A (\gamma^\mu)^+ A^{-1} \psi = (-1)^{D+(D-1)/2} \int d^D x \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \end{aligned}$$

Поэтому если $c_1^* = (-1)^{D+(D-1)/2} c_1$, то это слагаемое оказывается вещественным. Аналогичным образом вещественность массового слагаемого следует из равенства

$$(\bar{\psi} \psi)^* = (\psi^+ A \psi)^+ = \psi^+ A^- \psi = (-1)^{D-(D-1)/2} \bar{\psi} \psi.$$

4.

Найти, каким условиям должна удовлетворять матрица X в формуле (3.388) для того, чтобы существовали майорановские спиноры.

Для произвольного майорановского спинора ψ должно выполняться условие

$$\psi = (\psi^C)^C = X (X \psi^*)^* = X X^* \psi.$$

Как следствие, должно быть справедливо равенство $X X^* = 1$.

Кроме того, необходимо, чтобы зарядово сопряженный спинор при преобразованиях Лоренца менялся бы так же, как и обычный спинор. Поскольку при преобразованиях Лоренца

$$\psi^C = X\psi^* \rightarrow X \exp\left(\frac{1}{4}\alpha_{\alpha\beta}(\gamma^{\alpha\beta})^*\right) X^{-1}X\psi^*,$$

матрица X также должна удовлетворять условию $X(\gamma^{\mu\nu})^* X^{-1} = \gamma^{\mu\nu}$ или, эквивалентно,

$$(\gamma^\mu)^* = \pm X^{\cdots 1} \gamma^\mu X$$

5.

Найти, в пространствах каких размерностей и сигнатур можно построить майорановские спиноры.

Поскольку $(\gamma^\mu)^* = (\gamma^\mu)^T$, то, принимая во внимание формулы (3.382) и (3.350), можно предположить, что матрица X представляется в виде

$$X = AC$$

Очевидно, что в этом случае будет удовлетворяться второе из равенств (3.389). Таким образом, остается проверить только первое из этих равенств: $X^*X = 1$. Для этого вначале рассмотрим случай четной размерности пространства-времени. Если k эрмитовых γ -матриц являются антисимметричными, то из формулы (3.350) следует, что

$$AC = (-1)^k (-1)^{D_+(D/2+1)} CA.$$

(Множитель $(-1)^{D/2+1}$ получается при перестановке каждой γ -матрицы с C , причем число таких перестановок равно D_+ . Множитель $(-1)^k$ возникает при последующем транспонировании k антисимметричных γ -матриц, входящих в определение матрицы A .) Поэтому, используя формулы (3.351) и (3.383), получаем, что

$$\begin{aligned} X^*X &= A^*C^*AC = (-1)^k (-1)^{D_+(D/2+1)} A^*C^*CA = \\ &= (-1)^{D(D-2)/8 - D_-(D-1)/2}. \end{aligned}$$

Удобно представить D_- в виде $D_+ = D/2 - n$, где n - некоторое целое число. Тогда (с учетом четности D) предыдущая формула может быть эквивалентно переписана в виде

$$X^*X = (-1)^{-n(n-1)/2} = 1$$

откуда следует, что $n = 0, 1 \pmod{4}$. Поэтому матрицу (3.405) можно использовать для определения майорановского спинора только если

$$D - 2D_+ = 0, 2 \pmod{8}.$$

Однако, в пространствах четной размерности можно выбрать матрицу X несколько по-другому:

$$X = AC\gamma^{D+1}.$$

Несложно видеть, что в этом случае второе из равенств (3.389) также будет автоматически выполняться. Но в этом случае несложно убедиться, что

$$\begin{aligned} X^*X &= (-1)^{D(D-2)/8 + D_+(D-1)/2 + D_+ + D/2} = \\ &= (-1)^{D(D-2)/8 + D_-(D+1)/2} = (-1)^{-n(n-1)/2} = 1 \end{aligned}$$

Как следствие, в этом случае $n = 0, 3(\bmod 4)$, благодаря чему

$$D - 2D_+ = 0, 6(\bmod 8).$$

Заметим, что если майорановский спинор существует в пространстве с сигнатурой, задаваемой числами D_+ и D_- , то он будет существовать и в пространстве с сигнатурой противоположного знака. Действительно, при замене $D_+ \leftrightarrow D_-$ условие применимости матрицы X_1 переходит в условие применимости матрицы X_2 и обратно.

В случае, если пространство-время имеет нечетное число измерений, то аналогичным образом получаем, что

$$AC = (-1)^k (-1)^{D_+(D-1)/2} CA.$$

Как следствие, для матрицы (3.405) будет справедливо равенство

$$XX^* = A^* C^* AC = (\cdot 1)^k (-1)^{D_-(D-1)/2} A^* C^* CA = (-1)^{(D^2-1)/8} (-1)^{D_* D_{\dots}/2}.$$

Если представить D_+ в виде $D_- = (D - 2n - 1)/2$, где n - некоторое целое число, то из первой формулы в (3.389) следует, что

$$X^* X = (-1)^{n(n+1)/2} = 1.$$

Поэтому $n = 0, 3(\bmod 4)$, и майорановский спинор можно определить в случае

$$D - 2D_+ = 1, 7(\bmod 8).$$

Поскольку в пространствах нечетной размерности нельзя определить матрицу γ^{D+1} , то матрицы (3.410) также не существуют.

Заметим, что формула (3.416) симметрична относительно замены $D_+ \leftrightarrow D_-$, благодаря чему условие существования майорановского спинора не меняется при одновременном изменении знаков всех компонент метрического тензора.

6. Степени свободы спиноров

Сравнить число степеней свободы у спиноров различных типов. Как изменится число степеней свободы при использовании уравнений движения?

Предположим, что имеются некоторые проекционные операторы $\hat{P}_{\pm}$, которые удовлетворяют условиям

$$\hat{P}_+ + \hat{P}_- = 1; \quad \hat{P}_-^2 = \hat{P}_+; \quad \hat{P}_-^2 = \hat{P}_i \quad \hat{P}_+ \hat{P}^2 = \hat{P}_- \hat{P}_- = 0$$

Кроме того, мы будем предполагать существование некоторого оператора $\hat{B}$, такого что $\hat{B}^2 = \pm 1$,

$$\hat{P}_+ \hat{B} = \hat{B} \hat{P}_+; \quad \hat{P}_- \hat{B} = \hat{B} \hat{P}_-.$$

Рассмотрим теперь спинор ψ , который принадлежит некоторому линейному пространству Ψ , и наложим на него дополнительное условие

$$\hat{P}_+ \psi = 0.$$

Линейное пространство таких спиноров мы будем обозначать через Ψ_- , а пространство спиноров, удовлетворяющих условию $\hat{P}_- \psi = 0$, - через Ψ_+ . Равенства (3.417) позволяют представить произвольный спинор ψ в виде

$$\psi = \hat{P}_+ \psi + \hat{P}_- \psi,$$

причем очевидно, что первое слагаемое принадлежит Ψ_+ , а второе $-\Psi_-$. В силу существования оператора $\hat{B}\forall\psi \in \Psi_{\text{спинор}} B\psi_+ \in \Psi$ и аналогичным образом $\forall\psi_- \in \Psi_{\text{спинор}} B\psi_- \in \Psi_+$. Поскольку в силу условия $\hat{B}^2 = \pm 1$ оператор $\hat{B}$, очевидно, невырожден. то с его помощью можно установить взаимно однозначное соответствие между пространствами Ψ_+ и Ψ_- . Как следствие, размерности этих пространств совпадают, а значит, размерность пространства Ψ_+ в два раза меньше, чем размерность линейного пространства спиноров Ψ . Это означает, что условие (3.419) уменьшает число степеней свободы в два раза.

Построим теперь проекционные операторы (3.417), а также оператор $\hat{B}$ для различных условий связи, которые накладываются на спиноры: 1) условие киральности:

$$\hat{P}_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^{D-1}); \quad \hat{B} = \gamma^1;$$

2) условие майорановости:

$$\hat{P}_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm X \cdot *); \quad \hat{B} = i,$$

где $*$ обозначает операцию комплексного сопряжения. Действительно, тогда

$$\frac{1}{2} (1 \pm X \cdot *) (i\psi) = \frac{1}{2} (i\psi \mp Xi\psi^*) = i\frac{1}{2} (1 \mp X \cdot *) \psi;$$

3) уравнения движения в безмассовом случае ($k^2 = 0$). Предполагаем, что $k^D \neq 0$. Тогда, если $k_{\mu} \equiv (\mathbf{k}, k_D)$, где через $\mathbf{k}$ обозначены первые $D - 1$ компонент вектора k_{μ} , то

$$\hat{P}_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{k_D} \gamma^D \boldsymbol{\gamma} \mathbf{k} \right), \quad \hat{B} = \gamma^D;$$

4) уравнения движения в массивном случае ($k^2 = m^2$):

$$\hat{P}_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{m} \gamma^{\mu} k_{\mu} \right), \quad \hat{B} = \gamma^{\nu} p_{\nu}, \quad \text{если} \quad k^{\mu} p_{\mu} = 0, p^2 = \pm 1$$

Во всех случаях можно легко убедиться в выполнении условий, которые накладываются на эти операторы. Поэтому каждое из перечисленных выше ограничений уменьшает число степеней свободы спинорного поля в два раза.

13.2.3 Wave Equations for Particles with Arbitrary Spins 1

15.1 Particles with Finite Mass

Here we want to outline briefly how to construct wave functions which describe particles with spin $s = 1, \frac{3}{2}, \dots$ out of solutions of the Dirac equation and also to study by what kind of wave equation they are generated. As already seen in Chap. 6, the lower components of free solutions of the Dirac equation with positive energy vanish in the case $m_0 \neq 0$ in the rest system of the particles [cf. (6.13)]. Thus, for $E_p = m_0 c^2$ (which means $p_i = 0$ when we are in the rest system) the spinor components are given by $\omega_{\alpha}^{(r)}(0) = \delta_{r\alpha}$ and thus

$$\omega_{\alpha}^{(+)} = 0, \quad \alpha = 3, 4$$

The superscript $(+)$ denotes $r = 1, 2$, which characterizes solutions of positive energy. The tensor product

$$\tilde{\omega}_{\alpha\beta\dots r}^{(+)} =: \underbrace{\omega_{\alpha}^{(+)}(0) \omega_{\beta}^{(+)}(0) \dots \omega_{\tau}^{(+)}(0)}_{2s} \quad (15.1)$$

has $2s$ indices which are, at first, independent of each other. But considering the total symmetric part of this multispinor

$$\omega_{\alpha\beta\ldots\tau}^{(+)} =: \sum_p \tilde{\omega}_{\alpha\beta\ldots\tau}^{(+)}(0) = \tilde{\omega}_{\{\alpha\beta\ldots\tau\}}^{(+)}(0) \quad (15.2)$$

(the summation index p denotes permutations of the indices), we find the following linearly independent combinations in the rest system:

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta\ldots\tau}^{(+)}(0, i=0) &= \delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 1} \ldots \delta_{\nu 1} \delta_{\tau 1}, \\ \omega_{\alpha\beta\ldots\tau}^{(+)}(0, i=1) &= \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 1} \delta_{\gamma 1} \ldots \delta_{\nu 1} \delta_{\tau 1} \\ &\quad + \delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 2} \delta_{\gamma 1} \ldots \delta_{\nu 1} \delta_{\tau 1} \\ &\quad + \delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 1} \delta_{\gamma 2} \ldots \delta_{\nu 1} \delta_{\tau 1} + \ldots, \\ &\quad \vdots \\ \omega_{\alpha\beta}^{(+)}(0, i=2s) &= \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2} \ldots \delta_{\nu 2} \delta_{\tau 2}. \end{aligned} \quad (15.3)$$

The i th multispinor has i indices equal to 2 and $2s - i$ indices equal to 1. Each of these multispinors represents an eigenvector of the operator of total spin, which in the rest system is defined by

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hbar \hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'\beta\beta'\ldots\nu\nu'\tau\tau'}^3 &=: \frac{1}{2} \hbar \hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'}^3 \delta_{\beta\beta'} \ldots \delta_{\tau\tau'} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \frac{1}{2} \hbar \hat{\Sigma}_{\tau\tau'}^3 \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta} \ldots \delta_{\nu\nu'} \\ &\quad (\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \ldots \nu, \nu'; \tau, \tau' = 1, \ldots, 4) \end{aligned} \quad (15.4)$$

where

$$\hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'}^3 = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_3 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

is the well-known four-dimensional Pauli matrix. Indeed, it is easily proven that

$$\frac{1}{2} \hbar \hat{\Sigma}^3 \omega^{(+)}(0, i) = \hbar(s - i) \omega^{(+)}(0, i). \quad (15.5)$$

This is demonstrated in detail in Exercise 15.1. Since, apparently, $i = 0, \ldots, 2s$ is valid, the number of eigenvectors is just $2s + 1$, and according to (15.5) the eigenvalues of $(\hbar/2)\hat{\Sigma}^3$ are $s, s - 1, \ldots, -s + 1, -s$. This directly demonstrates that the symmetric multispinor (15.2) may indeed be interpreted as the wave function of a particle with spin s , where the z component can obviously assume $2s + 1$ different values. An analogous consideration allows the construction of solutions of negative energy. In this case the upper instead of the lower components have to vanish in the rest system. This means that we only have to replace the indices 1,2 in the Kronecker deltas in (15.3) by 3,4 and the superscript $(+)$ by $(-)$, and this will be verified in Exercise 15.3.

15.1 Eigenvalue Equation for Multispinors

Problem. Verify that the multispinors $\omega^{(+)}(0, i)$ fulfill the eigenvalue equation $\frac{1}{2}\hbar\hat{\Sigma}^3\omega^{(+)}(0, i) = \hbar(s - i)\omega^{(+)}(0, i)$
 $i = 0, 1, \dots, 2s$.

Solution

Using

$$\begin{aligned} \left(\hat{\Sigma}_3\right)_{\alpha\alpha'} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \left(\hat{\Sigma}_3\right)_{\beta\beta'} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

and (15.4) we get

$$\begin{aligned} & \left. \frac{1}{2}\hbar\hat{\Sigma}^3\omega^{(+)}(0, i = 0) \right)_{\alpha\beta\dots r} \\ &= \frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'\beta\beta'\dots\nu\nu'\tau\tau'}^3\omega_{\alpha'\beta'\dots\nu'\tau'}^{(+)}(0, i = 0) \\ &= \frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'}^3\delta_{\alpha'1}\delta_{\beta1}\dots\delta_{\nu1}\delta_{\tau1} \\ &+ \delta_{\alpha1}\frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma}_{\beta\beta'}^3\delta_{\beta'1}\delta_{\gamma1}\dots\delta_{\nu1}\delta_{\tau1} \\ &+ \delta_{\alpha1}\delta_{\beta1}\dots\delta_{\nu1}\frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma}_{\tau\tau'}^3\delta_{\tau'1} \\ &= \frac{\hbar}{2}2s(\delta_{\alpha1}\delta_{\beta1}\dots\delta_{\tau1}) = \hbar s\omega_{\alpha\beta\dots\tau}^{(+)}(0, i = 0) \end{aligned} \tag{1}$$

and analogously

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\hbar\hat{\Sigma}^3\omega^{(+)}(0, i = 1) \right)_{\alpha\beta\dots\tau} \\ &= \frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'}^3\delta_{\alpha'2}\delta_{\beta1}\dots\delta_{\tau1} + \delta_{\alpha2}\frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma}_{\beta\beta'}^3\delta_{\beta'1}\dots\delta_{\tau1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 1} \dots \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma}_{\tau\tau'}^3 \delta_{\tau'1} + \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'}^3 \delta_{\alpha'1} \delta_{\beta 2} \dots \delta_{\tau 1} \\
& + \delta_{\alpha 1} \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma}_{\beta\beta'}^3 \delta_{\beta'2} \dots \delta_{\tau 1} + \dots \\
& + \delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 2} \dots \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma}_{\tau\tau'}^3 \delta_{\tau'1} + \dots \\
& = \frac{\hbar}{2} [-\delta_{\sigma 2} \delta_{\beta 1} \dots \delta_{\tau 1} \\
& + \overbrace{\alpha 2} \delta_{\beta 1} \dots \delta_{\tau 1} + \dots + \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 1} \dots \delta_{\tau 1} \\
& + \delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 2} \dots \delta_{\tau 1} - \delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 2} \dots \delta_{\tau 1} + \dots \\
& + \delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 2} \dots \delta_{\tau 1} + \dots] \\
& = \hbar(s-1) [\delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 1} \dots \delta_{\tau 1} + \delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 2} \dots \delta_{\tau 1} + \dots] \\
& = \hbar(s-1) \omega_{\alpha\beta\dots\tau}^{(+)}(0, i=1) \\
& \left(\frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma}^3 \omega^{(+)}(0, i=2s) \right)_{\alpha\beta\dots\tau} \\
& = \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'}^3 \delta_{\alpha'2} \delta_{\beta 2} \dots \delta_{\tau 2} + \delta_{\alpha 2} \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma}_{\beta\beta'}^3 \delta_{\beta'2} \dots \delta_{\tau 2} \\
& + \dots \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2} \dots \frac{\hbar}{2} \hat{\Sigma}_{\tau\tau'}^3 \delta_{\tau'2} \\
& = -\hbar s \omega_{\alpha\beta\dots\tau}^{(+)}(0, i=2s) \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{2}$$

Hence the action of $\left(\hat{\Sigma}\right)_{\alpha\alpha'\dots\tau\tau'}$ on the multispinors $\omega^{(+)}(0, i)$ is clarified, and the validity of the eigenvalue equation (15.5) is proven.

15.2 Multispinor $\omega^{(+)}$ as Eigenvector of $\hat{\Sigma}^2$

Problem. Show by using the example of the multispinor $\omega^{(+)}(0, i=0)$ that it is an eigenvector of $(\hbar^2/4) \hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'\beta\beta'\dots\tau\tau'}^2$ with the eigenvalue $\hbar^2 s(s+1)$.

Solution

The vector operator $\hat{\Sigma}$ is defined in a similar manner to $\hat{\Sigma}^3$ in (15.4); then, we have

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{4} \hat{\Sigma}^2 \right)_{\alpha\alpha'\beta\beta'\dots\tau\tau'} \\
& = \frac{1}{4} \hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'}^2 + \frac{1}{4} \hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'} \cdot \hat{\Sigma}_{\tau\tau'} + \dots + \frac{1}{4} \hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'} \cdot \hat{\Sigma}_{\tau\tau'} \\
& + \frac{1}{4} \hat{\Sigma}_{\beta\beta'} \cdot \hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'} + \frac{1}{4} \hat{\Sigma}_{\beta\beta'}^2 + \dots + \frac{1}{4} \hat{\Sigma}_{\beta\beta'} \cdot \hat{\Sigma}_{\tau\tau'} \\
& \vdots \\
& + \frac{1}{4} \hat{\Sigma}_{\tau\tau'} \cdot \hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'} + \frac{1}{4} \hat{\Sigma}_{\tau\tau'} \cdot \hat{\Sigma}_{\beta\beta'} + \dots + \frac{1}{4} \hat{\Sigma}_{\tau\tau'}^2
\end{aligned} \tag{1}$$

Here, the notation has been simplified by omitting the delta functions with respect to the not explicitly listed indices in each term of the sum [cf. (15.4)]. On the rhs of (1) we see $2s$ rows with $2s$ factors in each individual term. The quadratic terms can be easily calculated, e.g.

$$\hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'}^2 = \left(\hat{\Sigma}^1\right)_{\alpha\alpha'}^2 + \left(\hat{\Sigma}^2\right)_{\alpha\alpha'}^2 + \left(\hat{\Sigma}^3\right)_{\alpha\alpha'}^2 = 3\delta_{\alpha\alpha'}.$$

A similar expression is valid for every pair of indices $\beta\beta', \gamma\gamma', \dots, \tau\tau'$. Since each row of (1) contains just one of these quadratic terms, the first contribution to the expectation value of (1) is given by $(3/4)2s = (3/2)s$. Just $(2s - 1)$ mixed terms of the form

$$\frac{1}{4}\hat{\Sigma} \cdot \hat{\Sigma}',$$

remain in each of the $2s$ rows, where $\hat{\Sigma}$ and $\hat{\Sigma}'$ act onto different indices because of the total symmetry of $\omega_{\alpha\beta\dots\tau}^{(+)}(0, i)$ in $\alpha, \beta, \dots, \tau$. By considering the example $\omega^{(+)}(0, i = 0)$ it is most easily demonstrated that

$$\frac{1}{4}\hat{\Sigma} \cdot \hat{\Sigma}'\omega^{(+)}(0, i = 0) = \frac{1}{4}\omega^{(+)}(0, i = 0).$$

Inserting $\omega^{(+)}(0, i = 0)$ from the first equation of (15.3) and remembering that

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix},$$

it follows in the representation of the Pauli matrices [see (1.65)] that

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{4}\hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'} \cdot \hat{\Sigma}_{\beta\beta'}\right) \delta_{\alpha'1}\delta_{\beta'1} \dots \\ &= \frac{1}{4} \left(\hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'}^1 \hat{\Sigma}_{\beta\beta'}^1 + \hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'}^2 \hat{\Sigma}_{\beta\beta'}^2 + \hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'}^3 \hat{\Sigma}_{\beta\beta'}^3\right) \delta_{\alpha'1}\delta_{\beta'1} \dots \\ &= \frac{1}{4} \left(\hat{\Sigma}_{21}^1 \hat{\Sigma}_{21}^1 \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2} + \hat{\Sigma}_{21}^2 \hat{\Sigma}_{21}^2 \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2} + \hat{\Sigma}_{11}^3 \hat{\Sigma}_{11}^3 \delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 1}\right) \dots \\ &= \frac{1}{4} ((+1)\delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2} + (-1)\delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2} + (+1)\delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 1}) \dots \\ &= \frac{1}{4} \delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 1} \dots \end{aligned} \tag{5}$$

In (1), each term of the form (3) yields the contribution $1/4$ to the eigenvalue, and altogether, we obtain

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}\hat{\Sigma}^2\right) \omega^{(+)}(0, i = 0) &= \left[\frac{3}{2}s + \frac{1}{4}(2s - 1)2s\right] \omega^{(+)}(0, i = 0) \\ &= s(s + 1)\omega^{(+)}(0, i = 0) \end{aligned} \tag{6}$$

Multiplication by $\hbar^2$ yields the desired result. Similar, but more involved, is the recalculation that the remaining $\omega^{(+)}(0, i)$ of (15.3) satisfy the same eigenvalue equation. Together with (15.5), this proves that the $2s + 1$ multispinors $\omega^{(+)}(0, i)$ of (15.3) describe particles with spin s .

15.3 Multispinor of Negative Energy

Problem. Construct - analogously to (15.3) - the multispinor of negative energy in the rest system and, based on this, the eigenvalue equation analogous to (15.5).

Solution

It follows immediately from (6.3) that, analogously to (15.3),

$$\omega_{\alpha\beta\dots\tau}^{(-)}(0, i = 0) = \delta_{\alpha 3} \delta_{\beta 3} \dots \delta_{\tau 3},$$

$\omega_{\alpha\beta\dots\tau}^{(-)}(0, i=0) = \delta_{\alpha 4}\delta_{\beta 3}\dots\delta_{\tau 3} + \delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 4}\delta_{\gamma 3}\dots\delta_{\tau 3}$
 $+ \dots + \delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 3}\dots\delta_{\tau 4}, \omega_{\alpha\beta\dots\tau}^{(-)}(0, i=2s) = \delta_{\alpha 4}\delta_{\beta 4}\dots\delta_{\tau 4}.$
 Since

$$\hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

the action of $\hat{\Sigma}^3$ on $\omega_{\alpha\beta\dots\tau}^{(-)}(0, i)$ is the same as the action of $\hat{\Sigma}^3$ on $\omega_{\alpha\beta\dots\tau}^{(+)}(0, i)$. For $i=0$ this means that

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\hbar\hat{\Sigma}_{\alpha\beta\dots\tau}^3(0, i=0) \\ & \frac{1}{2}\hbar\left[\hat{\Sigma}_{\alpha\alpha'}^3\delta_{\alpha'3}\delta_{\beta 3}\dots\delta_{\tau 3} + \delta_{\sigma 3}\hat{\Sigma}_{\beta\beta'}^3\delta_{\beta'3}\dots\delta_{\tau 3}\right. \\ & \quad \left.+ \dots + \delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 3}\dots\hat{\Sigma}_{\tau\tau'}^3\delta_{\tau'3}\right] \\ & = \hbar s\delta_{\alpha 3}\delta_{\beta 3}\dots\delta_{\tau 3} = \hbar s\omega_{\alpha\beta\dots\tau}^{(-)}(0, i=0). \end{aligned}$$

The further calculation is analogous to that presented in Exercise 15.1.

Now we can transform these multispinors into an arbitrary frame of reference, bearing in mind the work of Chap. 6, particularly (6.30) and Exercise 6.1. By "boosting" all factors of (15.2) at the same time, i.e. applying the operator $\hat{S}(\mathbf{p})$

$$\hat{S}_{\alpha\alpha'\beta\beta'\dots\tau\tau'}\left(\frac{\mathbf{p}}{E}\right) =: \hat{S}_{\alpha\alpha'}\left(\frac{\mathbf{p}}{E}\right)\hat{S}_{\beta\beta'}\left(\frac{\mathbf{p}}{E}\right)\dots\hat{S}_{\tau\tau'}\left(\frac{\mathbf{p}}{E}\right) \quad (15.6)$$

we get

$$\omega^{(+)}(\mathbf{p}, i) = \hat{S}\left(\frac{\mathbf{p}}{E}\right)\omega^{(+)}(0, i) \quad , \quad \omega^{(-)}(\mathbf{p}, i) = \hat{S}\left(\frac{\mathbf{p}}{E}\right)\omega^{(-)}(0, i) \quad (15.7)$$

(In Exercise 15.4 these spinors $\omega^{(\pm)}(p, i)$ will be explicitly calculated). Now every wave function may be written as a superposition of plane waves:

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\dots\tau}^{(+)}(x; p, i) &= \omega_{\alpha\dots\tau}^{(+)}(p, i)e^{-ip\cdot x/\hbar} \\ \Psi_{\alpha\dots\tau}^{(-)}(x; p, i) &= \omega_{\alpha\dots\tau}^{(-)}(p, i)e^{+ip\cdot x/\hbar} \end{aligned} \quad (15.8)$$

,

and thus

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta\dots\tau}(x) &= \sum_i \int c^{(+)}(p, i)\Psi_{\alpha\beta\dots\tau}^{(+)}(x; p, i)d^3p \\ &+ \sum_i \int c^{(-)}(p, i)\Psi_{\alpha\beta\dots\tau}^{(-)}(x; p, i)d^3p \end{aligned} \quad (15.9)$$

Hence these multispinors fulfill in coordinate space the following Dirac equation for each index, separately:

$$\begin{aligned} (i\hbar\gamma \cdot \partial - m_0c)_{\alpha\alpha'}\Psi_{\alpha'\beta\dots\tau}(x) &= 0, \\ &\vdots \\ (i\hbar\gamma \cdot \partial - m_0c)_{\tau\tau'}\Psi_{\alpha\beta\dots\tau'}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (15.10)$$

They are named the "Bargmann-Wigner equations", after their inventors". Of course each component is, in accordance with the properties of solutions of the Dirac equation, also a solution of the Klein-Gordon equation

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) \Psi_{\alpha \dots \tau}(x) = 0 \quad (15.11)$$

The quantities $\Psi_{\alpha \beta \dots \tau}(x)$ can obviously be regarded as the components of the wave function of a particle with mass m_0 and spin s , that is composed of elementary identical spin- $\frac{1}{2}$ fields, since there exist exactly $(2s+1)$ linearly independent components, each of which obeys (15.10) and (15.11). According to (15.5), each of these components is an eigenstate of $\hat{\Sigma}^3$.

1 V. Bargmann, E. Wigner: Proc. Nat. Sci. (USA) 34, 211 (1948).

15.4 Construction of the Spinor $\omega_{\alpha \beta \dots \tau}^{(+)}(p, i)$

Problem. Determine from (15.6) and the results of Exercise 6.1 the spinor $\omega_{\alpha \beta \dots \tau}^{(+)}(p, i)$, using the operator

$$\hat{S}_{\alpha \alpha' \beta \beta' \dots \tau \tau'}(\mathbf{p});$$

hence deduce the result

$$\begin{aligned} & (\not{p} - m_0 c)_{\alpha \alpha'} \omega_{\alpha' \beta \dots \tau}^{(+)}(p, i) \\ &= (\not{p} - m_0 c)_{\beta \beta'} \omega_{\alpha \beta' \dots \tau}^{(+)}(p, i) \\ & \quad \vdots \\ & (\not{p} - m_0 c)_{\tau \tau'} \omega_{\alpha \beta \dots \tau'}^{(+)}(p, i) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Solution

In the standard representation (3.13) we obtain according to (6.32) the four-component Dirac spinors of momentum p by using the Lorentz transformation

$$\omega^r(p) = \hat{S}\left(-\frac{\mathbf{p}}{E}\right) \omega^r(0) \quad r = 1, 2,$$

where, according to Exercise 6.1,

$$\hat{S}\left(-\frac{\mathbf{p}}{E}\right) = \sqrt{\frac{E+m_0 c^2}{2m_0 c^2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z c}{E+m_0 c^2} & \frac{p_- c}{E+m_0 c^2} \\ 0 & 1 & \frac{p_+ c}{E+m_0 c^2} & \frac{-p_z c}{E+m_0 c^2} \\ \frac{p_z c}{E+m_0 c^2} & \frac{p_- c}{E+m_0 c^2} & 1 & 0 \\ \frac{p_+ c}{E+m_0 c^2} & \frac{-p_z c}{E+m_0 c^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Hence the two solutions of positive energy with spin up and down are the first two columns of matrix (3). However, in contrast to (15.1) it holds that

$$\omega_{\alpha \beta \dots \tau}^{(+)}(p, i) \neq 0 \quad \text{for } \alpha, \beta, \dots, \tau = 3, 4.$$

Using (15.6), (15.7) and (15.1) we obtain

$$\begin{aligned} & \omega_{\alpha \beta \dots \tau}^{(+)}(p, i=0) \\ &= \hat{S}\left(-\frac{\mathbf{p}}{E}\right)_{\alpha 1} \hat{S}\left(-\frac{\mathbf{p}}{E}\right)_{\beta 1} \dots \hat{S}\left(-\frac{\mathbf{p}}{E}\right)_{\tau 1}, \\ & \omega_{\alpha \beta \dots \tau}^{(+)}(p, i=1) \\ &= \hat{S}\left(-\frac{\mathbf{p}}{E}\right)_{\alpha 2} \hat{S}\left(-\frac{\mathbf{p}}{E}\right)_{\beta 1} \dots \hat{S}\left(-\frac{\mathbf{p}}{E}\right)_{\tau 1}, \\ & \quad + \hat{S}\left(-\frac{\mathbf{p}}{E}\right)_{\alpha 1} \hat{S}\left(-\frac{\mathbf{p}}{E}\right)_{\beta 2} \dots \hat{S}\left(-\frac{\mathbf{p}}{E}\right)_{\tau 1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots \hat{S} \left(-\frac{\mathbf{p}}{E} \right)_{\alpha 1} \hat{S} \left(-\frac{\mathbf{p}}{E} \right)_{\beta 1} \dots \hat{S} \left(-\frac{\mathbf{p}}{E} \right)_{\tau 2} \\
& \vdots \\
& \omega_{\alpha\beta\dots\tau}^{(+)}(\mathbf{p}, i = 2s) = \hat{S} \left(-\frac{\mathbf{p}}{E} \right)_{\alpha 2} \dots \hat{S} \left(-\frac{\mathbf{p}}{E} \right)_{\tau 2}
\end{aligned} \tag{5}$$

Each of the indices $\alpha, \beta, \dots, \tau$ "scans" the columns of matrix (3), which are composed of the solutions $\omega^\tau(p)$ of (6.33a), i.e.

$$(\not{-m_0 c}) \omega^\tau(p) = 0 \quad r = 1, 2.$$

Hence (1) holds.

15.5 The Bargmann-Wigner Equations

Problem. Show that the spinors (15.9) obey the Dirac equation in the form (15.10).

Solution

We use the Dirac equation (6.33a) in the momentum representation for the four-component spinors $\omega^\tau(p)$, that is

$$(\not{-\varepsilon_r m_0 c}) \omega^\tau(\mathbf{p}) = 0 \quad \text{for } r = 1, 2, 3, 4$$

and the "plane waves" (6.31)

$$\psi_{\mathbf{p}}^\tau(x) = \omega^\tau(\mathbf{p}) e^{-i\varepsilon_r \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / \hbar}.$$

Now the Dirac equation in coordinate representation

$$\begin{aligned}
& (i\hbar \gamma_\mu \partial^\mu - m_0 c) \psi_{\mathbf{p}}^r(x) \\
& = (\varepsilon_r \gamma_\mu p^\mu - m_0 c) \omega^r(p) e^{-i\varepsilon_r \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / \hbar} = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Each linear combination of these solutions

$$\Psi(x) = \sum_r \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{E_p}} c_r(\mathbf{p}) \psi_{\mathbf{p}}^r(x)$$

with arbitrary functions $c_r(\mathbf{p})$ obeys the Dirac equation, too:

$$\begin{aligned}
& (i\hbar \gamma_\mu \partial^\mu - m_0 c) \Psi(x) \\
& = \sum_r \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} c_r(\mathbf{p}) (i\hbar \gamma_\mu \partial^\mu - m_0 c) \psi_{\mathbf{p}}^r(x) \\
& = \sum_r \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} c_r(\mathbf{p}) (\varepsilon_r \gamma_\mu p^\mu - m_0 c) \omega^r(p) e^{-i\varepsilon_r \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / \hbar} \\
& = 0
\end{aligned}$$

For an arbitrary Bargmann-Wigner multi spinor

$$\begin{aligned}
\Psi_{\alpha\beta\dots\tau}(x) = \sum_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} & \left[\omega_{\alpha\beta\dots\tau}^{(+)}(p, i) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / \hbar} c^{(+)}(p, i) \right. \\
& \left. + \omega_{\alpha\beta\dots\tau}^{(-)}(p, i) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} / \hbar} c^{(-)}(p, i) \right]
\end{aligned} \tag{6}$$

we obtain

$$\begin{aligned}
& (i\hbar\gamma_\mu\partial^\mu - m_0c)_{\alpha\alpha'} \Psi_{\alpha'\beta\dots\tau}(x) \\
&= \int \int_i \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left[(\gamma_\mu p^\mu - m_0c)_{\alpha\alpha'} \omega_{\alpha'\beta\dots\tau}^{(+)}(p, i) \right. \\
&\quad \times e^{-ip\cdot x/\hbar} c^{(+)}(p, i) \\
&\quad \left. - (\gamma_\mu p^\mu + m_0c)_{\alpha\alpha'} \omega_{\alpha'\beta\dots\tau}^{(-)}(p, i) e^{ip\cdot x/\hbar} c^{(-)}(p, i) \right] \quad (7)
\end{aligned}$$

etc. for all the other indices. However according to the construction of $\omega_{\alpha\beta\dots\tau}^{(+)}(p, i)$ (cf. Exercises 15.2 and 15.3), it holds that

$$\begin{aligned}
& (\gamma_\mu p^\mu - m_0c)_{\alpha\alpha'} \omega_{\alpha'\beta\dots\tau}^{(+)}(p, i) \\
&= (\not{-}m_0c)_{\alpha\alpha'} \hat{S}_{\alpha'\alpha''\beta\beta'\dots\tau\tau'} \left(\frac{p}{E} \right) \omega_{\alpha''\beta'\dots\tau'}^{(+)}(0, i) \\
&= 0. \quad (8)
\end{aligned}$$

Taking into consideration the relation

$$\omega^r(\varepsilon_{\mathbf{r}}\mathbf{p}) = \hat{S}\left(-\frac{\varepsilon_{\mathbf{r}}\mathbf{p}}{E}\right) \omega^r(0)$$

[cf. (2) of Exercise 6.6] one gets, furthermore, that

$$\begin{aligned}
& (\gamma_\mu p^\mu + m_0c)_{\alpha\alpha'} \omega_{\alpha'\beta\dots\tau}^{(-)}(p, i) \\
&= (\not{-}m_0c)_{\alpha\alpha'} \hat{S}_{\alpha'\alpha''\beta\beta'\dots\tau\tau'} \left(\frac{p}{E} \right) \omega_{\alpha''\beta'\dots\tau'}^{(-)}(0, i) \\
&= 0. \quad (10)
\end{aligned}$$

Of course, we obtain analogous results for the other indices $\beta, \dots, \tau$, and hence we obtain

$$(i\hbar\gamma_\mu\partial^\mu - m_0c)_{\alpha\alpha'} \Psi_{\alpha'\beta\gamma\dots\tau}(x) = 0 \quad (11)$$

and, analogously, also

$$(i\hbar\gamma_\mu\partial^\mu - m_0c)_{\beta\beta'} \Psi_{\alpha\beta'\gamma\dots\tau}(x) = 0,$$

$$(i\hbar\gamma_\mu\partial^\mu - m_0c)_{\tau\tau'} \Psi_{\alpha\beta\gamma\dots\tau'}(x) \stackrel{\cdot}{=} 0$$

These are the so-called Bargmann-Wigner equations.

15.2 Massless Particles

We have to modify the derivation of the Bargmann-Wigner equations for massless particles, because we cannot find a rest system for $m_0 = 0$. However, we can choose the z axis colinear to the direction of momentum:

$$p^\mu = (p^0, 0, 0, p) \quad (15.12)$$

The Bargmann-Wigner equations (i.e. for each index the Dirac equations) in momentum representation read

$$p(\pm\gamma^0 - \gamma^3)_{\alpha\alpha'} w_{\alpha'\beta\dots\tau}^{(\pm)}(p) = 0$$

$$p(\pm\gamma^0 - \gamma^3)_{\tau\tau'} w_{\alpha\beta\dots\tau'}^{(\pm)} \stackrel{\cdot}{=} 0,$$

where $\pm$ again denotes the sign of the energy. Multiplying these equations by γ^0 yields

$$\begin{aligned} (\gamma^0 \gamma^3)_{\alpha\alpha'} w_{\alpha'\beta\dots\tau}^{(\pm)}(p) &\equiv \hat{\alpha}_{\alpha\alpha'}^3 w_{\alpha'\beta\dots\tau}^{(\pm)}(p) = \pm w_{\alpha\beta\dots\tau}^{(\pm)}(p) \\ &\vdots \\ &\equiv \hat{\alpha}_{\tau\tau'}^3 w_{\alpha\beta\dots\tau}^{(\pm)}(p) = \pm w_{\alpha\beta\dots\tau}^{(\pm)}(p) \end{aligned} \quad (15.14)$$

because $\gamma^0 \gamma^0 = 11$. Neither in the standard representation (3.13) nor in the Majorana representation (cf. Exercise 5.2) of the Clifford algebra is the matrix $\gamma^0 \gamma^3$ diagonal. But, using a unitary transformation, we can find a new basis so that

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -11 \\ -11 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ -\hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}^i =: \gamma^0 \gamma^i = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_i & 0 \\ 0 & -\hat{\sigma}_i \end{pmatrix}. \quad (15.15)$$

This representation is called the chiral or Weyl representation, because the chirality operator γ^5 is diagonal in this particular representation (which will be shown in the next exercise). The name "chirality" will be justified in the following.

15.2 γ -Matrices in Weyl-Representation

Problem. Show that the γ matrices in the Weyl representation obey the common commutation relations.

Solution

In standard representation [cf. (3.13)]

$$\gamma_0^S = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5^S = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$$

where the upper index S stands for "standard representation"; Eq. (5.9) yields

$$\gamma_\mu^S \gamma_5^S + \gamma_5^S \gamma_\mu^S = 0;$$

$$\text{and (3.11) gives } \gamma_\mu^S \gamma_0^S + \gamma_0^S \gamma_\mu^S = 2g_{\mu 0} 11$$

In the Weyl representation the matrices γ_i remain unchanged, only γ_5 and γ_0 are exchanged:

$$\gamma_i^W = \gamma_i^S, \quad \gamma_0^W = -\gamma_5^S, \quad \gamma_5^W = \gamma_0^S.$$

Because of (2) and (3) the anticommutation relations (3.11) are not changed by this transformation. The transformation is explicitly given by

$$\gamma_\mu^W \triangleq S \gamma_\mu^S \hat{S}^\dagger,$$

with

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 11 & -11 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

In the Weyl representation the operator on the lhs of the Bargmann-Wigner equations becomes diagonal so that the eigenfunctions may be determined conveniently. Before proceeding to do so, we want to emphasize a remarkable property of the zero-mass Dirac equation. Due to the absence of the mass term an additional symmetry arises: for any solution $\omega(\mathbf{p})$ there is always the spinor $\gamma^5 \omega(\mathbf{p})$ simultaneously eigenfunction of the equation, since the matrix γ^5 commutes with the operator $\hat{\alpha}^3 = \gamma^0 \gamma^3$ appearing in the equation of motion (15.14) and two commuting operators can simultaneously be diagonalized. Therefore the solutions of the Bargmann-Wigner equations may be classified by the quantum numbers of γ^5 (chirality): it is convenient to employ the chiral representation, where

$$\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}. \quad (15.16)$$

Obviously the chirality operator is already in diagonal form (which explains the name of the representation). With respect to a chosen inertial system, we define the chirality of the solution to be positive if the eigenfunctions satisfy

$$\gamma_5 \omega_+^{(\pm)}(p) = (+1) \omega_+^{(\pm)}(p) \quad (15.17)$$

where the subscript " + " designates positive chirality. With this notation, the solution $\omega_+^{(+)}(p)$, for example, refers to a state with positive energy [superscript (+)] and positive chirality (subscript +). Hence, the spinor $\omega_+^{(\pm)}(p)$ must have the form

$$\omega_+^{(\pm)}(p) = \begin{pmatrix} \omega_{+1}^{(\pm)}(p) \\ \omega_{+2}^{(\pm)}(p) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u^{(\pm)}(p) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15.18)$$

and, on the other hand, solutions with negative chirality must satisfy

$$\gamma_5 \omega_-^{(\pm)}(p) = (-1) \omega_-^{(\pm)}(p) \quad (15.19)$$

i.e. they will be of the form

$$\omega_-^{(\pm)}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{-3}^{(\pm)}(p) \\ \omega_{-4}^{(\pm)}(p) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ v^{(\pm)}(p) \end{pmatrix} \quad (15.20)$$

The functions

$$u^{(\pm)} =: \begin{pmatrix} \omega_{+1}^{(\pm)} \\ \omega_{+2}^{(\pm)} \end{pmatrix}, \quad v^{(\pm)} =: \begin{pmatrix} \omega_{-3}^{(\pm)} \\ \omega_{-4}^{(\pm)} \end{pmatrix} \quad (15.21)$$

just defined are now two-component spinors. Consequently, the Dirac equation (15.14) splits into two two-component equations, namely

$$\hat{\sigma}^3 u^{(\pm)} = \pm u^{(\pm)}, \quad \hat{\sigma}^3 v^{(\pm)} = \mp v^{(\pm)}. \quad (15.22)$$

Since there exist only two eigenfunctions of $\hat{\sigma}_3$, we conclude that $v^{(\pm)}(p) = u^{(\mp)}(p)$, an identification that implies significant consequences, as we shall see. However, the eigenfunctions of

$$\hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

correspond to the eigenvalues ± 1 , i.e. for positive (negative) sign of the energy only the upper (lower) components of the two-spinor $u^{(\pm)}$ do not vanish. That means, in this case the spin orientation must be parallel (antiparallel) to the direction of momentum. In contrast, the spinor $v^{(\pm)}$ has exactly the opposite property: for positive (negative) energy only the lower (upper) component is non-vanishing and the spin orientation is antiparallel (parallel) to the momentum, which, by definition, is assumed to point along the z axis [see (15.12)]. In other words: zero-mass fermions (e.g. neutrinos) with definite chirality have the property that the helicity $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ of the particle depends on the sign of its energy. In the case (15.17), zero-mass particles with positive energy have positive helicity, whereas zero-mass particles with negative energy carry negative helicity, and this partly explains the name chirality ("screw sense"). If we interpret the properties just explained in terms of the hole theory (cf. Chap.12), where a wave

function of negative energy and momentum $-\mathbf{p}$ corresponds to an anti-fermion with positive energy and momentum $+\mathbf{p}$, one observes that zero-mass fermions and anti-zero-mass fermions with positive chirality both also have positive helicity (they are "right-handed"). Similarly, fermions and antifermions with negative chirality both carry negative helicity (they are "left-handed"). With this insight, the term "chirality" now becomes evident: chirality for zero-mass particles is equivalent to their helicity.

In analogy to the wave functions for particles with finite mass, one may now proceed to construct a zero-mass, symmetric Bargmann-Wigner multispinor from the zero-mass Dirac solution in the chiral representation [cf. (15.1-15.3)]. However, since we employed a unitary transformation to pass to the chiral representation, now all the components with indices 1 and 4 in (15.3) contribute to wave functions with positive energy, which is also reflected by (15.22). Due to the chiral symmetry of the particular components, we can now search for eigenfunctions of the Bargmann-Wigner equations for each component that is simultaneously an eigenfunction of γ^5 , i.e. with $\omega_{\alpha\beta} \dots \tau(p)$ being a solution, $\gamma_{\alpha\alpha'}^5 \omega_{\alpha'\beta} \dots \tau(p)$, $\gamma_{\beta\beta'}^5 \omega_{\alpha\beta'} \dots \tau(p)$, etc. are solutions too. Taking into consideration the symmetry of the Bargmann-Wigner multispinors, it follows that the number of possible solutions reduces from $2s + 1$ to only two, since for positive energy and positive chirality there are merely

$$\omega_{+\alpha\beta\dots\tau}^{(+)}(p) \sim \delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 1} \dots \delta_{\tau 1} \quad (15.23a)$$

Similarly, for positive energy and negative chirality,

$$w_{-\alpha\beta\dots\tau}^{(+)}(p) \sim \delta_{\alpha 4} \delta_{\beta 4} \dots \delta_{\tau 4} \quad (15.23b)$$

and, as before, the subscripts "+", "-" designate the chirality, and the superscript (+) denotes the positive energy.

These are the two eigenfunctions of the operator for the total helicity that correspond to the two extreme eigenvalues $\pm s$. For negative energy solutions the conclusions are completely analogous. Hence, the wave functions may be transformed to any Lorentz frame and subsequently be re-expressed in terms of plane waves to construct arbitrary wave packets in configuration space as linear combinations which satisfy the Bargmann-Wigner equations in configurations space.

Unfortunately, the outlined procedure for constructing the Bargmann-Wigner fields for particles with arbitrary masses does not allow us to find a Lagrange formulation, which is of fundamental importance for the quantization of the theory. To infer a Lagrangian density, one needs to transform the general Bargmann-Wigner equations for each particular spin orientation separately in a skillful way. In the following we will illustrate this concept for the case of spin-1 fields.

15.3 Spin-1 Fields for Particles with Finite Mass; Proca Equations

In this case the Bargmann-Wigner field is labelled by two indices. The two Dirac equations for the symmetric matrix $\Psi_{\alpha\beta}(x)$ may be written as follows:

$$(i\hbar\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - m_0c)\Psi(x) = 0, \quad \Psi(x)(i\hbar\gamma_{\mu}^T\partial^{\mu} - m_0c) = 0 \quad (15.24)$$

or, in detail

$$(i\hbar\partial_{\mu}\gamma_{\alpha\alpha'}^{\mu} - m_0c\delta_{\alpha\alpha'})\Psi_{\alpha'\beta}(x) = 0 \quad (15.25a)$$

$$\Psi_{\alpha\beta'}(x)\left(i\hbar\gamma_{\beta\beta'}^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu} - m_0c\delta_{\beta\beta'}\right) = 0 \quad (15.25b)$$

Since the 4×4 spinor is symmetric, it may be expanded in terms of a complete set of symmetrical elements of the Clifford algebra standard representation, the latter consisting of ten symmetrical matrices

$$\gamma^\mu \hat{C}, \quad \hat{\sigma}^{\mu\nu} \hat{C}, \quad (15.26)$$

where $\hat{C} = i\gamma^2\gamma^0$ is the charge conjugation matrix that was defined in (12.23) and satisfies (12.24). The remaining six matrices

$$\gamma^\mu \gamma_5 \hat{C}, \quad i\gamma_5 \hat{C}, \quad \hat{C} \quad (15.27)$$

are anti-symmetric; thus it holds on the one hand that

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu \hat{C})^T &= \hat{C}^T \gamma^{\mu T} = -\hat{C} (\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0)^* \\ &= -i\gamma_2^2 \gamma^{\mu*} \gamma^0 = \gamma^\mu i\gamma_2^2 \gamma^0 = \gamma^\mu \hat{C} \end{aligned} \quad (15.28a)$$

and on the other hand, we have

$$(i\gamma_5 \hat{C})^T = \hat{C}^T i\gamma_5^T = -i\gamma^2 \gamma^0 (+i\gamma_5) = -i\gamma_5 \hat{C}. \quad (15.28b)$$

Therefore, we define

$$\Psi(x) = \frac{m_0 c}{\hbar} \gamma_\mu \hat{C} \varphi^\mu(x) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^{\mu\nu} \hat{C} G_{\mu\nu}(x) \quad (15.29)$$

where the coefficients $\varphi^\mu(x)$ and $G^{\mu\nu}(x)$ are generally complex and transform under Lorentz transformations like a vector and an anti-symmetrical tensor, respectively. The

Bargmann-Wigner equations (15.24) now become

$$\begin{aligned} (i\hbar \gamma \cdot \partial - m_0 c) \left(\frac{1}{\hbar} m_0 c \gamma_\mu \varphi^\mu(x) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{\mu\nu} G^{\mu\nu}(x) \right) \hat{C} &= 0, \\ \left(\frac{1}{\hbar} m_0 c \gamma_\mu \varphi^\mu(x) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{\mu\nu} G^{\mu\nu}(x) \right) \hat{C} (i\hbar \gamma^T \cdot \overleftarrow{\partial} - m_0 c) &= 0. \end{aligned} \quad (15.30a)$$

With regard to all indices, we explicitly rewrite the first of the above equations, which, for example, reads

$$\begin{aligned} (i\hbar \gamma \cdot \partial - m_0 c)_{\alpha\alpha'} \left(\frac{1}{\hbar} m_0 c (\gamma_\mu \hat{C})_{\alpha'\beta} \varphi^\mu(x) + \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{C})_{\alpha'\beta} G^{\mu\nu}(x) \right) &= 0 \\ (i\hbar \gamma \cdot \partial - m_0 c)_{\beta\beta'} \left(\frac{1}{\hbar} m_0 c (\gamma_\mu \hat{C})_{\alpha\beta'} \varphi^\mu(x) + \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{C})_{\alpha\beta'} G^{\mu\nu}(x) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (15.30b)$$

It now becomes obvious that the coefficients $\varphi^\mu(x)$ and $G^{\mu\nu}(x)$ do not take part in the matrix multiplication, and therefore they may equally be placed between the matrices γ^μ and $\hat{C}$ or between $\hat{\sigma}^{\mu\nu}$ and $\hat{C}$, as has been done in (15.30a,b).

Now, in the above representation of $\hat{C}$ it holds that $\hat{C} \gamma_\mu^T = -\gamma_\mu \hat{C}$. Thus, we can factorize $\hat{C}$ out of the equations:

$$\begin{aligned}
 & \left(i m_0 c \partial_\alpha \varphi_\mu(x) \gamma^\alpha \gamma^\mu - m_0^2 c^2 \gamma_\mu \varphi^\mu(x) + \frac{1}{2} i \hbar \gamma_\alpha \hat{\sigma}^{\mu\nu} \partial^\alpha G_{\mu\nu}(x) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} m_0 c \hat{\sigma}^{\mu\nu} G_{\mu\nu}(x) \right) \hat{C} = 0, \\
 & \left(i m_0 c \partial_\mu \varphi_\mu(x) \gamma^\alpha \gamma^\mu + m_0^2 c^2 \gamma_\mu \varphi^\mu(x) + \frac{1}{2} i \hbar \sigma^{\mu\nu} \gamma_\alpha \partial^\alpha G_{\mu\nu}(x) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} m_0 c \hat{\sigma}^{\mu\nu} G_{\mu\nu}(x) \right) \hat{C} = 0.
 \end{aligned} \tag{15.31}$$

Using the relation (cf. Exercise 3.2)

$$[\gamma^\alpha, \hat{\sigma}^{\mu\nu}] = 2i (g^{\alpha\mu} \gamma^\nu - g^{\alpha\nu} \gamma^\mu), \tag{15.32}$$

it follows for the difference of the two equations (15.31) that

$$m_0 c (\partial^\alpha \varphi^\mu - \partial^\mu \varphi^\alpha - G^{\alpha\mu}) \hat{\sigma}_{\alpha\mu} \hat{C} - 2 \gamma_\mu \hat{C} \left(\hbar \partial_\alpha G^{\alpha\mu} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar} \varphi^\mu \right) = 0 \tag{15.33}$$

The coefficients of the linearly independent matrices $\hat{C} \hat{\sigma}_{\alpha\beta}$ and $\gamma^\mu \hat{C}$ must vanish separately. Hence, for $m_0 \neq 0$, this implies that

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\mu, \tag{15.34}$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi^\nu \tag{15.35}$$

These are the so-called Proca equations². Expressed in terms of the vector field φ^μ they have the form

$$\square \varphi^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu \varphi^\nu) + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \partial_\mu \varphi^\mu = 0 \tag{15.36}$$

from which the subsidiary condition

$$\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \partial_\mu \varphi^\mu = 0 \tag{15.37}$$

follows directly. Thereby we then obtain

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \varphi^\mu = 0, \tag{15.37a}$$

$$\partial_\mu \varphi^\mu = 0. \tag{15.37b}$$

Just as in (15.34) and (15.35), these are again the Proca equations, but now solely obtained using the potentials φ^μ . The appertaining Lagrangian density is

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{Proca}} = & \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^* G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^* (\partial^\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\mu) \\
 & - \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_\nu^* - \partial_\nu \varphi_\mu^*) G^{\mu\nu} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi_\mu^* \varphi^\mu
 \end{aligned} \tag{15.38}$$

² A. Proca: Le Journal de Physique et le Radium 7, 347 (1936).

and we shall further comment on this in Exercise 15.10.

Note that from (15.34) an identity follows in form of the homogeneous equation

$$\partial^\varrho G^{\mu\nu} + \partial^\mu G^{\nu\varrho} + \partial^\nu G^{\varrho\mu} = 0, \quad (15.39)$$

which can be formulated by means of the "dual" tensor

$$\tilde{G}^{\mu\nu} =: \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} G_{\varrho\sigma}, \quad (15.40)$$

also as

$$\partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} = 0 \quad (15.41)$$

13.2.4 Wave Equations for Particles with Arbitrary Spins 2

15.4 Kemmer Equation

The Proca equations can also be cast in another linearized form. For that purpose we introduce the ten-dimensional "spinor"

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_{10} \end{pmatrix} \quad (15.42)$$

Its components are connected with the Proca fields as follows:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= -\frac{i}{\sqrt{m_0 c}} G^{01}, \quad \chi_2 = -\frac{i}{\sqrt{m_0 c}} G^{02} \\ \chi_3 &= -\frac{i}{\sqrt{m_0 c}} G^{03}, \quad \chi_4 = -\frac{1}{\sqrt{m_0 c}} G^{23}, \\ \chi_5 &= \frac{1}{\sqrt{m_0 c}} G^{13}, \quad \chi_6 = -\frac{1}{\sqrt{m_0 c}} G^{12}, \\ \chi_7 &= -\frac{\sqrt{m_0 c}}{\hbar} \varphi^1, \quad \chi_8 = -\frac{\sqrt{m_0 c}}{\hbar} \varphi^2, \\ \chi_9 &= -\frac{\sqrt{m_0 c}}{\hbar} \varphi^3, \quad \chi_{10} = -i \frac{\sqrt{m_0 c}}{\hbar} \varphi^0. \end{aligned} \quad (15.43)$$

Then the equations of the Proca theory (15.34) and (15.35) can be written as

$$(i\hbar\beta_\mu\partial^\mu - m_0c)\chi(x) = 0, \quad (15.44)$$

where the 10×10 matrices can be chosen as follows:

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \bar{0}^\dagger \\ 0 & 0 & 0 & \bar{0}^\dagger \\ -11 & 0 & 0 & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad i\beta^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & iK^{k\dagger} \\ 0 & 0 & S^k & \bar{0}^\dagger \\ 0 & -S^k & 0 & \bar{0}^\dagger \\ iK^k & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \quad (15.45)$$

with $k = 1, 2, 3$. The relation (15.44) represents a set of 10 differential equations, which are known as the Kemmer equations³. The elements of the 10×10 matrices β^μ are given by the matrices

$$\begin{aligned}
\emptyset &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \leq = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
S^1 &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S^2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S^3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
K^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\bar{0} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{15.46}$$

We convince ourselves of the equivalence of (15.44) with (15.34) and (15.35) by showing that the 10 equations do indeed coincide. For example, the first line of (15.44) yields

$$i\sqrt{m_0 c} (\partial^0 \varphi^1 - \partial^1 \varphi^0 - G^{01}) = 0$$

i.e. just the $\mu = 0, \nu = 1$ component of the Proca equation (15.34). As a second example we consider the tenth line of (15.44):

$$i\hbar (\partial_1 G_{01} + \partial_2 G_{02} + \partial_3 G_{03}) + \frac{im_0^2 c^2}{\hbar} \varphi^0 = 0$$

Because of the antisymmetry of $G^{\mu\nu}$ it can be also written as

$$\partial_1 G^{10} + \partial_2 G^{20} + \partial_3 G^{30} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi^0 = 0$$

which is just the $\nu = 0$ component of the inhomogeneous Proca equation (15.35). The remaining components of (15.34) and (15.35) can be verified in an analogous manner. Now the above defined β matrices fulfill the "commutation relations"

$$\beta^\mu \beta^\lambda \beta^\nu + \beta^\nu \beta^\lambda \beta^\mu = g^{\mu\lambda} \beta^\nu + g^{\nu\lambda} \beta^\mu \tag{15.47}$$

(as can be shown easily by calculation, cf. Exercise 15.7), and these define the so-called Kemmer algebra. If one passes to another representation $\beta' = S\beta S^\dagger$ of the β matrices by a unitary transformation S , then of course, formally neither the commutation relations (15.47) nor the equation of motion (15.44) for the field $\chi' = S\chi$ (called the free Kemmer equation) change. Obviously it is fully equivalent to the Proca equation, and this is also the case with regard to the coupling of spin-1 mesons to the electromagnetic field.⁴ Therefore in the chosen standard representation (15.46) the reverse transformation of the Kemmer theory into the Proca form can be constructed. If we define with

$$\begin{aligned}
U^\mu &: -(\beta_1)^2 (\beta_2)^2 (\beta_3)^2 (\beta^\mu \beta^0 - g^{\mu 0}), \\
U^{\mu\nu} &: -U^\mu \beta^\nu = -U^{\nu\mu}
\end{aligned} \tag{15.48}$$

ten additional 10×10 matrices, and with

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{15.49}$$

³ N. Kemmer: Proc. Roy. Soc. A 177, 9 (1939). Sometimes the name Duffin-Kemmer equation or Duffin-Kemmer-Petiau equation is used in the literature. As is often the case in the history of physics, several researchers almost simultaneously studied the same topic, here the spin-1 fields.

a 10-component spinor, we obtain

$$\varphi^\nu(x) = -\frac{i\hbar}{\sqrt{m_0 c}} E^\dagger U^\nu \chi(x), \quad (15.50a)$$

$$G^{\mu\nu}(x) = \sqrt{m_0 c} E^\dagger U^{\mu\nu} \chi(x). \quad (15.50b)$$

If we pass over to another representation $\beta' = S\beta S^\dagger$, then

$$U'_\nu = S U_\nu S^\dagger, \quad U'_{\mu\nu} = S U_{\mu\nu} S^\dagger, \quad E' = S E \quad (15.51)$$

holds accordingly. In other words: the Kemmer equations cannot only be represented in the form (15.44), (15.46) but also in many other equivalent representations. (In the following we shall follow these ideas further.) Also in the Kemmer form the spin-1 fields possess a Lagrangian density of the form

$$\mathcal{L}_{\text{Kemmer}} = \frac{1}{2} i\hbar \bar{\chi} \beta_\mu \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \chi - m_0 c \bar{\chi} \chi, \quad (15.52)$$

where one defines with $\eta = 2\beta_0^2 - 11$

$$\bar{\chi} \equiv \chi^\dagger \eta \quad (15.53a)$$

and

$$\overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu = \overset{\rightarrow}{\partial}^\mu - \overset{\leftarrow}{\partial}^\mu \quad (15.53b)$$

15.5 The Maxwell Equations

If the mass of the Bargmann-Wigner particles vanishes, we have to take into consideration the chiral symmetry if we want to deduce a theory which is analogous to the Proca equation; therefore we have to decompose the fields into eigensolutions of the chirality operator γ_5 for each index (remember the explanations in Sect. 15.2). This can be realized formally by requiring that for the corresponding symmetric 4×4 matrix Ψ it holds that

$$\begin{aligned} i\hbar \gamma \cdot \partial (\alpha + \beta \gamma_5) \Psi(x) &= 0 \\ \Psi(x) (\alpha + \beta \gamma_5) i\hbar \gamma^T \cdot \overset{\leftarrow}{\partial} &= 0, \end{aligned} \quad (15.54)$$

and that for arbitrary numbers α and β , if $\Psi(x)$ is additionally an eigenfunction to γ_5 with the eigenvalues ± 1 , then $(\alpha + \beta \gamma_5)$ reduces to the number $(\alpha \pm \beta)$ and (15.54) reduces to the Bargmann-Wigner equations with vanishing mass (15.14). Now the ansatz for the solution, in contrast to (15.29), can only read

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{C} G^{\mu\nu}(x), \quad (15.55)$$

since $\gamma^5 \hat{\sigma}^{\mu\nu} \hat{C}$ is certainly symmetric, though not so, however, $\gamma^5 \gamma^\mu \hat{C}$. From both equations for Ψ it then follows that

⁴ This was shown by Max Riedel in his diploma thesis (Frankfurt University, 1979) as well as discussing other spin-1 theories and their relations to the Proca/Kemmer theory. Tragically, he died soon after its completion.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}i\hbar\gamma_\alpha(\alpha + \beta\gamma_5)\hat{\sigma}_{\mu\nu}\partial^\alpha G^{\mu\nu}(x)\hat{C} &= 0 \\ \frac{1}{2}i\hbar\hat{\sigma}_{\mu\nu}(\alpha + \beta\gamma_5)\gamma_\alpha\partial^\alpha G^{\mu\nu}(x)\hat{C} &= 0\end{aligned}\quad (15.56)$$

Because of

$$\gamma_5\hat{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}i\varepsilon^{\mu\nu\sigma\varrho}\hat{\sigma}_{\sigma\varrho} \quad (15.57)$$

(see Exercise 15.20) and (15.40), this can be written as

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}i\hbar\gamma_\delta\hat{\sigma}^{\mu\nu}\left(\alpha\partial^\delta G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\beta\partial^\delta\varepsilon^{\sigma\varrho}{}_{\mu\nu}G_{\sigma\varrho}\right)\hat{C} \\ = \frac{1}{2}i\hbar\gamma_\delta\hat{\sigma}^{\mu\nu}\left(\alpha\partial^\delta G_{\mu\nu} + i\beta\partial^\delta\tilde{G}_{\mu\nu}\right)\hat{C} = 0\end{aligned}\quad (15.58a)$$

Analogously the transposed equation reads

$$\frac{1}{2}i\hbar\hat{\sigma}^{\mu\nu}\gamma_\delta\left(\alpha\partial^\delta G_{\mu\nu} + i\beta\partial^\delta\tilde{G}_{\mu\nu}\right)\hat{C} = 0 \quad (15.58b)$$

and the difference reduces to

$$-2\hbar\left(\alpha\partial_\mu G^{\mu\nu} + i\beta\partial_\mu\tilde{G}^{\mu\nu}\right)\gamma_\nu\hat{C} = 0 \quad (15.59)$$

The coefficients of the linearly independent matrices $\gamma^\mu\hat{C}$ must all vanish, in this case, additionally, for arbitrary numbers α, β . If we set $\alpha = 1, \beta = 0$ or $\alpha = 0, \beta = 1$, eight Maxwell equations result:

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad (15.60a)$$

$$\partial_\mu\tilde{G}^{\mu\nu} = 0. \quad (15.60b)$$

The homogeneous Maxwell equation (15.60b), which according to (15.39) reads

$$\partial^\varrho G^{\mu\nu} + \partial^\mu G^{\nu\varrho} + \partial^\nu G^{\varrho\mu} = 0 \quad (15.61)$$

can be fulfilled identically with the ansatz

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu\varphi^\nu - \partial^\nu\varphi^\mu \quad ; \quad (15.62)$$

however, we find no way to fulfill the auxiliary condition (15.37b) as we did for the Proca field. The field φ^μ has been introduced here just as a supplementary quantity and has no physical meaning, this supplementary character being emphasized by the fact that its choice is not unique. The so called re-gauging

$$\varphi_\mu(x) \rightarrow \varphi'_\mu(x) = \varphi_\mu(x) - \partial_\mu\Lambda(x) \quad (15.63)$$

with an arbitrary scalar field $\Lambda(x)$ leaves the physical field $G^{\mu\nu}$ unchanged, as long as the very general condition

$$(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\Lambda(x) = 0$$

holds. The variety of fields $\varphi^\mu(x)$ can be reduced if we define additional conditions like (15.37b), which select a specific gauge. Equation (15.37b), which plays an important role in electrodynamics, is called the Lorentz-gauge. But using this gauge, the field $\varphi^\mu(x)$ is still not uniquely characterized, because we can define a new field φ'^μ such that

$$\partial_\mu \varphi^\mu = \partial_\mu \varphi'^\mu = 0 \quad (15.64)$$

for the case $\square \hat{\Lambda} = 0$! A different choice of gauge would be to demand $\varphi^0 = 0$ in addition to (15.37b) (radiation gauge), but obviously this gauge does not lead to a unique choice of the vector field φ^μ , either.

In the following exercise and examples we will further deepen our understanding concerning the various ideas presented here.

15.7 Commutation Relations of Kemmer Matrices

Problem. Verify the commutation relation (15.47) for the Kemmer matrices (15.45).

Solution

We present the solution for three examples:

- a) All indices are equal ($\mu = \nu = \lambda = 0$).
- b) Two indices are equal ($\mu = \nu = 1, \lambda = 2$). c) All indices are different ($\mu = 0, \nu = 2, \lambda = 3$).
- a) ($\mu = \nu = \lambda = 0$): First we calculate

$$\begin{aligned} \beta^0 \beta^0 &= (\beta^0)^2 \\ &= \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & -11 & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ -11 & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & -1 & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ -11 & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & 11 & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

and then

$$\begin{aligned} \beta^0 (\beta^0)^2 &= \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & -11 & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ -11 & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & 11 & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & -11 & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & \bar{0} & \bar{0}^\dagger \\ -11 & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} = \beta^0. \end{aligned} \quad (2)$$

Thus we get

$$\beta^0 \beta^0 \beta^0 + \beta^0 \beta^0 \beta^0 = \beta^0 + \beta^0 = g^{00} \beta^0 + g^{00} \beta^0.$$

b) ($\mu = \nu = 1, \lambda = 2$): Once again we begin with the product

$$\begin{aligned} \beta^2 \beta^1 &= \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & K^{2\dagger} \\ \emptyset & \emptyset & -iS^2 & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & iS^2 & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ K^2 & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & K^{1\dagger} \\ \emptyset & \emptyset & -iS^1 & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & iS^1 & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ K^1 & \bar{0} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K^{2\dagger} \otimes K^1 & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & -iS^2 iS^1 & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & -iS^2 iS^1 & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & K^2 K^{1\dagger} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Here products of the matrices S^i from (15.4.6) occur, especially

$$\begin{aligned} iS^2 iS^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv M^{(12)} \equiv K^{1\dagger} \otimes K^2, \end{aligned} \quad (5)$$

where " $\otimes$ " denotes the tensor product of the vectors $K^{1\dagger}$ and K^2 . With the thus defined 3×3 matrices $M^{(ij)}$, we now have

$$\begin{aligned} \beta^1 (\beta^2 \beta^1) &= \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & K^{1\dagger} \\ \emptyset & \emptyset & -iS^1 & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & iS^1 & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ K^1 & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} M^{(21)} & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & -M^{(12)} & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & -M^{(12)} & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & 0 & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & iS^1 M^{(12)} & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & -iS^1 M^{(12)} & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ K^1 M^{(21)} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

and hence

$$K^1 M^{(21)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \bar{0}$$

and

$$iS^1 M^{(12)} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \emptyset$$

The rhs of (6) contains the 10×10 zero matrix $O_{10 \times 10}$; hence the final results reads $\beta^1 \beta^2 \beta^1 + \beta^1 \beta^2 \beta^1 = O_{10 \times 10} = g^{12} \beta^1 + g^{12} \beta^1$.

c) $\mu = 0, \nu = 2, \lambda = 3$: Evaluating the product of the β matrices

$$\beta^3 \beta^2 = \begin{pmatrix} K^{3\dagger} \otimes K^2 & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & -iS^3 iS^2 & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & -iS^3 iS^2 & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix}$$

the products of the 3×3 matrices

$$\begin{aligned} iS^3 iS^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv M^{(23)} \equiv K^{2\dagger} \otimes K^3 \end{aligned} \tag{11}$$

occur. Because

$$\begin{aligned} iS^2 iS^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv M^{(32)} \equiv K^{3\dagger} \otimes K^2 = M^{(23)\dagger} \end{aligned} \tag{12}$$

holds, we obtain

$$\begin{aligned}
& \beta^0 \beta^3 \beta^2 + \beta^2 \beta^3 \beta^0 \\
&= \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & -11 & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ -11 & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} M^{(32)} & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & -M^{(23)} & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & -M^{(23)} & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} M^{(23)} & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & -M^{(32)} & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & -M^{(32)} & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & -11 & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ -11 & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & M^{(23)} & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ -M^{(32)} & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & -M^{(23)} & \bar{0}^\dagger \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ M^{(32)} & \emptyset & \emptyset & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \\
&= O_{10 \times 10} = g^{03} \beta^2 + g^{20} \beta^3.
\end{aligned}$$

15.8 Properties of the Kemmer Equation under Lorentz Transformations

Problem. Discuss the properties of the Kemmer equation under Lorentz transformations.

Solution

From our discussion in Chap. 3, we know that there has to be an explicit prescription which allows for an observer A to recalculate a wave function $\chi(x)$ of the Kemmer field into a wave function $\chi'(x')$ which is the wave function observed by B , who is at rest in another inertial frame. Following the relativity principle, $\chi'(x')$ is the solution of an equation, which is of the form

$$(\mathrm{i}\hbar\beta'_\mu\partial'^\mu - m_0c)\chi'(x') = 0$$

in the system of observer B , if $\chi(x)$ is a solution of the Kemmer equation (15.44). Because the Kemmer matrices β'_μ must also obey the commutation relations (15.47), from which they are defined up to a unitary transformation, we can write without loss of generality:

$$\beta'_\mu = \beta_\mu.$$

Covariance of the Kemmer equation means that simultaneously (1) and (15.44) hold, where primed quantities refer to the inertial system of observer B , which is connected to the inertial

system of A via the Lorentz transformation

$$x'_\mu = a_\mu{}^\nu x_\nu, \partial'_\mu = a_\mu{}^\nu \partial'_\nu,$$

[see (3.1), (3.3)] where $a^{\mu\nu}$ is an orthogonal matrix [see (3.4)]. As an ansatz for connecting χ with χ' we write

$$\chi'(x') = \hat{S}(\hat{a})\chi(x),$$

and vice versa [see (3.27-28)]:

$$\chi(x) = \hat{S}^{-1}(\hat{a})\chi'(x').$$

Inserting (5) into (15.44) and after multiplication with $\hat{S}(\hat{a})$ one gets

$$\left(i\hbar \hat{S}(\hat{a})\beta_\mu \hat{S}^{-1}(\hat{a})\partial^\mu - m_0 c \right) \chi'(x') = 0,$$

and then, because of (3), for the primed system B it holds that

$$\left(i\hbar \hat{S}(\hat{a})\beta_\mu \hat{S}^{-1}(\hat{a})a^\mu{}_\nu \partial'^\nu - m_0 c \right) \chi'(x') = 0.$$

In order that (7) is identical with (1),

$$\hat{S}^{-1}(\hat{a})\beta_\mu \hat{S}(\hat{a}) = a_\mu{}^\nu \beta_\nu$$

must hold, and from this equation $\hat{S}(\hat{a})$ can be determined. To reach that goal we start, similarly to the procedure described for the Dirac field in (3.36-3.68), with the infinitesimal proper Lorentz transformation

$$a_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \Delta\omega_{\mu\nu}$$

where

$$\Delta\omega_{\mu\nu} \ll 1.$$

Because of the orthogonality (3.36a) of the Lorentz transformation,

$$\Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu} + O(\Delta\omega_{\mu\nu}^2)$$

holds. Expanding $\hat{S}(\hat{a})$ up to first order in $\Delta\omega_{\mu\nu}$ gives

$$\hat{S}(\hat{a}) = 1 - \frac{i}{4} \Delta\omega_{\mu\nu} \hat{I}^{\mu\nu}$$

or

$$\hat{S}^{-1}(\hat{a}) = \hat{S}(\hat{a}^{-1}) = 1 + \frac{i}{4} \Delta\omega_{\mu\nu} \hat{I}^{\mu\nu}$$

with the unknown 10×10 matrices $\hat{I}_{\mu\nu}$ (11 is the 10×10 unit matrix). As in the case of the Dirac field a formally similar calculation yields

$$\left[\beta^\lambda, \hat{I}^{\mu\nu} \right]_- = -2i (g^{\lambda\mu} \gamma^\nu - g^{\lambda\nu} \gamma^\mu).$$

An additional determining equation for the generators $\hat{I}_{\mu\nu}$ follows from the relation

$$\hat{S}(\hat{a})\hat{S}(\hat{a}')\hat{S}^{-1}(\hat{a}) = \hat{S}(\hat{a}\hat{a}'\hat{a}^{-1}),$$

which states that $\hat{S}(\hat{a})$ is a representation of the Lorentz group on the vector space spanned by the Kemmer algebra. For infinitesimal Lorentz transformations it follows that

$$\begin{aligned} \left[\hat{I}^{\mu\nu}, \hat{I}^{\alpha\beta} \right]_- = & 2i \left(g^{\nu\alpha} \hat{I}^{\mu\beta} - g^{\nu\beta} \hat{I}^{\mu\alpha} \right. \\ & \left. + g^{\mu\beta} \hat{I}^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha} \hat{I}^{\nu\beta} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

The relations (12) and (14) are fulfilled by the antisymmetric matrices

$$\hat{I}^{\mu\nu} = 2i (\beta^\mu \beta^\nu - \beta^\nu \beta^\mu),$$

which can be easily verified by use of the commutation relations (15.47). This result occurs in direct analogy to the matrix $\sigma^{\mu\nu}$ in the Dirac theory [see (3.42)]. The factor "2" in (15) gives raise to the fact that the Kemmer field transforms to itself under a spatial rotation of 2π , and not 4π , as is the case for the Dirac field (c.f. Chap. 3). The problem being solved for infinitesimal proper Lorentz transformations, we now look for the finite transformations which can be constructed by repeated application of the infinitesimal Lorentz transformations. With $\Delta\omega^{\mu\nu} = \omega^{\mu\nu}/N$ it follows that

$$\begin{aligned}\chi'(x') &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(11 - \frac{i}{4} \frac{\omega^{\mu\nu}}{N} \hat{I}_{\mu\nu} \right)^N \chi(x) \\ &= \exp \left(-\frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \hat{I}_{\mu\nu} \right) \chi(x) = \hat{S}(\hat{a}) \chi(x)\end{aligned}\quad (16)$$

With this the transformation properties of the Kemmer field $\chi(x)$ under proper Lorentz transformations $a^{\mu\nu}$ are known. Now we concentrate upon the improper Lorentz transformations $\tilde{a}^{\mu\nu}$, which can always be written as the product

$$\tilde{a}^{\mu\nu} = b^\mu{}_\alpha a^{\alpha\nu},$$

where the matrix $b^{\mu\nu}$ describes either space or time inversion, or both, i.e.

$$\hat{b} = \hat{p}, \hat{t}, \hat{p}\hat{t}.$$

In this connection

$$p^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu}$$

[cf. (4.2)] and

$$t^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -g^{\mu\nu}.$$

Since the spinors $\chi(x)$ lie within the representation space of the Lorentz group, then

$$\hat{S}(\hat{\tilde{a}}) = \hat{S}(\hat{b}\hat{a}) = \hat{S}(\hat{b})\hat{S}(\hat{a})$$

must hold again, i.e. it is sufficient for us to find $\hat{S}(\hat{p})$ and $\hat{S}(\hat{t})$. All other transformations are then calculable as products. Since $\hat{p}$ and $\hat{t}$ are discrete transformations, they cannot be obtained from infinitesimal transformations and we must directly start with (8):

$$\hat{S}^{-1}(\hat{p})\beta_\mu\hat{S}(\hat{p}) = p_\mu{}^\nu\beta_\nu = \sum_\nu g^{\mu\nu}\beta_\nu.$$

By means of the Kemmer algebra (15.47) and η defined in (15.53a), one verifies that

$$\eta\beta^\mu\eta = \sum_\nu g^{\mu\nu}\beta_\nu$$

is true and with that we obtain the parity operator of the Kemmer theory:

$$\hat{P} \equiv \hat{S}(\hat{p}) = \eta e^{i\varphi},$$

with arbitrary $\varphi \in \mathbb{R}$.

In the case of time-inversion (cf. Chap. 12) we must start with the Kemmer equation with minimal coupling, thus with

$$[i\hbar\beta^\mu(\partial_\mu + i\frac{e}{c}A_\mu) - m_0c]\chi(x) = 0.$$

We designate the time-inverted wave function $\chi_T(x')$ and require it to obey (25) in the transformed coordinate system; thus

$$[i\hbar\beta^\mu(\partial'_\mu + i\frac{e}{c}A'_\mu) - m_0c]\chi_T(x') = 0.$$

In this connection, because of (20) and (12.41a) and (12.52, 53),

$$\partial'_\mu = t_\mu{}^\nu\partial_\nu,$$

$$A'_\mu = -t_\mu{}^\nu A_\nu$$

The additional sign in (28) can be cancelled by complex conjugation. Thus (25) implies that

$$[-i\hbar(\partial'_\mu + i\frac{e}{c}A'_\mu)t^{\mu\nu}\beta_\nu^* - m_0c]\chi^*(x) = 0.$$

If we define the matrix $\hat{T}$ by

$$\chi_T(x') = \hat{T}\chi^*(x),$$

this implies that

$$[-i\hbar(\partial'_\mu + i\frac{e}{c}A'_\mu)t^{\mu\nu}\hat{T}\beta_\nu^*\hat{T}^{-1} - m_0c]\chi_T(x') = 0,$$

which coincides with (26) if

$$\hat{T}\beta_\nu^*\hat{T}^{-1} = -t_\nu^\mu\beta_\mu$$

is true [in complete analogy to (12.56)] for the Dirac matrices. Now in the representation

$$(15.47) \quad \beta_\mu^* = -t_\mu^\nu\beta_\nu,$$

holds, which can easily be checked, i.e. we can choose

$$\hat{T} = 11e^{i\varphi'}$$

with arbitrary $\varphi' \in \mathbb{R}$. The time-reversed wave function of the Kemmer theory is thus (up to an arbitrary phase) given by

$$\chi_T(x') = \chi^*(x).$$

EXERCISE

15.9 Verification of the Kemmer Algebra

Problem. Show that the Kemmer algebra (15.47) can be realized by the (16×16) matrices $(\beta^\mu)_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta}^\mu\delta_{\gamma\delta} + \gamma_{\gamma\delta}^\mu\delta_{\alpha\beta})$.

Solution

Instead of (1) one often writes in an offhand manner

$$\beta_\mu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu + \gamma'_\mu),$$

where besides

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} = \{\gamma'_\mu, \gamma'_\nu\},$$

also

$$[\gamma_\mu, \gamma'_\nu]_- = 0$$

must be required, too. [Strictly speaking $\gamma_\mu = \gamma_\mu \otimes 11$ and $\gamma'_\mu = \gamma_\mu \otimes \mathbb{1}$, where 11 is the unit matrix of the Clifford algebra (3) in four dimensions.] Now, because of (2), we have

$$\begin{aligned} \beta_\lambda\beta_\mu\beta_\nu &= \frac{1}{8}(\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\lambda\gamma'_\mu\gamma'_\nu + \gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma'_\nu + \gamma_\lambda\gamma'_\mu\gamma_\nu \\ &\quad + \gamma'_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma'_\lambda\gamma'_\mu\gamma'_\nu + \gamma'_\lambda\gamma_\mu\gamma'_\nu + \gamma'_\lambda\gamma'_\mu\gamma_\nu) \end{aligned} \quad (4)$$

Adding $\beta_\nu\beta_\mu\beta_\lambda$ to this product results in

$$\begin{aligned} &\beta_\lambda\beta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\beta_\mu\beta_\lambda \\ &= \frac{1}{8}(\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\lambda + \gamma'_\lambda\gamma'_\mu\gamma'_\nu + \gamma'_\nu\gamma'_\mu\gamma'_\lambda \\ &\quad + \gamma_\lambda\{\gamma'_\mu, \gamma'_\nu\} + \gamma'_\lambda\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} + \gamma'_\nu\{\gamma_\lambda, \gamma_\mu\} \\ &\quad + \gamma_\nu\{\gamma'_\lambda, \gamma'_\mu\} + \gamma'_\mu\{\gamma_\lambda, \gamma_\nu\} + \gamma_\mu\{\gamma'_\lambda, \gamma'_\nu\}), \end{aligned} \quad (5)$$

and since

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu &= \{\gamma_\lambda, \gamma_\mu\}\gamma_\nu - \gamma_\mu\{\gamma_\lambda, \gamma_\nu\} \\ &\quad + \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}\gamma_\lambda - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\lambda \end{aligned} \quad (6)$$

is valid, as well as the corresponding terms for the product $\gamma'_\lambda\gamma'_\mu\gamma'_\nu$, too, we obtain [because of (3)]

$$\begin{aligned}
& \beta_\lambda \beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu \beta_\lambda \\
&= \frac{1}{8} (g_{\lambda\mu} \gamma_\nu + 4g_{\mu\nu} \gamma_\lambda + 4g_{\lambda\nu} \gamma'_\mu + 4g_{\mu\nu} \gamma'_\lambda) \\
&= g_{\lambda\mu} \beta_\nu + g_{\mu\nu} \beta_\lambda
\end{aligned} \tag{7}$$

and thus (15.47).

13.2.5 Wave Equations for Particles with Arbitrary Spins 3

15.10 Verification of the Proca Equations from the Lagrange Density

Problem. Show that the Lagrange density $\mathcal{L}_{\text{Proca}}$ from (15.38) leads to the Proca equations (15.34) and (15.35) and their complex conjugates.

Solution

In this notation of the Lagrange density the fields $G^{\mu\nu}$, $G^{\mu\nu*}$, φ^μ and $\varphi^{\mu*}$ are conceived as independent. A variation with respect to $G_{\mu\nu}^*$ yields then because of the definition (15.34) of $G^{\mu\nu}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_{\mu\nu}^*} = \frac{1}{2} G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\mu = 0.$$

Variation with respect to φ_μ^* results in

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu^*} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_\mu^*)} \\
&= \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi^\mu + \frac{1}{2} \partial_\nu (G^{\mu\nu} - G^{\nu\mu}) = 0,
\end{aligned}$$

i.e. the equation of motion (12.35). The complex-conjugate equations are obtained analogously by variation with respect to $G_{\mu\nu}$ and φ_μ .

15.11 Conserved Current of Vector Fields

Problem. Determine the conserved current for the vector fields.

Solutions. The Proca equation (15.35) holds for the field $G_{\mu\nu}$, the corresponding complex conjugate equation

$\partial^\mu G_{\mu\nu}^* = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi_\nu^*$ holding for the field $G_{\mu\nu}^*$. If we multiply (15.35) by φ_ν^* and (1) by φ_ν , then the result is

$$\varphi_\nu^* \partial_\mu G^{\mu\nu} = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi_\mu^* \varphi^\nu,$$

$$\varphi_\nu \partial^\mu G_{\mu\nu}^* = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi^\nu \varphi_\nu^*.$$

Subtracting (2a) from (2b), we obviously get

$$-\varphi_\nu^* \partial_\mu G^{\mu\nu} + \varphi^\nu \partial^\mu G_{\mu\nu}^* = 0$$

This can be written in the form

$$\partial_\mu J^\mu = 0,$$

where the conserved current is given by

$$J_\mu = \varphi^\nu G_{\mu\nu}^* - G_{\mu\nu}^* \varphi^\nu.$$

The reason is that the terms in braces in

$$\begin{aligned}
\partial^\mu J_\mu &= \varphi^\nu \partial^\mu G_{\mu\nu}^* - (\partial^\mu G_{\mu\nu}^*) \varphi^\nu \\
&\quad + \{ (\partial^\mu \varphi^\nu) G_{\mu\nu}^* - G_{\mu\nu}^* \partial^\mu \varphi^{\nu*} \}
\end{aligned} \tag{5}$$

equal zero because of the antisymmetry of $G_{\mu\nu}$ and $G_{\mu\nu}^*$, which follows from the definition (15.34), i.e.

$$\begin{aligned} & \partial^\mu \varphi^\nu G_{\mu\nu}^* - G_{\mu\nu} \partial^\mu \varphi^{\nu*} \\ &= \frac{1}{2} [(\partial^\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \varphi^\mu) G_{\mu\nu}^* - G_{\mu\nu} (\partial^\mu \varphi^{\nu*} - \partial^\nu \varphi^{\mu*})] \\ &= \frac{1}{2} [G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^* - G_{\mu\nu} G^{\mu\nu*}] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

EXERCISE

15.12 Lorentz Covariance of Vector Field Theory

Problem. Investigate the Lorentz covariance of the vector field theory.

Solution

In order for the Proca equations to transform covariantly under Lorentz transformations, the field φ_μ must transform like a vector, i.e. under the infinitesimal Lorentz transformation [cf. (3.1) and (3.35)]

$$x'_\mu = a_\mu{}^\nu x_\nu = x_\mu + \Delta\omega_\mu{}^\nu x_\nu,$$

it follows that

$$A'_\mu(x') = A_\mu(x) + \Delta\omega_\mu{}^\nu A_\nu(x)$$

must hold, too. On the other hand the Lorentz transformation of a field can generally be written [in analogy to (3.27) of (3.39)] in the infinitesimal case as

$$A'_\mu(x') = \left[g_\mu{}^\nu + \frac{1}{2} (\hat{I}_\mu{}^\nu)^{\alpha\beta} \Delta\omega_{\alpha\beta} \right] A_\nu(x).$$

Each of the matrices $\hat{I}_{\mu\nu}$ must be antisymmetric, because the $\Delta\omega^{\mu\nu}$ are antisymmetric, too [cf. (3.36)]. The comparison of (2) and (3) yields at once that

$$(\hat{I}^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = +(g^\mu{}_\alpha g^\nu{}_\beta - g^\mu{}_\beta g^\nu{}_\alpha).$$

For pure rotations, for instance, one obtains

$$\begin{aligned} (\hat{I}^{12})_{kl} &= +(g^1{}_k g^2{}_l - g^1{}_l g^2{}_k) = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (\hat{I}^{23})_{kl} &= -(g^2{}_k g^3{}_l - g^2{}_l g^3{}_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (\hat{I}^{31})_{kl} &= -(g^3{}_k g^1{}_l - g^3{}_l g^1{}_k) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

The indices k and l here take only the values 1, 2, 3, and these matrices can be conceived as the spin-1 analogues of the Pauli matrices [see (1.65)].

15.13 Maxwell-Similar Form of the Vector Fields

The additional condition (15.37) of the Proca theory implies that the four-components of φ^μ are not independent dynamic variables. To isolate the independent quantities, we introduce the three-dimensional fields:

$$\begin{aligned} B^i &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}G_{jk} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \\ E^i &= -G^{0i} = G^{i0} \end{aligned}$$

so that we can write

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} = -G^{\nu\mu}.$$

In this notation the Proca equations (15.34) read:

$$\begin{aligned} B^i &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}G_{jk} \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(\partial_j\varphi_k - \partial_k\varphi_j) = (\nabla \times \varphi)^i \end{aligned} \quad (3a)$$

$$E^i = -G^{0i} = -\partial^0\varphi_i + \partial^i\varphi^0 = -\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \nabla\varphi^0\right)^i. \quad (3b)$$

Using the inversion of (1a),

$$\begin{aligned} -\varepsilon^{jkl}B_l &= \frac{1}{2}\varepsilon^{jkl}\varepsilon_{lmn}G^{mn} = \frac{1}{2}(g_m^jg_n^k - g_m^kg_n^j)G^{mn} \\ &= \frac{1}{2}(G^{jk} - G^{kj}) = G^{jk} \end{aligned} \quad (4)$$

one gets the following relations:

$$\partial_i G^{ij} = \partial_i \varepsilon^{ijk} B_k = -\varepsilon^{jik} \partial_i B_k = (\nabla \times B)^j,$$

$$\partial_0 G^{0j} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E^j.$$

Therefore the spatial part of (15.35), with $\nu = j$, is given

$$\nabla \times B - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi.$$

The temporal part, however, ($\nu = 0$) reads as

$$\partial_i G^{i0} = \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi^0.$$

Equations (3b) and (6) are the true equations of motion, because they contain the time derivations $\partial_0\varphi$ and $\partial_0 E$, whereas (3a) and (7) can be seen as definitions of the fields B and φ_0 , respectively, expressed by the independent fields φ and $\mathbf{E}$. Substituting the dependent fields into the equations of motion by their definitions, one obtains from (3b) and (6) that

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varphi = -E + \frac{\hbar^2}{m_0^2 c^2} \nabla(\nabla \cdot E) \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E &= +\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi + \nabla \times (\nabla \times \varphi) \\ &= \left(-\nabla^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) \varphi + \nabla(\nabla \cdot \varphi). \end{aligned} \quad (8b)$$

In the last conversion we used the relation

$$\begin{aligned} &[\nabla \times (\nabla \times \varphi)]_i \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l \varphi_m = (\delta_{li} \delta_{mj} - \delta_{lj} \delta_{mi}) \partial_j \partial_l \varphi_m \\ &= \partial_i \partial_m \varphi_m - \partial_l \partial_l \varphi_i = [\nabla(\nabla \cdot \varphi) - \nabla^2 \varphi]_i \end{aligned} \quad (9)$$

15.14 Plane Waves for the Proca Equation

Problem. Find the solution of the Proca equation (15.36), with the additional conditions (15.35) and (15.37) of the form

$$\varphi_p^\mu(x) = N_p \varepsilon_p^\mu e^{-ip \cdot x/\hbar},$$

(i.e. plane waves) where N_p is a normalizing factor.

Solution

First of all, from (15.36) and (15.37) it follows that

$$(p^2 - m_0^2 c^2) \varepsilon_p^\mu = 0.$$

This means the functions ε_p^μ can only be different from zero if

$$p^0 = \pm \frac{1}{c} E_p,$$

$$E_p = +c \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2}.$$

Additionally, condition (15.35) implies that

$$p_\mu \varepsilon_p^\mu = 0.$$

Now for every three-vector $\mathbf{p}$ and each sign of p^0 , a set of three linearly independent four-vectors $\varepsilon_{p\lambda}^\mu (\lambda = 1, 2, 3)$ can be constructed which fulfil (4). Let $\varepsilon_\lambda (\lambda = 1, 2, 3)$ be an arbitrary "tripod" with

$$\varepsilon_\lambda \cdot \varepsilon_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'},$$

which, in the rest system, is obviously valid. Now we Lorentz transform to a system which moves with the velocity $-p/p^0 = -v/c$. Then the three-vectors ε_λ convert to the vectors $\varepsilon_{p\lambda}^\mu$ with the components

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p\lambda}^0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \varepsilon_\lambda = \frac{\mathbf{p} \cdot \varepsilon_\lambda}{m_0 c}, \\ \varepsilon_{p\lambda} &= \varepsilon_\lambda + \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1}{v^2/c^2} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \varepsilon_\lambda \right) \frac{\mathbf{v}}{c} \\ &= \varepsilon_\lambda + \frac{(\mathbf{p} \cdot \varepsilon_\lambda) \mathbf{p}}{m_0 c (p^0 + m_0 c)}. \end{aligned} \quad (6)$$

These of course obey the covariance condition

$p \cdot \varepsilon_{p\lambda} = p_\mu \varepsilon_{p\lambda}^\mu = 0$, because the latter does not depend on the reference system and in the rest system $\mathbf{p} = 0$ and $\varepsilon_{p=0,\lambda}^0 = 0$. Furthermore the following orthogonality is valid:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{p\lambda} \cdot \varepsilon_{p\lambda'} \\ &= \frac{(\mathbf{p} \cdot \varepsilon_\lambda) (\mathbf{p} \cdot \varepsilon_{\lambda'})}{m_0^2 c^2} \\ &\quad - \left[\varepsilon_\lambda + \frac{\mathbf{p} (\mathbf{p} \cdot \varepsilon_\lambda)}{m_0 c (p^0 + m_0 c)} \right] \left[\varepsilon_{\lambda'} + \frac{\mathbf{p} (\mathbf{p} \cdot \varepsilon_{\lambda'})}{m_0 c (p^0 + m_0 c)} \right] \\ &= \frac{(\mathbf{p} \cdot \varepsilon_\lambda) (\mathbf{p} \cdot \varepsilon_{\lambda'})}{m_0^2 c^2} \\ &\quad - \left[\varepsilon_\lambda \cdot \varepsilon_{\lambda'} + \frac{2 (\varepsilon_\lambda \cdot \mathbf{p}) (\varepsilon_{\lambda'} \cdot \mathbf{p})}{m_0 c (p^0 + m_0 c)} + \frac{\mathbf{p}^2 (\mathbf{p} \cdot \varepsilon_\lambda) (\mathbf{p} \cdot \varepsilon_{\lambda'})}{m_0^2 c^2 (p^0 + m_0 c)^2} \right] \\ &= -\varepsilon_\lambda \cdot \varepsilon_{\lambda'} \\ &\quad + \frac{(\mathbf{p} \cdot \varepsilon_\lambda) (\mathbf{p} \cdot \varepsilon_{\lambda'})}{m_0^2 c^2} \left[1 - \frac{2m_0 c}{p^0 + m_0 c} - \frac{p^0 - m_0 c}{p^0 + m_0 c} \right] \\ &= -\delta_{\lambda\lambda'}, \end{aligned} \quad (8)$$

because the bracket yields

$$\frac{p^0 + m_0 c - 2m_0 c - p^0 + m_0 c}{p^0 + m_0 c} = 0.$$

Equation (8) is evident in the rest system, and, due to the invariance of the four-scalar-product under Lorentz transformation, the explicit calculation of (8) was not actually necessary. Together with the time-like vector p^μ , the three space-like vectors $\varepsilon_{p\lambda}^\mu$ constitute an orthonormal quadrupod in Minkowski space.

15.15 Transformation from the Kemmer

to the Proca Representation Problem. Verify the reverse transformation (15.50) from the Kemmer to the Proca representation.

Solution

The matrices U^μ and $U^{\mu\nu}$ in our representation are given by 10×10 matrices:

$$U^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{0}^\dagger \\ 0 & 0 & 0 & \bar{0}^\dagger \\ 0 & 0 & 0 & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & -1 \end{pmatrix},$$

$$U^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{0}^\dagger \\ 0 & 0 & 0 & \bar{0}^\dagger \\ 0 & 0 & 0 & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & -iK^k & 0 \end{pmatrix},$$

$$U^{k0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{0}^\dagger \\ 0 & 0 & 0 & \bar{0}^\dagger \\ 0 & 0 & 0 & \bar{0}^\dagger \\ iK^k & \bar{0} & \frac{0}{0} & 0 \end{pmatrix},$$

$$U^{kl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{0}^\dagger \\ 0 & 0 & 0 & \bar{0}^\dagger \\ 0 & 0 & 0 & \bar{0}^\dagger \\ 0 & iK^k S^l & \bar{0} & 0 \end{pmatrix}.$$

Now, for example, we have

$$-\frac{i\hbar}{\sqrt{m_0 c}} E^\dagger U^0 \chi = +\frac{i\hbar}{\sqrt{m_0 c}} \chi_{10} = \varphi^0,$$

because the spinor $E^\dagger$ of (15.49) picks out exactly the lowest component of $U^0 \chi$ [using (15.42) and (15.43) in the process]. In the same way

$$-\frac{i\hbar}{\sqrt{m_0 c}} E^\dagger U^1 \chi = -\frac{\hbar}{\sqrt{m_0 c}} \chi_7 = \varphi^1.$$

etc. are valid. On the other hand, for example,

$$\sqrt{m_0 c} E^\dagger U^{10} \chi = i\sqrt{m_0 c} \chi_1 = G^{01}$$

or

$$\sqrt{m_0 c} E^\dagger U^{23} \chi = i\sqrt{m_0 c} (i\chi_4) = G^{23},$$

holds, because

$$K^2 S^3 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iK^1,$$

etc. Now it is clear that the transformation (15.50) does give exactly the components (15.43), so that, indeed, (15.50) is the reverse transformation.

13.2.6 Wave Equations for Particles with Arbitrary Spins 4

15.16 Lagrange Density for Kemmer Theory

Problem. Convince yourself of the correctness of the Lagrange density (15.52) of the Kemmer theory.

Solution

It has to be verified that the Euler-Lagrange equations

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\chi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\chi})} = 0$$

are equivalent to the Kemmer equations (15.44). Now with

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\chi}} = \frac{1}{2} i \hbar \beta_\mu \partial^\mu \chi - m_0 c \chi$$

and

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\chi})} = -\frac{1}{2} i \hbar \beta_\mu \chi,$$

it follows immediately from (1) that

$$(i \hbar \beta_\mu \partial^\mu - m_0 c) \chi = 0,$$

i.e. (15.44). Alternatively we may write:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \chi)} \\ &= -m_0 c \bar{\chi} - \frac{1}{2} i \hbar \bar{\chi} \beta_\mu \overleftarrow{\partial}^\mu - \partial_\mu \frac{1}{2} i \hbar \bar{\chi} \beta_\mu \\ &= -\bar{\chi} \left(m_0 c + \frac{i \hbar \beta_\mu}{\partial^\mu} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

the equation for the adjoint spinor $\bar{\chi}$.

15.17 The Weinberg-Shay-Good Equations

There is yet another six-dimensional spinor-representation of the Proca theory, first given by Weinberg in 1964 and later investigated further by Shay and Good⁵. To substantiate it one can proceed in a completely analogous way to that of the derivation of the Kemmer equation. In order to do this we define the six-dimensional "spinor"

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_6 \end{pmatrix},$$

which is connected to the Proca field by:

$$\chi_1 = \frac{1}{4m_0 c} (G^{23} - iG^{01}), \quad \chi_2 = -\frac{1}{4m_0 c} (G^{13} + iG^{02}),$$

$$\chi_3 = \frac{1}{4m_0 c} (G^{12} - iG^{03}),$$

$$\chi_4 = -\frac{1}{4m_0 c} (G^{23} + iG^{01}),$$

$$\chi_5 = \frac{1}{4m_0 c} (G^{13} - iG^{02}),$$

$$\chi_6 = -\frac{1}{4m_0 c} (G^{12} + iG^{03}).$$

With the notation (cf. Exercise 15.13) of the field strengths $E^i = G^{i0}$,

$$B_i = \varepsilon^{ijk} G^{jk}$$

equation (2) reads

⁵ D. Shay, R.H. Good: Phys. Rev. 179, 141 (1969) and S. Weinberg: Phys. Rev. 133, B1318 (1964).

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \frac{1}{4m_0c} (B^1 - iE^{01}), & \chi_4 &= -\frac{1}{4m_0c} (B^1 + iE^1), \\ \chi_2 &= \frac{1}{4m_0c} (B^2 - iE^2), & \chi_5 &= -\frac{1}{4m_0c} (B^2 + iE^2), \\ \chi_3 &= \frac{1}{4m_0c} (B^3 - iE^3), & \chi_6 &= -\frac{1}{4m_0c} (B^3 + iE^3)\end{aligned}$$

(cf. also Exercise 2.1, where the components χ_4, χ_5, χ_6 are unnecessary because the Maxwell field is real). The field equations are given by

$$\begin{aligned} & [\gamma^{\mu\nu} (i\hbar\partial_\mu) (i\hbar\partial_\nu) - (i\hbar\partial_\mu) (i\hbar\partial^\mu) + 2m_0^2c^2] \chi(x) \\ &= [i\hbar\partial_\mu (\gamma^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}) i\hbar\partial_\nu + 2m_0^2c^2] \chi = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

where the 6×6 matrices are given by

$$\begin{aligned}\gamma^{ij} &= \begin{pmatrix} \emptyset & \delta_{ij}1 + M^{(ij)} + M^{(ji)} \\ \delta_{ij}1 + M^{(ij)} + M^{(ji)} & \emptyset \end{pmatrix} \\ &= \gamma^{ji}, \\ \gamma^{0i} &= \gamma^{i0} = \begin{pmatrix} \emptyset & S^i \\ -S^i & \emptyset \end{pmatrix}, & \gamma^{00} &= -\begin{pmatrix} \emptyset & 11 \\ 11 & \emptyset \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

The definitions of the 3×3 matrices $S^i, M^{(ij)}, 0$ and 1 can be taken from Exercise 15.7 (commutation relation of the Kemmer matrices) and (15.46). That the Weinberg-Shay-Good equations are equivalent to the Proca equations cannot be shown as easily as in the case of the Kemmer equations, because first one has to give a suitable linear combination of the six Shay-Good equations, which then lead to the Proca form. This algebraic problem can be most easily presented by first finding the inverse transformation, which is then used to reconstruct the Proca field $G^{\mu\nu}$ from the spinor χ .

Here we proceed in close analogy to the Kemmer theory. In the same manner as in (15.48) and (15.49), the antisymmetric 6×6 matrix $U^{\mu\nu}$ is defined by

$$\begin{aligned} U^{ij} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ij}{}_k B^k, \\ U^{0j} &= \frac{1}{2} i A^j, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} A^i &= \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset \\ M^{(3i)} & M^{(3i)} \end{pmatrix}, \\ B^i &= \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset \\ M^{(3i)} & -M^{(3i)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

are 6×6 matrices, too. The six-component spinor E is defined as

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hence, analogously to (15.50), the following relation holds:

$$G^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2m_0c} E^\dagger U^{\mu\nu} \chi(x).$$

Applying this matrix from the left to the Weinberg-ShayGood equation (5) one has to take note of the fact that

$$\begin{aligned} U^{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\beta} U^{\mu\nu} - (g^{\alpha\mu} U^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu} U^{\beta\mu} + g^{\beta\mu} U^{\alpha\nu} \\ &\quad - g^{\beta\nu} U^{\alpha\mu}) \end{aligned} \quad (11)$$

holds. Consequently we find that

$$-E^\dagger U^{\mu\nu} [i\hbar\partial_\alpha (\gamma^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}) i\hbar\partial_\beta + 2m_0^2c^2] \chi = 0,$$

or

$$\frac{1}{2m_0c} E^\dagger [\mathrm{i}\hbar\partial_\alpha (g^{\alpha\mu}U^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}U^{\beta\mu} + g^{\beta\mu}U^{\alpha\nu} - g^{\beta\nu}U^{\alpha\mu}) \mathrm{i}\hbar\partial_\beta] \chi = 2m_0^2c^2 G^{\mu\nu}. \quad (13a)$$

The lhs of this equation reads as

$$\mathrm{i}\hbar\partial^\mu\mathrm{i}\hbar\partial_\beta G^{\beta\nu} - \mathrm{i}\hbar\partial^\nu\mathrm{i}\hbar\partial_\beta G^{\beta\mu} + \mathrm{i}\hbar\partial^\mu\mathrm{i}\hbar\partial_\beta G^{\beta\nu} - \mathrm{i}\hbar\partial^\nu\mathrm{i}\hbar\partial_\beta G^{\beta\mu} = 2m_0^2c^2 (\partial^\mu\varphi^\nu - \partial^\nu\varphi^\mu) \quad (13b)$$

defining the field φ^μ by

$$\varphi^\mu = -\frac{\hbar^2}{m_0^2c^2} \partial_\beta G^{\beta\mu}.$$

Equations (13) and (14) agree with both of the Proca equations (15.33) and (15.34). The Lagrangian of the Weinberg-Shay-Good theory is written as

$$\mathcal{L}_{\text{WSG}} = \hbar^2 (\partial_\nu \bar{\chi}) (\gamma^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}) \partial_\mu \chi + 2m_0c^2 \bar{\chi} \chi, \quad \text{where}$$

where

$$\bar{\chi} =: \bar{\chi}^\dagger \gamma^{00},$$

and this is examined in more detail in Exercise 15.18.

Besides the representation used here there is another interesting representation, in which the spinor χ has a simple form. Defining the unitary matrix

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 11 & -11 \end{pmatrix},$$

we get

$$\chi' = S\chi = \frac{\sqrt{2}}{4m_0c} \begin{pmatrix} \mathbf{iE} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

This spinor satisfies (5) if one inserts the transformed matrices

$$\gamma^{\mu\nu'} = S\gamma^{\mu\nu}S^\dagger.$$

In (10), naturally $U^{\mu\nu}$ and E have to be substituted by $U^{\mu\nu'}$ and E' :

$$U^{\mu\nu'} = SU^{\mu\nu}S^\dagger, E' = SE.$$

15.18 Lagrangian Density for the Weinberg-Shay-Good Theory

Problem. Prove that the Lagrangian of the Weinberg-Shay-Good theory [Exercise 15.17, (15)] yields the proper equation of motion.

Solution

With the help of the Euler-Lagrange equation we obtain

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\chi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\chi})} \\ &= 2m_0c^2 \chi - \hbar^2 \partial_\mu (\gamma^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}) \partial_\nu \chi \end{aligned} \quad (1)$$

[cf. Exercise 15.17, (5)]. The adjoint equation is obtained accordingly as

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \chi)} \\ &= 2m_0c^2 \bar{\chi} - \hbar^2 \partial_\mu \partial_\nu \bar{\chi} (\gamma^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (2)$$

15.19 Coupling of Charged Vector Mesons to the Electromagnetic Field

The complex spin-1 fields appearing in the Proca, Kemmer, Weinberg-Shay-Good equations describe charged vector mesons. To let the equations-of-motion remain invariant, if we apply a local gauge transformation to the fields, the derivation ∂_μ must be substituted by the "gauge invariant derivation"

$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{e}{c}A_\mu,$$

where e is the charge of the vector space [cf. (1.132-136)]. Therefore the field equations of the three different theories read:

$$D_\mu G^{\mu\nu} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi^\nu = 0, \quad (1a)$$

$$G^{\mu\nu} = D^\mu \varphi^\nu - D^\nu \varphi^\mu, \quad \text{Proca} \quad (1b)$$

$$(i\hbar D_\mu \beta^\mu - m_0 c) \chi(x) = 0, \quad \text{Kemmer}$$

$$\begin{aligned} & [\hbar^2 D_\mu (\gamma^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}) D_\nu - 2m_0^2 c^2] \chi(x) \\ & = 0. \quad \text{Weinberg-Shay-Good} \end{aligned} \quad (3)$$

Since observable massive charged mesons are not elementary particles, but composed of quarks - as are the nucleons -, we expect an anomalous coupling (in the case of the proton (cf. Exercise 9.11)). In the simplest cases it can appear in form of a dipole or quadrupole coupling like

$$\mathcal{L}_{\text{dipole}} \sim b^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_{\text{quadrupole}} \sim c^{\lambda\mu\nu} \partial_\lambda F_{\mu\nu}.$$

The tensors $b^{\mu\nu}$ and $c^{\lambda\mu\nu}$ are bilinear forms in the vector fields formed with matrices of the algebra of the corresponding theory.

In the case of free vector mesons we saw that the Kemmer, as well as the Weinberg-Shay-Good equations can be brought into Proca form. In doing this with minimal and anomalous couplings, the algebra becomes more involved. In these calculations one finds that the anomalous couplings in the Proca equations transform into the corresponding anomalous terms of the Kemmer equations and that the minimal coupling of the Proca theory is equivalent to that of the Kemmer theory. The Weinberg-ShayGood theory exhibits different behaviour: after transformation into the Proca form the minimal coupling in $\mathcal{L}_{\text{WSG}}$ creates an anomalous dipole moment. However, since the Proca theory cannot exclude an anomalous dipole moment, a measurable difference of the three theories cannot be found (at least in the first order of the coupling constant $\alpha = e^2/\hbar c^2$).

15.20 A Useful Relation

Problem. Prove the relation

$$\gamma_5 \hat{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} i \varepsilon^{\mu\nu\sigma\varrho} \hat{\sigma}_{\sigma\varrho}.$$

Solution

To prove this relation we take the standard representation, for which it holds [cf. (2.13) as well as (3.57)] that

$$\begin{aligned}
\gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \\
\hat{\sigma}^{0i} &= i \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ \hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}, \\
\hat{\sigma}^{ij} &= \varepsilon^{ij}{}_k \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^k & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^k \end{pmatrix}, \\
\hat{\Sigma}^i &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \hat{\sigma}_{jk}.
\end{aligned}$$

Hence we write

$$\begin{aligned}
\gamma_5 \hat{\sigma}^{0i} &= i \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^i \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \varepsilon^{ijk} \hat{\sigma}_{jk} = \frac{i}{2} \varepsilon^{0ijk} \hat{\sigma}_{jk} \\
&= \frac{i}{2} \varepsilon^{0i\mu\nu} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \\
\gamma_5 \hat{\sigma}^{ij} &= \varepsilon^{ijk} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_k \\ \hat{\sigma}_k & 0 \end{pmatrix} = -i \varepsilon^{ijk} \hat{\sigma}^{0k} = +i \varepsilon^{ijk0} \hat{\sigma}^{k0} \\
&= \frac{i}{2} \varepsilon^{ij\mu\nu} \hat{\sigma}_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Since the transition to other representations does not change anything, the relation is thus proven in general.

15.6 Spin- $\frac{3}{2}$ Fields

For simplicity we restrict ourselves to fields with finite mass. For $s = \frac{3}{2}$ the BargmannWigner multispinor has three indices, and it is totally symmetric with respect to these. The equations of motion (15.10) read as

$$(i\hbar\gamma \cdot \partial - m_0 c)_{\alpha\alpha'} \Psi_{\alpha'\beta\gamma}(x) = 0, \quad (15.65a)$$

$$(i\hbar\gamma \cdot \partial - m_0 c)_{\beta\beta'} \Psi_{\alpha\beta'\gamma}(x) = 0, \quad (15.65b)$$

$$(i\hbar\gamma \cdot \partial - m_0 c)_{\gamma\gamma'} \Psi_{\alpha\beta\gamma'}(x) = 0 \quad (15.65c)$$

We now try to expand the field in totally symmetric matrices similar to (15.29). Because of the total symmetry in the first two indices we make the ansatz [cf. (15.29)]

$$\Psi_{\alpha\beta\gamma}(x) = \frac{m_0 c}{\hbar} \left(\gamma_\mu \hat{C} \right)_{\alpha\beta} \psi_\gamma^\mu(x) + \frac{1}{2} \left(\hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{C} \right)_{\alpha\beta} \psi_\gamma^{\mu\nu}(x) \quad (15.66)$$

Here $\psi_\gamma^\mu(x)$ is a "vector spinor" ($\mu = 0, 1, 2, 3$ is a Lorentz index, whereas $\gamma = 1, 2, 3, 4$ is a spinor index), $\psi_\gamma^{\mu\nu}(x)$ transforms like the product of a covariant antisymmetric tensor and a spinor. Symmetries in the indices β and γ , and consequently also the symmetry with respect to α, β , and γ , is guaranteed if the coefficients (15.26) of the expansion of the matrix $(\Psi_\alpha)_{\beta\gamma}$ in the basis of a Clifford algebra also vanish, as was the case in the expansion of $(\Psi_\gamma)_{\alpha\beta}$. One gets these coefficients by contracting (15.66), with respect to the indices β and γ , with the matrices $\hat{C}_{\beta\gamma}^{-1}$, $\left(\hat{C}^{-1} i \gamma_5 \right)_{\beta\gamma}$ and $\left(\hat{C}^{-1} \gamma_5 \gamma^\mu \right)_{\beta\gamma}$, which yields, for example,

$$\begin{aligned}
\Psi_{\alpha\beta\gamma} \hat{C}_{\beta\gamma}^{-1} &= \frac{m_0 c}{\hbar} \left(\gamma_\mu \hat{C} \right)_{\alpha\beta} \hat{C}_{\beta\gamma}^{-1} \psi_\gamma^\mu(x) + \frac{1}{2} \left(\hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{C} \right)_{\alpha\beta} \hat{C}_{\beta\gamma}^{-1} \psi_\gamma^{\mu\nu}(x) \\
&= \frac{m_0 c}{\hbar} (\gamma_\mu)_{\alpha\gamma} \psi_\gamma^\mu(x) + \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_{\mu\nu})_{\alpha\gamma} \psi_\gamma^{\mu\nu}(x) = 0
\end{aligned}$$

In this way one gets the three constraint equations

$$\frac{m_0 c}{\hbar} \gamma_\mu \psi^\mu(x) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \psi^{\mu\nu}(x) = 0, \quad (15.67a)$$

$$\frac{m_0 c}{\hbar} \gamma_\mu \gamma_5 \psi^\mu(x) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \gamma_5 \psi^{\mu\nu}(x) = 0, \quad (15.67b)$$

$$\frac{m_0 c}{\hbar} \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \psi^\mu(x) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\lambda \psi^{\mu\nu}(x) = 0, \quad (15.67c)$$

where we have not written out the spinor indices explicitly any more. Multiplying (15.67b) by γ_5 and adding and subtracting (15.67a), respectively, leads to two equivalent conditions:

$$\gamma_\mu \psi^\mu(x) = 0 \quad (15.68a)$$

$$\hat{\sigma}_{\mu\nu} \psi^{\mu\nu}(x) = 0 \quad (15.68b)$$

Furthermore we multiply (15.67c) by γ_5 on the lhs and make use of the commutation relations (3.11) and the relation (15.32), which yields

$$\begin{aligned} & -\frac{m_0 c}{\hbar} (2g_{\mu\lambda} - \gamma_\lambda \gamma_\mu) \psi^\mu(x) + \frac{1}{2} \gamma_\lambda \hat{\sigma}_{\mu\nu} \psi^{\mu\nu}(x) \\ & - i (g_{\mu\lambda} \gamma_\nu - g_{\nu\lambda} \gamma_\mu) \psi^{\mu\nu}(x) = 0 \end{aligned} \quad (15.69)$$

Because of (15.68) and the antisymmetry of $\psi^{\mu\nu}(x)$, Eq. (15.69) reduces to

$$\frac{m_0 c}{\hbar} \psi_\lambda(x) - i \gamma^\mu \psi_{\mu\lambda}(x) = 0 \quad (15.70)$$

Since the condition (15.68b) follows from (15.70) and (15.68a), namely

$$\begin{aligned} \frac{m_0 c}{\hbar} \gamma_\lambda \psi^\lambda(x) - i \gamma_\lambda \gamma_\mu \psi^{\mu\lambda}(x) &= 0 - \frac{i}{2} (\gamma_\lambda \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\lambda) \psi^{\mu\lambda}(x) \\ &= \hat{\sigma}_{\mu\lambda} \psi^{\mu\lambda}(x) = 0 \end{aligned}$$

we are left with the two independent conditions:

$$\gamma_\mu \psi^\mu(x) = 0 \quad (15.71a)$$

$$\frac{m_0 c}{\hbar} \psi^\mu(x) = i \gamma_\lambda \psi^{\lambda\mu}(x) \quad (15.71b)$$

This corresponds to $4 + 16 = 20$ linear conditions between the $16 + 24 = 40$ components of ψ_α^μ and $\psi_\alpha^{\mu\nu}$, so that the number of independent conditions reduces to 20, which is the correct number of components of a totally symmetric tensor of the third rank in a fourdimensional vector space. From the Bargmann-Wigner equations (15.65a) and (15.65b) then follows:

$$\begin{aligned} & \frac{m_0 c}{\hbar} (i\hbar \gamma \cdot \partial - m_0 c)_{\alpha\alpha'} \left(\gamma_\mu \hat{C} \right)_{\alpha'\beta} \psi_\gamma^\mu(x) \\ & + \frac{1}{2} (i\hbar \gamma \cdot \partial - m_0 c)_{\alpha\alpha'} \left(\hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{C} \right)_{\alpha'\beta} \psi_\gamma^{\mu\nu}(x) = 0, \end{aligned} \quad (15.72a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{m_0 c}{\hbar} \gamma_\mu \hat{C}_{\alpha\beta'} (i\hbar \gamma \cdot \partial - m_0 c)_{\beta\beta'} \psi_\gamma^\mu(x) \\ & + \frac{1}{2} \left(\hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{C} \right)_{\alpha\beta'} (i\hbar \gamma \cdot \partial - m_0 c)_{\beta\beta'} \psi_\gamma^{\mu\nu}(x) = 0. \end{aligned} \quad (15.72b)$$

In (15.72b), again the products $\gamma_\mu \hat{C} \gamma_\nu^T$ and $\sigma_{\mu\nu} \hat{C} \gamma_\lambda^T$ appear, cf. Eq. (15.30). Using the properties of $\hat{C}$ we rewrite (15.72) in the form

$$\begin{aligned} & \frac{m_0 c}{\hbar} \left[(i\hbar \gamma_\nu \partial^\nu - m_0 c) \gamma_\mu \hat{C} \right]_{\alpha\beta} \psi_\gamma^\mu(x) \\ & + \frac{1}{2} \left[(i\hbar \gamma_\lambda \partial^\lambda - m_0 c) \hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{C} \right]_{\alpha\beta} \psi^{\mu\nu}_\gamma(x) = 0, \end{aligned} \quad (15.73a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{m_0 c}{\hbar} \left[\gamma_\mu (i\hbar \gamma_\nu \partial^\nu - m_0 c) \hat{C} \right]_{\alpha\beta} \psi_\gamma^\mu(x) \\ & + \frac{1}{2} \left[\hat{\sigma}_{\mu\nu} (i\hbar \gamma_\lambda \partial^\lambda + m_0 c) \hat{C} \right]_{\alpha\beta} \psi^{\mu\nu}_\gamma(x) = 0. \end{aligned} \quad (15.73b)$$

The difference of (15.73a) and (15.73b) yields

$$\begin{aligned} & 2m_0 c \left(\hat{\sigma}_{\nu\mu} \hat{C} \right)_{\alpha\beta} \partial^\nu \psi_\gamma^\mu(x) - \frac{2m_0^2 c^2}{\hbar} \left(\gamma_\mu \hat{C} \right)_{\alpha\beta} \psi_\gamma^\mu(x) \\ & - m_0 c \left(\hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{C} \right)_{\alpha\beta} \psi^{\mu\nu}_\gamma(x) + \frac{1}{2} i\hbar \left[[\gamma_\lambda, \hat{\sigma}_{\mu\nu}] \hat{C} \right]_{\alpha\beta} \partial^\lambda \psi^{\mu\nu}_\gamma(x) = 0. \end{aligned}$$

Because of (15.32), this corresponds to the equation

$$\begin{aligned} & \frac{m_0}{\hbar} \left(\hat{\sigma}_{\nu\mu} \hat{C} \right)_{\alpha\beta} \left[\partial^\nu \psi_\gamma^\mu(x) - \partial^\mu \psi_\gamma^\nu(x) + \psi_\gamma^{\mu\nu}(x) \right] \\ & - \left(\gamma_\mu \hat{C} \right)_{\alpha\beta} \left[\frac{2m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi_\gamma^\mu(x) + 2\partial_\mu \psi_\gamma^{\mu\nu}(x) \right] = 0 \end{aligned} \quad (15.74)$$

The coefficients of the linear basis matrices $\hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{C}$ and $\gamma_\mu \hat{C}$ must vanish. For $m_0 \neq 0$ this yields similar relations as were found in (15.34) and (15.35) for the Proca fields:

$$\psi^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu \psi^\nu(x) - \partial^\nu \psi^\mu(x) \quad (15.75a)$$

$$\partial_\mu \psi^{\mu\nu}(x) = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi^\mu(x) \quad (15.75b)$$

Because of the antisymmetry of $\psi^{\mu\nu}(x)$, then from (15.75b) it again follows that

$$\partial_\mu \psi^\mu_\gamma(x) = 0, \quad (15.76)$$

and therefore also that

$$\square \psi_\gamma^\mu(x) + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi_\gamma^\mu(x) = 0 \quad (15.77)$$

Thus each spinor component of $\psi^\mu(x)$ fulfils the Proca equation, and the tensor field $\psi^{\mu\nu}(x)$ is uniquely determined by ψ^μ . Correspondingly the third Bargmann-Wigner equation yields

$$\begin{aligned} & \frac{m_0 c}{\hbar} \left(\gamma_\mu \hat{C} \right)_{\alpha\beta} [(i\hbar \gamma \cdot \partial - m_0 c) \psi^\mu(x)]_\gamma \\ & + \frac{1}{2} \left(\hat{\sigma}_{\mu\nu} \hat{C} \right)_{\alpha\beta} [(i\hbar \gamma \cdot \partial - m_0 c) \psi^{\mu\nu}(x)]_\gamma = 0 \end{aligned} \quad (15.78)$$

However, this is automatically fulfilled since [because of (15.71a)], (15.71b) and (15.75a) combine to form

$$m_0 c \psi^\mu = \hbar i \gamma_\lambda \psi^{\lambda\mu} = \hbar i \gamma_\lambda (\partial^\lambda \psi^\mu - \partial^\mu \psi^\lambda) = i \hbar \gamma \cdot \partial \psi^\mu$$

which is just the Dirac equation for each Lorentz component of $\psi^\mu(x)$. Furthermore from (15.75) it also follows that

$$(i \hbar \gamma \cdot \partial - m_0 c) \psi^{\mu\nu}(x) = 0, \quad (15.79)$$

so that the validity of (15.78) has been proven. Thus the equations of motion for the spin- $\frac{3}{2}$ field reduce to the Dirac equation for the independent vector-spinor field

$$(i \hbar \gamma \cdot \partial - m_0 c) \psi^\mu(x) = 0 \quad (15.80a)$$

together with the 4 constraints

$$\gamma_\mu \psi^\mu(x) = 0 \quad (15.80b)$$

The "gauge" condition (15.76) can be derived by multiplying (15.80a) with γ_μ to give

$$\begin{aligned} 0 &= (i \hbar \gamma_\mu \gamma_\nu \partial^\nu - m_0 c \gamma_\mu) \psi^\mu(x) = 2i \hbar \left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_\nu \gamma_\mu \right) \partial^\nu \psi^\mu(x) \\ &= 2i \hbar \partial_\mu \psi^\mu(x) \end{aligned}$$

so that this is not an independent relation. The equations (15.80) are known as the Rarita-Schwinger equations⁶. They can also be combined into one single equation, namely

$$\left[(i \hbar \gamma \cdot \partial - m_0 c) g_{\mu\lambda} - \frac{1}{3} i \hbar (\gamma_\mu \partial_\lambda + \partial_\mu \gamma_\lambda) + \frac{1}{3} \gamma_\mu (i \hbar \gamma \cdot \partial + m_0 c) \gamma_\lambda \right] \psi^\lambda(x) = 0 \quad (15.81)$$

since multiplying this equation by γ^μ yields

$$\left(\frac{2}{3} i \hbar \partial_\lambda + \frac{1}{3} m_0 c \gamma_\lambda \right) \psi^\lambda(x) = 0 \quad (15.82a)$$

whereas the application of ∂^μ results in

$$\left[\gamma \cdot \partial \left(\frac{2}{3} i \hbar \partial_\lambda + \frac{1}{3} m_0 c \gamma_\lambda \right) - m_0 \partial_\lambda \right] \psi^\lambda(x) = 0 \quad (15.82b)$$

Inserting (15.82a) into (15.82b), then because of $m_0 \neq 0$, it follows that

$$\partial_\lambda \psi^\lambda(x) = 0$$

and thus (15.76), and (15.82a) are equivalent to (15.71a), i.e.

$$\gamma_\lambda \psi^\lambda(x) = 0$$

With these two conditions (15.81) immediately reduces to (15.80a). Combining the four four-spinors $\psi^\lambda(x)$ into a 16 component spinor

$$\chi = \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix}$$

⁶ W. Rarita, J. Schwinger: Phys. Rev. 60, 61 (1941).

one can write (15.81) as

$$(i\hbar\alpha_\nu\partial^\nu - \beta m_0 c)\chi(x) = 0, \quad (15.83)$$

where the 16×16 matrices and α_μ have a Lorentz index as well as a spinor index:

$$(\alpha_\nu)_{\mu\lambda} =: \gamma_\nu g_{\mu\lambda} - \frac{1}{3}\gamma_\mu (g_{\nu\lambda} - \gamma_\nu\gamma_\lambda) - \frac{1}{3}\gamma_\lambda g_{\mu\nu}, \quad (15.84a)$$

$$\beta_{\mu\lambda} =: g_{\mu\lambda} - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\lambda. \quad (15.84b)$$

Each element of these matrices with the indices μ, λ is a 4×4 matrix in the spinor indices. Now one has the equation

$$\beta_{\mu\lambda} (g_\nu^\lambda - \gamma^\lambda\gamma_\nu) = (g_\mu^\lambda - \gamma_\mu\gamma^\lambda) \beta_{\lambda\nu} = g_{\mu\nu} \quad (15.85)$$

from which it follows that the matrix β has an inverse,

$$(\beta^{-1})_{\mu\lambda} = g_{\mu\nu} - \gamma_\mu\gamma_\nu. \quad (15.86)$$

Using

$$\begin{aligned} (\Gamma_\nu)_{\mu\sigma} &= (\beta^{-1}\alpha_\nu)_{\mu\sigma} = (\beta^{-1})_{\mu\lambda} (\alpha_\nu)_{\sigma}^\lambda \\ &= (g_{\mu\lambda} - \gamma_\mu\gamma_\lambda) \left[\gamma_\nu g_\sigma^\lambda - \frac{1}{3}\gamma^\lambda (g_{\nu\sigma} - \gamma_\nu\gamma_\sigma) - \frac{1}{3}\gamma_\sigma g_\nu^\lambda \right] \\ &= \gamma_\nu g_{\mu\sigma} - \frac{1}{3}\gamma_\mu (g_{\nu\sigma} - \gamma_\nu\gamma_\sigma) - \frac{1}{3}\gamma_\sigma g_{\mu\nu} \\ &\quad - \gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu + \frac{4}{3}\gamma_\mu (g_{\nu\sigma} - \gamma_\nu\gamma_\sigma) + \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma \\ &= \gamma_\nu g_{\mu\sigma} + \gamma_\mu g_{\nu\sigma} - \gamma_\mu \{\gamma_\nu, \gamma_\sigma\} - \frac{1}{3}\gamma_\sigma g_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma \\ &= \gamma_\nu g_{\mu\sigma} - \gamma_\mu g_{\nu\sigma} - \frac{1}{3}\gamma_\sigma g_{\nu\mu} + \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma \end{aligned} \quad (15.87)$$

Eq. (15.83) takes the so-called Fierz-Pauli-Gupta form

$$(i\hbar\Gamma_\mu\partial^\mu - m_0 c)\chi(x). \quad (15.88)$$

Here the matrices α_μ obey the commutation relations

$$\sum_{(P)} (\Gamma_\mu\Gamma_\nu - g_{\mu\nu}) \Gamma_\lambda\Gamma_\varrho = 0 \quad (15.89)$$

where $\sum_{(P)}$ implies a sum over all possible permutations of μ, ν, λ and ϱ .

As supplementary literature to this chapter we recommend:

Y. Takahashi: Introduction to Field Quantization (Pergamon Press, Oxford 1969)

A.S. Wightman: Invariant Wave Equations; General Theory and Applications to the External Field Problem, Lecture Notes in Physics, Vol. 73 (Springer, Berlin, Heidelberg 1978)

D. Lurie: Particles and Fields (Interscience, New York 1968)

M. Riedel: Relativistische Wellengleichungen fr Spin-1-Teilchen, Diploma thesis, Institut fr Theoretische Physik der Johann Wolfgang Goethe-Universitt, Frankfurt am Main (1979)

G. Labonte: Nuovo Cimento 80, 77 (1984)

13.3 Klein's Paradox

13.3.1 Typical theory of Klein paradox

In the following we want to concern ourselves with the scattering of an electron with energy E and momentum $p = p_z$ at an infinitely extended potential step (Fig. 13.1). First we shall study this problem from the point of view of the one-particle interpretation of the Dirac equation and then, in Example 13.1, we shall look at the same problem using the framework of hole theory, understanding better the resulting situation, which looks paradoxical at first sight.¹

For the free electron we have $(E/c)^2 = p^2 + m_0^2 c^2$, whereas in the presence of the constant potential,

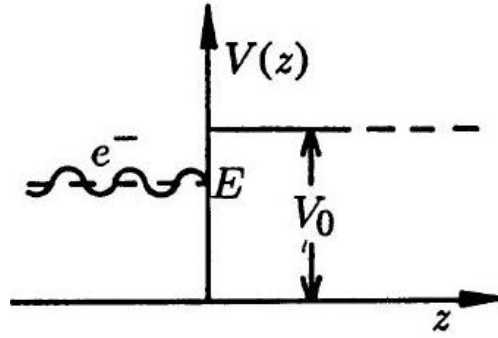


Fig. 13.1. An electron wave propagates along the z axis and hits a potential step of strength V_0

$$\left(\frac{E - V_0}{c}\right)^2 = \bar{p}^2 + m_0^2 c^2 \quad (13.1)$$

is valid, where $\bar{p}$ denotes the momentum of the electron inside the potential. The Dirac equation and its adjoint then read

$$\left\{ \frac{E - eV}{c} - \hat{\beta} m_0 c \right\} \psi + i\hbar \sum_{k=1}^3 \hat{\alpha}_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = 0, \quad (13.2a)$$

$$\bar{\psi} \left\{ \frac{E - eV}{c} - \hat{\beta} m_0 c \right\} + i\hbar \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_k} \hat{\alpha}_k = 0. \quad (13.2b)$$

We now assume that

$$\begin{aligned} eV &= V_0 & \text{for } z > 0 \\ eV &= 0 & \text{for } z < 0 \end{aligned}$$

and that the incoming wave is given by

$$\psi_i = u_i \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (pz - Et) \right\}, \quad (13.3)$$

so that, inserting (13.3) into (13.2a) and using $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_3$, it follows that

$$\left\{ \frac{E}{c} - \hat{\alpha} p - \hat{\beta} m_0 c \right\} u_i = 0. \quad (13.4)$$

Since we require $u_i \neq 0$, then because of $\hat{\alpha}\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha} = 0$ we conclude that

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2 \quad (13.5)$$

and, moreover, due to our interest in the incoming electrons we choose $E > 0$. The momentum of the reflected wave must be $-p$, whereas the momentum $\bar{p}$ of the transmitted wave is given by (13.1). For small V_0 , $\bar{p}$ is positive, so that in the first instance we can set

$$\psi_r = u_r \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (-pz - Et) \right\} \quad , \quad \psi_t = u_t \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\bar{p}z - Et) \right\} \quad (13.6)$$

and therefore, due to (13.2a)

$$\left\{ \frac{E}{c} + \hat{\alpha}p - \hat{\beta}m_0c \right\} u_r = 0 \text{ and } \left\{ \frac{E - V_0}{c} - \hat{\alpha}\bar{p} - \hat{\beta}m_0c \right\} u_t = 0. \quad (13.7)$$

The total wave function must be continuous at the boundary, i.e. for $z = 0$

$$u_i + u_r = u_t \quad (13.8)$$

must be valid. From (13.4) and (13.8) therefore follows

$$\left(\frac{E}{c} - \hat{\beta}m_0c \right) (u_t + u_r) = +\hat{\alpha}p (u_i - u_r), \quad (13.9)$$

and with (13.7) and (13.8) we get

$$\left(\frac{E}{c} - \hat{\beta}m_0c \right) (u_i + u_r) = \left(\frac{V_0}{c} + \hat{\alpha}\bar{p} \right) (u_i + u_r). \quad (13.10)$$

Thus we have

$$\left(\frac{V_0}{c} + \hat{\alpha}\bar{p} \right) (u_i + u_r) = +\hat{\alpha}p (u_i - u_r) \quad (13.11)$$

or

$$\left\{ \frac{V_0}{c} + \hat{\alpha}(p + \bar{p}) \right\} u_r = - \left\{ \frac{V_0}{c} - \hat{\alpha}(p - \bar{p}) \right\} u_i. \quad (13.12)$$

We multiply both sides by $V_0/c - \hat{\alpha}(p + \bar{p})$, which, because of $\hat{\alpha}^2 = 1$ and with (13.1) and (13.5) leads to

$$u_r = \frac{(2V_0/c)(-E/c + \hat{\alpha}p)}{V_0^2/c^2 - (p + \bar{p})^2} u_i \equiv r u_i \quad (13.13)$$

Analogously we find for the adjoint amplitude

$$u_r^\dagger = r u_i^\dagger, \quad (13.14)$$

i.e.

$$u_r^\dagger u_r = \left(\frac{2V_0/c}{V_0^2/c^2 - (p + \bar{p})^2} \right)^2 u_i^\dagger \left(-\frac{E}{c} + \hat{\alpha}p \right)^2 u_i \quad (13.15)$$

so that using the identity

¹ O. Klein: Z. Phys. 53, 157 (1929).

$$cu_i^\dagger \hat{\alpha} u_i = \frac{pc^2}{E} u_i^\dagger u_i \quad (13.16)$$

(which can be easily derived from the equations of motion for $u_i^\dagger$ and u_i) it follows from (13.15) that

$$\begin{aligned} u_r^\dagger u_r &= \left(\frac{2V_0/c}{V_0^2/c^2 - (p + \bar{p})^2} \right)^2 \left\{ \left(\frac{E^2}{c^2} + p^2 \right) u_i^\dagger u_i - \frac{2Ep}{c} u_i^\dagger \hat{\alpha} u_i \right\} \\ &= \left(\frac{2V_0 m_0}{V_0^2/c^2 - (p + \bar{p})^2} \right)^2 u_i^\dagger u_i \equiv R u_i^\dagger u_i \end{aligned} \quad (13.17)$$

Thus the quantity R is the fraction of electrons which are reflected: For $V_0 = 0, R = 0$, whereas for $V_0 = E - m_0 c^2$ [i.e. $\bar{p} = 0$, from (13.1)], $R = 1$, and all electrons are reflected. If V_0 increases still further ($V_0 > E - m_0 c^2$), then $\bar{p}$ becomes imaginary. Then we set

$$\psi_t = u_t \exp \left\{ -\mu z - i \frac{E}{\hbar} t \right\} \quad (13.18)$$

where μ is now a real quantity. μ must be greater than zero, since otherwise the density on the rhs of the barrier would be infinitely large for $z \rightarrow \infty$. On the other hand, because of (13.6), $\bar{p} = +i\hbar\mu$, i.e. for (13.13) we get

$$u_r = -\frac{(2V_0/c)(E/c - \hat{\alpha}p)}{V_0^2/c^2 - (p + i\hbar\mu)^2} u_i, \quad u_r^\dagger = -\frac{(2V_0/c)(E/c - \hat{\alpha}p)}{V_0^2/c^2 - (p - i\hbar\mu)^2} u_i^\dagger \quad (13.19)$$

and therefore

$$u_r^\dagger u_r = \frac{(2V_0/c)^2 (E^2/c^2 - p^2)}{[(V_0/c + p)^2 + \mu^2 \hbar^2] [(V_0/c - p)^2 + \mu^2 \hbar^2]} u_i^\dagger u_i \quad (13.20)$$

Using (13.1) and (13.5) we conclude that

$$\bar{p}^2 = p^2 - \frac{V_0(2E - V_0)}{c^2}, \quad (13.21)$$

i.e. since $\bar{p}^2 = -\mu^2 \hbar^2$,

$$\left(\frac{V_0}{c} \pm p \right)^2 + \mu^2 \hbar^2 = 2 \frac{V_0}{c} \left(\frac{E}{c} \pm p \right) \quad (13.22)$$

and therefore $u_r^\dagger u_r = u_i^\dagger u_i$.

This means that the reflected current is equal to the incoming one. Behind the boundary there is an exponentially decreasing solution for the wave. Due to (13.20) the condition for that case is $p^2 < V_0(2E - V_0)/c^2$, and for increasing V_0 this condition is fulfilled as soon as V_0 exceeds the value $E - c(E^2/c^2 - p^2)^{1/2} = E - m_0 c^2$. If V_0 increases further, then, due to (13.21), μ first increases, reaches its maximal value for $E = V_0$ and then again decreases, becoming zero for $V_0 = E + m_0 c^2$. For still greater values $V_0 > E + m_0 c^2$, $\bar{p}$ again assumes real values, so that (13.13) and (13.17) are again solutions of the problem. However, in this region the kinetic energy $E - V_0$ is negative, so that this is a classically forbidden situation. The group velocity, which due to (13.16) and (13.1) is given by

$$v_{gr} = \frac{c^2}{E - V_0} \bar{p} \quad (13.23)$$

therefore has the opposite direction as the momentum $\bar{p}$ in this region if we choose $\bar{p} > 0$. Since the group velocity is the velocity of the moving wave packet, it looks as if the transmitted wave packet came in from $z = +\infty$; on the other hand this contradicts the condition which only allows an incoming wave packet from $z = -\infty$. We thus have to choose $\bar{p} < 0$ [i.e. the negative sign of the root in (13.1)]. However, this condition is not included in the Dirac equation, but is forced upon us by the physical boundary conditions ². In the discussion given by Bjorken and Drell ³ this has not been taken into account, the reflection coefficient reading

$$R = \frac{(1 - r)^2}{(1 + r)^2}, \text{ with} \quad (13.24)$$

$$r = \frac{\bar{p}}{p} \frac{E + m_0 c^2}{E - V_0 + m_0 c^2}. \quad (13.25)$$

For $V_0 > E + m_0 c^2$ the fraction indeed becomes negative, but r always remains greater than zero, because we have to choose $\bar{p} < 0$ due to the boundary conditions. Hence for the reflection coefficient we always have $R \leq 1$ and not, as given by Bjorken and Drell, $R > 1$.

We thus have seen that for $V_0 > E + m_0 c^2$ a fraction of the electrons can traverse the potential barrier by transforming the original positive value of the kinetic energy to a negative one. The group velocity of the tunneling electrons is, due to (13.1), given by

$$\frac{c^2}{V_0 - E} |\bar{p}| = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{V_0 - E} \right)^2}, \quad (13.26)$$

which for $V_0 = E + m_0 c^2$ is just zero and for $V_0 \rightarrow \infty$ approaches the velocity of light. When $V_0 = E + m_0 c^2$, the reflection coefficient from (13.17) is just $R = 1$ (total reflection); it decreases for increasing V_0 down to the value

$$\alpha = R_{\min} = \lim_{V_0 \rightarrow \infty} R(V_0) = \frac{(E/c - p)}{(E/c + p)} \quad (13.27)$$

for $V_0 \rightarrow \infty$. The corresponding fraction of electrons travelling through the boundary surface is thus

$$\beta = \frac{2p}{E/c + p} \quad (13.28)$$

where β is called the transmission coefficient and $\alpha + \beta = 1$! For $p = m_0 c$ (i.e. electrons with a velocity 80% that of light) we get with (13.5): $\beta \approx 2/(2^{1/2} + 1) \sim 0.83$, i.e. 83% of the incoming electrons penetrate the potential barrier. This large transmission coefficient also remains for V_0 not approaching infinity but only several rest masses. Calculations by F. Sauter ⁴ using a smoothed potential edge have shown that this large transmission coefficient, which is classically not understandable at all, does not occur if the width of the increase from $V = 0$ to $V = V_0$ is of the order of the Compton wavelength, i.e.

$$d \lesssim \frac{\hbar}{m_0 c}. \quad (13.29)$$

This unexpected largeness of the transmission coefficient is known as Klein's paradox, and its interpretation given here is completely that of a single particle. In the framework of this

² H.G. Dosch, J.H.D. Jensen, V.L. Mueller: Phys. Norv. 5, 151 (1971).

³ J.D. Bjorken, S.D. Drell: Relativistic Quantum Mechanics, ed. by L. Schiff, International Series in Pure and Applied Physics (McGraw-Hill, New York 1964).

⁴ F. Sauter: Z. Physik 73, 547 (1931).

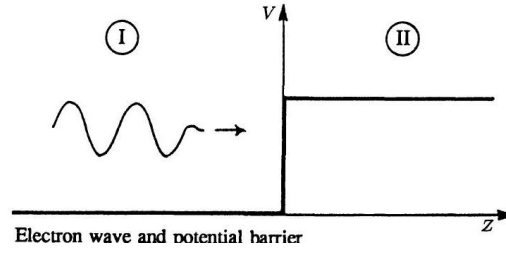
representation it is not necessary at all to consider pair production (as has already been done by Bjorken and Drell at this level), though we shall see in connection with the hole theory that the boundary conditions change (no wave coming in from $z = +\infty$), that is we do not have to demand $\bar{p} < 0$ any longer (see the following Example 13.1).

13.1 Klein's Paradox and the Hole Theory

The hole theory becomes important if one wants to describe the behaviour of a particle wave striking a potential barrier with $V_0 > m_0c^2 + E$.

The Dirac equation for a plane wave moving in the z direction with spin up is:

a) for region I (see figure below)



Electron wave and potential barrier

b) for region II

$$(c\hat{\alpha}_3\hat{p}_z + \hat{\beta}m_0c^2)\psi = (E - V_0)\psi, \quad (2)$$

with solutions

$$\psi_I = A \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p_1^0 c}{E + m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip_1 z/\hbar},$$

$$p_1 c = \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4},$$

$$\psi_{II} = B \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{0}{p_2 c} \\ V_0 - E - m_0 c^2 \end{pmatrix} e^{ip_2 z/\hbar},$$

$$p_2 c = \sqrt{(V_0 - E)^2 - m_0^2 c^4}. \quad (4)$$

Decisive for the explanation is the fact that for $V_0 > E + m_0c^2$ the momentum p_2 becomes real again, allowing for free plane waves to propagate in region II. This can only be understood by the existence of a second energy continuum corresponding to the solutions of the Dirac equation with negative energy (see below). From the impacting wave (3) one part is reflected (maintaining energy and momentum conservation):

$$\psi_I^r = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p_1 c}{E + m_0 c^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip_1 z/\hbar}$$

and the other part propagates further (4). We must require at $z = 0$ that the wave functions be equal inside and outside the potential (this does not mean continuity!):

$$\psi_I(z = 0) + \psi_I^r(z = 0) = \psi_{II}(z = 0).$$

From this the equations determining the various coefficients follow:

$$A + C = B \text{ and}$$

$$\begin{aligned}
A - C &= -B \frac{p_2}{p_1} \frac{E + m_0 c^2}{V_0 - E - m_0 c^2} \\
&= -B \sqrt{\frac{(V_0 - E + m_0 c^2)(E + m_0 c^2)}{(V_0 - E - m_0 c^2)(E - m_0 c^2)}} =: -B\gamma.
\end{aligned} \tag{8}$$

Thus we have

$$\begin{aligned}
(7) + (8) &\Rightarrow A = \frac{B}{2}(1 - \gamma) \\
(7) - (8) &\Rightarrow C = \frac{B}{2}(1 + \gamma)
\end{aligned} \Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}$$

and

$$\frac{B}{A} = \frac{2}{1 - \gamma}.$$

With the expression for the particle current

$$\mathbf{j}(x) = c\psi^\dagger(x)\hat{\boldsymbol{\alpha}}\psi(x)$$

and

$$\psi_1^\dagger \hat{\alpha}_1 = A^* \left(0, \frac{p_1 c}{E + m_0 c^2}, 0, 1 \right) e^{-ip_1 z/\hbar},$$

$$\psi_1^\dagger \hat{\alpha}_2 = A^* \left(0, -i \frac{p_1 c}{E + m_0 c^2}, 0, -i \right) e^{-ip_1 z/\hbar},$$

$$\psi_1^\dagger \hat{\alpha}_3 = A^* \left(\frac{p_1 c}{E + m_0 c^2}, 0, 1, 0 \right) e^{-ip_1 z/\hbar},$$

follows

$$j_I = AA^* \frac{2p_1 c^2}{E + m_0 c^2} e_z.$$

$$\text{Correspondingly } j_I^\dagger = -CC^* \frac{2p_1 c^2}{E + m_0 c^2} e_z,$$

$$j_{II} = -BB^* \frac{2p_2 c^2}{V_0 - (E + m_0 c^2)} e_z.$$

Thus the ratios of the currents [γ in (9) is real] are

$$\frac{|j_I^\dagger|}{|j_I|} = \frac{(1 + \gamma)^2}{(1 - \gamma)^2},$$

$$\frac{|j_{II}|}{|j_I|} = \frac{4}{(1 - \gamma)^2} |-\gamma| = \frac{4\gamma}{(1 - \gamma)^2}.$$

It can be seen from (8) that $\gamma > 1$, leading to $|j_I^\dagger| > |j_I|$.

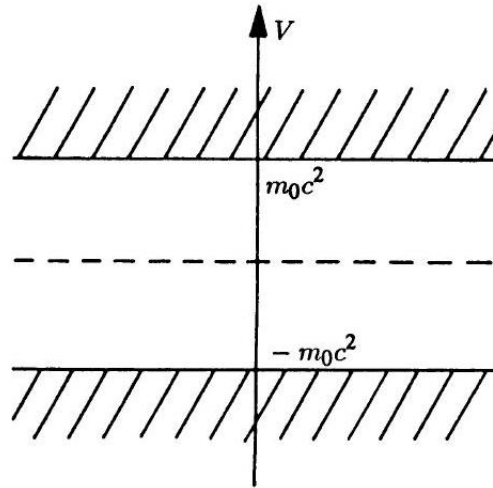
This result corresponds to the fact that the flow of j_{II} is in the $(-z)$ direction, i.e. electrons leave region II, but according to our assumptions up to now, there are no electrons in there anyway. A reinterpretation is thus necessary, and in doing this the solutions of negative energy formally derived previously are treated seriously; thus there exist two electron continua:

To prevent the transition of all electrons to states of negative energy one has to require that all electron states with $E < -m_0 c^2$ are occupied with electrons (see Chap. 12). This hypothesis permits the following explanation: The potential $V_0 > m_0 c^2 + E$ raises the electron energy in region II sufficiently for there to be an overlap between the negative continuum for $z > 0$ and the positive continuum for $z < 0$. In the case of $V_0 > m_0 c^2 + E$ the electrons striking the potential barrier from the left are able to knock additional electrons out of the vacuum on the right, leading to positron current flowing from left to right in the potential region.

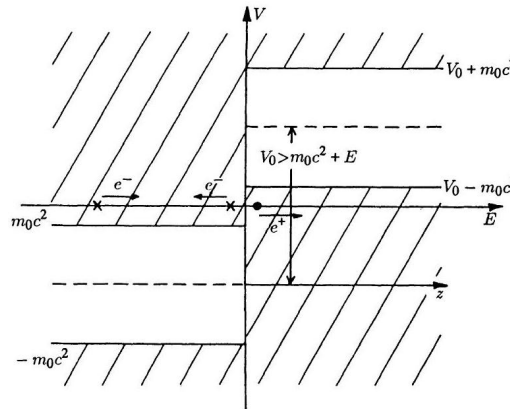
From this notion it is understandable that there occur free plane wave solutions in region II given by (4) (see following figure), called positron waves. Furthermore, according to the hole theory, the negative continuum states are occupied, so that it is now possible to understand the sign of j_{II} in (17) by assuming that the electrons entering region I are coming from the negative continuum: Correspondingly the relation

$$j_I + j_I^\dagger = j_I \left(1 - \frac{|C|^2}{|A|^2} \right) = j_I \frac{-4\gamma}{(1 - \gamma)^2} = j_{II}$$

holds. Since the holes remaining in region II are interpreted



Energy levels of the free Dirac equation



Energy continua of the Dirac equation at a potential barrier as positrons, it is possible to describe this effect in an alternative manner: The phenomena described above can be understood as electron-positron pair creation at the potential barrier (as shown in the figure below) and is related to the decay of the vacuum in the presence of supercritical fields.⁵

13.3.2 Role of the slope of realistic potential barriers in preventing relativistic tunneling by Christillin, d'Emilio

Abstract

The transmission of fermions of mass m and energy E through an electrostatic potential barrier of rectangular shape (i.e., supporting an infinite electric field), of height $U > E + mc^2$ -due to the many-body nature of the Dirac equation evidenced by the Klein paradox-has been widely studied. Here we exploit the analytical solution, given by Sauter for the linearly rising potential step, to show that the tunneling rate through a more realistic trapezoidal barrier is exponentially depressed, as soon as the length of the regions supporting a finite electric field exceeds the Compton wavelength of the particle-the latter circumstance being hardly escapable in most realistic cases.

⁵ This is discussed by J. Reinhardt, W. Greiner: Rep. Prog. Phys. 40, no. 3, 219 (1977); and is covered in more detail in W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski: Quantum Electrodynamics of Strong Fields (Springer, Berlin, Heidelberg 1985)

Introduction and main result

We will consider a one-dimensional flux of free monoenergetic electrons of energy E and momentum

$$p = \sqrt{E^2 - m^2} \quad (1)$$

(throughout the paper natural units $\hbar = c = 1$ will be used) hitting a repulsive rectangular potential step of height U greater than their kinetic energy $E - m$ (Fig. 1)-to which they are minimally coupled. In this case total reflection is unavoidable: in the region $x > 0$ there is indeed just one bounded solution of the Schrödinger equation and the flux is therefore zero. As a consequence, in the region $x < 0$ the reflected flux must equal the incident one.

The use of the Schrödinger equation is legitimate as long as both $U, E - m \ll m$ and, in principle, the result must not necessarily hold for higher values of U . Indeed for

$$U - m > E > m \text{ (Klein zone)} \quad (2)$$

(the only zone we will be interested in throughout the paper) a relativistic equation is more suited for the description of the situation and, for both the Dirac and the Klein-Gordon and equation (to which our comparison will be limited), it happens that in the region $x > 0$ the plane-wave (free propagation) solutions with opposite momenta $\pm q$

$$q = \sqrt{(U - E)^2 - m^2} \quad (3)$$

are two. Therefore the possibility of a nontrivial transmitted flux of the same order of magnitude as the incident one is reopened. The first to point out such a seemingly paradoxical result was Klein [1] in the case of the then recently proposed Dirac equation. The result has been commented upon and used by several authors over the years: see, e.g., Ref. [2] for a historical review and some references. For us it is important to mention that Klein's result was questioned by Sauter [3] who, following a suggestion by Bohr, showed-at least for the Dirac equation - that, when the sharp edge of the step is substituted by a more realistic one of width l (Fig. 2), the transmission coefficient turns out to be

$$T_D^{\text{Sauter step}} \simeq e^{-\pi m^2 l / U}. \quad (4)$$

The asymptotic form exhibited in Eq. (4) holds when both the particles are fast $E - m \simeq m$ and the slope of the step, i.e., the electric field, satisfies

$$e\mathcal{E} = U/l \ll 2m/\lambda_{\text{Compton}} = 2m^2. \quad (5)$$

A discussion, in the above framework, of whether the Klein paradox is a "real" one and-at least for the Dirac equation-Sauter's is the right way out, cannot help spelling out what particles the asymptotic states describe. Indeed, while in the region $x < 0$ the dispersion relation $E = +\sqrt{p^2 + m^2}$ is unambiguous, in the region $x > l$, owing to Eqs. (2) and (3), either

$$E = U - \sqrt{q^2 + m^2} \quad (6)$$

or

$$-E = -U + \sqrt{q^2 + m^2}. \quad (7)$$

Namely, either particles have negative kinetic energies or antiparticles (propagating backward in time) have to come into play: the first choice being untenable, the many-body nature of both relativistic equations can no longer be ignored.

Postponing the discussion of this point until Sec. II, we prefer instead to examine the Klein paradox in the context of

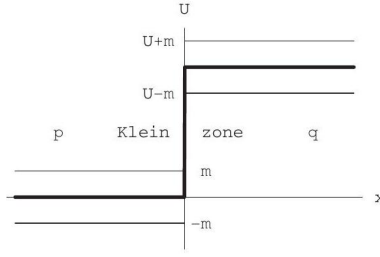


FIG. 1. Klein step.

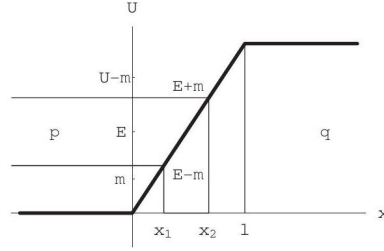


FIG. 2. Sauter step.

a different "Gedanken" experiment where it is possible, for a while, to "sweep the dust under the rug": can an appreciable fraction of monoenergetic electrons pass through a potential barrier of height $U \geq 2m$?

The situation is summarized in Figs. 3 and 4. The former is the well studied rectangular barrier of width $2L$ whose transmission coefficient is known both in the Klein-Gordon and Dirac case:

$$T_{\pm}^{\text{rect bar}} = \frac{1}{1 + f_{\pm}(E, U) \sin^2(2qL)}, \quad (8)$$

$$f_{\pm}(E, U) = \begin{cases} \frac{U^2(U/2-E)^2}{p^2 q^2}, & + = \text{KG}, \\ \frac{m^2 U^2}{p^2 q^2}, & - = \text{D}, \end{cases} \quad (9)$$

p, q being given by Eqs. (1) and (3), respectively. This is the schematization of "infinite electric field": the width of the edges of the barrier is neglected with an ensuing electric field much higher than its relevant scale $2m^2/e$ given in Eq. (5). This limitation is instead removed in the case of the trapezium shaped potential of Fig. 4, the extension of Sauter's cure to the barrier. It is our choice to preserve space inversion as a symmetry (it will be evident that our conclusion does not critically depend on this assumption) and we will nickname this potential the Sauter barrier. The advantage of barriers with respect to steps is that in both the regions where $U = 0$, one may choose asymptotic states describing particles and ignore "what is going on under the barrier" (we mean $-L < x < L$), i.e., whether either particles or antiparticles and/or couples are freely propagating.

This aspect has been examined in the Ref. [4] for the step and in Ref. [5] for the barrier, by adopting a space-time description of the scattering process instead of the stationary

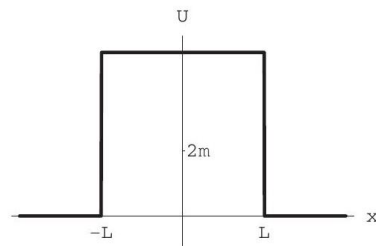


FIG. 3. Klein barrier.

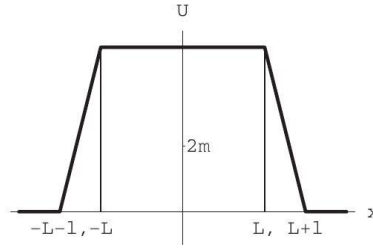


FIG. 4. Sauter barrier.

state picture we are sticking to here. Also the authors of Ref. [5] claim a "barrier paradox." How does the paradox show up in the case of the rectangular barrier? First, we note that in Eq. (8) for the values of E such that $2qL = n\pi$, n integer, there is total transmission (the so-called transmission resonances), both in the Klein-Gordon and the Dirac case, no matter how high the values of U and L may be. This is in blatant contrast with the Schrödinger case mentioned in the beginning. A second crucial difference is in the role played by the barrier width parameter L . While its increase induces the well known exponential decrease of $T_{\text{Schrodinger}}^{\text{rect barr}}$, in both the relativistic cases-for fixed U - the higher the value of L , the faster the oscillations of $T_{\pm}^{\text{rect barr}}$ as a function of E . Figures 5 and 6 illustrate this statement.

To make our point we have now to take into account how a "realistic" experiment would be carried out and to give the numerical values of the scales involved. Taking $L \gg 1/m = \lambda_{\text{Compton}} = 0.024\text{\AA}$ for electrons (and smaller for more massive bosons) is simply mandatory. In addition, in a "real experiment," where almost monoenergetic particles-with an average energy $\bar{E}$ and an energy uncertainty $\Delta E \ll \bar{E}$ -are gunned against the barrier, the in-state is obtained as some superposition of stationary states with $\bar{E} - \frac{1}{2}\Delta E \lesssim E \lesssim \bar{E} + \frac{1}{2}\Delta E$. Thus, even for reasonably monoenergetic electrons, a huge number of transmission resonances is involved in the diffusion process. As an example, for $m = 0.51\text{MeV}$, $U \geq 1.2\text{MeV}$, $L \geq 10\text{\AA}$, and $\bar{E} \simeq m + \frac{1}{2}\Delta E = 0.520\text{MeV}$ (i.e., at

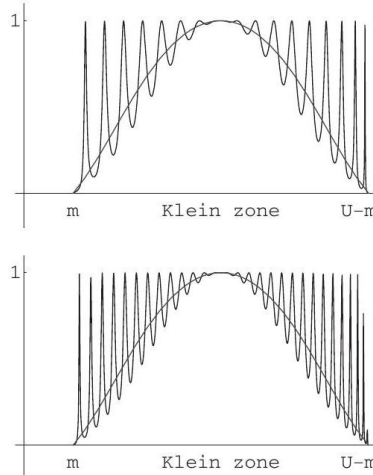


FIG. 5. $T_{\text{KG}}^{\text{rect barr}}$ as a function of E in the Klein zone: $U = 8m$, $L = 4/m$ (up), and $L = 6.5/m$ (down).

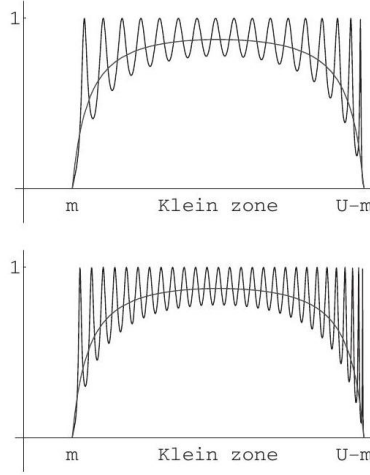


FIG. 6. $T_D^{\text{rect barr}}$ as a function of E in the Klein zone $U = 8m$, $L = 4/m$ (up), and $L = 6.5/m$ (down).

the very beginning of the Klein zone with a relative monoenergeticity $\Delta E/\bar{E} \leq 4\%$) no less than 1450 spikes in the analogs of Figs. 5 and 6 are involved.

Such fast oscillations have to be taken into account [2]. This is done by replacing the $\sin^2(\dots)$ with $\frac{1}{2}$ in Eq. (8) and this, in turn, leads to an energy-averaged transmission coefficient

$$\bar{T}_{\pm}^{\text{rect barr}} \equiv \frac{1}{1 + \frac{1}{2}f_{\pm}(\bar{E}, U)} \quad (10)$$

(the nonoscillating curve in Figs. 5 and 6). As long as $\bar{T}_{\pm}^{\text{rect barr}}$ is taken as an indicative prediction of the theory, the seeming paradox shows up in the following way:

$$\bar{T}_{\pm}^{\text{rect barr}} \xrightarrow{U \gg \bar{E}} \begin{cases} 0, \\ \frac{\bar{E}^2 - m^2}{\bar{E}^2 - m^2/2} \xrightarrow{\bar{p}^2 \ll m^2} 2 \frac{\bar{p}^2}{m^2} \end{cases}$$

indicating an "unnaturally" high transmission of Dirac particles in the presence of a high step. "Unnatural" refers to the comparison with the exponentially small Schrödinger prediction. Even without going to the first limit taken in Eq. (11), for example, for $U = 2.5\text{MeV}$ and average kinetic energy $\bar{E} - m = 0.1\text{MeV}$, the 31.3% of the incident flux would be transmitted, the fraction going up to 64.7% for $\bar{E} - m = 0.5\text{MeV}$.

The present paper addresses the question of whether Sauter's cure for the barrier is as good as it is for the step. In addition to giving the analytical result for $T_D^{\text{Sauter barr}}$, our main result consists in showing that, for the Sauter barrier, in the part of the Klein zone where $E - m \simeq m$,

$$\bar{T}_D^{\text{Sauter barr}} \propto \left(T_D^{\text{Sauter step}}\right)^2 \propto e^{-2\pi m^2 l/U} \quad (12)$$

provided the slope l is large enough so as to satisfy Eq. (5).

As a matter of fact, for devices involving either macroscopic or mesoscopic dimensions, the result (12) is a doom: for practical purposes transmission is zero, in accordance with the naive expectation. Should one ever be able to set up a nanostructure with l as small as 10^2 to $10^3 \lambda_{\text{Compton}}$ and U not much higher than the threshold $2m$, it is seen that the constraint (5) would be even in this case largely satisfied. Cases that could possibly be left uncovered by the present discussion are those of solid state physics where the "effective mass" of the electron is smaller than the in-vacuum value adopted here. In particular, the case of graphene, where a vanishing effective mass is advocated by the authors of Ref. [6], looks to date as the most

promising place to observe the Klein paradox at work and, in the most optimistic case, to set up a "graphene device electronics" [7]. The paper is organized as follows.

In Sec. II the transfer matrix M^{step} for a generic potential step is defined and the corresponding transmission coefficient discussed. In Sec. III the transfer matrix and transmission coefficient for the corresponding space-inversion invariant barrier are expressed in terms of the matrix elements of M^{step} . Section IV (relying on the analytical results extracted from Sauter's original paper and collected in the Appendix) illustrates the case of Sauter's trapezoidal barrier and justifies why the averaging procedure described for Eq. (10) applies and how it is that Eq. (12) finally comes about.

Steps

The present section contains material that is well known: as it mainly serves to introduce our notation, some of the statements found below will be made without proof. For the sake of conciseness we give a unified treatment of the Klein-Gordon equation in the first-order formalism and of the Dirac equation, in one space dimension. In the latter case we make use of two-component spinors since the spin-conserved by minimal coupling-is irrelevant. We will make use of the Pauli matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

as well as of the 2×2 identity matrix I .

We are interested in the stationary states

$$\Psi_E(x, t) = e^{-iEt} \Psi_E(x), \quad \Psi_E(x) = \begin{pmatrix} \psi_E(x) \\ \chi_E(x) \end{pmatrix} \quad (13)$$

of the Klein-Gordon one-dimensional wave equation

$$\begin{cases} \psi'_E = \chi_E \\ \chi'_E = -\{[E - U(x)]^2 - m^2\} \psi_E(x) \end{cases} \quad (14)$$

as well as of the Dirac equation. In the Pauli representation the one-dimensional Dirac Hamiltonian is

$$H_D^{\text{Pauli}} = -i\sigma_1 \frac{d}{dx} + \sigma_3 m + U(x) \quad (15)$$

i.e., spelling out the components,

$$\begin{cases} \psi'_E = i[E + m - U(x)]\chi_E \\ \chi'_E = i[E - m - U(x)]\psi_E \end{cases} \quad (16)$$

In both Eqs. (14) and (16) the energy E is understood to be in the Klein zone (2) and the step potential $U(x)$ is given by

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \mathcal{U}(x), & 0 < x < l \\ U, & x > l \end{cases} \quad (17)$$

The solutions of the above equations may all be expressed in the form

$$\Psi_E = \begin{cases} \alpha u(p)e^{ipx} + \beta u(-p)e^{-ipx}, & x < 0, \\ \Xi(x), & 0 < x < l, \\ \gamma u(q)e^{iqx} + \delta u(-q)e^{-iqx}, & x > l, \end{cases} \quad (18)$$

where $\Xi(x)$, representing the solution in the intermediate region, evidently depends on the explicit form of $\mathcal{U}(x)$. The momenta p, q are given by Eqs. (1) and (3), and the two component wave functions are, respectively,

$$u_{\text{KG}}(\pm p) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm ip \end{pmatrix}, \quad u_{\text{D}}(\pm p) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pm p}{E+m} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$u_{\text{KG}}(\pm q) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm iq \end{pmatrix}, \quad u_{\text{D}}(\pm q) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pm q}{E-U+m} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Imposing the continuity of Ψ_E at the points $x = 0, x = l$ entails two relations of linear dependence among the four constants $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. The transfer matrix M^{step} , expressing such a dependence, is defined by

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = M^{\text{step}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Use of the invariance of Eqs. (14) and (16) under charge conjugations

$$\mathcal{C} : \Psi(x) \rightarrow C\Psi^*(x), \quad C = \begin{cases} I & \text{KG,} \\ \sigma_3 & \text{D} \end{cases} \quad (22)$$

simplifies the form of M^{step} down to

$$M^{\text{step}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}. \quad (23)$$

In addition, conservation of the currents (whose form is dictated by Noether's theorem), i.e., the constance of

$$J_x = \begin{cases} \Psi^\dagger \sigma_2 \Psi, & \text{KG} \\ \Psi^\dagger \sigma_1 \Psi, & \text{D} \end{cases} \quad (24)$$

with respect to x , implies

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = \frac{1}{\mathcal{D}_\pm} \frac{q}{p} (|\gamma|^2 - |\delta|^2), \quad (25)$$

where

$$\mathcal{D}_\pm = \begin{cases} 1, & + = \text{KG} \\ \frac{E-U+m}{E+m}, & - = \text{D}. \end{cases} \quad (26)$$

Finally, expressing γ, δ in Eq. (25) as given by Eq. (21), one obtains

$$\det M_\pm^{\text{step}} = |a|^2 - |b|^2 = \frac{p}{q} \mathcal{D}_\pm. \quad (27)$$

In the Klein-Gordon case there is no doubt that the scattering state with the α source term to the left is identified by setting $\delta = 0$ in Eq. (18). Indeed, according to Eq. (25), only an outgoing (from left to right) flux is left in the region $x > l$. The transmission coefficient is, therefore, in general

$$T_{\text{KG}}^{\text{step}} \equiv \frac{q}{p} \left| \frac{\gamma}{\alpha} \right|^2 = \frac{p}{q} \frac{1}{|a|^2}. \quad (28)$$

Apparently Pauli was the first [1] to note the impact that $\mathcal{D}_- < 0$ has, in the Klein zone, on the identification of the scattering states. As the contributions to the flux of Dirac particles in the right-hand side of Eq. (25) are interchanged with respect to the Klein-Gordon case, the transmission coefficient should be obtained by setting $\gamma = 0$ instead of δ in Eq. (18). This choice gives, for the generic form $\mathcal{U}(x)$ of the step

$$T_D^{\text{step}} \equiv \frac{q}{p} \frac{E+m}{U-E-m} \left| \frac{\delta}{\alpha} \right|^2 = -\frac{p}{q} \frac{\mathcal{D}_-}{|b|^2} \quad (29)$$

to be contrasted with Eq. (28).

In the case of the rectangular step, explicit calculation yields

$$a_{\pm}^{\text{rect step}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{p}{q} \mathcal{D}_{\pm} \right), \quad (30)$$

$$b_{\pm}^{\text{rect step}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p}{q} \mathcal{D}_{\pm} \right), \quad (31)$$

whence

$$T_{\pm}^{\text{rect step}} = \frac{\pm 4 \frac{p}{q} \mathcal{D}_{\pm}}{\left(1 \pm \frac{p}{q} \mathcal{D}_{\pm} \right)^2} \quad (32)$$

In the Dirac case it is evident that our identification of the scattering states is in disagreement, e.g., with the choice of Ref. [8], where the interchange of the γ and δ terms is not effected. Our result is indeed obtained from theirs by effecting the substitution $r \rightarrow -r$ (our $p/q\mathcal{D}_-$ equals BjorkenDrell's $1/r$), which turns their transmission coefficient negative in the Klein zone-into our positive expression.

Considering now that, for fixed E ,

$$\lim_{U \rightarrow \infty} -\frac{p}{q} \mathcal{D}_- = \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} \quad (33)$$

it follows that

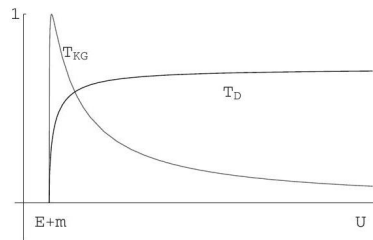


FIG. 7. $T_D^{\text{rect step}}$ and $T_{KG}^{\text{rect step}}$ for $E = 1.2m$ as functions of U in the Klein zone.

$$\lim_{U \rightarrow \infty} T_D^{\text{rect step}} = \frac{2p}{E+p} \quad (34)$$

i.e., a finite value, to be contrasted with the Klein-Gordon case where

$$\lim_{U \rightarrow \infty} \frac{p}{q} = 0 \quad (35)$$

entails

$$\lim_{U \rightarrow \infty} T_{KG}^{\text{rect step}} = 0. \quad (36)$$

The situation is summarized in Fig. 7. The comparison of the two cases is self-evident. Whereas, in the first case, the barrier is transparent for essentially all the values of the potential, in the second one, apart from a region just above the threshold of the Klein zone, the barrier becomes again impenetrable. This shows how wrong the naive idea is that only the oscillatory behavior of the eigenfunction—due to the relativistic energy-momentum relation (3) — does all the job in the Klein zone. Indeed the equation for the large component of the Dirac equation [obtained by taking the derivative of the first equation in Eq. (16) and there using the second] is not equivalent to the Klein-Gordon equation (14). The derivative, acting on $U(x)$, yields extra terms $e\mathcal{E} = -U'(x)$, thus supporting the expectation that a sharp edge is fundamental in making the difference between the previous results. This is indeed the content of Sauter's work [3].

At this stage we can no longer help interpreting the scattering states. Indeed, referring to electrons, in the scattering state identified by choosing $\gamma = 0$ in Eq. (18), the positive (i.e., toward the right) current in the region $x > 0$ cannot come from particles with negative kinetic energy, see Eq. (6). It is rather due to positrons propagating backward in time, see Eq. (7). Hence, in the language of second quantization, a physical positron above the potential $-U$ comes from the right, i.e., the δ term acts as a source of positrons available at $x = +\infty$. In this sense we are, therefore, in the presence of a $e^+ - e^-$ annihilation process, and the reflection coefficient $R = 1 - T$ necessarily is smaller than 1. Had we had alternatively chosen $\delta = 0$ in Eq. (18), we would have had, also from the right, an incoming current with an ensuing reflection coefficient bigger than 1. This would correspond to a flux of positrons traveling to the right, i.e., a process of pair creation. And this is the result much quoted as the "Klein paradox," a statement that simply is not present in the original Klein's paper. Let us, however, again stress that even for $R < 1$ there is a paradox due to a finite fermion transmission through a high repulsive potential. Analogous considerations apply in the Klein-Gordon case with the previous provisions [Eqs. (28) and (31) and Fig. 7] due to the reversed role of the γ and δ terms.

Barriers

The space-inversion invariant potential barrier obtained by using the step (17) twice is

$$W(x) = U(x + l + L) + U[-(x + l + L)] \quad (37)$$

and the corresponding stationary states have the form

$\Psi_E(x)$

$$= \begin{cases} \alpha u(p)e^{ipx} + \beta u(-p)e^{-ipx}, & x < -(l + L), \\ \Xi_-(x), & -(l + L) < x < -L, \\ \gamma u(q)e^{iqx} + \delta u(-q)e^{-iqx}, & -L < x < L, \\ \Xi_+(x), & L < x < l + L, \\ \alpha' u(p)e^{ipx} + \beta' u(-p)e^{-ipx}, & x > l + L \end{cases} \quad (38)$$

[the coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ appearing in the latter equation should not be confused with those appearing in Eq. (18) to which they are, however, related through the translation $x \rightarrow x + l + L$]. Again, the continuity relations at $x = -(l + L), -L$ and $x = L, l + L$, respectively, entail

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = M^{\text{left}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = M^{\text{right}} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \quad (39)$$

whence the transfer matrix relative to the barrier

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} \equiv M^{\text{bar}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (40)$$

is obtained as

$$M^{\text{bar}} = M^{\text{right}} M^{\text{left}}. \quad (41)$$

The connection of M^{right} and M^{left} with M^{step} is established by taking translations and reflection into account. The effect of the translation to the left $x \rightarrow x + l + L$ is expressed with the aid of the matrix

$$T(k, a) = \begin{pmatrix} e^{ika} & 0 \\ 0 & e^{-ika} \end{pmatrix} \quad (42)$$

One gets

$$M^{\text{left}} = T(q, l + L) M^{\text{step}} T(-p, l + L), \quad (43)$$

whereas M^{right} is obtained either by reflecting $x \rightarrow -x$ in M^{left} , or by first reflecting M^{step} and then translating to the right $x \rightarrow x - (l + L)$:

$$\begin{aligned} M^{\text{right}} &= \sigma_1 (M^{\text{left}})^{-1} \sigma_1 \\ &= T(p, -(l + L)) \sigma_1 (M^{\text{step}})^{-1} \sigma_1 T(-q, -(l + L)) \end{aligned} \quad (44)$$

Exploiting Eqs. (41)-(44) one finally obtains for the coefficients appearing in Eq. (40)

$$A = \frac{a^2 e^{2i(q-p)(l+L)} - b^{*2} e^{-2i(q+p)(l+L)}}{|a|^2 - |b|^2}, \quad (45)$$

$$B = \frac{a b e^{2iq(l+L)} - a^* b^* e^{-2iq(l+L)}}{|a|^2 - |b|^2}. \quad (46)$$

In the case of the barrier we do not have the ambiguity connected with the identification of the scattering states—we have discussed for the step in Eqs. (28) and (29). The transmission coefficient of the barrier is $1/|A|^2$ both in the Klein-Gordon and the Dirac cases. When expressed in terms of the two matrix elements entering the transfer matrix of the step

$$a = |a| e^{i\xi}, \quad b = |b| e^{i\eta} \quad (47)$$

it takes the form

$$T^{\text{bar}} = \frac{1}{1 + \frac{4|a|^2|b|^2}{(|a|^2 - |b|^2)^2} \sin^2[2q(l + L) + \xi + \eta]}. \quad (48)$$

This can be further simplified on account of Eqs. (27)-(29):

$$T^{\text{bar}} = \frac{1}{1 + 4 \frac{1 - T^{\text{step}}}{(T^{\text{step}})^2} \sin^2[2q(l + L) + \xi + \eta]}. \quad (49)$$

The above formula is consistent with the results cited in the Introduction, i.e., when Eqs. (28)-(32)—appropriate for the rectangular barriers—are used, Eqs. (8) and (9) are reobtained.

The dependence of T^{bar} on the energy is through the phases ξ, η of the transfer matrix elements (47), as well as through T^{step} itself and q . The dependence on the barrier width $2L$

is, instead, completely spelled out in the argument of the sin function. This means that for given energy, no matter how opaque the step $\mathcal{U}(x)$ may be, the width parameter L can always be adjusted in such a way that the corresponding even barrier is totally transparent (this is an analog to the situation of dielectric stratified media in optics: see, e.g., Ref. [9], where however, only the case of sharp edge $l = 0$, i.e., $\xi = \eta = 0$, is considered). Going back to particles, as discussed in the Introduction, there may be the difficulty that, for given average energy $\bar{E}$ and energy uncertainty ΔE of the incident particles, any "realistic" value of L may be such that too many maxima of T^{bar} , due to the oscillations of $\sin^2(\dots)$, come into the range $(\bar{E} - \frac{1}{2}\Delta E, \bar{E} + \frac{1}{2}\Delta E)$. The averaging procedure $\sin^2(\dots) \rightarrow \frac{1}{2}$ in Eq. (49) is then necessary and Eq. (12) follows immediately when $T^{\text{step}} \ll 1$.

Sauter trapezoidal barrier for the Dirac case

The analytic expression for $T_D^{\text{Sauter bar}}$ can be deduced from the long formulas we have extracted from Sauter's paper [3] and reported in the Appendix. The graphs below are more eloquent than the expression. In assigning numerical values to the parameters, we have in mind the case of

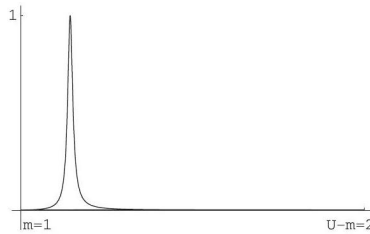


FIG. 8. $T_D^{\text{Sauter bar}}$ for $U = 3m, L = 0, l = 3\lambda_{\text{Compton}}$ as a function of E in the Klein zone.

electrons in vacuum. Therefore the unit of energy is $m = 0.51\text{MeV}$ and the unit of length is $\lambda_{\text{Compton}} = 0.024\text{\AA}$.

We repeat here the warning already made in the Introduction: there may be cases where the units change by orders of magnitude and the following discussion may not apply. As a consequence of the scales we have chosen, the values we give to U are not much higher than the threshold, typically $U = 3m$. As for l and L , certainly they both have to take a value of the order of at least $10^2\lambda_{\text{Compton}}$. It is, however, instructive to vary one parameter at a time.

Figure 8 plots $T_D^{\text{Sauter bar}}$ against the energy E in the Klein zone for $U = 3m, l = 3\lambda_{\text{Compton}}$, and $L = 0$: it is a triangular barrier that shows the effect of l alone. It indicates that a flux of monoenergetic electrons ($\Delta E \ll \text{width of the peak}$) is entirely transmitted. This may come a little bit as a surprise because, referring to Fig. 2 and in a pictorial space-time description, the incoming electron encounters: (i) a free propagation region (from $x = -\infty$ to $x = 0$), (ii) a region from 0 to x_1 that is still classically accessible, but where the propagation is nonfree: the two solutions behave as (think, e.g., of the semiclassical approximation) exponentials of opposite imaginary arguments, (iii) the classically inaccessible region (x_1, x_2) with nonpropagating solutions: the two solutions of the Dirac equation behave as exponentials of opposite real arguments (a region that we will improperly call the "attenuation" region), and (iv) eventually the classically inaccessible region from x_2 to l , where propagation, albeit nonfree, still occurs; then, from l to $+\infty$, the same steps just described, but in reverse order.

If one takes the Schrödinger case as a guidance, one might expect attenuation of the wave function both in the left and in the right attenuation region. This happens for almost all the values of E in the Klein zone, with the exception of the peak displayed. Indeed, for average energy $\bar{E}$ at the center of the peak, the single monochromatic components, that make up the incident packet, undergo two transmissions at the edges and possible multiple reflections in between, but they succeed in keeping somehow memory of the relative phases and the packet

is (almost entirely) reconstructed beyond the barrier. For the values we have indicated the "device" could serve as a monochromator for incident wave packets with energy uncertainty greater than the width of the displayed peak. From a practical point of view this is illusory, due to the exceedingly small value of $l = 3\lambda_{\text{Compton}} = 0.072\text{\AA}$.

Figure 9 shows the impact of increasing L from 0 to $100\lambda_{\text{Compton}} = 2.4\text{\AA}$ in the preceding case. A region of

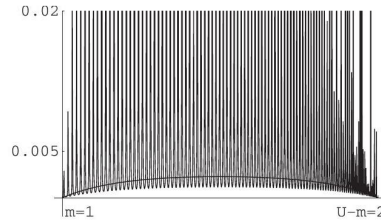


FIG. 9. $T_D^{\text{Saut bar}}$ for $U = 3m, L = 100\lambda_{\text{Compton}}, l = 3\lambda_{\text{Compton}}$ as a function of E in the Klein zone.

strict free propagation is interposed, the peak of Fig. 8 is replicated several times [the argument of the $\sin^2(\dots)$ in Eq. (49) oscillates much faster] and the peaks displayed all reach the value 1. However, we have chosen to reduce the scale of the ordinates to make the energy averaged $\bar{T}_D^{\text{Saut bar}}$ visible. The oscillations of the nonaveraged T are so fast (and still the value given to L may be largely considered too small) that only $\bar{T}$ is susceptible of comparison with experiment. Nonetheless, a value of $\bar{T}$ of the order of some part per thousand could still be considered an interesting signal.

Once the role of L is understood, in Fig. 10 we go back to the case $L = 0$ but raise the value of l from $3\lambda_{\text{Compton}}$ to $100\lambda_{\text{Compton}}$. The main difference is in the scale of the ordinates. Again the peaks all reach the value 1, but the scale of $\bar{T}$ has dropped to about 10^{-91} . As for the part of the Klein zone that also satisfies $E - m \simeq m$, this is in perfect agreement with Eq. (12).

The result, displayed in the figure, shows that the estimate extends to the whole Klein zone. We emphasize that the graph displayed in Fig. 10 (as well as those of Figs. 8 and 9), in addition to having been obtained by use of the analytic formulas given in the Appendix, have also been reproduced by numerically integrating the Dirac equation.

The number of peaks in the Klein zone increases with increasing l , but the width of each of them shrinks much faster: this is why the value of $\bar{T}$ has dropped of so many orders of magnitude. Turning L on will not appreciably change the scale of the ordinates, but the energy averaging becomes unavoidable. This washes out any phase information among the monoenergetic components the incident packet is made of. As a consequence the packet, that has undergone an attenuation in the attenuation region at the first edge, may only undergo a second attenuation at the second

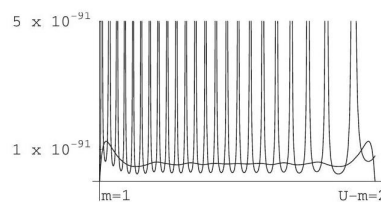


FIG. 10. $T_D^{\text{Saut bar}}$ for $U = 3m, L = 0, l = 100\lambda_{\text{Compton}}$ as a function of E in the Klein zone. edge. The result is that the transmission coefficient (49) is shattered down to the asymptotic value given in Eq. (12).

Finally the trapezoidal form of the barrier, we have chosen in order to be able to exhibit analytical results, should not be crucial to the above conclusion. The same qualitative result

should obtain with all the barriers where the dimension l of the regions that support a relevant electric field ($e\mathcal{E} > 2m^2$) is large enough so as to fulfill Eq. (5). Ref. [10], where again Sauter provides analytical results for the step potential

$$U_1(x) = \frac{U}{2} \left(1 + \tanh \frac{x}{l} \right)$$

as well as the relevant asymptotics, substantiates the above expectation. This paper also confirms the expectation one has from the Dirac equation that the continuous differentiability of the step potential is inessential, thus making irrelevant that the corresponding barrier itself be continuously differentiable.

The foregoing argument should also work for the 'delocalization' of particles in supercritical potentials [11,12]. This will possibly be considered elsewhere.

13.3.3 Role of the slope of realistic potential barriers in preventing relativistic tunneling by Christillin, d'Emilio: Calculations

Appendix: linearly rising potential and Sauter solution for the Dirac case

Referring to the Dirac equation with the step potential of Fig. 2

$$\mathcal{U}(x) = U \frac{x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (\text{A1})$$

the solution $\Xi(x)$ in the intermediate region $0 < x < l$ to be fed into Eq. (18) can be worked out from Sauter's article [3]. His representation for the Dirac Hamiltonian is different than Pauli's Eq. (15): he uses

$$H_D^{\text{Sauter}} = i\sigma_3 \frac{d}{dx} + U(x) - \sigma_2 m = V H_D^{\text{Pauli}} V^\dagger \quad (\text{A2})$$

with (up to an irrelevant phase factor)

$$V = \frac{1}{2} [I - i(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3)] \quad (\text{A3})$$

He then introduces the argument

$$\xi(x) = \sqrt{\frac{U}{l}} \left(x - \frac{E}{U} l \right) \quad (\text{A4})$$

and the degenerate hypergeometric function

$$\Phi(\alpha, \beta; z) = 1 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (\text{A5})$$

in terms of which the two independent eigenfunctions belonging to energy E

$$\Sigma = \begin{pmatrix} f_E(x) \\ g_E(x) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Sigma} = \mathcal{C}\Sigma = \sigma_1 \Sigma^* = \begin{pmatrix} g_E^*(x) \\ f_E^*(x) \end{pmatrix} \quad (\text{A6})$$

in the intermediate region $0 < x < l$ are given by

$$f_E(x) = e^{i\xi^2/2} \Phi \left(\frac{i}{4} \frac{m^2 l}{U}, \frac{1}{2}, -i\xi^2 \right) \quad (\text{A7})$$

$$g_E(x) = -\sqrt{\frac{m^2 l}{U}} \xi e^{i\xi^2/2} \Phi \left(\frac{i}{4} \frac{m^2 l}{U} + 1, \frac{3}{2}, -i\xi^2 \right). \quad (\text{A8})$$

Thanks to Eq. (A3), the $\Xi(x)$ to be fed into Eq. (18) is the linear combination

$$\mu \begin{pmatrix} f_E(x) + ig_E(x) \\ -f_E(x) + ig_E(x) \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} g_E^*(x) + if_E^*(x) \\ -g_E^*(x) + if_E^*(x) \end{pmatrix}$$

The transfer matrix $M_D^{\text{Saut step}}$ is obtained by imposing the continuity of Eq. (18) at $x = 0$ and $x = l$ and then eliminating μ and ν . Its matrix elements (23) turn out to be

$$a^{\text{Saut step}} = \frac{e^{-iql}}{4q(E+m)} [P_+Q_+R - P_-Q_-R^* + i(P_+Q_-S + P_-Q_+S^*)], \quad (\text{A9})$$

$$b^{\text{Saut step}} = \frac{e^{-iql}}{4q(E+m)} [P_-Q_+R - P_+Q_-R^* + i(P_-Q_-S + P_+Q_+S^*)], \quad (\text{A10})$$

where

$$R = f_E(0)f_E^*(l) - g_E^*(0)g_E(l), \quad (\text{A11})$$

$$S = f_E(0)g_E^*(l) - g_E(0)f_E^*(l), \quad (\text{A12})$$

$$P_{\pm} = E + m \pm p, \quad (\text{A13})$$

$$Q_{\pm} = E - U + m \pm q. \quad (\text{A14})$$

Substitution of the above formulas in Eqs. (47)-(49) provides the analytic expression for $T_D^{\text{Saut step}}$ by which the graphs of Figs. 8-10 above are obtained. As already stated in Sec. IV, these graphs have also been reproduced by numerical integration of the Dirac equation. Finally Sauter himself works out the asymptotic form (4) that $T_D^{\text{Saut step}}$ has when both $E - m \simeq m$ and Eq. (5) are satisfied:

$$T_D^{\text{Saut step}} = \frac{q(U - E + q)}{p(E + p)} e^{-\pi m^2 l / U} [1 + O(U/m^2 l)]$$

having included a prefactor omitted in Eq. (12).

13.3.4 Klein Paradix: Other Discussion

Уточнения

Почему в рамках классической теории поля мы ничего не говорим про виртуальные частицы, а тут именно они ключевые для придания здравого смысла происходящему?

(просто странное это решение, мы ведь ничего про виртуальные частицы не имели в виду.)

Как в рамках КТП это описать?

(Виртуальная частица что ли рождается и улетает, перестает быть виртуальной?)

13.4 Numerical Methods for Field Theory

(программирование и все такое. как прогать результаты по теории поля? думаю, глава очень интересная, но не до неё. вычматы подучу для неё потом.)

13.4.1 Overview of Numerical Methods for Field Theory

(пока вообще хз)

13.4.2 Overview of Visual Tools

(тут хз, оставленный вопрос.)

13.5 Other Fundamental Properties of Free Fields

13.5.1 Why Charges are Discrete?

по идее с точки зрения классической теории поля, заряд мог бы быть непрерывен?
(??? a big fundamental question, I don't know yet)

Part IV

Gauge Fields and Special Models

14 Gauge Fields and Strings by Polyakov

14.1 Statistical Mechanics and Quantum Field Theory

14.1.1 1.1 Quantum Particles

We have no better way of describing elementary particles than quantum field theory. A quantum field in general is an assembly of an infinite number of interacting harmonic oscillators. Excitations of such oscillators are associated with particles. The special importance of the harmonic oscillator follows from the fact that its excitation spectrum is additive, i.e. if E_1 and E_2 are energy levels above the ground state then $E_1 + E_2$ will be an energy level as well. It is precisely this property that we expect to be true for a system of elementary particles. Therefore we attempt to identify the Hamiltonian of the particles with the Hamiltonian of coupled oscillators (there is a familiar example from solid state physics: the excitations of a crystal lattice can be interpreted as particles-phonons). All this has the flavour of the XIX century, when people tried to construct mechanical models for all phenomena. I see nothing wrong with it because any nontrivial idea is in a certain sense correct. The garbage of the past often becomes the treasure of the present (and vice versa). For this reason we shall boldly investigate all possible analogies together with our main problem.

A very important analogy, which will be extensively used below, is the one between the quantum mechanics of a $\mathcal{D}$ -dimensional system and the classical statistical mechanics of a $\mathcal{D} + 1$ -dimensional system. Let us demonstrate it in the simplest case of the $\mathcal{D} = 1$ quantum mechanics of one particle. According to the Feynman principle, the transition amplitude F from the point x to the point x' is given by the sum over all possible trajectories connecting points x and x' , each trajectory entering with the weight $\exp((i/\hbar)S[x(t)])$ where $S[x(t)]$ is the classical action. Therefore:

$$F(x, x', T) = \int_{\substack{x(0)=x \\ x(T)=x'}} \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_0^T \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - v(x(t)) \right] dt \right\}$$

Here F is the amplitude, T is the time allowed for the transition, $v(x)$ is an external potential, and the functional integral is defined in the following way. Split the interval $[0, T]$ into N small pieces $[0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{N-1}, T]$. Consider instead of (1.1) the expression:

$$F = \int_{j=1}^{N-1} dx_j \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_j - t_{j-1})} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (T - t_{N-1})} \right)^{1/2} \\ \times \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{m(x_j - x_{j-1})^2}{2(t_j - t_{j-1})} - \sum_{j=1}^N (t_j - t_{j-1}) v(x_{j-1}) \right\}$$

(here $x_0 = x, t_0 = 0, x_N = x', t_N = T$).

Now, it is possible to show that as the mesh $t_{j+1} - t_j \sim T/N \rightarrow 0$ the expression (1.2) has a finite limit that is precisely the transition amplitude. While I do not intend to prove it (and refer instead to the book by Feynman and Hibbs), I shall explain briefly the origin of the formulae (1.1) and (1.2). It is actually quite simple. According to standard quantum mechanics, the transition amplitude is given by $\dagger$:

$$F(x, x', T) = \langle x' | e^{-(i/\hbar)HT} | x \rangle$$

where H is the Hamiltonian. We can rewrite (1.3) in the following way:

$$\begin{aligned} F(x, x', T) &= \langle x' | e^{-(i/\hbar)H(T-t_{N-1})} e^{-(i/\hbar)H(t_{N-1}-t_{N-2})} \dots e^{-(i/\hbar)Ht_1} | x \rangle \\ &= \int \langle x' | e^{-(i/\hbar)H(T-t_{N-1})} | x_{N-1} \rangle \langle x_{N-1} | e^{-iH(t_{N-1}-t_{N-2})/\hbar} | x_{N-2} \rangle \\ &\quad \times \dots \times \langle x_1 | e^{-(i/\hbar)Ht_1} | x \rangle dx_{N-1} \dots dx_1 \end{aligned}$$

It is easy to check that as all time intervals $t_{j+1} - t_j \rightarrow 0$ we obtain:

$$\begin{aligned} &\langle x_{j+1} | e^{-(i/\hbar)H(t_{j+1}-t_j)} | x_j \rangle_{t_{j+1} \rightarrow t_j \rightarrow 0} \\ &\quad \left(2\pi i \frac{\hbar}{m} (t_{j+1} - t_j) \right)^{-1/2} \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m}{2} \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{t_{j+1} - t_j} - v(x_j) (t_{j+1} - t_j) \right\} \end{aligned}$$

After substitution of (1.5) into (1.4) we obtain (1.2). Notice also that without the potential v the formula (1.5) is exact for any value $t_{j+1} - t_j$ and describes the propagation of a free particle.

In order to establish the analogy with classical statistical mechanics one has to consider the propagation for imaginary time T . Namely, let us look at

$$Z(x, x', T) = \langle x' | e^{-(HT/\hbar)} | x \rangle = F(x, x', -iT)$$

We can repeat the splitting procedure again with the only difference that the t_j in (1.4) will acquire an extra factor $-i$. In this way we obtain:

$$Z(x, x', T) = \int_{\substack{x(0)=x \\ x(T)=x'}} \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^T \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + v(x(t)) \right) dt \right\}$$

which is to be understood in the same way as (1.1). The mnemonic rule for passing from (1.1) to (1.7) is very simple: consider the expression:

$$i \int_0^{iT} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - v(x(t)) \right) dt$$

and introduce $t = -i\tau$. We obtain:

$$(1.8) = - \int_0^T \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + v(x(\tau)) \right\} d\tau$$

The derivation (1.9) shows also that we have even more freedom in computing the functional integral. Namely, we can chose the splitting points $\{t_j\}$ to lie on an arbitrary contour in the complex plane, and therefore time not only can be imaginary but also can go along some complex path (provided that the convergence condition for (1.5), $\text{Im } \Delta t < 0$, is satisfied). For some problems this freedom is very useful. At the moment, however, we are interested in a different aspect of all this. Namely, that formula (1.9) has an important physical interpretation. Let us consider an elastic string of length T and tension m with the ends fixed at x and x' . Suppose that this string stays in an external potential $v(x)$. The potential energy of such a string will be given by:

† We put $\langle x' | x \rangle = \delta(x' - x)$

$$\mathcal{E}_{\text{pol}}[x(t)] = \int_0^T \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + v(x(\tau)) \right\} d\tau$$

Notice, again, that now τ is not a time but the length of the elastic string. According to the Boltzmann principle, the classical partition function of the string is proportional to:

$$Z \sim \int \mathcal{D}x(t) e^{-\beta \mathcal{E}_{\text{pol}}[x(t)]}$$

(β being the inverse temperature), (we have omitted the contribution from the kinetic energy, since in classical statistical mechanics it factors out and does not depend on x and x'). Comparison of (1.11) and (1.9) shows the first analogy between classical statistical mechanics and quantum mechanics: The transition amplitude for a quantum particle for the time ($-iT$) is equal to the classical partition function for a string of length T computed at the value of $\beta = 1/\hbar$.

The second analogy follows from the fact that the quantum partition function for the particle is given by $Z_{\text{qu}} = \text{Tr } e^{-\beta H}$ and hence:

$$Z_{\text{qu}} = \int dx F(x, x, -i\beta\hbar)$$

Therefore our second rule is that in the quantum case the inverse temperature acts as imaginary time.

Our derivation of these analogies was technical. I feel that there are deep reasons for them, connected with the properties of space-time. Although no real explanation exists, I shall give some comments on this below, when discussing gravity. At the moment our aims are more modest—we are going to exploit these analogies in concrete problems. It is quite clear that, although we have derived everything for one particle, both of our analogies are true for an arbitrary number of degrees of freedom.

14.1.2 1.2 . Global and Local Symmetries. Preliminary Description

Elementary particles existing in nature resemble very much excitations of some complicated medium (ether). We do not know the detailed structure of the ether but we have learned a lot about effective lagrangians for its low energy excitations. It is as if we knew nothing about the molecular structure of some liquid but did know the Navier-Stokes equation and could thus predict many exciting things. Clearly, there are lots of different possibilities at the molecular level

leading to the same low energy picture. For theoretical purposes we can take any model we like if it has desirable low energy properties.

In this section we shall discuss the most fundamental symmetry properties of particle physics in context of such specially chosen models. Perhaps the most important discovery of modern particle physics is the gauge principle. According to it, all interactions in nature arise from the claim that the Lagrangian has to be invariant under local symmetry transformations, i.e. symmetry rotations that may be different at different space-time points. It is remarkable that this claim predicts the low energy structure of the Lagrangian.

The first (and most complicated) example of this phenomenon was general relativity, in which, due to the presence of the gravitational field, it is possible to perform Lorentz rotations, different at each point. The second (and easiest) example was quantum electrodynamics, in which the gauge group is abelian (the arbitrariness of the phase of the electron wave function). And lastly, we have the Yang-Mills fields, which are supposed to mediate strong and weak

interactions. The study of the dynamics of gauge fields is the most important problem of modern physics.

Using the analogies described in the preceeding section, we shall first examine certain classical systems, and then formulate results in the language of particle theory.

14.1.3 1.3 Discrete Global Symmetries

Let us begin with the case of global (nongauge) symmetries. The simplest example is the well-known Ising model. Its partition function is given by:

$$Z = \sum_{\{\sigma_x\}} e^{-\beta \mathcal{E}[\sigma_x]}$$

$$\mathcal{E}[\sigma_x] = - \sum_{(x,\delta)} \sigma_x \sigma_{x+\delta}$$

Here x denotes a site of a cubic lattice, δ is a unit vector connecting this site with one of its nearest neighbours and the variable σ_x is ± 1 . It is clear that the system is invariant under the Z_2 group: $\sigma_x \rightarrow -\sigma_x$. If the dimensionality of the $\mathbf{x}$ space is more than 1, the system (1.13) has two different phases. In the high temperature (small β) phase the Z_2 symmetry is unbroken and we do not have long range order. By that I mean that if one considers a large but finite system and fixes the value of σ_x at the boundary B by the condition:

$$\sigma_x|_{x \in B} = 1$$

we have the average value of $\langle \sigma_x \rangle$ inside the system vanishing as the size of the system goes to infinity. To prove this, let us compute the correlation function in the small β limit. We have:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_0 \sigma_R \rangle &= Z^{-1} \left(\sum_{\sigma_x} e^{\beta \sum \sigma_x \sigma_{x+\delta}} \sigma_0 \sigma_R \right) \\ &\approx \beta^{|R|} Z^{-1} \left(\sum_{\sigma_x} \sigma_0 (\sigma_0 \sigma_\delta) \cdots (\sigma_{R-\delta} \sigma_R) \sigma_R \right) \\ &= \beta^{|R|} \end{aligned}$$

(In (1.15) we have expanded the exponent in β and left the lowest nonvanishing order obtained by the string of $\beta(\sigma_x, \sigma_{x+\delta})$ along the shortest path connecting the points 0 and $\mathbf{R}$). We conclude that, since the correlation length is small, being of the order $(\log(1/\beta))^{-1}$, the influence of the boundary condition inside the system must also be small. So, one expects that for small β :

$$\langle \sigma_x \rangle \sim e^{-L \log(1/\beta)} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

(L being the size of the system).

Now let us look at the case of large β (low temperature phase). The maximal contribution to (1.13) in this case will be given by the configuration with all $\sigma_x = 1$. The probability for a spin to flip is of the order of $e^{-4\mathcal{D}\beta}$, so one expects:

$$\langle \sigma_x \rangle = 1 - O(e^{-4g\theta})$$

Here $\mathcal{D}$ is the dimensionality of space and $2\mathcal{D}$ is equal to the number of nearest neighbours. However, (1.17) is not completely true. For $\mathcal{D} = 1$ the entropy effects spoil the order completely for all β . In order to see how this happens, let us examine a one dimensional Ising chain. In

the ground state all the spins point up. The general configuration can be described by marking the links that connect opposite spins. If there are n such links, then the energy factor of the system is just $e^{-2\beta n}$ but the number of such configurations is $2(N!/n!(N-n)!)$. (N is the total number of links). As a result:

$$Z = \sum_n 2 \frac{N!}{n!(N-n)!} e^{-2\beta n}$$

We see that the average value of n is of the order of $Ne^{-2\beta}$, giving for the correlation length $r_c \sim N/n \sim e^{2\beta}$. Therefore, for any value of β the influence of the boundary conditions is negligible and the spontaneous magnetization $\langle \sigma \rangle$ is zero. In the two dimensional case a simple and important argument due to Peierls shows that the long range order persists for large β . The essence of the argument is the following. Let us consider a "drop" of reversed spins plunged into the sea of "up" spins. If the boundary of the drop has length L , then the energy factor for the configuration is given by $e^{-2\beta L}$. At the same time the number of loops of length L that can be drawn on the lattice behaves as C^L (where C is some constant): this combinatorial result will be discussed below in great detail. Therefore, if $\beta > \frac{1}{2} \log C$, creation of these dissident drops is strongly suppressed, and we have long range order in our system. For $\beta < \frac{1}{2} \log C$ we have proliferation of drops which spoil the long range order. For $\mathcal{D} > 2$ the argument is similar. So, the conclusion is that in the case of Z_2 symmetry we have a phase transition for $\mathcal{D} \geq 2$ that separates the phases with spontaneously broken symmetry (ferromagnetic phase) and with restored symmetry (paramagnetic). We could consider in a similar way more complicated discrete groups, like Z_p ; the phase structure would be more rich in these cases, and we postpone their discussion until later.

Now, we would like to explain in more detail the relationship between the qualitative behaviour of the Ising model just discussed and quantum field theory. The statement to be proved is that, if we consider the continuum limit of the quantum field theory with the Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\hat{C}_\mu \varphi \right)^2 - v(\varphi)$$

$$v(\varphi) = v(-\varphi)$$

it will be described by the continuum limit of an Ising model, more or less independent of the detailed form of $v(\varphi)$. The general reason for this is that the neighbourhood of the second order phase transition, where the lattice system appears continuous because of the large correlation length, possesses remarkable universality properties. Usually a change in the lattice interaction changes the transition temperature but not the correlation functions expressed in terms of the correlation length r_c . This universality will be explained below by means of operator algebra. For the moment we shall content ourselves with a less sophisticated derivation. Let us first obtain a diagrammatic representation for the

Ising model correlation functions. We have the set of identities:

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{\{\sigma_x\}} \exp \left(\beta \sum_{x,x'} \mathcal{K}_{x,x'} \sigma_x \sigma_{x'} \right) \\
&= \exp \left(\beta \sum_{x,x'} \mathcal{K}_{x,x'} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_x \partial \varphi_{x'}} \right) \sum_{\{\sigma_x\}} \exp \left(\sum_x \varphi_x \sigma_x \right) \Big|_{\varphi=0} \\
&= \exp \left(\beta \sum_{x,x'} \mathcal{K}_{x,x'} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_x \partial \varphi_{x'}} \right) \exp \left(\sum_x \log (2 \cosh \varphi_x) \right) \Big|_{\varphi=0} \\
&\quad \left(\mathcal{K}_{x,x'} = \sum_{\delta} \delta_{x,x'+\delta} \right)
\end{aligned}$$

We have thus obtained the standard functional representation for the set of Feynman diagrams with the bare propagator $\beta \mathcal{K}_{x,x'}$ and vertices generated by the potential $\log(2 \cosh \varphi)$. If we define Dyson's selfenergy part Σ as the sum of diagrams that do not contain parts connected by just one line (one line irreducible) we have the Dyson equation (in momentum space):

$$\begin{aligned}
G(p) &= \frac{1}{(\beta \mathcal{K}(p))^{-1} - \Sigma(p)} = \frac{\beta \mathcal{K}(p)}{1 - \beta \mathcal{K}(p) \Sigma(p)} \\
\Sigma(p) &= \cdots + Q + Q + \cdots
\end{aligned}$$

(G is the exact propagator for the φ -field). For a generic value of β , (1.21) has singularities in $\mathbf{p}$ for $|\mathbf{p}| \sim 1$, which means that the correlation length is of the order of the lattice spacing. In that case there is no rotational symmetry and no universality in the system. However, there should exist a phase transition temperature β_c defined by the relation:

$$1 = \beta_c \mathcal{K}(0) \Sigma(0)$$

At this point we have a singularity at $\mathbf{p} = 0$ and power-like behaviour of the correlation functions. Expanding $\mathcal{K}(p)$ in p for $|\beta - \beta_c| \ll \beta_c$ we have:

$$G(p, \tau) = \frac{Z}{p^2 + \tau + \Sigma(p, \tau) - \Sigma(0, 0)}$$

(here $Z \sim 1$ is a constant that will be absorbed below into a redefinition of the φ -field, and $\tau \sim |(\beta - \beta_c) / \beta_c|$). Equation (1.23) permits us to estimate quickly the situation at the critical point. Let us take the bare Green function $G_0(p) = 1/(p^2 + \tau)$ and estimate the first diagram for Σ :

$$\Sigma^{(1)} = \ell \sim \int \frac{d^{\mathcal{D}} \mathbf{p}}{p^2 + \tau} = A + B \tau^{\mathcal{D}/2-1}$$

We see that if $\mathcal{D} > 4$ then the contribution of $\Sigma^{(1)}$ is negligible in comparison with $p^2 + \tau$; for $\mathcal{D} = 4$ the correction is of relative order $\log(1/\tau)$ and for $\mathcal{D} < 4$ we have a very large powerlike correction. Similar estimates of higher diagrams show that for $\mathcal{D} > \mathcal{D}_{\text{cr}} = 4$ they are irrelevant. Moreover, we see that the most singular terms arise from the φ^4 -type of interaction, and all higher powers in φ may be presumed to be irrelevant. This is indeed the case, as will be shown later. The detailed form of the interaction $\mathcal{K}_{x,x'}$ is also irrelevant—we have seen that it was sufficient to keep only the $\mathbf{p}^2$ -term in the expansion of $\mathcal{K}(\mathbf{p})$. All these arguments are not proofs, but they give correct guidance in complex situations and are therefore worth mentioning.

We have arrived at the following statement. Let us consider a $\mathcal{D}$ dimensional Ising model with short ranged interaction:

$$\mathcal{E} = - \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \mathcal{K}_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \sigma_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{x}'}$$

Take the temperature β close to the critical one: $|(\beta - \beta_c) / \beta_c| \ll 1$. Then all the correlation functions are the same as those for a field theory with Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 + \lambda_0 \varphi^4$$

also defined in the $\mathcal{D}$ -dimensional Euclidean space. An important point about (1.25) is that m_0^2 must be chosen in such a way that the physical mass $m_{\text{phys}}^2 = \tau \ll \Lambda^2$ (where Λ is a momentum cut-off). This last condition means that we are in the critical region for (1.25). The critical point itself corresponds to the value $m_0^2 = m_{0, \text{cr}}^2$ at which $m_{\text{phys}}^2 = 0$. In order to obtain the continuum limit (or, in other words, to renormalize the theory) we must take the limit $m_0^2 \rightarrow m_{0, \text{cr}}^2$ and $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ in such a way that m_{phys}^2 remains fixed. If this is possible, we get a rotationally invariant theory that does not depend on the way it has been defined in the cut-off region.

We also see that the theory (1.25) has two phases for $\mathcal{D} > 1$, one with $\langle \varphi \rangle = 0$ and another, the broken symmetry phase, with $\langle \varphi \rangle \neq 0$. In the case $\mathcal{D} = 1$ we have just the example we analysed in the beginning, which is the quantum mechanics of a single particle in a potential. We know that the ground state wave function must be even, and therefore $\langle \varphi \rangle = 0$. This conclusion is identical to the one we found when analysing the $\mathcal{D} = 1$ Ising model. We shall clarify this coincidence in the chapter about instantons. How does it happen that the theory with discrete variables $\sigma_x = \pm 1$ appears to be equivalent to the one with a continuum field φ ? This can be understood as follows. Let us change

the lattice spacing by fixing the value of the so-called block-spins (e.g., we fix the sum of the spins occupying the vertices of each hypercube of our lattice) and then summing over configurations with those fixed values. As a result, we obtain an effective energy that depends on the block-spins S , which are no longer restricted by $S^2 = 1$. Repeating this transformation many times we shall eventually come to an effective action depending on a continuum field φ .

There is a tendency in particle physics to consider Lagrangians like (1.25) as fundamental. It seems to me that it is more appropriate to imagine some kind of σ -like variables at very small distances, because they carry a quintessence of the symmetry properties. This difference, however, is not noticeable at large distances, and a theory of small distances (of order the Planck length) still does not exist. The last thing about the Ising model that we need to discuss in this preliminary section is its Hamiltonian form. In order to derive it, let us split the $\mathcal{D}$ dimensional coordinate $\mathbf{x}$ into a $\mathcal{D} - 1$ dimensional $\mathbf{y}$ and one "time" dimension t : $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, t)$. Let us chose the coupling in the time direction to be much stronger than in the space ones (universality should permit us to play this trick without changing the critical properties). We have:

$$Z = \sum_{\{\sigma_{\mathbf{y}, t}\}} \exp \left(\beta_1 \sum_{\mathbf{y}, \delta} \sigma_{\mathbf{y}, t} \sigma_{\mathbf{y}+\delta, t} \right) \exp \left(\beta_0 \sum_{\mathbf{y}} \sigma_{\mathbf{y}, t} \sigma_{\mathbf{y}, t+1} \right)$$

This sum can be presented in a convenient form if we introduce the so-called transfer-matrix T which is defined by:

$$\langle \{\tilde{\sigma}_{\mathbf{y}}\} | T | \{\sigma_{\mathbf{y}}\} \rangle = \exp \left(\beta_0 \sum_{\mathbf{y}} \tilde{\sigma}_{\mathbf{y}} \sigma_{\mathbf{y}} \right) \exp \left(\beta_1 \sum_{\mathbf{y}, \delta} \sigma_{\mathbf{y}} \sigma_{\mathbf{y}+\delta} \right)$$

and has the order $2^N \times 2^N$ where N is the number of $\mathbf{y}$ -points. From this definition it immediately follows that:

$$Z = \text{Tr } T^L$$

where L is the lattice length in the t -direction. Therefore it is enough to diagonalize the T -matrix in order to solve the system. For our purpose (1.27) can be further simplified. Let us use the identity:

$$\begin{aligned} e^{\beta_0 \sigma_y \sigma_y} &= \cosh \beta_0 + (\tilde{\sigma}_y \sigma_y) \sinh \beta_0 = \frac{1}{2} e^{\beta_0} (1 + \tilde{\sigma}_y \sigma_y) \\ &+ \frac{1}{2} e^{-\beta_0} (1 - \tilde{\sigma}_y \sigma_y) = \langle \{\sigma_y\} | e^{\beta_0} + e^{-\beta_0} \tau_y^x | \{\sigma_y\} \rangle \end{aligned}$$

(Here we have introduced the Pauli matrix τ_y^x , with the states $|\{\sigma_y\}\rangle$ satisfying $\tau_y^z |\{\sigma_y\}\rangle = \sigma_y |\{\sigma_y\}\rangle$). If we take $\beta_1 \ll 1$, we have:

$$\exp \left(\beta_1 \sum_{y,\delta} \sigma_y \sigma_{y+\delta} \right) \approx \langle \{\sigma_y\} | 1 + \beta_1 \sum_{y,\delta} \tau_y^z \tau_{y+\delta}^z | \{\sigma_y\} \rangle$$

From these two relations we deduce

$$\begin{aligned} T &= e^{N\beta_0} (1 + \hat{H}) \\ \hat{H} &= e^{-2\beta_0} \sum_y \tau_y^x + \beta_1 \sum_{y,\delta} \tau_{y+\delta}^z \end{aligned}$$

The critical point of the original model corresponds to the value of the parameters at which $\hat{H}$ has a vanishing gap in the spectrum $\dagger$).

14.1.4 1.4 Continuum Abelian Global Symmetries

Next in order of increasing complexity we shall consider now a system with global $O(2)$ symmetry. Instead of σ -variables with $\sigma = \pm 1$ we have to introduce at each site a two dimensional unit vector $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ and to consider the energy:

$$\mathcal{E} = - \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \mathcal{K}_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{x}'} = - \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \mathcal{K}_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \cos(\alpha_{\mathbf{x}} - \alpha_{\mathbf{x}'}) \quad (-\pi < \alpha_{\mathbf{x}} < \pi)$$

The partition function is defined by:

$$Z = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_x d\alpha_x e^{-\beta \mathcal{E}[\alpha_x]}$$

We can repeat the trick we used in Ising case in order to transform (1.33) to the theory of a continuous complex field $\phi = \phi_1 + i\phi_2$. For this purpose we write:

$$\begin{aligned} Z &= \exp \left(\beta \sum_{x,x'} \mathcal{K}_{x,x'} \frac{\partial^2}{\partial \phi_x^a \partial \phi_{x'}^a} \right) \bigg|_{\phi_x^a=0} \prod_x \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha_x \exp(\phi_x^1 \cos \alpha_x + \phi_x^2 \sin \alpha_x) \\ &= \exp \left(\beta \sum_{x,x'} \mathcal{K}_{x,x'} \left[\frac{\partial^2}{\partial \phi_x^* \partial \phi_{x'}} + \frac{\partial^2}{\partial \phi_x \partial \phi_{x'}^*} \right] \right) \\ &\quad \times \exp \left(\sum_x \log 2\pi I_0 \left(i\sqrt{\phi_x^* \phi_x} \right) \right) \bigg|_{\phi_x=0} \end{aligned}$$

(I_0 here is a Bessel function). Repeating the arguments of the previous section we find that the theory (1.33) lies in the same universality class as the theory described by the Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi + m_0^2 \phi^* \phi + \frac{1}{2} \lambda_0 (\phi^* \phi)^2$$

Again, we have no phase transition for $\mathcal{D} = 1$, and we have two different phases for $\mathcal{D} \geq 2$. The crucial difference from the Ising case is the existence of gapless excitations for all $\beta > \beta_c$, dictated by Goldstone's theorem. The physical origin of these excitations is very simple. Suppose that we have a broken symmetry, $\langle \phi \rangle \neq 0$ (we shall see that this is true for $\mathcal{D} \geq 3$). Then the states with different orientation: $\langle \tilde{\phi} \rangle = e^{i\alpha} \langle \phi \rangle$ must have the same energy. If we form a state with slowly varying $\alpha(x)$, its energy will go to the vacuum value as the wave vector tends to zero. Hence, there should be no gap in the spectrum. To see this more formally let us introduce the conserved current $\mathcal{J}_\mu$:

$$\mathcal{J}_\mu = \frac{1}{i} \left[\phi^* \frac{\partial}{\partial x_\mu} \phi - \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \phi^* \right) \phi \right]$$

for which we have the Ward identity:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \langle \mathcal{J}_\mu(x) \phi(y) \rangle = i \delta(x - y) \langle \phi(y) \rangle$$

If we pass to the momentum representation

$$q_\mu \langle \mathcal{F}_\mu(q) \phi(-q) \rangle = \langle \phi(0) \rangle$$

we conclude by taking $q \rightarrow 0$ that $\langle \mathcal{F}_\mu(q) \phi(-q) \rangle$ must be singular in this limit, having a singularity:

$$\langle \mathcal{L}_\mu(q) \phi(-q) \rangle_{q \rightarrow 0} = \langle \phi(0) \rangle q_\mu / q^2 + \dots$$

For $\mathcal{D} = 2$ the situation is more tricky. It is quite clear in this case that the propagator of the n -field of the model (1.33) cannot have a Goldstone pole. Indeed, since

$$1 = \langle n^2(0) \rangle = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \langle n(q) n(-q) \rangle$$

such a pole in the right hand side would lead to an infrared contradiction. The answer is that the pole is softened and replaced by some powerlike singularity. There is also no naive order parameter and no true symmetry breaking in this case: $\langle \mathbf{n} \rangle = 0$. Nevertheless a phase transition at some β_c does take place and the observable properties of the phases are quite different from each other. We shall discuss them in detail in later sections. We observe here a feature, characteristic for all continuous symmetries. Namely, we have two critical dimensions - the upper one, ($\mathcal{D} = 4$) at which fluctuations at the phase transition point become irrelevant; and the lower one, ($\mathcal{D} = 2$) at which Goldstone bosons start to interact strongly.

14.1.5 1.5 Non-Abelian Global Symmetries

There are several Non-Abelian generalizations of the preceding models. The most straightforward possibility is to consider again the expression (1.32) for the energy but to take the unit vectors $\mathbf{n}_x$ to be N -dimensional. The symmetry group in this case will be $O(N)$. The

† This condition implies that $e^{-2\beta_0} \sim \beta_1 \ll 1$ which allows us to take for $\hat{H}$ the approximation linear in τ_y^x .

major qualitative difference from the Non-Abelian case reveals itself for $\mathcal{D} = 2$. Due to the strong interaction of the Goldstone bosons, they acquire an energy gap for all values of β and the Non-Abelian system does not have a phase transition at all. At our preliminary level this qualitative difference can be explained as follows. In the continuum limit the Lagrangian (1.32) for $N = 3$ has the form:

$$\mathcal{L} \sim (\partial_\mu \mathbf{n})^2 = (\partial_\mu \theta)^2 + \sin^2 \theta (\partial_\mu \varphi)^2$$

(here θ, φ -are polar and azimuthal angles). We conclude from (1.41) that the scattering amplitude F for the Goldstone bosons behaves like $F \sim k^2$ where K is a characteristic momentum. The first radiative correction to this amplitude is given by:

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= \mathcal{F}^2 \frac{1}{k^4} k^{\mathcal{D}} \\ \frac{F^{(1)}}{F} &\sim k^{\mathcal{D}-2} \text{ for } \mathcal{D} \neq 2 \\ \frac{F^{(1)}}{F} &\sim \log \frac{1}{k} \text{ for } \mathcal{D} = 2 \end{aligned}$$

(The last estimate is a consequence of the logarithmic divergence of dimensionless integrals.)

This result shows that the interaction is infrared-strong for $\mathcal{D} = 2$ (in contrast with the Abelian case where $F \sim k^4$).

It is a matter of more complicated analysis to see the consequences of this fact. We shall devote a special chapter to it.

For $\mathcal{D} > 2$ the system has a phase transition and spontaneous symmetry breaking.

Another important Non-Abelian case is described by having group elements attached to each link. Let us consider matrices $g \in G$ where G is some compact Lie group. The energy is given by:

$$\mathcal{E} = - \sum_{x, x'} \mathcal{K}_{x, x'} \text{Tr} (g_x^{-1} g_{x'})$$

The partition function is

$$Z = \int \prod_x d\mu(g_x) e^{-\beta \mathcal{E}}$$

(where $d\mu(g)$ is the Haar measure on the group).

The energy $\mathcal{E}$ is invariant under $G \otimes G$ transformations, described by the formula:

$$g_x \rightarrow u g_x v; \quad u, v \in G$$

The qualitative features of this theory are the same as for the $O(N)$ model.

There are also many other Non-Abelian models in which fields belong not to the group itself but to some coset space G/H . They have some interesting features which we touch upon later.

14.1.6 1.6 Discrete Gauge Symmetries

Let us start from the discrete gauge group. The basic variables are quantities $\sigma = \pm 1$. But in this case they are attached to the links and not to the sites of the lattice. If we denote a link by the pair $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$, where x is its beginning and α its direction, the expression for the energy has the form:

$$\mathcal{E} = - \sum_{x,\alpha,\beta} \sigma_{x,\alpha} \sigma_{x+\alpha,\beta} \sigma_{x+\beta,\alpha} \sigma_{x,\beta}$$

(Here α is a unit vector in the direction α). The rule, according to which (1.46) is constructed, is quite transparent. We have "1-forms" or "vector potentials" $\sigma_{x,\alpha}$ associated with links. Then we take four links, forming a plaquette, and take a corresponding product around the given plaquette. As a result we obtain a "2-form" or "field strength"-the quantity, associated with each plaquette. The most remarkable property of this construction is that these 2-forms are gauge invariant. Indeed, if we change

$$\sigma_{x,\alpha} \rightarrow \eta_x \sigma_{x,\alpha} \eta_{x+\alpha}$$

(with $\eta_x = \pm 1$) the field strength is unchanged:

$$f_{x,\alpha\beta} = \sigma_{x,\alpha} \sigma_{x+\alpha,\beta} \sigma_{x+\beta,\alpha} \sigma_{x,\beta} \rightarrow f_{x,\alpha\beta}$$

Therefore, the action has the symmetry $(Z_2)^N$ where N is the number of lattice sites. We conclude that while in the global Z_2 case the energy $\mathcal{E}$ had precisely two degenerate minima (all $\sigma_x = +1$ or -1), in the gauge case the degeneracy is enormous, namely any configuration which is a "pure gauge":

$$\sigma_{x,\alpha} = \eta_x \eta_{x+\alpha}$$

with arbitrary $\{\eta_x\}$ is the ground state.

These peculiar properties imply, first of all that there could be no order parameter in such systems, $\langle \sigma_{x,\alpha} \rangle = 0$ and moreover, only gauge invariant quantities are nonzero. This follows from the fact, that by fixing the values of $\sigma_{x,\alpha}$ at the boundary of our system we do not spoil gauge invariance inside it. All this does not have any deep influence on the phase structure of gauge systems. Different phases are easily distinguished by the different behaviour of gauge invariant correlation functions. The situation is reminiscent of what we had in the $O(2)$ global model, where the second order phase transition took place without explicit violation of symmetry.

The physical properties of the Z_2 -gauge system are the following: for $\mathcal{D} = 2$ the model is trivially solved, being equivalent to the decoupled set of $\mathcal{D} = 1$ Ising models (which follows from the fact that by the transformation (1.47) we can easily set $\sigma_{x,1} = 1$), and therefore has no phase transitions. For $\mathcal{D} = 3$ we shall show that it is equivalent to the $\mathcal{D} = 3$ Ising model (by Kramers-Wannier duality.) This model is of great interest since it describes most of the $\mathcal{D} = 3$ phase transitions in Nature. We shall devote a special chapter to its study. Now, for $\mathcal{D} \geq 4$ numerical studies of Z_2 -models show that there is a first order transition in this case. That means that the correlation length never becomes infinite and the theory does not have a continuum limit.

14.1.7 1.7 O(2) Gauge Systems

In this case the system is constructed of unit vectors (which we write in complex form) attached to the links, $\phi_{x,\alpha} = e^{iA_{x,\alpha}}$ ($-\pi < A_{x,\alpha} \leq \pi$). The expression for the energy is:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= - \sum_{x,\alpha,\beta} \frac{1}{2} (\phi_{x,\alpha} \phi_{x+\alpha,\beta} \phi_{x+\beta,\alpha}^* \phi_{x,\beta}^* + \text{c.c.}) \\ &= \sum_{x,\alpha,\beta} \cos(A_{x,\alpha} + A_{x+\alpha,\beta} - A_{x+\beta,\alpha} - A_{x,\beta}) \end{aligned}$$

The invariance properties of (1.49) are given by:

$$\phi_{x,\alpha} \rightarrow e^{i\varphi_x} \phi_{x,\alpha} e^{-i\varphi_{x+\alpha}}$$

or

$$A_{x,\alpha} \rightarrow A_{x,\alpha} + \varphi_x - \varphi_{x+\alpha}$$

(with arbitrary $\{\varphi_x\}$). The formal continuum limit of (1.49) would give a familiar expression:

$$\mathcal{E} = \text{const.} + \frac{1}{2} \int dx F_{\alpha\beta}^2$$

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

Should we conclude from this that the continuum limit of our model is just the free Maxwell field? To understand what goes on, let us compare the situation with the one described by (1.32). In the latter case the energy in the formal continuum limit is:

$$\mathcal{E} = \text{const.} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \alpha)^2$$

It describes a massless scalar field, which is nothing but the Goldstone field associated with symmetry breaking. In this Abelian case the perturbative interactions (described by the omitted terms $\sim (\partial_\mu \alpha)^4$) are irrelevant as we saw. But, in the chapter devoted to instantons, we shall show that due to nonperturbative effects, associated with vortices, there exists a phase transition after which the field α acquires a mass. So, we conclude that for $\beta > \beta_c$ the system is indeed described by the massless free Goldstone field, that in the critical region $|\beta - \beta_c| \ll \beta_c$ we have some complicated interacting continuum theory with both massless and massive particles, and that for $\beta < \beta_c$ the massless particles disappear. All these effects are nonperturbative. Notice also an interesting phenomenon for $\mathcal{D} = 2$: we do not strictly speaking have spontaneous symmetry breaking, and the ϕ -field from (1.35) has the property:

$$\langle \phi \rangle = 0$$

Nevertheless we do have massless Goldstone modes, described by $\alpha(x)$, which disappear at the phase transition point. One of the possible ways to understand this is to introduce the decomposition

$$\phi(x) = \rho(x) e^{i\alpha(x)}$$

It is possible to show that

$$\langle \rho(x) \rangle_{V \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \beta < \beta_c \\ \text{const.}, & \beta > \beta_c \end{cases}$$

(where V is the volume of our system), all of which is quite analogous to what we have in the case (1.49) and (1.51). If $\mathcal{D} = 4$, then for large β we have the theory of free photons. We see that these photons are in some sense Goldstone fields associated with gauge invariance, although this gauge invariance is never strictly broken. As we decrease β , at some β_c we shall have a phase transition due to instanton effects. For $\beta < \beta_c$ the theory will contain only massive excitations. For $\mathcal{D} = 3$ the situation is even more interesting. It will be shown that in this case nonperturbative effects extinguish the photons for all β and we have only one, massive phase. Therefore, the formal continuum limit (1.51) for $\mathcal{D} = 3$ has nothing to do with reality. This is just one of many examples in which owing to quantum corrections the effective Lagrangian differs drastically from the classical one.

It remains to say here that for $\mathcal{D} = 2$ the gauge model is trivial and for $\mathcal{D} > 4$ it presumably has a first order phase transition.

14.1.8 1.8 Non-Abelian Gauge Theories

In this case we associate with each link a matrix of some compact Lie group $G : B_{x,\alpha} \in G$. The energy is given by:

$$\mathcal{E} = - \sum_{x,\alpha,\beta} \frac{1}{2} [\text{Tr} (B_{x,\alpha} B_{x+\alpha,\beta} B_{x+\beta,\alpha}^{-1} B_{x,\beta}^{-1}) + \text{c.c.}]$$

The invariance property of (1.56) is:

$$B_{x,x} \rightarrow h_x^{-1} B_{x,\alpha} h_{x+\alpha}$$

In order to find the naive continuum limit one takes $B_{x,\alpha}$ to be close to the identity element:

$$B_{x,\alpha} \simeq I + A_{x,\alpha}$$

with $A_{x,\alpha}$ small and slow varying. That gives:

$$\mathcal{E} = \text{const} - \frac{1}{2} \int \text{Tr} (F_{\alpha\beta}^2) dx$$

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta]$$

which is known as the Yang-Mills action. Just as in the case of global symmetries for $\mathcal{D} = 2$, in the gauge case at $\mathcal{D} = 4$ the perturbative interaction is important. This is demonstrated by the estimates:

$$F \sim X \sim 1 \quad F^{(1)} \sim \sim k^{\mathcal{D}-4}$$

$$F^{(1)} F \sim \log(1/k) \quad \text{for} \quad \mathcal{D} = 4$$

(Here F is an amplitude for the scattering of A_α -quanta and k is a characteristic wavelength.) Therefore, even for large β the true infrared behaviour has nothing to do with the naive continuum limit. In fact we shall give arguments that the theory has a mass gap and a rather peculiar spectrum for large β . Investigation of this limit is in fact a central problem of the theory of strong interactions. This is because the theory (1.56) reaches its continuum limit at $\beta \rightarrow \infty$ only, and there are numerous pieces of evidence that this continuum limit for $G = SU(3)$ describes the world of strong interactions. Most of our efforts in the next chapters will be devoted to this problem.

Here it remains to say that for $\mathcal{D} = 3$ the theory has similar properties, namely no phase transition for any β and a massive phase at $\beta \rightarrow \infty$. For $\mathcal{D} > 4$ we have first order transitions.

We shall pass now to a more systematic study of some of the properties listed above.

14.2 Asymptotic Freedom and the Renormalization Group

14.2.1 2.1 Principal Chiral Fields

In this section we shall study the large β limit for the $\mathcal{D} = 2$ principal chiral field described by the Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e_0^2} \text{Tr} (\hat{\partial}_\mu g^{-1} \hat{\partial}_\mu g)$$

$$(1/e_0^2 = \beta \gg 1 \quad \text{and} \quad g \in G)$$

As we discussed in Chapter 1, the infrared interaction of the massless particles described by (2.1) is logarithmically strong. It is our aim now to reveal the structure of this logarithmic interaction.

Let us study the effective Lagrangian which arises from (2.1) in the loop approximation. In order to find it we write the quantum field $g(x)$ in the form:

$$g(x) = h(x) \cdot g_{\text{cl}}(x)$$

where $g_{\text{cl}}(x)$ is some classical solution for the Lagrangian (2.1), namely

$$\begin{aligned}\hat{c}_\mu R_\mu^{\text{cl}} &= 0 \\ R_\mu &= \hat{c}_\mu g \cdot g^{-1}\end{aligned}$$

Our programme is to integrate over the field $h(x)$ so as to obtain an effective action depending on $g_{\text{cl}}(x)$. This approach is more or less standard in field theory but it requires some clarification. At the first sight, due to the invariance properties of the integration measure, $\mathcal{D}h(x) = \mathcal{D}(h(x)g_{\text{cl}}(x))$, the result of such integration would seem not to be dependent on $g_{\text{cl}}(x)$ at all. Also it is not quite clear, what kind of

classical solutions must be included. Both of these questions can be answered if we consider a finite size system and fix the value of $g(x)$ at the boundary Γ :

$$g(x)|_\Gamma = g(\xi) \quad \xi \in \Gamma$$

We are considering the functional

$$\Psi[g(\xi)] = \int_{g(x)|_{\Gamma}=g(\xi)} \mathcal{D}g(x) e^{-(1/\hbar)S[g(x)]}$$

(where S is the action). This functional is just the Euclidean analogue of the Shrödinger wave function. The classical limit $\hbar \rightarrow 0$ would correspond to taking the minimum of the action S with the Dirichlet boundary conditions (2.4). Integration over $h(x)$ in the decomposition (2.2) corresponds to the inclusion of quantum fluctuations. It is clear from the above discussion that we should fix the boundary condition for h :

$$h(x)|_\Gamma = I$$

To sum up, we shall compute the integral over h and obtain an effective action depending on $g_{\text{cl}}(x)$. It must be understood, however, that $g_{\text{cl}}(x)$ is not an independent variable: in fact all classical solutions are parametrized by their boundary values $g(\xi)$ (ξ is $\mathcal{D} - 1$ -dimensional). So, we are effectively computing the Ψ -functional (2.5), which as we already said is an analogue of the Shrödinger wave function and, on the other hand is analogous to the on-shell amplitudes of the Minkowskian theory (they also depend on $\mathcal{D} - 1$ -dimensional fields).

All this information about boundary conditions and Ψ -functionals can be kept subconsciously so far as we are interested in infinite systems. Actually, most often we need not bother to express $g_{\text{cl}}(x)$ through $g(\xi)$. Substituting (2.2) into (2.1) we get:

$$\begin{aligned}L_\mu &= g^{-1} \partial_\mu g = L_\mu^{\text{cl}} + g_{\text{cl}}^{-1} (h^{-1} \partial_\mu h) g_{\text{cl}} \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{2e_0^2} \text{Tr} (L_\mu^2) \\ &= -\frac{1}{2e_0^2} \text{Tr} (L_\mu^{\text{cl}})^2 + \frac{1}{2e_0^2} \text{Tr} (\partial_\mu h^{-1} \partial_\mu h) \\ &\quad + \frac{1}{e_0^2} \text{Tr} (R_\mu^{\text{cl}} (h^{-1} \partial_\mu h)), \quad R_\mu^{\text{cl}} = (\partial_\mu g_{\text{cl}}) g_{\text{cl}}^{-1}\end{aligned}$$

If we want to examine only one loop corrections to the classical action, we have to consider only small fluctuations of the matrix h . We can write:

† A principal chiral field is one which defines the principal bundle over the base space.

$$h = e^\phi \simeq 1 + \phi + \frac{1}{2}\phi^2$$

(where ϕ belongs to the Lie algebra of G). Substitution of (2.8) into (2.7) gives:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\text{cl}} - \frac{1}{2e_0^2} \text{Tr} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2e_0^2} \text{Tr} (R_\mu^{\text{cl}} [\phi, \partial_\mu \phi]) + O(\phi^3)$$

(we have omitted the term $R_\mu^{\text{cl}} \partial_\mu \phi$ because of the equation of motion $\partial_\mu R_\mu^{\text{cl}} = 0$).

Now the term in the effective action which is quadratic in R_μ will be given by the Feynman diagram [†]

$$\begin{aligned} -S_{\text{eff}} &= \sim_q \underbrace{(p+q)}_p = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} (R_\mu^{\text{cl}}(q))_A (R_\nu^{\text{cl}}(-q))_B \\ &\times \frac{1}{2} f^{ACD} f^{BCD} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{(2p+q)_\mu (2p+q)_\nu}{8p^2(p+q)^2} \end{aligned}$$

If we extract the ultraviolet divergent contribution from (2.10) the formula takes the form:

$$\begin{aligned} -S_{\text{eff}} &= \frac{1}{2} \int d^2 x (R_\mu^{\text{cl}}(x))^A (R_\nu^{\text{cl}}(x))^A \times \frac{1}{2} C_v(G) \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{p_\mu p_\nu}{p^4} \\ &+ \text{finite part} \\ &= \left(\frac{c_v(G)}{4\pi} \log \Lambda \right) \cdot \frac{1}{2} \int \text{Tr} (\partial_\mu g_{\text{cl}}^{-1} \partial_\mu g_{\text{cl}}) d^2 x \\ &+ \text{finite part} \end{aligned}$$

(Λ is a momentum cut-off).

We see that if we introduce the renormalized coupling constant by the formula:

$$\frac{1}{e^2} = \frac{1}{e_0^2} - \frac{C_v(G)}{4\pi} \log \Lambda$$

the effective action will be finite in the given order. The result of the above computation can be interpreted in two different ways. The most naive interpretation has already been given: namely we compute the effective action and see that the ultraviolet divergence in it can be absorbed into a redefinition of the coupling constant. Another interpretation is the following. Let us suppose that we have a theory with the cut-off Λ (which is of the order of the inverse lattice spacing). If we integrate out the fields $h(x)$ with the wave vectors $\bar{\Lambda} < p < \Lambda$ we shall obtain the effective action which in the low energy limit has again the form (2.1) but with a renormalized value of $e_0^2, e_0^2(\bar{\Lambda})$:

$$e_0^2(\bar{\Lambda}) = e_0^2(\Lambda) + \frac{e_0^4}{4\pi} C_v(G) \log \frac{\Lambda}{\bar{\Lambda}} = \tilde{e}_0^2$$

This formula follows directly from (2.11), provided that we restrict the $\mathbf{p}$ -integration by the condition $\bar{\Lambda} < |\mathbf{p}| < \Lambda$. As a result we conclude that the physical theory, formulated with the cut-off Λ and the bare charge e_0^2 must be equivalent (for small momenta $|\mathbf{p}| \ll \Lambda$) to the one with the cut-off $\bar{\Lambda}$ and the specially chosen new bare charge $\tilde{e}_0^2$. This statement is called renormalizability and the transformations from e_0^2 to $\tilde{e}_0^2$ and from Λ to $\bar{\Lambda}$ the renormalizability group. The formula (2.13), as is seen from its derivation, is correct provided that:

[†] We have introduced the generators t^A of the fundamental representation of the Lie algebra of the group G : $[t^A, t^B] = f^{ABC} t^C$, $\text{Tr } t^A t^B = -\frac{1}{2} \delta^{AB}$; $\phi \equiv \phi^A t^A$, $R_\mu \equiv R_\mu^A t^A$, f^{ABC} are the structure constants of this algebra. Notice that $f^{ABC} f^{DBC} = C_v(G) \delta^{AD}$.

$$e_0^2 \log \frac{\Lambda}{\tilde{\Lambda}} \ll 1 \quad e_0^2 \ll 1$$

Nothing prevents us from repeating the procedure and passing from π to $\tilde{\Lambda} < \tilde{\Lambda}$ etc.

The most important consequence of renormalizability is that it controls the momentum dependence of different physical quantities. Let us consider as an example the behaviour of the effective charge $e^2(p)$ for the fluctuations with momentum p . This quantity can be defined in different ways. One of the possibilities is to consider the four point function with all momenta equal to p . There are many other options and we shall comment on this ambiguity later.

Since our theory does not contain any dimensional parameter except for Λ , we must have:

$$e^2(p) = e^2(\log(\Lambda/p), e_0^2)$$

Let us express $e^2(p)$ in terms of $e^2(\mu)$, where μ is some fixed value of the momentum. Inverting (2.15) we have:

$$e_0^2 = e_0^2(\log(\Lambda/\mu), e^2(\mu))$$

Substitution of (2.16) into (2.15) gives:

$$e^2(p) = e^2(\log(p/\mu), e^2(\mu), \log(\Lambda/\mu))$$

The first thing renormalizability tells us is that (2.17) actually does not depend on its last argument, since we can change Λ and compensate for it by changing e_0^2 without changing $e^2(p)$. Hence:

$$e^2(p) = e^2(\log(p/\mu), e^2(\mu))$$

We see that $e^2(p)$, being expressed in terms of $e^2(\mu)$, does not contain any divergences and does not depend on the structure of the theory at distances of the order of lattice spacing. But this is not the end of the story. Actually we have a further constraint on (2.18) which follows from the fact that the point μ was quite arbitrary. Hence, just as it was with Λ , it must be possible to compensate for a shift in μ by changing $e^2(\mu)$. We have, therefore, a functional constraint on $e^2(p)$ which is quite easy to solve. Namely, it is clear that:

$$e^2(p) = f(\log(p/\mu) + g(e^2(\mu)))$$

with

$$f(g(x)) = x$$

The structure (2.19) makes the above property explicit: a shift in $\log(p/\mu)$ is obviously compensated by a change of $e^2(\mu)$. The formula (2.20) follows from the fact that $e^2(p)|_{p=\mu} = e^2(\mu)$. The relation (2.19) presents a very strong constraint on the structure of momentum dependence. It is not fulfilled in a fixed order of perturbation theory and permits us to obtain nonperturbative expressions.

It follows from (2.19) that in a theory without dimensional parameters a so-called dimensional transmutation takes place:

$$e^2(p) = f(\log(p/\lambda)) \quad \lambda = \mu e^{-g(e^2(\mu))}$$

All quantities depend on a universal correlation length λ^{-1} which should be kept fixed as the lattice spacing Λ^{-1} goes to zero. No other arbitrary parameters enter into the theory. (The last is not generally true: there are theories with several effective charges, like massless scalar

QED, in which physical quantities depend on the ratios of these charges). In order to see how (2.19) improves perturbation theory, let us write it in differential form:

$$\frac{de^2(p)}{d \log(p/\mu)} = \beta(e^2(p))$$

$$\beta(x) = f'(g(x))$$

This is the Gell-Mann-Low equation. Iterations of its solution in $\log(p/\mu)$ give:

$$e^2(p) \simeq e^2(\mu) + \beta(e^2(\mu)) \log(p/\mu) + O(\log^2(p/\mu))$$

At the same time, from (2.13) we deduce:

$$e^2(p) \simeq e^2(\mu) - \frac{C_v(G)}{4\pi} e^4(\mu) \log(p/\mu)$$

Comparison gives:

$$\beta(e^2) = -\frac{C_v(G)}{4\pi} e^4 + O(e^6)$$

Solving the differential equation (2.22) we get:

$$e^2(p) = \frac{e^2(\mu)}{1 + \frac{C_v(G)}{8\pi} e^2(\mu) \log\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)}$$

It is easy to check that while (2.24) does not have the form (2.19), (2.25) does (with $f(x) = 4\pi/C_v(G) \cdot x$). Another useful expression for $e^2(p)$ is:

$$e^2(p) = \frac{e_0^2}{1 - \frac{C_v(G)}{8\pi} e_0^2 \log \frac{\Lambda^2}{p^2}}$$

(Λ is the inverse lattice spacing, $p \ll \Lambda$).

What is the range of applicability of (2.25) and (2.26)? It is defined by the fact that we have neglected all higher powers in $e^2(p)$ in the expression for the β -function. Therefore the condition is:

$$e^2(p) \ll 1$$

The real meaning of this improvement to perturbation theory, invented by Gell-Mann and Low, is that it replaces the expansion in the bare charge e_0^2 which may not be small by the expansion in $e^2(p)$, which in many important cases is small.

For example if we rewrite (2.25) as:

$$e^2(p) = \frac{8\pi}{C_v(G)} \frac{1}{\log\left(p^2/\hat{\lambda}^2\right)}$$

we conclude that this is a true asymptotic expansion for $e^2(p)$ when $p \gg \lambda$. As we shall see, in this region all correlation functions can be computed for the reason that the interaction is small. This ultraviolet smallness is called asymptotic freedom. For $p \leq \lambda$ perturbation theory is untrue and qualitatively different methods are needed. They will be discussed in later chapters.

Let us proceed to the computation of the correlation functions. Take as an example:

$$\mathcal{D}(x-y) = \langle \text{Tr}(g^{-1}(x)g(y)) \rangle$$

The tactic is again the following. Let us integrate over rapid fluctuations with $\tilde{\Lambda} < |\mathbf{p}| < \Lambda$ and use the renormalization group argument. If we write

$$g(x) = e^{\phi(x)} g_0(x) \simeq \left(1 + \phi(x) + \frac{1}{2} \phi^2(x) \right) g_0(x)$$

and integrate over the ϕ with the wavelengths in our interval we get: †

$$\mathcal{D}(p) = \mathcal{D}_0(p) \left(1 - \frac{C_2}{\pi} e_0^2 \log \frac{\Lambda}{\tilde{\Lambda}} \right)$$

From (2.31) we deduce by the repetition of the arguments leading to the Gell-Mann-Low equation, that if we set

$$\mathcal{D}(p) = d(p)/p^2$$

then:

$$\frac{\partial \log d(p)}{\partial \log(\bar{p}/\mu)} = \gamma(e^2(p))$$

where

$$\gamma(e^2) = \frac{C_2}{\pi} e^2 + O(e^4)$$

Integrating (2.33) we get:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(p) &= \frac{1}{p^2} \left(1 + \frac{C_v e^2(\mu)}{8\pi} \log(p^2/\mu^2) \right)^{4C_2/C_v} \\ &\sim \frac{1}{p^2} \left(\log \left(\frac{p^2}{\lambda^2} \right) \right)^{4C_2/C_v} \quad \text{for } p \gg \lambda \end{aligned}$$

which is the desired answer. Of course, the range of applicability is again $p \gg \lambda$.

As we said before the definition of $e^2(p)$ is ambiguous. This ambiguity leads to an ambiguity of the β -function and of the γ -function. However

the next result for any correlation function is unique - the β -, and γ ambiguities compensate each other. Moreover, the first two coefficients in the β -function are more or less universal. This can be checked by a change in the definition of $e^2(p)$. Suppose we chose:

$$\tilde{e}^2(p) = e^2(p) + C_1 e^4(p) + C_2 e^6(p) + \dots$$

and

$$\frac{d\tilde{e}^2}{d \log(p/\mu)} = \beta_1 \tilde{e}^4 + \beta_2 \tilde{e}^6 + \dots$$

On substituting (2.36) into (2.37) we get:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{e}^2}{d \log(p/\mu)} &= \frac{de^2}{d \log(p/\mu)} (1 + 2C_1 e^2 + \dots) \\ &= (1 + 2C_1 e^2 + \dots) (\beta_1 e^4 + \beta_2 e^6 + \dots) = \beta_1 e^4 + (\beta_2 + 2C_1 \beta_1) \\ &\quad \times e^6 + \dots = \beta_1 (\tilde{e}^2 - C_1 \tilde{e}^4)^2 + (\beta_2 + 2C_1 \beta_1) \tilde{e}^6 + \dots \\ &= \beta_1 \tilde{e}^4 + \beta_2 \tilde{e}^6 + \dots \end{aligned}$$

† Here we put $t^A t^A = -C_2 I$. For the fundamental representation of $G = SU(N)$: $C_2 = (N^2 - 1)/2N$; $C_v(SU(N)) = N$.

The coefficient β_3 will be changed, but up to two loop order the β -function is indeed universal. In the case when several leading coefficients of the β -function vanish, this remark relates to the first nonvanishing one. †

So, our conclusion is that the Gell-Man-Low renormalization group is a useful tool in the region where the effective charge is small. In order to use it one has to compute the coefficients before the leading powers of $\log(p/\mu)$ in physical quantities. This is usually easy in the lowest order, but becomes increasingly tedious in the higher orders, since one has to separate a non-leading contribution $\sim \log(p/\mu)$ from the leading ones $\sim (\log(p/\mu))^n$. In the asymptotically free theories the renormalization group gives order by order a small distance expansion which goes in inverse powers of $\log(p/\mu)$. For example the two loop order solution of equation (2.22) gives:

$$e^2(p) = -\frac{1}{\beta_1 \log(p/\lambda)} \left\{ 1 + \frac{\beta_2}{\beta_1^2} \frac{\log \log(p/\lambda)}{\log(p/\lambda)} + O\left(\frac{1}{\log^2(p/\lambda)}\right) \right\} \quad p \gg \lambda$$

Another useful thing to remember is that the inverse correlation length λ is expressed in terms of the bare parameters Λ, e_0 as

$$\lambda = \text{const} \cdot \Lambda (e_0^2)^{\beta_2/\beta_1^2} e_0^{1/\beta_1}$$

which is the consequence of the relations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \lambda}{\partial e_0^2} \frac{\partial e_0^2}{\partial \Lambda} &= 0 \\ \lambda &= \Lambda \phi(e_0^2) \end{aligned}$$

(the first is the renormalization condition and the second is just a naive dimensional statement). The equation (2.40) indicates a consistent limiting procedure necessary to reach the continuum limit of the theory. For the asymptotically free case ($\beta_1 < 0$) it is described by the conditions:

$$e_0 \rightarrow 0 \quad \Lambda \rightarrow \infty \quad \lambda \rightarrow \text{const}.$$

14.2.2 2.2 The n -Fields

In this section we shall consider another important example of an asymptotically-free system with a global symmetry. It is the theory of the field of an N -dimensional unit vector $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}^2 = 1$. The action is given by:

$$S = \frac{1}{2e_0^2} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2$$

In order to exploit the renormalization group, we set:

$$\mathbf{n}(x) = (1 - (\varphi)^2)^{1/2} \mathbf{n}_0(x) + \sum_{a=1}^{N-1} \varphi_a \mathbf{e}_a(x)$$

(where $\mathbf{n}_0(x)$ is a slowly varying vector and the $\{\mathbf{e}_a\}$ are orthogonal to it and to each other; φ_a represents "fast" fluctuations with $\tilde{\Lambda} < |p| < \Lambda$). The vectors ($\mathbf{n}_0, \mathbf{e}_a$) obey the relations

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathbf{n}_0 &= \sum_a B_\mu^a \mathbf{e}_a \\ \partial_\mu \mathbf{e}_a &= \sum_b A_\mu^{ab} \mathbf{e}_b - B_\mu^a \mathbf{n}_0 \end{aligned}$$

† In the general case we have freedom to redefine coupling constants, leading to Riemannian geometry in the space of coupling 'constants'.

(Here B_μ^a and A_μ^{ab} are some potentials characterizing the $\mathbf{n}_0$ -field; (2.45) is the consequence of $\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{e}_a = 0$ and $\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \delta_{ab}$). Substituting (2.44) into (2.43) gives:

$$S = \frac{1}{2e_0^2} \int \left\{ \left(\partial_\mu (1 - \varphi^2)^{1/2} - B_\mu^a \varphi^a \right)^2 + \left(\partial_\mu \varphi^a - A_\mu^{ab} \varphi^b + B_\mu^a (1 - \varphi^2)^{1/2} \right)^2 \right\} d^2x$$

Selecting quadratic terms in φ we get:

$$S^{(\text{li})} = \frac{1}{2e_0^2} \int \left\{ (\partial_\mu \varphi^a - A_\mu^{ab} \varphi^b)^2 + B_\mu^a B_\mu^b (\varphi^a \varphi^b - \varphi^2 \delta^{ab}) \right\} d^2x + \frac{1}{2e_0^2} \int (B_\mu^a)^2 d^2x$$

The logarithmic contribution to the renormalization of e_0^2 comes from the second term in (2.47). Integrating over φ with momenta

$$\Lambda < |p| < \Lambda$$

gives:

$$\begin{aligned} \langle \varphi^a \varphi^b - \varphi^2 \delta^{ab} \rangle &= \delta^{ab} [1 - (N-1)] \int_{\Lambda}^{\Lambda} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{e_0^2}{p^2} \\ &= \delta^{ab} (2-N) \frac{e_0^2}{2\pi} \log \frac{\Lambda}{\Lambda} \\ \frac{1}{\tilde{e}_0^2} &= \frac{1}{e_0^2} + \frac{N-2}{2\pi} \log \frac{\Lambda}{\Lambda} \end{aligned}$$

Recalling the arguments of the preceeding section we obtain:

$$\begin{aligned} \beta(e^2) &= -\frac{N-2}{2\pi} e^4 \\ e^2(p) &= e^2(\mu) / \left(1 + \frac{N-2}{4\pi} e^2(\mu) \log(p^2/\mu^2) \right) \end{aligned}$$

The correlation function

$$\mathcal{D}(x-y) = \langle \mathbf{n}(x) \mathbf{n}(y) \rangle$$

and the function $\gamma(e^2)$ are also easily computed to leading order. We have:

$$\begin{aligned} \langle n(x) n(y) \rangle_\Lambda &\approx \langle n_0(x) n_0(y) \rangle_\Lambda (1 - \langle \varphi^2 \rangle_{\Lambda, X}) \\ &= \langle n_0(x) n_0(y) \rangle \left(1 - \frac{N-1}{2\pi} e^2(\Lambda) \log \frac{\Lambda}{\Lambda} \right) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \gamma(e^2) &= \frac{N-1}{2\pi} e^2 \\ \mathcal{D}(p) &= \frac{1}{p^2} \left(1 + \frac{N-2}{4\pi} e^2(\mu) \log \frac{p^2}{\mu^2} \right)^{(N-1)/(N-2)} \end{aligned}$$

Notice that A_μ^{ab} did not participate in our derivation because it enters in a gauge invariant way. As a consequence it appears only in combinations containing $(F_{\mu\nu}^{ab})^2$ (where $F_{\mu\nu}^{ab}$ is the

Yang-Mills field strength) which have dimension 4 and cannot contain logarithmic divergences. This gauge invariance is just the reflection of the arbitrariness of the fields $\{e_a\}$ (remember that only n is physical).

This kind of derivation can be easily generalized to fields belonging to an arbitrary coset space, G/H . (Above we have worked out the cases $H = I$, and the case of the n -field: $n \in S^N = SO(N+1)/SO(N)$, S^N being a unit sphere).

14.2.3 2.3 Non-Abelian Gauge Fields for $\mathcal{D} = 4$

In this case the action has the form:

$$S = -\frac{1}{2e_0^2} \int \text{Tr } F_{\mu\nu}^2 d^4x$$

We shall follow the same procedure as before. Let us set

$$A_\mu = \bar{A}_\mu + a_\mu$$

and expand (2.53) up to terms quadratic in $\mathbf{a}_\mu$;

$$\begin{aligned} \bar{S} &= -\frac{1}{2e_0^2} \int \text{Tr } \bar{F}_{\mu\nu}^2 d^4x \\ &\quad - \frac{1}{2e_0^2} \text{Tr} \int d^4x \{ (\nabla_\mu a_\nu - \nabla_\nu a_\mu)^2 + 2\bar{F}_{\mu\nu} \cdot [a_\mu, a_\nu] \} \\ &= \bar{S} - \frac{1}{e_0^2} \text{Tr} \int d^4x \{ (\nabla_\mu a_\nu)^2 + 2\bar{F}_{\mu\nu} \cdot [a_\mu, a_\nu] - (\nabla_\lambda a_\lambda)^2 \} \end{aligned}$$

(Here $\nabla_\mu \mathbf{a}_\nu = \partial_\mu \mathbf{a}_\nu + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{a}_\nu]$.)

We have to integrate over all possible a_μ -fields with momenta $\tilde{\Lambda} < |\mathbf{p}| < \Lambda$. At this point we have to fix the gauge of $\mathbf{a}_\mu$, because due to the gauge invariance of the action the quadratic form (2.55) has zero eigenvalues. Namely if we take

$$\mathbf{a}_\mu^{(0)} = \nabla_\mu \mathbf{w} = \partial_\mu \mathbf{w} + [\bar{\mathbf{A}}_\mu, \mathbf{w}]$$

we find that $S^{(1)} = 0$ for an arbitrary function $\mathbf{w}$. This simply means that we have to integrate in directions in our functional space which are orthogonal to $\mathbf{a}_\mu^{(0)}$, i.e. for which

$$\text{Tr} \int a_\mu a_\mu^{(0)} d^4x = 0$$

Since $\mathbf{w}$ is arbitrary, we find that $\mathbf{w}_\mu$ must satisfy:

$$\nabla_\mu a_\mu = 0$$

This is the analogue of the Lorentz gauge of QED. A more convenient gauge for us will be the Feynman gauge which corresponds to adding the term $(\nabla_\lambda a_\lambda)^2$ directly to (2.55) (thus cancelling the last term in this expression). As is well known one has to augment the gauge-fixing term with the ghost determinant which in the case of the Feynman and Lorentz gauges is just $\text{Det} (\nabla_\mu^2)$. The net result is:

$$\begin{aligned} \Psi(A) &= e^{-S_{\text{cl}}(\bar{A})} \int \mathcal{D}a_\mu \text{Det} (\nabla_\mu^2) \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{1}{e^2} \text{Tr} \int ((\nabla_\mu a_\nu)^2 + 2\bar{F}_{\mu\nu} \cdot [a_\mu, a_\nu]) d^4x \right\} \end{aligned}$$

The meaning of each of the terms in (2.59) is very transparent. If it were not for the term $\bar{\mathbf{F}}_{\mu\nu} \cdot [a_\mu, a_\nu]$, we would have just four independent fields a_μ , integration over which gives $\left[\text{Det}^{-1/2}(\nabla_\mu^2)\right]^4$. This is multiplied by the $\text{Det}(\nabla_\mu^2)$ thus resulting in $\left[\text{Det}^{-1/2}(\nabla_\mu^2)\right]^2$. This result implies that we have not four but two physical polarizations for the field a_μ which is as it should be. The role of the ghost determinant is seen to take care of this cancellation of the two unphysical polarizations. The last term in (2.59) describes the interaction of the external field $\bar{F}_{\mu\nu}$ with the spin of the gluons a_μ . So we can say that we have, first of all, two kinds of charged particles moving in the external magnetic field $\bar{F}_{\mu\nu}$. This results in Landau diamagnetism (interaction of the magnetic field with the orbital motion) which we shall compute in a moment. Alone, this effect would give the screening of effective charge known as "zero charge". However we also have the direct interaction of $\bar{F}_{\mu\nu}$ with the spin, which gives rise to Pauli paramagnetism. This effect turns out (as we shall see below) to be stronger than the first one and as a consequence we end up with the asymptotically free situation.

To within logarithmic accuracy the two above mentioned effects can be treated separately. Let us begin with the first one. In the second order in $\bar{F}_{\mu\nu}$ the effective action is described by the diagram:

$$S_{\text{eff}}^{(\text{diamagnet.})} = \int \Pi_{\mu\nu}^{ab}(q) \bar{A}_\mu^a(q) \bar{A}_\nu^b(-q) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$$

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab} = -\Omega + -Q$$

The expression for $\Pi_{\mu\nu}^{ab}$ in (2.60) is exactly the polarization operator for massless scalar QED multiplied by an isotropic factor:

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q) = 2f^{acd}f^{bcd}\Pi_{\mu\nu}^{(\text{scalar})}(q)$$

$$= 2C_v(G)\delta^{ab}\Pi_{\mu\nu}^{(\text{sclar})}(q)$$

The factor 2 in (2.61) arises from the two physical polarizations of a_μ . Computation of $\Pi_{\mu\nu}^{(\text{scalar})}$ is easy:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(\text{sc})} = -\frac{1}{4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(2p+q)_\mu(2p+q)_\nu}{p^2(p+q)^2} + \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 p^2}$$

$$= \pi(q^2)(q^2\delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)$$

(This equality follows from the conservation of current $q^\mu \Pi_{\mu\nu}^{(\text{sc})} = 0$. It ensures cancellation of the quadratic divergence in $\Pi_{\mu\nu}^{(\text{sc})}$). Taking the trace in $\mu\nu$ of (2.62) and keeping only the terms proportional to q^2 we have:

$$3q^2\pi(q^2) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^4} 4p^2 - \frac{q^2 + 4pq + 4p^2}{2\left(1 + \frac{2pq}{p^2} + \frac{q^2}{p^2}\right)}$$

$$\simeq \frac{1}{4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^4} \left\{ -q^2 - \frac{8(pq)^2}{p^2} + 4p^2 \frac{q^2}{p^2} \right\}$$

$$= \frac{q^2}{64\pi^2} \log \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}$$

Therefore, to within logarithmic accuracy we have the following diamagnetic part of the coupling renormalization:

$$\left(\frac{1}{\tilde{e}^2}\right)_{\text{diam.}} = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{48\pi} C_r(G) \log \frac{\Lambda^2}{\tilde{\Lambda}^2} (\tilde{\Lambda} < \Lambda)$$

We see that this part of the effect decreases the coupling as we go to larger wave lengths. The physical interpretation of this in Minkowski space is that a charge introduced into the vacuum gets screened by virtual pairs of particles and antiparticles, just as happens in a dielectric medium. In Euclidean space the explanation of the sign of (2.64) is also simple. The second order effect in general should decrease the effective action (or free energy in the language of statistical mechanics), as is seen from:

$$S_{\text{eff}} = -\log \int e^{-(S(\varphi)+V(\varphi))} \mathcal{D}\varphi$$

$$S_{\text{eff}}^{(2)} = -\frac{1}{2} \langle V^2(\varphi) \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\int V^2(\varphi) e^{-S(\varphi)} d\varphi}{\int e^{-S(\varphi)} d\varphi}$$

(In this formula φ is any field and $V(\varphi)$ is any perturbation with $\langle V(e) \rangle = 0$). So the normal sign in (2.64) would be negative. However, vector fields enter the action with an extra factor i (in Euclidean space the extra term in the amplitude for a scalar particle is $\exp \{i \oint_c A dl\}$ where C is the particle's trajectory). This effect in second order gives an $i^2 = -1$ factor, which changes the sign in (2.65).

From this consideration it is obvious that the spin term in (2.55) will give a negative sign contribution to the charge renormalization. This paramagnetic effect is readily evaluated:

$$S_{\text{eff}}^{(\text{paramagnetic})} = -\frac{1}{2e_0^4} \int \bar{F}_{\mu\nu}^a(q) \bar{F}_{\lambda\rho}^b(-q) \frac{d^4 q}{(2\lambda)^4}$$

$$\times f^{acd} f^{bef} \langle a_\mu^c a_\nu^d(-q), a_\lambda^e a_\rho^f(q) \rangle$$

$$\simeq \int d^4 x (\bar{F}_{\mu\nu}^a)^2 \frac{C_v(G)}{2e_0^4} \bigcirc_p^{p+q} \bigg|_{q=0}$$

$$= -\frac{C_v(G)}{2e_0^4} \int (\bar{F}_{\mu\nu}^a)^2 d^4 x \int \frac{d^4 p}{(2\lambda)^4} \frac{2e_0^4}{p^2(p+q)^2} \bigg|_{q=0}$$

$$= -\frac{C_v(G)}{16\pi^2} \log \frac{\Lambda^2}{\lambda^2} \int (\bar{F}_{\mu\nu}^a)^2 d^4 x$$

Putting together these two effects we obtain:

$$\frac{1}{\bar{e}^2} = \frac{1}{e^2} - \frac{11}{3} C_v(G) \frac{1}{16\pi^2} \log \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}$$

Now we can repeat all the previous arguments concerning the renormalization group and we find that the effective coupling in the nonabelian gauge theories is asymptotically free:

$$e^2(p) = \frac{48\pi^2}{11C_v(G)} \frac{1}{\log(p^2/\lambda^2)}, \quad p \gg \lambda$$

This is the famous result of Gross, Wilzek and Politzer.

It is not difficult to evaluate different gauge invariant Green functions at small distances. As before, they differ from the free ones by factors of the type $(\log(p^2/\lambda^2))^\gamma$ where γ depends on the type of the Green function. However, the methods described above are absolutely inadequate for the investigation of the infrared region $p^2 \leq \lambda^2$, which is physically the most interesting. To accomplish this task we proceed to a quite different approach.

14.3 The Strong Coupling Expansion

In the previous chapter we have seen how simple perturbative methods permit us to examine the short distance behaviour in asymptotically free theories. The reason for such success was

that the effective coupling for high momentum fluctuations is logarithmically small. In the region $p \sim \lambda$ however, this coupling becomes of the order of unity (if we take the formula (2.68), naively it becomes infinite.) In order to examine the infrared structure of the theory we have to develop some nonperturbative methods. In this chapter we shall describe the simplest (though in many respects imperfect) method-the strong coupling expansion. Unfortunately this phrase means expansion not in the physical coupling (which may really be large) but in the bare one, e_0^2 . At first sight the enterprise may seem completely meaningless because as was explained above, the continuum limit of our lattice models is achieved when

$$e_0^2 \sim \frac{1}{\log \Lambda} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} 0$$

The reason the large e_0^2 expansion is interesting is that there are grounds to believe that in most asymptotically free systems there are no phase transitions in e_0^2 . If true, this implies that the qualitative character of the spectrum and correlation functions is unchanged as we go from small to large e_0^2 . For instance, the masses of elementary excitations must have no singularities in e_0^2 and hence their $1/e_0^2$ expansions can be continued to rather small values of e_0^2 . This numerical aspect will not be discussed here. Instead we shall be concerned with the qualitative picture which arises from the strong coupling limit. Though our main interest lies in nonabelian gauge systems, we start from the easier cases because it is always satisfactory to realize a special theory as belonging to some larger variety.

14.3.1 3.1 Ising Model

In this section we shall reveal the strong coupling (small β) expansion in the Ising model. By using the relation

$$e^{\beta\sigma\sigma'} = \cosh \beta (1 + \sigma\sigma' \tanh \beta)$$

we get:

$$Z = (\cosh \beta)^N \sum_{\{\theta\}} \prod_{(x,\delta)} (1 + \zeta \sigma_x \sigma_{x+\delta})$$

$$\zeta = \tanh \beta$$

Expanding the product (3.3) we see that only those terms contribute in which in each site we have σ raised to an even power. On each link we can have the term 1 or $\zeta \sigma_x \sigma_{x+\delta}$. If we draw a solid line on this link in the second case we shall obtain the following diagrammatic expansion for Z . We have to draw all closed paths on a lattice, such that at each site only an even number of lines meets, and each link can be covered once or not covered at all. If we look at the correlation function $\langle \sigma_0 \sigma_R \rangle$, the rules will be the same except that at the points 0 and $\mathbf{R}$ we must have an odd number of lines meeting. The contribution of a given graph is just ζ^L where L is the total length of the solid line.

The interpretation of these rules is the following. Since the correlations are exponentially small ($\sim \zeta^{|\mathbf{R}|}$ for $\beta \ll 1$) we have a massive excitation with the gap $\sim \log(1/\beta)$. As we increase β (decrease the coupling) the mass gap decreases. At some point β_c , the number of paths of length L which is of the order of $\exp(\text{const. } L)$ becomes larger than the damping factor ζ^L . At this point the paths will get condensed -there will be a finite density of lines in the system. In terms of the correlation function, this phase transition will mean that $\langle \sigma_0 \sigma_R \rangle_R \xrightarrow{\beta \rightarrow \beta_c} \text{const.}$ This expansion in terms of lines is typical for all systems with global symmetries. The lines themselves are nothing but the world lines of the elementary excitations: to see this more explicitly let us use the hamiltonian formulation of the Ising model, described by (1.31):

$$\hat{H} = u \sum_y \tau_y^1 + v \sum_{y,\delta} \tau_y^3 \tau_{y+\delta}^3 \quad (u = e^{-\beta_0}, v = \beta_1)$$

The strong coupling limit corresponds to $u \gg v$. In some sense the first term in (3.4) is a kinetic energy, while the second is a potential one (because the first term describes the change of τ_y^3 in time).

In the leading approximation the ground state is described by the wave function:

$$\begin{aligned} \tau_y^1 |\phi\rangle &= -|\phi\rangle \\ |\phi\rangle &= \prod_y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_y \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a|\uparrow\rangle_y + b|\downarrow\rangle_y}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

(The Hilbert space in our problem is formed by the direct product of the two dimensional spaces at each site $\mathbf{y}$. The operators $\tau_{\mathbf{y}}$ act as Pauli matrices on the space labelled by y and as a unit operator on all other spaces.) The ground state energy corresponding to (3.5) is given by:

$$E_0 = -Nu$$

The first excited state in this leading approximation is obtained as:

$$|\phi_1\rangle = \prod_{y \neq y_0} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_y \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{y_0} \stackrel{\text{def}}{=} |y_0\rangle$$

These states (labelled by $\mathbf{y}_0$) have energy:

$$E_1 - E_0 = 2u$$

We see that in the leading approximation we have a nondegenerate ground state and a highly degenerate first excited level, separated by the gap $2u$. We shall see now that in the next approximation this degeneracy is removed.

If we denote the second term in (3.4) by V we have, first of all to consider matrix elements $\langle y' | V | y \rangle$. Due to the obvious relations

$$\begin{aligned} \tau_y^3 |y\rangle &= |0\rangle \\ \tau_{y_1}^3 |y_2\rangle &= |y_1, y_2\rangle \quad (y_1 \neq y_2) \\ \tau_y^3 |0\rangle &= |y\rangle \end{aligned}$$

we find that:

$$\begin{aligned} \langle y' | V | y \rangle &= v \sum_{\delta} \delta_{y', y \pm \delta} \\ \langle y' | H_0 | y \rangle &= 2u \delta_{y, y'} \end{aligned}$$

We see that while H_0 described individual and independent spins, the term V describes hopping of their excitations from one site to another.

Diagonalizing $H_0 + V$, we find that in the first order of degenerate perturbation theory we have the Eigenstates:

$$\begin{aligned} |p\rangle &= \sum_y e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}} |y\rangle \\ \mathcal{E}(\mathbf{p}) &= E_1(\mathbf{p}) - E_0 = 2u + 2v \sum_{\delta} \cos(\mathbf{p} \cdot \delta) \end{aligned}$$

As expected, we obtain point-like elementary excitations with a finite gap, which are characterized by the quasimomentum p . This conclusion will be true in all further orders of perturbation theory, which gives an expansion in v/u . As we have already said, in the Ising model this expansion will diverge at a certain critical value of v . This value corresponds to the phase transition point at which the gap

$$E_1(0) - E_0 = 0$$

Near this point it is expected (and will be explicitly shown for $\mathcal{D} = 2$) that:

$$m = E_1(0) - E_0 \ll 1$$

and

$$\mathcal{E}(p) = (m^2 + p^2)^{1/2}$$

for $|\mathbf{p}| \ll 1$.

After the phase transition point a condensate of these particles is formed and the strong coupling expansion is impossible. In this phase one has to start from the opposite limit, treating the first term in (3.4) as a perturbation.

In the zero approximation we have a strictly ordered vacuum

$$|\phi\rangle = \prod_{\substack{y=2n_i\delta_i \\ (n_i \in \mathbb{Z})}} \left(\binom{1}{0}_y \prod_{\delta} \binom{0}{1}_{y+\delta} \right)$$

It should be clear from the above that the lines which appear in the expansion of the Euclidean version of our model are just the world lines of the particles we treated in the Hamiltonian version. It is an interesting exercise to establish the correspondence between Schrödinger perturbation theory for the Hamiltonian and diagrams for the Euclidean approach.

14.3.2 3.2 Continuous Global Symmetry

Let us start from the abelian case. In order to obtain the strong coupling limit it is helpful to use the expansion (the analogue of (3.2)):

$$e^{\beta \cos(\varphi - \varphi')} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(\beta) e^{in(\varphi - \varphi')}$$

($\lambda_n(\beta) = I_n(-i\beta)$, I_n being a Bessel function). Substituting (3.15) into the partition function we get:

$$\begin{aligned} Z &= \lambda_0^N \sum_{\{n_{x,\delta}\}} \exp \left\{ \sum_{x,\delta} \log (\lambda_{n_{x,\delta}}(\beta) / \lambda_0(\beta)) \right\} \\ &\quad \times \int_{-\pi}^{\pi} \prod_x \frac{d\varphi_x}{2\pi} \exp \left\{ i \sum_{x,\delta} n_{x,\delta} (\varphi_x - \varphi_{x+\delta}) \right\} \\ &= \lambda_0^N \sum_{\{n_{x,\delta}: \sum_{\delta} (n_{x,\delta} - n_{x-\delta,\delta}) = 0\}} \prod_{x,\delta} \frac{\lambda_{n_{x,\delta}}(\beta)}{\lambda_0(\beta)} \end{aligned}$$

As a result, we obtain the following graphical rules for computing (3.16). We have again a graph on the lattice, such that each line is characterized by a nonzero integer n . This n is

conserved (owing to the condition $\sum_{\delta} (n_{x,\delta} - n_{x-\delta,\delta}) = 0$). That means for example, that if three lines meet at some site then $n_1 + n_2 + n_3 = 0$. To each bit of the path we associate the factor $\lambda_{n_{x,s}}(\beta)/\lambda_0(\beta) < 1$, and take a product of all such factors. Notice that in the Ising case the rules were the same except that the permitted values of $n_{x,\delta}$ were 0,1 and the conservation was true mod2. If we wish to compute a correlation function

$$\langle e^{im(\varphi(0) - \varphi(\mathbf{R}))} \rangle = \mathcal{D}_m(\mathbf{R})$$

(m being some integer) we have the same rules except that now:

$$\sum_{\delta} (n_{x,\delta} - n_{x-\delta,\delta}) = m (\delta_{x,R} - \delta_{x,0})$$

which means that we have "sources" of n -flux placed at the points $\mathbf{O}$ and $\mathbf{R}$. The result for the correlation functions is again that they decay exponentially for small β . Hence in this phase we expect to have only massive excitations. It is worthwhile to study the same theory in its

Hamiltonian version. In order to obtain it we introduce a large anisotropy in the "time" direction:

$$\begin{aligned} -S = & \beta_0 \sum_y \cos(\varphi_{y,t} - \varphi_{y,t+1}) \\ & + \beta_1 \sum_{y,\delta} \cos(\varphi_{y,t} - \varphi_{y+\delta,t}) \end{aligned}$$

(Here $\mathbf{y}$ belongs to the $\mathcal{D}$ -1-dimensional lattice). In the limit of large β_0 we can replace (3.19) by:

$$-S = \text{const} - \int dt \left\{ \beta_0 \sum_y \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi_y}{dt} \right)^2 - \beta_1 \sum_{y,\delta} \cos(\varphi_{y,t} - \varphi_{y+\delta,t}) \right\}$$

Comparing (3.20) with (1.10) we see that it is just the action for imaginary time of the system of coupled rotators sitting at the lattice sites and described by the angles $\{\varphi_y\}$. In the Minkowskian time their lagrangian is:

$$\mathcal{L} = \sum_y \beta_0 \left(\frac{d\varphi_y}{dt} \right)^2 + \beta_1 \sum_{y,\delta} \cos(\varphi_{y,t} - \varphi_{y+\delta,t})$$

Passing to the Hamiltonian by the standard procedure we obtain:

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2\beta_0} \sum_y l_y^2 - \beta_1 \sum_{y,\delta} \cos(\varphi_y - \varphi_{y+\delta}) \\ l_y = & \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi_y} \end{aligned}$$

(Notice the analogy with (3.4)). Now the strong coupling limit $\beta_1\beta_0 \ll 1$ corresponds to neglect of the potential energy in (3.22):

$$\begin{aligned} H_0 = & \frac{1}{2\beta_0} \sum_y l_y^2 \\ \Psi = & \exp \left(i \sum_y n_y \varphi_y \right), E = \frac{1}{2\beta_0} \sum_y n_y^2 \end{aligned}$$

Here $\{n_y\}$ is an arbitrary set of integers; the ground state corresponds to all $n_y = 0$. The first excited state is obtained by taking some one of the n , $n_{y_0=\pm 1}$, and has a mass gap. The reason for this is simple—in our approximation all the rotators are decoupled. The elementary excitation we have described is just the excitation of a single rotator placed at the point $\mathbf{y}_0$. As before taking into account the potential energy causes hopping of the excitation from $\mathbf{y}$ to $\mathbf{y} + \delta$:

$$\langle \mathbf{y}' | \mathbf{V} | \mathbf{y} \rangle = -\frac{\beta_1}{2} \sum_{\delta} \delta_{\mathbf{y}', \mathbf{y}+\delta}$$

Therefore, as in the Ising case, we have an elementary excitation with energy depending on quasimomentum. The gap is nonzero in any finite order in $\beta_1\beta_0$. However, again we expect a phase transition to occur. Let us clarify the nature of the large $\beta_1\beta_0$ phase. While for small $\beta_1\beta_0$ we had an almost decoupled set of rotators, for large $\beta_1\beta_0$ all these rotators are tightly bound. If we consider them as something like a rigid body, then the excitation spectrum will be

$$E = L^2/2I$$

where $L = \sum_y l_y$ is the total angular momentum and I is the moment of inertia. In the tightly bound phase we should have $I \sim N$ where N is the number of rotators. If the rotators are weakly coupled, then $I \sim 1$ (each one rotates separately). The phase transition in $\beta_1\beta_0$ corresponds to the change between these two regimes. In the small $\beta_1\beta_0$ phase we have a gap in the spectrum and in the large $\beta_1\beta_0$ phase the gap is absent (as $N \rightarrow \infty$). In the next chapter we shall explore this phase transition in more detail.

The Non-Abelian case in the strong coupling region is not much different from the above. We have (in the case of the n -field) the following Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2\beta_0} \sum_y l_y^2 - \beta_1 \sum_{y,\delta} (n_y \cdot n_{y+\delta})$$

In this case l_y is the standard operator of angular momentum with eigenvalues of $l_y^2 : l(l+1)$ (with degeneracies $2l+1$). All conclusions are the same as above except that the elementary excitation is vector-like (it has $l=1$) and that for $\mathcal{D}=2$, as will be explained later, there is no phase transition. The last fact is of great importance. It means that even as we take $\beta_1\beta_0 \rightarrow \infty$ (or $e_0^2 \rightarrow 0$) we have a gap in the energy spectrum. This gap can be interpreted as arising through the strong interaction of Goldstone's bosons. On the basis of the strong coupling expansion we expect that the Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e_0^2} (\partial_\mu n)^2$$

describes massive particles with isotopic spin 1. Dimensional transmutation, described in Chapter 2, predicts that all scattering amplitudes depend on p_j/m (where p_j are the momenta of the particles) and do not contain any free parameters (like the coupling constant). All these expectations turn out to come true as follows from the exact solution.

The last model with global symmetry is the principal chiral field. Its Lagrangian is:

$$\mathcal{L} = \sum_y \frac{\beta_0}{2} \text{Tr} (\dot{g}_y^{-1} \dot{g}_y) + \frac{\beta_1}{2} \sum_{y,\delta} (\text{Tr} (g_y^{-1} g_{y+\delta}) + \text{c.c.})$$

We see that it describes a set of symmetric tops (in the case $g \in SU(2)$). The Hamiltonian has the form:

$$H = \sum_y \frac{1}{2\beta_0} \hat{l}_y^2 - \frac{\beta_1}{2} \sum_{y,\delta} \{ \text{Tr} (g_y^{-1} g_{y+\delta}) + \text{c.c.} \}$$

Here $\hat{l}_y$ is an operator of left rotations which, in the case of the $SU(2)$ group, can be expressed in terms of derivatives in Euler angles (see any book on quantum mechanics). Eigenvalues of $\hat{l}^2$ are again $l(l+1)$ but the degeneracy is $(2l+1)^2$ due to the fact that the symmetry group of (3.29) is $SU(2) \otimes SU(2)$ (body and frame rotations in quantum mechanics of the top). The quantum numbers of elementary excitations are such that they transform by fundamental representations of both groups. In the case of $SU(2)$ it is a vectorlike excitation of $SO(4) \simeq SU(2) \otimes SU(2)$. Again, this conclusion will be confirmed by exact results.

14.3.3 3.3 Gauge Symmetries

We have seen that in the strong coupling region all systems with global symmetries look roughly the same. In all cases we had massive pointlike excitations which propagate through the lattice. In the NonAbelian cases with $\mathcal{D} = 2$ this picture remained valid even for small coupling.

In the case of a gauge system the strong coupling region is again rather insensitive to the type of symmetry. However, gauge invariance introduces qualitatively new features to this region which will be discussed now.

Let us look first at the small β expansion for the partition function in the Z_2 case. Since each term in the energy (1.46) is associated with a plaquette, the result of the expansion can be presented as a collection of plaquettes, such that at each link an even number of plaquettes meet. Therefore we have something like closed surfaces instead of closed paths for a nongauge system. The contribution of a given surface to the partition function is given by $(\tanh \beta)^A$ where A is the number of plaquettes or, in other words, the area of the surface. For more complicated gauge groups, like $O(2)$ or $SU(N)$ the small β expansion is similar with the only difference that the plaquettes carry conserved quantum numbers just as it was in the case of paths, describing systems with global symmetries.

We see that there exists a very general rule that the strong coupling expansion for a gauge system is obtained from the corresponding global system by replacing paths by surfaces. The physical meaning of this rule becomes transparent in the Hamiltonian language. Let us pass to the hamiltonian in the $O(2)$ case (other cases are similar). As before, to do this we introduce anisotropy in the "time" direction into the formula (1.49). We obtain:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\beta_0}{2} \sum_{y,\alpha} \left(\dot{A}_{y,\alpha} + \phi_y - \phi_{y+\alpha} \right)^2 \\ & + \beta_1 \sum_{y,\alpha,\beta} (\cos(A_{y,\alpha} + A_{y+\alpha,\beta} - A_{y+\beta,\alpha} - A_{y,\beta}) - 1) \end{aligned}$$

Here $\alpha = 1, \dots, \mathcal{D} - 1$; $\mathbf{y}$ belongs to a $\mathcal{D} - 1$ dimensional lattice, and we denote by ϕ_y the time component of the vector potential $A_{y,0}$. The first term in (3.30) was obtained by expansion of the corresponding cosine in (1.49) and making time continuous. In order to pass to the hamiltonian, let us introduce canonical momenta:

$$E_{y,\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{y,\alpha}} = \beta_0 \left(\dot{A}_{y,\alpha} + \phi_y - \phi_{y+\alpha} \right)$$

The Hamiltonian is given by:

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{y,\alpha} E_{y,\alpha} \dot{A}_{y,\alpha} - \mathcal{L} \\
&= \frac{1}{2\beta_0} \sum_{y,\alpha} E_{y,\alpha}^2 + \beta_1 \sum_{y,\alpha,\beta} \{1 - \cos(A_{y,\alpha} + A_{y,\alpha,\beta} \\
&\quad - A_{y+\beta,\alpha} - A_{y,\beta})\} - \sum_{y,\alpha} \phi_y (E_{y,\alpha} - E_{y-\alpha,\alpha})
\end{aligned}$$

Since we have no time derivatives for the field ϕ_y we must just minimize H with respect to this field, which gives the condition:

$$\Gamma_y = \sum_{\alpha} (E_{y,\alpha} - E_{y-\alpha,\alpha}) = 0$$

With this condition, the Hamiltonian is just:

$$H = \frac{1}{2\beta_0} \sum_{y,\alpha} E_{y,\alpha}^2 + \beta_1 \sum_{y,\alpha,\beta} (1 - \cos F_{y,\alpha,\beta})$$

Notice, that the operators Γ_y are generators for the gauge transformations of $A_{y,\alpha}$. Indeed:

$$\delta A_{y,\alpha} = \left[\sum_z i\omega_z \Gamma_z, A_{y,\alpha} \right] = \omega_y - \omega_{y+\alpha}$$

Therefore:

$$[\Gamma_y, H] = 0$$

In quantum theory we have to substitute

$$E_{y,\alpha} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial A_{y,\alpha}}$$

and to solve the equations:

$$\begin{aligned}
H\psi &= \mathcal{E}\psi \\
\Gamma_y\psi &= 0
\end{aligned}$$

The strong coupling limit corresponds to neglecting the second, potential term in (3.34). The general solution to (3.37) in this approximation is:

$$\begin{aligned}
\psi &= \exp \left(i \sum_{y,\alpha} n_{y,\alpha} A_{y,\alpha} \right) \\
\mathcal{E} &= \frac{1}{2\beta_0} \sum_{y,\alpha} n_{y,\alpha}^2
\end{aligned}$$

with $n_{y,a}$ being integers satisfying the conservation condition

$$\sum_{\alpha} (n_{y,\alpha} - n_{y-\alpha,\alpha}) = 0$$

The vacuum solution corresponds to $n_{y,a} = 0$. Excited states are described by a closed loop on the lattice, such that at each site the n are conserved. We recognize the same set of loops which we had in the description of the global $O(2)$ model, but the interpretation is now different. Each loop labels the quantum state in the present case. In the strong coupling limit

the energy of this state is given by (3.38) and is proportional to the total length. As we consider the time propagation of such loops we obtain the world surfaces of the Euclidean approach. Physically, the loop is formed of Faraday flux lines (we see from (3.38) that $n_{y,\alpha}$ is an eigenvalue of the electric field $E_{y,\alpha}$). The condition (3.39)

is just the conservation of electric flux (which is true since we consider a theory without charges). Due to the angular nature of the vector potential the flux is quantized. In the zero approximation the shape of the loop remains unchanged by time development. As we include the second term in (3.34) two different effects arise. First of all, our closed flux line acquires quasimomentum and begins to move across the lattice. This is quite analogous to the case of global symmetries where we had point-like elementary excitations. The second effect is more tricky. As we perturb the state of a given shape with the cosine term in (3.34) this shape can change (for instance, the cosine can create a new small square, formed by the flux lines). Therefore the true quantum state is a superposition of closed flux lines with different shapes. In later chapters we shall develop a string theory so as to describe the continuum limit of such a picture. This continuum limit exists, provided that no phase transition in e_0^2 takes place.

Let us clarify the relation of this picture to confinement of charges. This relation is quite simple. Suppose that we introduce two static opposite charges into our system. Then, we shall have a flux line which ends on these charges. The energy of such a state is proportional to the distance between the charges. If no phase transition takes place, this picture will remain true even for small coupling. In the next chapter it will be shown that for $\mathcal{D} = 3$ it is indeed so, while for $\mathcal{D} = 4$ there is a phase transition leading to a condensation of strings. After the condensation we obtain the Coulomb law instead of confinement.

Generalization of the above discussion to the Non-Abelian case does not present any difficulties. The basic variables in this case are matrices of $SU(N)$ attached to the links of a $\mathcal{D}$ -1-dimensional lattice: $\mathbf{B}_{y,\alpha}$. In the abelian case we had the electric field operator E , with commutation relations:

$$[iE_{y,\alpha}, e^{iA_{y,\beta}}] = i\delta_{y,y'}\delta_{\alpha,\beta}e^{iA_{y,\beta}}$$

$$iE_{y,\alpha} = \frac{\partial}{\partial A_{y,\alpha}} \Leftrightarrow i\dot{A}_{y,\alpha} = (e^{iA_{y,\alpha}}e^{-iA_{y,\alpha}})$$

The Non-Abelian generalization of (3.40) is the following. We have two different electric fields, corresponding to left and right invariant forms of the matrix $\mathbf{B}_{x,\alpha}$. Namely let us introduce:

$$L_{y,\alpha} = \dot{B}_{y,\alpha}B_{y,\alpha}^{-1} \quad R_{y,\alpha} = B_{y,\alpha}^{-1}\dot{B}_{y,\alpha}$$

$$R_{y,\alpha} = B_{y,\alpha}^{-1}L_{y,\alpha}B_{y,\alpha}$$

$$\text{Tr}(L_{y,\alpha}^2) = \text{Tr}(R_{y,\alpha}^2)$$

The commutation relations satisfied by the L and R operators are:

$$[L_{y,\alpha}^a, B_{y',\beta}] = \delta_{y,y'}\delta_{\alpha,\beta}\lambda^a B_{y',\beta}$$

$$[R_{y,\alpha}^a, B_{y',\beta}] = \delta_{y,y'}\delta_{\alpha,\beta}B_{y',\beta}\lambda^a$$

(Here $\{\lambda^a\}$ is a set of generators for $SU(N)$ and $iL = \lambda^a L^a : iR = \lambda^a R^a$.)

If the group is parametrized in some way, say like $SU(2)$ by Euler angles, then it is easy to express L^a and R^a as differential operators with respect to these parameters. However, we shall not need these explicit expressions.

The Hamiltonian for the Non-Abelian case has the form (compare with (3.34)):

$$H = -\frac{1}{2\beta_0} \sum_{y,\alpha} \text{Tr} L_{y,\alpha}^2 - \frac{\beta_1}{2} \sum_{y,\alpha,\beta} [\text{Tr}(B_{y,\alpha}B_{y+\alpha,\beta}B_{y+\beta,\alpha}^{-1}B_{y,\beta}^{-1})]$$

There are operators Γ_y^a , which commute with H and generate gauge transformation of (3.43):

$$\begin{aligned}\Gamma_y &= i\lambda^a \Gamma_y^a = \sum_{\alpha} (L_{y,\alpha} - R_{y-\alpha,\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} (L_{y,\alpha} - R_{y-\alpha,\alpha}^{-1} L_{y-\alpha,\alpha} B_{y-\alpha,\alpha}) \\ [\Gamma_y^a, H] &= 0 \\ [\Gamma_y^a, \Gamma_{y'}^b] &= \delta_{y,y'} f^{abc} \Gamma_y^c\end{aligned}$$

(f^{abc} being the structure constants of the group). The last equation is easily derived by combining the definitions with (3.42) and the Jacobi identity. In the continuum limit (3.44) gives the covariant divergence of the Non-Abelian electric field:

$$\begin{aligned}L_{y,\alpha} &\approx E_{y,\alpha} \\ B_{y,\alpha} &\approx I + A_{y,\alpha} \\ \Gamma_y &\approx \partial_{\alpha} E_{\alpha} + [A_{\alpha}, E_{\alpha}]\end{aligned}$$

Without external charges, the spectrum of our system is described by the Shrödinger equation with subsidiary condition:

$$H\Psi[B] = \mathcal{E}\Psi[B], \Gamma_y^a \Psi[B] = 0$$

Since Γ_y^a is a generator of gauge transformations this last condition means that we have to choose a gauge invariant $\Psi[B]$ from all possible solutions of the Shrödinger equation. In the strong coupling limit we neglect the last term in (3.43) and obtain a set of independent tops (for the $SU(2)$ group, taken as a representative example). Again the simplest gauge invariant excitation is a square formed by flux lines:

$$\begin{aligned}\Psi_1[B] &\sim \text{Tr} (B_{x,\alpha} B_{x+\alpha,\beta} B_{x+\beta,\alpha}^{-1} B_{x,\beta}^{-1}) \\ \mathcal{E} &= \frac{4l(l+1)}{4\beta_0} \Big|_{l=1/2} = \frac{3}{4\beta_0}\end{aligned}$$

Just as in the Abelian case, this elementary excitation will become a superposition of different shapes in higher orders. The only physical difference from the Abelian case appears when we consider the interaction of external charges. Let us develop the corresponding formalism. There is a small subtlety in this procedure since although infinitely heavy charges are classical as far as their orbital properties are concerned their isotopic spins must be treated quantum mechanically. Therefore, it is not advisable just to add terms like $\mathcal{J}_{\mu}^{\text{ext}} A_{\mu}$ to the lagrangian. A fool-proof procedure is to describe the charge by a quantum field χ with isotopic spin I , having the Lagrangian:

$$\mathcal{L}_{\chi} = i\chi^+ \left(\frac{\partial}{\partial t} + A_0 \right) \chi - M\chi^+ \chi$$

The fact that χ has no kinetic energy implies that the position of our charge is fixed. After passing to the Hamiltonian and applying the condition $\chi^+ \chi = 1$, we obtain the following natural prescription for describing static charges with isotopic spins $I_1, I_2, \dots, I_N$ sitting at the points $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$. Consider the solution of the equations:

$$\begin{aligned}
H\Psi(I_1, m_1, x_1; \dots; I_N, m_N, x_N) &= \mathcal{E}_{I_1 m_1, x_1; \dots; I_N m_N, x_N} \Psi(\dots) \\
\Gamma^a(y) \Psi(I_1 m_1 x_1; \dots; I_N m_N x_N) \\
&= - \left[\sum_j \sum_{\{m'_j\}} \left(\lambda_{(I_j)}^a \right)_{m_j m'_j} \delta(y - y_j) \right] \Psi(\{I_j m'_j y_j\})
\end{aligned}$$

(H is again (3.43).)

Then $\mathcal{E}_{(\dots)}$ is just the energy of the sector with N external charges. The second condition (3.50) means that instead of gauge invariant Ψ in the vacuum sector we have to consider Ψ which changes under the gauge transformations according to the rule:

$$\begin{aligned}
\Psi_{m_1 \dots m_N} [B^\Omega] &= \sum_{m'_1 \dots m'_N} \mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{I_1} (\Omega^{-1}(x_1)) \times \dots \\
&\quad \times \mathcal{D}_{m_N m'_N}^{I_N} (\Omega^{-1}(x_N)) \times \Psi_{m'_1 \dots m'_N} [B] \\
B_{x, \alpha}^\Omega &= \Omega_x^{-1} B_{x, \alpha} \Omega_{x+\alpha}
\end{aligned}$$

and $\mathcal{D}_{mm'}^I(\Omega)$ are standard representation matrices for the $SU(2)$ group. The meaning of the rules (3.50) and (3.51) is quite transparent. They imply that static charges, the state of which is characterized by their isotopic spin I and its projection m , are sources of Non-Abelian electric flux.

With these prescriptions at hand we can demonstrate an important property specific to the Non-Abelian case mentioned above. Let us first consider the interaction of two charges with isotopic spins $1/2$ placed at a distance R from each other. In the strong coupling limit the wave function of their state is given by:

$$\Psi_{(m_1 x_1, m_2 x_2)} [B] \sim \mathcal{D}_{m_1 m_2}^{1/2} \left(\prod_{L_{x_1, x_2}} B_{y, \alpha} \right)$$

(where we have taken a product of B -matrices along the straight line L_{x_1, x_2} connecting the charges). Since tops placed on this line, are excited (they have $l = 1/2$) we obtain the result:

$$\mathcal{E}_{1/2}(x_1, x_2) \sim |x_1 - x_2|$$

just as in the Abelian case. Now, let us consider two charges with $I = I$. One possible wave function will be the same as (3.52) with $\mathcal{D}^{1/2}$ replaced by $\mathcal{D}^1$. However, here we have a state with much lower energy. To see how it is formed let us compare the first option, which could have been represented by the picture

$$\Psi^{(1)} = x_1, m_1 \longmapsto x_2, m_2$$

(here we draw the flux line connecting x_1 and x_2) with another one

$$\Psi^{(2)} x_1, m_1 \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \uparrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \uparrow \\ \rightarrow \\ \downarrow \end{array} x_2, m_2 = \Psi_{m_1}, \Psi_{m_2}$$

where the flux curls up. The explicit expression for, say, the left square is:

$$\begin{aligned}
\Psi_m &= \text{Tr} (\tau^m B_1 B_2 B_3^+ B_4^+) \\
\tau^{\pm \lambda} &= \tau^x \pm i \tau^y, \tau^0 = \tau^z
\end{aligned}$$

($\tau^{x, y, z}$ are Pauli matrices.)

It is trivial to check that under a gauge transformation (3.56) transforms in accordance with

(3.51). At the same time the energy of this state does not depend on $|x_1 - x_2|$ and therefore for large distances the state (3.55) is much more favourable than (3.54) and we have no confinement for the states with $I = 1$. Notice, that for $I = 1/2$ the option (3.55) was absent, which was the reason for confinement. It is

quite easy to understand what has happened. The Non-Abelian gauge field describes gluons, having $I = 1$. When we added a source with $I = 1$ it is energetically favourable for this source to be screened by an adjacent gluon (this process is shown in the picture (3.55)). If the source has $I = 1/2$, then in the strong coupling phase such screening is impossible and we have colour confinement. In principle another phase is possible in which even $I = 1/2$ will be screened away by $I = 1$ gluons. For this to happen we must have a cloud containing an infinite number of gluons. Then statistically they can screen our source. However such a cloud would have finite energy only if the constituent gluons are massless. Therefore, we expect that if there is an energy gap in the gauge theory then the effective cloud will consist of a finite number of gluons and will be unable to screen half-integer spin. One of the amusing consequences of this picture is that the string tension between sources with, say, $I = 7/2$ is the same as for $I = 1/2$ because three units of I -spin will be screened by gluons and only $1/2$ will remain. All this is a manifestation of the fact that the electric flux is conserved only mod(1).

The question whether we indeed have a mass gap in the continuum limit ($e_0^2 \rightarrow 0$) cannot be solved by the strong coupling expansion, because its presence in any order in $1/e_0^2$ proves nothing. More subtle methods are needed. We shall describe some of them in the next chapter.

14.4 Instantons in Abelian Systems

In the previous chapter we saw that the existence of a mass gap is the most important property of gauge and spin systems. In this chapter we shall discuss a specific mechanism for gap generation, which is especially important in Abelian systems and will also play some role in nonabelian ones.

14.4.1 4.1 Instantons in Quantum Mechanics and the Ising Model

Let us describe the symmetry properties in the quantum mechanical system described by the action (for imaginary time):

$$S = \int dt \left\{ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 + \frac{\mu^4}{4\lambda} \right\}$$

with $\lambda \ll \mu^2$. The only interest of this model for us is that it provides the simplest demonstration of a phenomenon present in more complicated systems. The point we intend to examine is that this model in any finite order of perturbation theory has apparently broken symmetry, whereas in reality the symmetry is restored. To see this we expand:

$$\varphi = \pm \frac{\mu}{\lambda^{1/2}} + \chi$$

Expanding the action near, say, the left-hand minimum we have:

$$S \approx \int dt \left\{ \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 + \mu^2 \chi^2 + O(\lambda^{1/2}/\mu) \chi^3 \right\}$$

We see that we have (for small λ) almost harmonic oscillations near the bottom of the left-hand well. The left-right symmetry $\varphi \rightarrow -\varphi$ is broken and this will remain so in any finite order in λ . At the same time we know from quantum mechanics that the ground state of this theory is described by an even ψ -function and therefore is nondegenerate, with

restored symmetry. It is clear that restoration of symmetry occurs because a particle placed in the left well will (with finite probability) tunnel to the right one and back. Therefore if we wait long enough there will be equal probability of finding the particle in either of the wells. There exists an interesting way to describe tunnelling which we briefly discuss now. It is easy to see (by rescaling $\varphi \rightarrow \lambda^{-1/2}\varphi$) that for small λ , S is very large, being of the order λ^{-1} . That means that in the functional integral:

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]}$$

we can use a saddle point approximation. It is crucial that together with the trivial minimum $\varphi = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$, the classical equations of motion for imaginary time:

$$-\frac{\delta S}{\delta\varphi(t)} = \ddot{\varphi} + \mu^2\varphi - \lambda\varphi^3 = 0$$

have a solution:

$$\varphi(t) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left(\frac{\mu(t-t_0)}{\sqrt{2}}\right)$$

(t_0 is an arbitrary constant). This solution (being a local minimum for $S[\varphi]$) connects the left well at $-\infty$ with the right one at $+\infty$. Substituting (4.6) into (4.1) we find a classical action:

$$S_{\text{cl}} = \frac{(2\sqrt{2})\mu^3}{3\lambda}$$

At first glance the contribution of the trajectory (4.6) to the functional integral has the factor

$$e^{-S_{\text{cl}}} = e^{-(2\sqrt{2})\mu^3/3\lambda}$$

and is negligible. However this is not so. The reason is that we have not one classical solution but a continuum set of them distinguished by the value of t_0 . Therefore we have to expect that the contribution to Z has the form:

$$Z \sim e^{-(2\sqrt{2})\mu^3/3\lambda} \int dt_0$$

This means that for relatively short periods of time, $t < e^{-(2\sqrt{2})\mu^3/3\lambda}$, the contribution of our trajectory is indeed irrelevant, but in the large time limit it becomes very large. This is in complete agreement with the tunnelling interpretation of our solution, namely the characteristic time we have introduced, is just the tunnelling time and hence the time for restoration of symmetry.

Let us perform now a more quantitative analysis.

Let us expand our field near the classical solution $\varphi_{\text{cl}}(t-t_0)$:

$$\varphi(t) = \varphi_{\text{cl}}(t-t_0) + \sum_{n \neq 0} C_n \psi_n(t-t_0)$$

In (4.10) we have introduced functions ψ_n which are normal modes for the oscillations near φ_{cl} . They are to be found from

$$\int dt_1 \frac{\delta^2 S_{\text{cl}}}{\delta\varphi(t)\delta\varphi(t_1)} \Big|_{\varphi=\varphi_{\text{cl}}(t)} \psi_n(t_1) = \omega_n^2 \psi_n(t)$$

or

$$\ddot{\psi}_n + \mu^2 \psi_n - 3\lambda \varphi_{\text{cl}}^2 \psi_n = -\omega_n^2 \psi_n$$

In the complete set of functions ψ_n there exists $\psi_0 \sim \dot{\varphi}_{\text{cl}}$ for which $\omega_0^2 = 0$. Its existence, being a consequence of translation invariance, is easily checked directly by differentiating equation (4.5) with respect to t . In the expansion (4.10) we did not include ψ_0 in the sum, introducing instead the parameter t_0 . The reason for this is that while fluctuation of the C'_n are small, bounded by the action S , this action does not depend on t_0 and this degree of freedom has to be treated separately. In order to do this let us pass from the integration over $\varphi(t)$ to the integration over C_n and t_0 . The easiest way to find the corresponding Jacobian is to examine the metric in the functional space:

$$\begin{aligned} \|\delta\varphi\|^2 &= \int dt (\delta\varphi(t))^2 \approx (\delta t_0)^2 \int dt \dot{\varphi}_{\text{cl}}^2 \\ &+ \sum_{n \neq 0} (\delta C_n)^2 + O((\delta t_0)^3) \end{aligned}$$

Therefore:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\varphi(t) &= A \prod_{n \neq 0} dC_n dt_0 \\ A &= \left(\int dt \dot{\varphi}_{\text{cl}}^2 \right)^{+1/2} \end{aligned}$$

and with this knowledge we can proceed to calculate the one kink contribution to the correlation function:

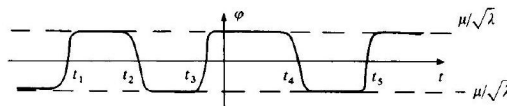
$$\begin{aligned} \langle \varphi(t_1) \varphi(t_2) \rangle &\approx \frac{\mu^2/\lambda + B e^{-S_{\text{cl}}} \int dt_0 \varphi_{\text{cl}}(t_1 - t_0) \varphi_{\text{cl}}(t_2 - t_0)}{1 + B e^{-S_{\text{cl}}} \int dt_0} \\ &\approx \frac{\mu^2}{\lambda} + B e^{-S_{\text{cl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 (\varphi_{\text{cl}}(t_1 - t_0) \varphi_{\text{cl}}(t_2 - t_0) - \mu^2/\lambda) \\ B &= A \frac{\int \prod d\xi_n e^{-\Sigma \omega_n^2 \xi_n^2}}{\int \prod d\xi_n e^{-\Sigma \omega_{n,0}^2 \xi_n^2}} \end{aligned}$$

($\omega_{n,0}$ are eigenfrequencies for the trivial minima $\varphi_{\text{cl}}^2 = \mu^2/\lambda$).

Substituting (4.6) into (4.14) we obtain:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t_1) \varphi(t_2) \rangle &= \frac{\mu^2}{\lambda} (1 - C e^{-S_{\text{cl}}} |t_1 - t_2|) \\ C &= -B \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\tanh \frac{\mu x}{\sqrt{2}} |t_1 - t_2| \tanh \frac{\mu(x-1)}{\sqrt{2}} |t_1 - t_2| - 1 \right) \\ &\approx 2B \quad |t_1 - t_2| \gg \mu^{-1} \end{aligned}$$

As was expected, for large times the kink solution (4.6) gives a large contribution. Moreover, it is clear that we have to take into account multi-kink configurations, which in the "tunnelling" language correspond to trajectories travelling from left to right and back several times, for which $\varphi(t)$ has the following structure:



There is no exact classical solution of such a kind, because there is a tendency for kink and anti-kink to annihilate. The attractive force between them is easily estimated. Since the tails of kinks are exponentially small:

$$\varphi_{\text{cl}}(t) \simeq \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} (1 + Oe^{-2\mu(t)/\sqrt{2}}) \quad |t| \gg 1$$

a mere superposition of kink and anti-kink will have the action:

$$\begin{aligned} S^{(k,\bar{k})} &= S^{(k)} + S^{(\bar{k})} + O\left(e^{-2\mu|t_1|/\sqrt{2}}\right) \\ &= 2S^{(k)} + O\left(e^{-2\mu|t_1|/\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

where t_{12} is the distance between k and $\bar{k}$. This result implies that the interaction between kinks is exponentially small. Since for small λ the average time distance between our objects is of the order of $c^{-1}e^{2\sqrt{2}\mu^3/3\lambda} \gg \mu^{-1}$ the above-mentioned interaction can be neglected. Another simplification, possible for the same reason, is that the width of the kink can be neglected. We can approximate the general configuration by:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{cl}}^{(N)}(t) &= \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \prod_{j=1}^N \text{sgn}(\tau - \tau_j) \\ S_{\text{cl}}^{(N)} &= N \frac{2\sqrt{2}\mu^3}{3\lambda} \\ \tau_1 &\leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_N \end{aligned}$$

The total effect on the correlation function is given by:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t_1) \varphi(t_2) \rangle &= \frac{\mu^2}{\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} (-C)^N e^{-S_{\text{cl}}^{(N)}} \int d\tau_1 \dots d\tau_N = \frac{\mu^2}{\lambda} e^{-\Delta|r_1-t_2|} \\ \min(t_1, t_2) &< \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N < \max(t_1, t_2), \quad \Delta = Ce^{-2\sqrt{2}\mu^3/3\lambda} \end{aligned}$$

We have found that tunnelling trajectories (which are also called instantons) remove the degeneracy of the ground state present on a perturbative level. The symmetry $\varphi \rightarrow -\varphi$ gets restored and the system acquires a finite, though large, correlation length $r_c \sim \Delta^{-1}$. As we discussed in Chapter 1, in the limit of large correlation length the quantum theory with action (4.1) must be equivalent to the $\mathcal{D} = 1$ Ising model. † This equivalence is quite obvious from the present consideration: the moment we replaced the φ -field by the step function (4.16) we actually started counting configurations of the Ising model described by the picture:



and the counting of kinks in (4.20) is exactly the counting of spin reversals in (1.18)

14.4.2 4.2 Instantons in the Global $O(2)$ Model

This model is described by the partition function:

$$Z = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_x \frac{d\varphi_x}{2\pi} \exp \left(\beta \sum_{x,8} (\cos(\varphi_x - \varphi_{x+8}) - 1) \right)$$

† This fact was realized long ago by Vaks and Larkin.

We shall consider its properties in the large- β limit (weak coupling): the natural thing to do would be to expand the cosine in (4.21) and to write:

$$S = \frac{\beta}{2} \sum_{x,\delta} (\varphi_x - \varphi_{x+\delta})^2 \approx \frac{\beta}{2} \int d^2x (\nabla \varphi)^2$$

However, this expansion is not entirely correct. It restricts φ_x to be very close to its neighbour $\varphi_{x+\delta}$. This is physically reasonable since at large β neighbouring spins must be almost parallel. However, almost parallel spins do not always mean $\varphi_x \simeq \varphi_{x+\delta}$ since we can have as well the situation:

$$\begin{aligned} \varphi_x &\simeq \pi - \epsilon & \epsilon &\ll 1 \\ \varphi_{x+\delta} &\simeq -\pi + \epsilon \end{aligned}$$

The configuration (4.23), for which $\varphi_{x+\delta} - \varphi_x = 2\epsilon - 2\pi$ must be just as important as configurations with $\varphi_{x+\delta} - \varphi_x \sim \epsilon$, but in the expansion (4.22), where we have lost the periodicity of the cosine, (4.23) is strongly suppressed. We must find the remedy for this unphysical situation. There are several ways of doing it. The most elegant one is to consider a continuum limit (4.22) but to allow φ to be a multivalued function, so that it has 2π jumps at certain branch cuts. We shall return to this approach but first it is useful to work out the theory on a lattice, and then to see how this multivalued field arises.

Our aim is to retain the harmonic approximation for the φ -field, but to account for the configuration with (4.23). This aim can be achieved by replacing (4.21) by:

$$Z = \sum_{\{n_{x,\delta}\}} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_x \frac{d\varphi_x}{2\pi} \exp \left(-\frac{\beta}{2} \sum_{x,\delta} (\varphi_x - \varphi_{x+\delta} + 2\pi n_{x,\delta})^2 \right)$$

where the n are arbitrary integers. Formally, we have replaced the function $\exp(\beta(\cos \varphi - 1))$ by

$$\theta(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{\beta}{2} (\varphi - 2\pi n)^2 \right)$$

In the large β limit when the only important property of the action was its periodicity and anharmonic terms $\sim \varphi^4$ are irrelevant as was discussed in Chapter 1, the replacement of (4.21) by (4.25) is legitimate. With (4.24), which is periodic, we properly take into account the formally discontinuous configurations (4.23).

The partition function (4.24) can be transformed into a physically meaningful form. In order to do this let us take the case $\mathcal{D} = 2$ and characterize the set of integers $\{n_{x,\delta}\}$ by the integers q_{x*} (where x_* are the centres of plaquettes) defined as

$$\begin{aligned} q_{x*} &= n_{x,1} + n_{x+1,2} - n_{x+2,1} - n_{x,2} \\ &= \sum_a n_{x,8} \end{aligned}$$

In other words q_{x*} is a "field strength" created by the "vector potential" $n_{x,\delta}$. Any set $n_{x,\delta}$ can be represented by:

$$n_{x,\delta} = m_x - m_{x+\delta} + \alpha_x - \alpha_{x+\delta} + \varepsilon_{\delta'\gamma} (\phi_{x*} - \phi_{x*-\gamma})$$

Here $\varepsilon_{\delta y}$ is the standard antisymmetric tensor, the m_x are integers, $|\alpha_x| < 1$, and ϕ_{x*} satisfies the equations:

$$\Delta_{x*x'}\phi_{x'} \equiv \sum_{\gamma} (4\phi_{x_*} - \phi_{x-\gamma} - \phi_{x_*+\gamma}) = q_{x_*}$$

The decomposition (4.27) splits $n_{x,\delta}$ into longitudinal and transverse parts. The lattice Laplace equation (4.28) is obtained from (4.27) by forming the "field strength" (4.26), to which only ϕ contributes. If we form the lattice divergence of $n_{x,\delta}$ we get an equation which determines m_x and α_x in terms of $\{n_{x,\delta}\}$.

Summation over $\{n_{x,\delta}\}$ can be replaced by summations over $\{m_x\}$ and $\{q_{x_*}\}$. Substituting (4.27) into (4.24) and changing variables in each term by

$$\varphi_x \rightarrow \varphi_x - 2\pi(m_x + \alpha_x)$$

we obtain: [†]

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{q_*\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_x \frac{d\varphi_x}{2\pi} \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{\beta}{2} \left(\sum_{x,\delta} (\varphi_x - \varphi_{x+\delta})^2 + 2\pi^2 \sum_{x_*,\gamma} (\phi_{x_*} - \phi_{x_*-\gamma})^2 \right) \right) \\ &= Z_{\text{Gauss}} \sum_{\{q_*\}} \exp \left(-\frac{\beta}{2} \sum_{x_*,x'_*} \Delta_{x_*,x_*}^{-1} q_{x_*} q_{x'_*} 2\pi^2 \right) \\ Z_{\text{Gauss}} &= \prod_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi_x}{2\pi} \exp \left(-\frac{\beta}{2} \sum_{x,\delta} (\varphi_x - \varphi_{x+\delta})^2 \right) \end{aligned}$$

In deriving (4.30) we have used the fact that the replacement (4.29)

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \Rightarrow \int_{-\pi+2\pi(m+\alpha)}^{\pi+2\pi(m+\alpha)} d\varphi$$

and summation on m are thus equivalent to replacing

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi}{2\pi}$$

The formula (4.30) has a remarkable physical interpretation. It shows that in order to account for the periodicity of the action in the large β limit one has to introduce a set of vortices into the system, which interact according to the two-dimensional Coulomb law (the inverse Laplacian in (4.30)). Let us examine the correspondence between the distribution of $\{q_x\}$ and configuration of angles $\{\varphi_x\}$. Take the case when only one vortex is present at $x = 0, q_0 = 1$. Take a large closed loop L on the lattice surrounding $\mathbf{x} = 0$, and examine $B_{x,\delta} = \varphi_x - \varphi_{x+\delta}$ along this loop. From the definition it is clear that:

$$\oint_L B_{x,\delta} = 0$$

(Here we have denoted by $\oint_L$ the sum of $B_{x,\delta}$ along the loop; in the continuum limit it goes to an ordinary contour integral). As we noticed at the beginning of this section, $|B_{x,\delta}| \ll 1(\text{mod } 2\pi)$ at large β . The set of integers $\{n_{x,\delta}\}$ which we have introduced is defined so that:

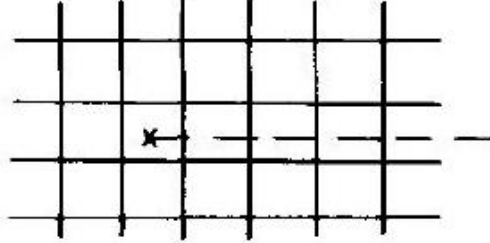
$$-\pi < A_{x,\delta} = \varphi_x - \varphi_{x+\delta} + 2\pi n_{x,\delta} < \pi$$

[†] The whole set of arguments, leading to (4.30) first appeared in V. G. Berezinsky's Ph.D. Thesis.

and for large β , $|A_{x,\delta}| \ll 1$. The quantity $A_{x,\delta}$, uniquely defined for a given configuration $\{\varphi_x\}$, has a nonzero circulation, equal to the vorticity:

$$q_0 = \frac{1}{2\pi} \oint_L A_{x,\delta}$$

A simple example of $\{n_{x,\delta}\}$ leading to a unit vortex can be constructed from the following picture:



All links except those intersected by the dashed line have $n_{x,\delta} = 0$. Intersected links have $n_{x,\delta} = 1$. This picture clearly satisfies the condition (4.32) and corresponds to the angles φ_x having a 2π -jump on the dashed line. The exact shape of this line is irrelevant because its change is just a gauge transformation of $\{n_{x,\delta}\}$. In the continuum limit this dashed line becomes a cut in the complex plane with the branch point at the position of the vortex.

In the large- β limit in two dimensions, owing to the long range properties of the two-dimensional Coulomb force, vortices are combined into neutral dipoles, and the system (4.30) is dielectric. Such dipoles have very small influence on the correlation functions and are irrelevant at large β . At some critical β the dipoles dissociate and we get a plasma of vortices. We shall not investigate these phenomena here (see e.g. [3]). Instead, it is conceptually important to explain how (4.30) could have been obtained, directly from the continuum theory, and that it is precisely the instanton approximation to (4.21).

As we have said, the action in the continuum limit has the form:

$$S = \frac{\beta}{2} \int (\partial_\mu \varphi)^2 d^2x$$

Classical minima of this action are defined from the equation:

$$\partial^2 \varphi(x) = 0$$

If $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, eq. (4.35) has only the zero continuous solution. Let us suppose now, that we have introduced a set of vortices, placed at the points $\{\mathbf{x}_a\}$ with strengths $\{q_a\}$. This means that we integrate over the multivalued fields φ which change by $2\pi q_a$ as we go around the point x_a . In this sector we do have a nontrivial classical solution of (4.35). It is given by:

$$\varphi = \sum_{a=1}^N q_a \operatorname{Im} \log(z - z_a)$$

$$z = x_1 + ix_2$$

The formula (4.36) can be viewed as a continuum approximation to the classical solution, minimizing the action:

$$S = \sum_{x,\delta} u(\varphi_x - \varphi_{x+\delta})$$

with any periodic $u(\varphi)$:

$$u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi)$$

$$u(\varphi) \approx \left(\frac{\beta}{2}\right) \varphi^2, \quad \varphi \ll 1$$

This solution far from the singularity is universal and described by (4.36). The structure near x_a (the core of the vortex) depends on the detailed form of u , but fortunately it appears to be irrelevant.

Substituting (4.36) into (4.34) we obtain:

$$S_{\text{cl}} = \frac{\beta}{2} \left\{ \sum_{a \neq b} q_a q_b 2\pi \log \frac{R}{|x_a - x_b|} + \text{const.} \sum_a q_a^2 \right\}$$

(R being the size of the system; the second term is the self-energy of the vortex).

Noticing that $(1/2\pi) \log(R/|x|)$ is just the inverse Laplacian of a twodimensional Coulomb energy we see that taking account of instantons for (4.21) leads to the continuum version of formula (4.30). We see that the obscure transformations leading to (4.30) serve a simple purpose they take account of vortices.

However, in the present case, owing to the "confinement" of vortices they do not have any qualitative effects (at large β). In the next section we shall consider the case when such effects are present.

Let us mention what happens for $\mathcal{D} = 3$. In this case we have, instead of point-like singularities, singular lines. The field φ has a 2π jump as we go around such vortex line. The vortex lines carry energy and are directly observable in ^4He .

To conclude this section, we describe the continuum description of $O(2)$ systems. It is given by the Lagrangian:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 + v(|\phi|^2)$$

where, as we explained in Chapter 1, $v(|\phi|^2)$ can be taken without loss of generality to be:

$$v(|\phi|^2) = \frac{\mu_0^4}{\lambda} - \mu_0^2 |\phi|^2 + \frac{\lambda_0}{2} |\phi|^4$$

The relation of this theory to the one described by (4.21) is the same as that of the quantum mechanics of a double well to the $\mathcal{D} = 1$ Ising model. Their long range properties are identical. This is most easily seen in the present case if we introduce variables:

$$\phi(x) = u(x) e^{i\theta(x)}$$

$$S = \int \{ (\partial_\mu u)^2 + v(u^2) + u^2 (\partial_\mu \theta)^2 \} dx$$

For small values of λ_0 we have

$$u(x) = \frac{\mu_0}{\sqrt{\lambda_0}} \left(1 + o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\right) \right)$$

and we see that the fluctuations of the modulus $u(x)$ are small and short ranged (they have a mass μ_0). At the same time, the field $\theta(x)$ is massless and the only one contributing at very large distances. It is worthwhile demonstrating how the vortex contribution arises directly in (4.40). As before, the vortex arises as a nontrivial classical minimum for the action (4.40). In the two-dimensional case the equations have the form:

$$\partial^2 \varphi - \mu_0^2 \phi + \lambda |\phi|^2 \phi = 0$$

or

$$\partial^2 \phi_a - \mu_0^2 \phi_a + \frac{\lambda}{2} \left(\sum_1^2 \phi_b^2 \right) \phi_a = 0$$

(where $\phi_{1,2}$ are defined by $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$).

This equation has $O(2) \otimes O(2)$ invariance, one of the $O(2)$ being rotation of x -space and the other rotation of the ϕ . Let us look for a solution which breaks this $O(2) \otimes O(2)$ but preserves the single $O(2)$

symmetry under simultaneous rotations of $\mathbf{x}$ and ϕ spaces. The most general ansatz with such a property is:

$$\phi_a = u(r) \frac{x_a}{r}, \text{ or } \phi = u(r) e^{i\varphi}$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \varphi = \arctg(x_2/x_1)$$

From the above symmetry consideration it has to be consistent with (4.44), and direct substitution confirms that it indeed is. We obtain an equation for u :

$$u'' - \mu_0^2 u - \frac{2}{r^2} u + \lambda u^3 = 0$$

There exists a solution to (4.46) with the properties:

$$u(r)_{r \rightarrow 0} 0, \quad u(r)_{r \rightarrow \infty} \mu_0 / \sqrt{\lambda}$$

The reasons for the existence and stability of such a solution are the following. Substitution of (4.45) into (4.42) gives:

$$S = \int_0^\infty 2\pi r \, dr \left\{ (du/dr)^2 + v(u^2) + u^2/r^2 \right\}$$

In order to avoid quadratic divergence at infinity we must have $v(u^2(\infty)) = 0$ or $u^2(\infty) = \mu_0^2/\lambda$. Now, because of the last term in (4.48) it is desirable to have $u(0) = 0$. Interpolation between zero and μ^2/λ should not be too fast because of the first term and should not be too slow because of the second one. So we expect that there is a unique function $u(r)$ which minimizes S . This is indeed the case as can be rigorously shown, but we content ourselves with the above heuristic consideration.

We have also to consider stability with respect to variation of the phase θ . It is clear from (4.42) that if it were possible to deform $\theta(x)$ continuously from $\theta(x) = \varphi$ to $\theta = 0$, the action (4.42) would decrease. However, such a deformation is not possible, as follows from the condition that ϕ is single valued and that every $\theta(\varphi)$ has to satisfy:

$$\theta(2\pi) - \theta(0) = 2\pi q$$

with integer q . The solution (4.45) corresponds to $q = 1$, and it cannot be deformed without violation of single-valuedness of ϕ to the solution with $q = 0$.

This fact guarantees the phase stability of (4.45). Notice that very similar topological considerations could have been used to prove stability of the kink solution of the preceding section; it also can be seen that in the case of a complex field the kink solution is unstable, because the kink can be deformed to nothing by continuous phase rotations.

The action for a single vortex is logarithmically divergent at large distances, due to the last term in (4.48). However, if we consider a neutral superposition of vortices and anti-vortices the total action will be finite, and in the limit when all relative distances are larger than μ_0^{-1} it will be given by (4.39) with β replaced by $2\mu_0^2/\lambda$.

Our conclusion is that in the infrared limit we have three equivalent descriptions of the $O(2)$ systems, given by the actions (4.21), (4.24) and (4.30).

Remarks 1. The analogy between the $\mathcal{D} = 1$ Ising model and double-well quantum mechanics was first noted by Vaks and Larkin. The theory of vortices in the planar $O(2)$ magnet and the effective description by θ -functions was suggested by V. L. Berezinsky in his PhD thesis (1970) and rediscovered by Koesterlitz and Thouless.

2. The $O(2)$ model is quite relevant to several physical problems. First of all it describes by its definition planar magnetic systems with $O(2)$ symmetries. Secondly since the action (4.40) is the second quantized hamiltonian for the interacting Bose gas, the model describes twodimensional ^4He films at nonzero temperature (the static long range properties). It is also operative for the theory of two dimensional crystals. This occurs for the following reasons. If we denote by $u_\alpha(\mathbf{x})$ a displacement of the atom placed at the point x of the crystal then in the infrared limit we have (according to the theory of elasticity):

$$E = \int \left\{ \frac{\mu}{4} (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha)^2 + \frac{\lambda}{2} (\partial_\lambda u_\lambda)^2 \right\} d^2x$$

(λ, μ are the so-called Lamé constants). In order to find a partition function we have to compute:

$$Z = \int \mathcal{D}u_\alpha(x) e^{-\beta E[u]}$$

This would have been an easy Gaussian integral if the fields were single valued. However, just as phases $\{\varphi_{\mathbf{x}}\}$ were defined (mod 2π), displacements $u_\alpha(x)$ are defined (mod b_α) where b_α is a lattice vector, since on a lattice the energy must be a periodic function of displacements. Therefore, we have to account for jumps in $u_\alpha(\mathbf{x})$. If we have a branch point at x_0 , and a loop L surrounding this point then:

$$\oint_L \partial_\beta u_\alpha(x) dx^\beta = b_\alpha$$

For such $u_\alpha(\mathbf{x})$ it is said that we have a dislocation located at $\mathbf{x}_0$. We see that the properties of dislocations almost coincide with those of vortices. In particular, at some β we have a condensation of dislocations which can be interpreted as melting.

14.4.3 4.3. Compact QED ($O(2)$ Gauge Model)

In this section we shall examine the case of Abelian gauge theories. This case is nontrivial, in spite of the fact that the naive continuum limit of the action is given by:

$$S = \frac{1}{4e_0^2} \int d^Qx (\hat{c}_\mu A_\nu - \hat{c}_\nu A_\mu)^2$$

and describes apparently free photons. The nontriviality, as in the preceeding sections, comes from the fact that the vector potential has certain angular properties which force us to account for the analogues of vortices or dislocations in the functional integral.

Before we do this, let us explain why the vector potential is supposed to be an angular variable.

A priori, we can define on a lattice two different models. The first one is (1.49) with the action:

$$S = \frac{1}{2e_0^2} \sum_{x,\alpha\beta} (1 - \cos F_{x,\alpha\beta})$$

$$F_{x,\alpha\beta} = A_{x,\alpha} + A_{x+\beta,\alpha} - A_{x+\alpha,\beta} - A_{x,\beta}$$

$$-\pi \leq A_{x,\alpha} \leq \pi$$

The second option is:

$$S = \frac{1}{4e_0^2} \sum_{x,\alpha\beta} F_{x,\alpha\beta}^2; -\infty \leq A_{x,\alpha} \leq +\infty$$

In the naive continuum limit both of these actions lead to (4.53), but the physics of these models is different. An analogous situation arises in ordinary quantum mechanics with the action:

$$S = \frac{1}{2} \int \dot{x}^2 dt$$

This action can describe a free particle on a line or a free particle on a circle. The spectrum is continuous in the first case and is discrete in the second. The difference arise because in the first case we integrate over continuous $x(t)$ while in the second we should allow 2π -jumps.

We have to decide on physical grounds what version of QED is realized in Nature. The main reason why we believe in the periodic (or compact) version of QED is based on the empirical fact of charge quantization. We know that the ratio of any two electric charges is a rational number. Let us show that this is a necessary consequence of compact QED, while in the noncompact version it would be an unexplained mystery.

The qualitative argument is that, as we saw in Chapter 3, the electric flux (which is an analogue of angular momentum) is quantized. Since charged particles are sources of electric flux, which according to Gauss' theorem must be equal to their charges, we conclude that possible charges are quantized as well.

To be more explicit, let us consider two charged fields, ψ_x with a unit charge and χ_x with charge e . The Lagrangian for these fields is of the form:

$$\mathcal{L}' = \sum_{x,\delta} \left(\psi_{x+\delta}^\dagger e^{iA_{x,\delta}} \psi_x + \chi_{x+\delta}^\dagger e^{ieA_{x,\delta}} \chi_x \right) + \text{c.c.}$$

The form of (4.57) is dictated by gauge invariance:

$$A_{x,\delta} \rightarrow A_{x,\delta} + x_{x+\delta} - \alpha_x$$

$$\psi_x \rightarrow e^{i\alpha_x} \psi_x, \chi_x \rightarrow e^{ie\alpha_x} \chi_x$$

From (4.57) we see that $\mathcal{L}'$ is well defined in our phase space only if e is integer, which is needed for periodicity in $A_{x,8}$. Notice also that the period of the free action (4.54) defines a natural unit of charge.

In noncompact QED the flux is continuous and there are no reasons for charge quantization. Another important thing concerning compactness is that the two above-mentioned options are present only in the abelian case. For any Non-Abelian group the fact of compactness or non-compactness can be seen from its Lie algebra. For instance if the gauge group is $SU(2)$ we cannot formulate the noncompact version at all. If we consider the noncompact group $SU(1,1)$, we get gauge quanta with negative norm. Therefore, when we consider QED as arising as a subgroup of some Non-Abelian gauge theory we are necessarily dealing with the compact version.

After this explanation let us work out the theory of this version starting from $\mathcal{D} = 3$. Following the strategy of the preceeding section we consider a partition function:

$$Z = \sum_{\{n_{x,\alpha\beta}\}} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{x,\alpha} dA_{x,\alpha} \exp \left\{ -\frac{1}{4e_0^2} \sum_{x,\alpha\beta} (F_{x,\alpha\beta} - 2\pi n_{x,\alpha\beta})^2 \right\}$$

which takes account of the periodicity of the action. For a given set of $\{n_{x,\alpha\beta}\}$ we introduce numbers q_z (where z belongs to the centres of the cubes of our lattice) defined as the flux of n through a given cube σ_z :

$$\oint_{\sigma_z} n_{x,\alpha\beta} = q_z$$

(the notation in the l.h.s. of (4.60) means the sums of $n_{x,\alpha\beta}$ corresponding to oriented plaquettes forming a cube with centre at z . Its continuum analogue will be an integral of the field $n_{\alpha\beta}$ over a closed surface). Decomposing $n_{x,\alpha\beta}$ as:

$$\begin{aligned} n_{x\alpha\beta} = & m_{x\alpha} + m_{x+\alpha,\beta} - m_{x+\beta,\alpha} - m_{x,\beta} \\ & + \lambda_{x,\alpha} + \lambda_{x+\alpha,\beta} - \lambda_{x+\beta,\alpha} - \lambda_{x,\beta} \\ & + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\phi_z - \phi_{z-\gamma}) \end{aligned}$$

We obtain from (4.60):

$$\Delta_{zz'} \phi_{z'} = q_z$$

($\Delta_{zz'}$ is the lattice Laplace operator). Substitution of (4.61) and (4.62) into (4.59) gives:

$$\begin{aligned} Z &= Z_{\text{Gauss}} \sum_{\{q_z\}} \exp \left(-\frac{1}{4e_0^2} \sum_{z,z'} q_z \Delta_{zz'}^{-1} q_{z'}, 8\pi^2 \right) \\ Z_{\text{Gauss}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{x,\alpha} dA_{x,\alpha} \exp \left(-\frac{1}{4e_0^2} \sum_{x,\alpha\beta} F_{x,\alpha\beta}^2 \right) \end{aligned}$$

We thus obtain the same Coulomb system as (4.30) but in three dimensions. As we shall see that makes a lot of physical difference. Before working this out let us explain the meaning of the "charges" which appeared in (4.63). They can be thought of as instanton solutions for the action (4.54). In the infrared limit the classical equations take the form:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_{\mu\nu} &= -\text{curl } \mathbf{H} = 0 \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0, \mathbf{H} = \text{curl } \mathbf{A} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma} \end{aligned}$$

They do not have nonsingular solutions except for $\mathbf{H} = 0$. However, as before, since (4.64) was obtained from a periodic action we can allow certain δ -like singularities in $\mathbf{H}$ with strengths $2\pi q$. Such a solution (analogous to (4.36)) can be easily given:

$$H_\mu(x) = \frac{q}{2} \frac{x_\mu}{|x|^3} - 2\pi q \delta_{\mu 3} \delta(x_1) \delta(x_2) \theta(x_3)$$

(θ is the step function).

This solution represents a magnetic charge, sitting at the origin. Its magnetic flux $2\pi q$ created by the first term is compensated by the ingoing flux along the third axis. In two-dimensions we had the analogue of (4.65):

$$A_\mu = \partial_\mu \varphi = q\epsilon_{\mu\nu} (x_\nu/x^2) - 2\pi q\theta(x_2)\delta(x_1)$$

where the second term arose from the discontinuity of the phase. Owing to the periodicity of the action, the second terms in both (4.66) and (4.65) do not contribute to physical quantities. Therefore, the general instanton configuration in our case is described by a set of magnetic charges with Coulomb interactions and has the action:

$$S_{\text{INST}} = \frac{1}{4e_0^2} \sum_{a \neq b} \frac{q_a q_b \cdot 2\pi}{|x_a - x_b|} + \frac{\text{const.}}{e_0^2} \sum_a q_a^2$$

This is the same result as (4.63), provided that these charges are far apart. Let us show now that due to the disordering effect of instantons the system acquires a finite correlation length (the photon becomes massive). To show this we shall use the following functional representation for the instanton part of Z :

$$Z = Z_{\text{Gauss}} \cdot Z_{\text{INST}}$$

$$\begin{aligned} Z_{\text{INST}} &= \sum_{N, \{q_a\}} \frac{\xi^N}{N!} \int \prod_{j=1}^N dx_j \exp \left(-\frac{\pi}{2e^2} \sum_{a \neq b} \frac{q_a q_b}{|x_a - x_b|} \right) \\ &= \int \mathcal{D}\chi(x) \exp \left\{ -\left(\frac{e}{2\pi}\right)^2 \int (\nabla\chi)^2 \right\} \sum_N \sum_{\{q_a\}} \frac{\xi^N}{N!} \int dx_1 \dots dx_N \\ &\quad \times \exp \left(i \sum_a q_a \chi(x_a) \right) \\ &\approx \int \mathcal{D}\chi(x) \exp \left\{ -\left(\frac{e}{2\pi}\right)^2 \int ((\nabla\chi)^2 - M^2 \cos \chi) \right\} dx \end{aligned}$$

Here:

$$\xi = e^{-\text{const}/e^2} \quad M^2 = \left(\frac{2\pi}{e}\right)^2 \xi$$

The formula (4.63) was obtained through the use of the general property of Gaussian integrals:

$$\int \prod_i dx_i \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j + i \sum_i b_i x_i \right) = (\text{Det } A)^{-1/2} \exp \left(-\sum_{i,j} A_{ij}^{-1} b_i b_j \right)$$

and also by taking into account only $q_a = \pm 1$. The last approximation will be justified when we check that for small e^2 the monopoles are far apart (like the kinks in Section 4.1) and therefore monopoles with $q > 1$ have a tendency to dissociate to monopoles with $q = 1$. Actually taking account of $q > 1$ would lead to terms $\sim \cos(q\chi)$ in (4.68). The functional integral (4.68) supplies us with a diagrammatic expansion for the monopole plasma. However, the effective nonlinearity in (4.68) is exponentially small, because the coefficient g of χ^4 in (4.63) is of the order of

$$g \sim \left(\frac{M}{e}\right)^2 \sim e^{-\text{const}/e^2} \ll 1$$

This result could have been anticipated since it corresponds to the condition for validity of the Debye or mean field approximation. For this to hold it is necessary that in the Debye

volume, of order $M^{-3} \sim \exp(-3 \text{ const. } / \epsilon^2)$, there is a large number of particles, so that the fluctuations in the sum of their individual fields may be neglected. But according to the Boltzmann formula, the density of particles is given by

$$n \sim e^{-\text{const.} / e^2}$$

Hence the criterion for the mean field approximation is

$$nM^{-3} \sim e^{\text{const.} / e^2} \gg 1$$

which is the same as before.

Now let us calculate certain correlation functions. We shall concern ourselves only with gauge-invariant quantities. As an intermediate step it is convenient to have an expression for the generating functional for the charge density of the plasma. After simply repeating the derivation of (4.68) we get:

$$\left\langle \exp \left(i \int \rho(x) \eta(x) dx \right) \right\rangle = Z[\eta(x)] / Z[0]$$

where

$$\rho(x) = \sum_a q_a \delta(x - x_a)$$

$$Z[\eta] = \int \mathcal{D}\chi \exp \left\{ - \left(\frac{e}{2\pi} \right)^2 \int [(\nabla(\chi - \eta))^2 - M^2 \cos \chi] \right\}$$

The simplest correlation functions for our problem are those of the operator

$$H_\alpha(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}(x).$$

At large distances this is just the electromagnetic field strength.

In the quasiclassical approximation, $H_\mu(x)$ is connected with the charge density as follows:

$$H_\mu(x) = \frac{1}{2} \int d^3y \frac{(x-y)_\mu}{|x-y|^3} \rho(y)$$

$$H_\mu(x) = \frac{2\pi i k_\mu}{k^2} \rho(k)$$

Using formula (4.74) we get:

$$\langle \rho(k) \rho(-k) \rangle = \left(\frac{e}{2\pi} \right)^2 k^2 - k^4 \langle \chi(k) \chi(-k) \rangle \left(\frac{e}{2\pi} \right)^4$$

$$\left(\frac{2\pi i}{e} \right)^N \langle \rho(k_1) \dots \rho(k_N) \rangle = \prod_{j=1}^N k_j^2 \langle \chi(k_1) \dots \chi(k_N) \rangle$$

Now the correlation function of the H -field is given by

$$\langle H_\mu(k) H_\nu(-k) \rangle = \langle H_\mu(k) H_\nu(-k) \rangle^{(0)} + (2\pi)^2 \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \langle \rho(k) \rho(-k) \rangle$$

The first term in (4.78) is the bare (that is without monopoles) Green function of the H -field. It has the form

$$\langle H_\mu H_\nu \rangle^{(0)} = e^2 \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

Its singularity at $k = 0$ reflects the existence of a massless photon in this approximation. Using (4.77) and the previous comment about the small coupling of the χ -field we get

$$\langle \rho(k) \rho(-k) \rangle = \left(\frac{e}{2\pi} \right)^2 \left(k^2 - \frac{k^4}{M^2 + k^2} \right) = \left(\frac{e}{2\pi} \right)^2 \frac{M^2 k^2}{M^2 + k^2}$$

From formula (4.78)-(4.80) we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^2} \langle H_\mu(k) H_\nu(-k) \rangle &= \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \frac{M^2}{M^2 + k^2} \\ &= \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2 + k^2} \end{aligned}$$

This formula implies that there are no massless particles in the theory and instead we have a massive scalar particle with a small mass M . Analogously we find the result

$$\left\langle H_{\mu_1}(k_1) \dots H_{\mu_j}(k_j) \right\rangle_{\text{conn}} = e^j k_{\mu_1} \dots k_{\mu_j} \prod_j \frac{1}{k_j^2 + M^2} \quad \left(\sum_j k_j = 0 \right)$$

The qualitative explanation of the above result is the following. In our system there is a finite density of pseudoparticles with long range interaction and their random fields spoil the correlation. From the strong coupling expansion we know that the correlation length is nonzero also for $e^2 \gg 1$. It is reasonable to assume that there is no phase transition in this system and that the confinement regime continues to weak coupling. As we shall show in the next chapter, this is indeed true. Here we shall discuss another implication of the result.

First of all let us notice that since we showed that the $O(2)$ system for $\mathcal{D} = 3$ is disordered (has a mass gap) the same must be true for nonabelian systems. Indeed, let us take the case of $SU(2)$ and constrain the $B_{x,\alpha}$ so that they lie in $O(2) \subset SU(2)$. One should expect that this constraint increases the order in the system and if the constrained system is disordered the unconstrained one must be even more disordered and have an even larger gap. There is no doubt that this statement is correct but a rigorous proof has yet to be given.

As we turn to $\mathcal{D} = 4$ the picture described above changes. Threedimensional cubes embedded into four-dimensional space have four different orientations (analogously to the three different orientations for squares embedded in 3-space). Hence we expect that the number q in (4.60) for $\mathcal{D} = 4$ will have a directional index $\alpha : q = q_{x,\alpha}$. To check this, let us write down the decomposition analogous to (4.61) for the numbers $N_{x,\alpha\beta}$ in the case $\mathcal{D} = 4$:

$$N_{x,\alpha\beta} = \partial_\alpha m_\beta - \partial_\beta m_\alpha + \partial_\alpha \lambda_\beta - \partial_\beta \lambda_\alpha + \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\gamma \phi_\delta$$

Here we have used the notation ∂_α for the lattice derivatives, e.g.:

$$\partial_\alpha m_\beta = m_{x,\beta} - m_{x-\alpha,\beta}$$

Taking the surface integral over the surface of the cube with direction γ we obtain the analogue of eq. (4.62)

$$-\partial^2 \phi_\gamma + \partial_\gamma \partial_\delta \phi_\delta = q_\gamma$$

Here we have used a continuum notation in the hope that after previous discussions it will not be misleading. Formulas with explicit lattice notations would look rather clumsy for $\mathcal{D} = 4$.

From eq. (4.85) we see that q_γ are subjected to the constraint:

$$\partial_\gamma q_\gamma = \sum_\gamma (q_{x,\gamma} - q_{x-\gamma,\gamma}) = 0$$

The instanton part of the partition function has the form:

$$Z_{\text{INST}}^{\mathfrak{G}=4} = \sum_{\{x_{xy}; \partial_{\gamma} q_{xy}=0\}} \exp \left(-\frac{1}{4e_0^2} \sum_{x,x'} 2(2\pi)^2 q_{x,y} \Delta_{x,x'}^{-1} q_{x',y} \right)$$

Let us explain the meaning of these results, which could have been anticipated without the derivation given. The instanton for $\mathcal{D} = 3$ was described by a magnetic monopole solution (4.65). Suppose, we add one more dimension ("time"). Then this solution, being point-like for $\mathcal{D} = 3$ is represented by a line for $\mathcal{D} = 4$ (the world-line of the point-like object). We can take the line to be arbitrarily curved. Then we shall have for each shape a different classical solution, minimizing locally the action (4.54). Since magnetic flux is conserved these lines have to be closed or infinite. The contribution to the partition function can be expressed as a sum over all possible magnetic flux lines, which have Coulomb attraction between them. This picture is quantitatively reflected in formulas (4.83), (4.86), (4.87).

It is easy to deduce that for large e_0^{-2} those flux lines have negligible influence on the system in the infrared limit. The reason is that lines of length L have action $\sim L$ and their contribution to (4.87) is given by:

$$Z_L^{(1)} \sim e^{-cL/e_0^2} (c')^L$$

(Here $(c')^L$ is the number of loops of the length L). We conclude that for large enough e_0^{-2} magnetic loops are small and we have no disordering in the system, which is effectively described in this case by means of massless free photons. At the same time there is a critical coupling e_{cr}^2 at which condensation of magnetic lines begins. It is to be expected that for $e_0^2 > e_{\text{cr}}^2$ we obtain a strong coupling phase with confinement of charge, while for $e_0^2 < e_{\text{cr}}^2$ we obtain the photon phase.

The picture described above can be understood in yet another way. Magnetic monopoles which were instantons for $\mathcal{D} = 3$ become particles for $\mathcal{D} = 4$, being minima of the potential energy for the hamiltonian (3.34). This point will be discussed in detail in Chapter 6. Here it suffices to realize that each time-independent classical solution with finite energy (a soliton) corresponds in the limit of small coupling to a stable particle. As we go to $\mathcal{D} = 4$ the quantity which was action in $\mathcal{D} = 3$ becomes energy.

The closed loops we discussed above are the world lines of mono-pole-antimonopole pairs. We see that at some coupling the vacuum becomes filled with a monopole condensate. Such a medium confines electric charges as is seen from the following physical analogy. Take a superconductor in which in the ground state we have a condensate of electrically charged fields (Cooper pairs). It is known that an external magnetic field can penetrate inside a superconductor only by forming a number of thin filaments, carrying quantized magnetic flux. If we imagine two magnetic charges inside the superconductor, we shall deduce from the Ginzburg-Landau equations that their magnetic flux should be concentrated inside such a filament, connecting them. Their interaction energy is proportional to the distance. If in this description we interchange words "electric" and "magnetic" we conclude that two electric charges in a medium formed by a monopole condensate are confined.

Can we have an Abelian theory which confines even at $\mathcal{D} = 4$ for all couplings? We see that this equation is equivalent to finding a system with point-like finite action instantons. It is easy to give an example of such a system. Let us consider a "gauge field of the third rank", namely consider as primary variables not vector potentials $A_{x,\alpha}$ but tensors $F_{x,\alpha\beta}$ attached to plaquettes. Form a field strength, associated with cubes:

$$\phi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\delta}$$

and consider the action

$$S = \frac{1}{e_0^2} \sum_{x,\alpha} (1 - \cos \phi_{x,\alpha})$$

Literal repetition of the above consideration would lead us to the following instanton part of the partition function:

$$Z_{\text{INST}}^{\mathcal{G}=4} = \sum_{\{q_x\}} \exp \left(-\frac{1}{2e_0^2} \sum_{x,x'} q_x \Delta_{xx'}^{-1} q_{x'} (2\pi)^2 \right)$$

In this case we have a $\mathcal{D} = 4$ plasma of point-like instantons. We see that the system will acquire a mass gap owing to Debye screening.

Following the tradition of previous sections let us explain how the systems we have discussed look in the continuum formulation. As we have already said, compact QED can be obtained from Non-Abelian gauge theory. To give an example, let us consider $SU(2)$ theory, which contains three gauge bosons, and break the $SU(2)$ so as to make two of these bosons massive. This is the so-called Georgi-Glashow model for unifying weak and electromagnetic interactions. All more complicated unifications follow the pattern we encounter in this model. Its action is given by:

$$S = \int dx \left\{ \frac{1}{2} (\nabla_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} \mu_0^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} (\varphi^2)^2 + \frac{1}{4e^2} (F_{\mu\nu})^2 \right\}$$

where $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ is a triplet of isotopic vector fields, $\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu \times A_\nu$ is the Yang-Mills field strength, and $\nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + \mathbf{A}_\mu \times \varphi$. If we consider an expansion of the fields near the absolute minimum of the potential energy: $\varphi_{1,2} = 0, \varphi_3 = \mu_0/\sqrt{\lambda}$ we find as a result the following particle content: heavy charged $W^\pm$ bosons

$$W_\mu^\pm = (A_\mu^1 \mp iA_\mu^2)/\sqrt{2} \quad \text{with} \quad m_W^2 = e^2 \mu_0^2/\lambda$$

a scalar field $\sigma = \varphi_3 - \mu_0/\sqrt{\lambda}$ with a mass $m_\sigma^2 = 2\mu_0^2$, and the electromagnetic field A_μ^3 which is massless. We see that in the infrared limit this theory describes free photons. All heavy fields can be viewed in this limit as a regularization of this photon theory, which replaces the lattice regularization. The fact that it is a compact version of photon theory reveals itself in the existence of nontrivial instantons for the action (4.92). They have the form (for $\mathcal{D} = 3$):

$$\begin{aligned} A_\mu^a &= a(r) \epsilon_{\mu ab} \frac{X_b}{r} \\ \varphi^a &= u(r) \frac{x_a}{r} \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 & u(\infty) &= \mu_0/\sqrt{\lambda} \\ a(0) &= 0 & a(r) &\sim -1/r, \quad r \rightarrow \infty \end{aligned}$$

The analysis which will be given in Chapter 6 shows that this solution has a finite action and describes magnetic charge. For the present purposes it is enough to understand that since $A_\mu^a \sim 1/r$ and $F_{\mu\nu}^a \sim 1/r^2$ as $r \rightarrow \infty$ the interaction of two such objects, $\int F_{\mu\nu}^2 d^3x \sim r^3/r^4 \sim 1/r$ and we obtain a Coulomb force. Therefore all our considerations of compact QED in three dimensions work for the Georgi-Glashow model. In particular, in the weak coupling limit this

model confines electric charges by a linear potential for $\mathcal{D} = 3$ and describes an ordinary Coulomb electric force for $\mathcal{D} = 4$.

It would be quite interesting to have a continuum formulation for the compact theory of the third rank. Unfortunately this is not known, mainly because it is difficult to give a continuum Non-Abelian generalization for this case.

14.5 Quark Confinement, Superfluidity, Elasticity. Criteria and Analogies

In the previous chapter we were mainly interested in the influence of instantons on the mass gap. Here we shall present more direct criteria for confinement by computation of the electric force between charges and the dielectric permeability of the vacuum. We shall also stress analogies with some phenomena in solid state physics.

Let us begin from the general expression for the static potential valid in both the Abelian and the Non-Abelian cases. The main idea is the following. We have seen in Chapter 3 that the eigenstates of a gauge Hamiltonian can be divided into sectors, containing static charges at points $x_1, \dots, x_N$ with colour spins (for the $SU(2)$ group as an example) $I_1, \dots, I_N$. We shall now show how to express the partition function:

$$Z(I_1 x_1, \dots, I_N x_N) = \sum_n e^{-\beta E_n(I_1 x_1, \dots, I_N x_N)}$$

in terms of a functional integral. Here $E_n(I_1 x_1, \dots, I_N x_N)$ are the energy levels for the corresponding sector and β is the physical inverse temperature (and not an inverse coupling constant). We find it convenient to begin with nonzero temperature both for physical and technical reasons. The static potential (which depends on β) is defined as the difference in free energy between the sector we are considering and the vacuum sector:

$$e^{-\beta V(I_1 x_1, \dots, I_N x_N, \beta)} = Z(I_1 x_1, \dots, I_N x_N) / Z_0$$

Our first aim now is to express this quantity in terms of a functional integral over the gauge field. The derivation is based on the following formula of quantum mechanics:

$$\begin{aligned} Z(x, \tilde{x}, \beta) &\equiv \sum_n e^{-\beta E_n} \psi_n(x) \psi_n(\tilde{x}) \\ &= \int_{\substack{x(0)=x \\ x(\beta)=\tilde{x}}}^{\mathcal{D}x(t)} \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau (\dot{x}^2 + v(x)) \right\} \end{aligned}$$

The generalization of this formula for the gauge system is: †

$$\begin{aligned} Z(\{\tilde{A}_n\} \{A_n\}) &\equiv \sum_n e^{-\beta E_n} \Psi_n(\{A_n(x)\}) \Psi_n(\{\tilde{A}_n(x)\}) \\ &= \int_{\substack{A_n(x,0)=A_n(x) \\ A_n(x,\beta)=\tilde{A}_n(x)}}^{\mathcal{D}A_n(x,\tau)} \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \text{Tr} (\dot{A}_n^2 + F_{nm}^2) dx^3 \right\} \end{aligned}$$

Here the dot means time derivative, indices refer to space directions, F_{nm} is the magnetic part of the Yang-Mills field strength, and the sum over eigenstates includes them all. Let us first compute the partition function corresponding to the vacuum sector. In order to project it out of (5.4), we use the following comment. According to (3.37),

$$\Psi_n(A^\Omega) = \Psi_n(A) \quad \text{for the vacuum sector}$$

and

$$\Psi_n(A^\Omega) = \prod_j \mathcal{D}^I(\Omega(x_j)) \Psi_n(A)$$

$$(A_n^\Omega = \Omega^{-1} A_n \Omega + \Omega^{-1} \partial_n \Omega)$$

for the other sectors (where $\mathcal{D}$ is the representation matrix for the $SU(2)$ group). These functions $\mathcal{D}$ have the property:

$$\int d\Omega \mathcal{D}^I(\Omega) = 0 \quad \text{for} \quad I \neq 0$$

(where the integral is taken over the $SU(2)$ group measure). Using (5.5) and (5.6) we conclude that:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sum_{n \in \text{vacuum sector}} e^{-\beta E_n} = \int \mathcal{D}\Omega(x) \int \mathcal{D}A_n(x) Z(\{A_n\} \{A_n^\Omega\}) \\ &= \int \mathcal{D}\Omega(x) \int_{A_n(x, \beta) = A_n^\Omega(x, 0)} \mathcal{D}A_n(x, \tau) \\ &\quad \times \exp \left\{ -\text{Tr} \int_0^\beta (\dot{A}_n^2 + F_{nm}^2) dx d\tau \right\} \\ &\equiv \int \mathcal{D}\Omega(x) Z[\Omega(x)] \end{aligned}$$

We see that in order to project out gauge invariant states (vacuum sector) one has to integrate over gauge fields, rotated by the gauge transformation Ω . The total (unprojected) Z would be given by the integral over strictly periodic A_n .

In order to project out the sector with a certain number of static charges we have to consider the integral:

$$Z(I_1 x_1, \dots, I_N x_N) = \int \mathcal{D}\Omega(x) \chi_{I_1}(\Omega(x_1)) \cdots \chi_{I_N}(\Omega(x_N)) Z[\Omega(x)]$$

where $\chi_I(\Omega)$ is the character of the representation with spin I :

$$\chi_I(\Omega) = \sum_{m=-I}^{+I} \mathcal{D}_{mm}^I(\Omega)$$

This formula is easily checked by use of the transformation law (3.51) and standard orthonormality conditions for the representation matrix $\mathcal{D}^I$. For a general group G the formula will be the same, except that I will be replaced by the set of numbers characterizing the representation.

We have obtained the following result:

$$e^{-\beta V(I_1 x_1, \dots, I_N x_N; \beta)} = \langle \chi_{I_1}(\Omega(x_1)) \cdots \chi_{I_N}(\Omega(x_N)) \rangle$$

where the averaging must be performed with the "rotated" partition function $Z[\Omega]$ as a weight. We see from this representation that a single static charge I would have an infinite energy if:

$$\langle \chi_I(\Omega(x)) \rangle = 0$$

† We have fixed the gauge by $A_0(x) = 0$

The linear potential between two charges would correspond to:

$$\langle \chi_I(\Omega(x_1)) \chi_I(\Omega(x_2)) \rangle \xrightarrow{x_{12} \rightarrow \infty} e^{-c|x_1 - x_2|}$$

Let us show now that there is a symmetry in the gauge systems which, if unbroken, leads to the condition (5.11) for half-integer I , and hence to charge confinement. This is the symmetry of the centre of the gauge group. In the case of $SU(2)$ the centre consists of reflections $\Omega \rightarrow -\Omega$, while for $SU(N)$ it is formed by transformations:

$$\Omega \rightarrow e^{2\pi i/N} \Omega$$

From the definition of $Z[\Omega]$:

$$Z[\Omega] = \int \mathcal{D}A_n(x, \tau) \exp(-S(A_n))$$

$$A_n(x, \beta) = \Omega^{-1} A_n(x, 0) \Omega + \Omega^{-1} \partial_n \Omega$$

we see that $Z[\Omega]$ is indeed invariant under the transformations described. At the same time (for $SU(2)$) :

$$\begin{aligned} \chi_I(-\Omega) &= \chi_I(\Omega) & I \text{ integer} \\ \chi_I(-\Omega) &= -\chi_I(\Omega) & I \text{ half integer} \end{aligned}$$

We see, that in the case of unbroken symmetry (5.11) is true for half-integer I , only. We have already encountered this situation in Chapter 3, and explained that it reflects screening of integer I -spins by $I = 1$ gluons.

Half-integer spins cannot be screened if $\Omega \rightarrow -\Omega$ symmetry is unbroken. In the broken symmetry phase they are also screened thus giving $\langle \chi_I \rangle \neq 0$. It is a dynamical question to find out which phase is realized in our theory.

We shall see below how this question is solved for the cases analysed in the previous chapter. Before doing that, let us give another criterion for confinement, which is sometimes more convenient than the previous one. It is applicable only at zero temperature.

Let us consider a closed loop C , and associate with it a phase factor:

$$\Psi(C) = \text{P exp} \oint_C A_\mu dx^\mu$$

Here **P** exp means an ordered exponent defined as:

$$\text{P exp} \oint A_\mu dx^\mu = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \prod_j (1 + A_\mu(x_j) \Delta x_j^\mu)$$

(remember that A_μ is a matrix, lying in the Lie algebra of our group and factors in (5.17) do not commute). Now the properties of gauge systems can be characterized by the behaviour of the following correlation function:

$$W_I(C) = \langle 0 | \chi_I(\Psi(C)) | 0 \rangle$$

Let us show that if

$$W_I(C) \rightarrow \exp(-\text{const } \mathcal{A}_{\min}(C))$$

($\mathcal{A}_{\min}(C)$ is the minimal area bounded by C)

for large enough loops, then the static potential between charges is linear. To prove this, let us consider a rectangle lying in the x^3, t plane, and take the gauge $A_0 = 0$. We have then:

$$\begin{aligned}
 W_I(C_{RT}) &= \langle 0 | \chi_I \left(\text{P exp} \int_R^0 A_3(x^3, T) dx^3 \cdot \text{P exp} \int_0^R A_3(x^3, 0) dx^3 \right) | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | \mathcal{D}_{mm'}^I \left(\text{P exp} \int_R^0 A_3(x^3, T) dx^3 \right) \mathcal{D}_{m'm}^I \left(\text{P exp} \int_0^R A_3(x^3, 0) dx^3 \right) | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | \mathcal{D}_{mm'}^I \left(\text{P exp} \int_R^0 dx^3 A_3(x^3, 0) \right) e^{-\widehat{\mathcal{H}}T} \\
 &\quad \times \mathcal{D}_{m'm}^I \left(\text{P exp} \int_0^R A_3(x^3, 0) dx^3 \right) | 0 \rangle = \sum_{n,m,m'} \left| (f_{m',m}^I)_{n,0} \right|^2 e^{-E_n T}
 \end{aligned}$$

where

$$(f_{m',m}^I)_{n,0} = \langle n | \mathcal{D}_{m',m}^I \left(\text{P exp} \int_0^R A_3(x^3, 0) dx^3 \right) | 0 \rangle$$

$\widehat{\mathcal{H}}$ is the Hamiltonian of the gauge system and a standard insertion of a complete set of states has been used. The crucial point of the derivation is that while the vacuum $|0\rangle$ belongs to the gauge invariant sector the states $|n\rangle$ belong to the sector with two static charges of colour spin I . This is because the P-exponent in (5.20) is not gauge invariant, but transforms as:

$$\text{P exp} \int_0^R A_3^\Omega dx^3 = \Omega^{-1}(0) \left(\text{P exp} \int_0^R A_3 dx^3 \right) \Omega(R)$$

Therefore the states

$$|\Psi\rangle = \mathcal{D}_{mm}^I \left(\text{P exp} \int_0^R A_3 dx^3 \right) |0\rangle$$

have a transformation law, which according to (3.51), corresponds to the two charge sector. As we take the limit $T \rightarrow \infty$ we find from (5.20):

$$W_I(C_{RT}) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} e^{-E_0^{(I)}(R)T}$$

where $E_0^{(I)}(R)$ is the minimal energy in the sector described. From this we see that the "area law" (5.19) corresponds to

$$E_0^{(I)}(R) \sim R$$

From the above, we expect the area law to be true in the confining phase for half-integer I , while for integers the decay of $W_I(C)$ is much slower. Intuitively the criterion described can be understood as follows. Take a charge I around a closed loop C in space-time. The transition amplitude associated with this process is given by $W_I(C)$. On the other hand, this loop can be interpreted as the creation of a quark-anti-quark pair, propagation of this pair for a long time T and finally its annihilation. The T -dependence of the amplitude must be given by a factor $\exp\{-iE(R)(-iT)\} = \exp(-E(R)T)$, where $E(R)$ is the interaction energy of the pair and $(-iT)$ is the time of its existence.

Equating these two factors we again get (5.22).

Let us check now if we really have confinement in the models described in the previous chapter and compute the binding force between charges. We shall show that instanton contributions to the phase factor in the case of $\mathcal{D} = 3O(2)$ gauge theory lead to the area law.

The calculation is easily performed since

$$F(C) = \left\langle \exp \left(i \oint_{\partial S} A_\mu^3 dx^\mu \right) \right\rangle \approx \left\langle \exp \left(i \int_S H_\mu dS^\mu \right) \right\rangle$$

and we know from (4.76) that this can be written

$$F(C) = \left\langle \exp \left(i \int \eta(x) \rho(x) dx \right) \right\rangle$$

where

$$\eta(x) = \frac{1}{2} \int_S dS_y \cdot \frac{(x - y)}{|x - y|^3}$$

Since the field $\eta(x)$ is strong enough we cannot neglect nonlinearities in (4.74). Rather $F(C)$ is given by

$$F(C) = \exp \left\{ - \left(\frac{e}{2\pi} \right)^2 \int [(\nabla(\chi_{cl} - \eta))^2 - M^2 \cos \chi_{cl}] d^3x \right\}$$

where χ_{cl} is determined from the nonlinear Debye equation

$$2\nabla^2(\chi_{cl} - \eta) = M^2 \sin \chi_{cl}$$

Fluctuation corrections to this field are again exponentially small.

Let us assume that the contour C is planar and lies in the xy plane. Then, eq. (5.27) takes the form

$$\begin{aligned} \nabla^2 \chi_{cl} &= 2\pi \delta^1(z) \theta_S(xy) + \frac{1}{2} M^2 \sin \chi_{cl} \\ \theta_S(xy) &= \begin{cases} 1, & x, y \in S \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

Far from the boundaries of the contour, eq. (5.28) is essentially one dimensional (χ_{cl} depends only on Z) and has the solution

$$\chi_{cl}(Z) = \begin{cases} 4 \arctan(e^{-MZ}) & Z > 0 \\ -4 \arctan(e^{MZ}) & Z < 0 \end{cases}$$

Substituting (5.29) into (5.26), we obtain

$$\begin{aligned} F(C) &= e^{-\gamma S} \\ E(R) &= \gamma R \\ \gamma &= \left(\frac{e}{2\pi} \right)^2 M \int_{-\infty}^{+\infty} dy ((\chi_{cl}'' - \eta'')(x - y) + M^2 \cos \chi_{cl}(y)) \end{aligned}$$

The result (5.30) implies that between two fixed charges there exists an electric string with energy density γ .

Now several comments are in order. First it is useful to understand the results we have obtained, using a special diagram technique. Namely, it is possible to represent

$$\begin{aligned} \langle H_\mu(x) H_\nu(y) \rangle &= \text{---} + \cdot \Omega + \cdot \Omega - \Omega \\ &+ \Omega \Omega - \Omega + \cdots \end{aligned}$$

Here we denote the free H -field operator by a solid line, pseudoparticles by open circles and the Coulomb interaction between pseudoparticles by dashed lines. It is possible to draw

more complicated diagrams containing both solid and dashed lines, but all of them are small for small momenta and charges.

From (5.31) and (4.78) we see the crucial difference between pseudoparticle and instanton contributions to correlation functions. The second is purely transverse and the first is longitudinal, due to the fact that the quantity $\partial_\mu H_\mu$ measures the density of topological charge. The existence of these two contributions makes possible the cancellation of singularities at zero momentum.

We have proved that the potential between two charges grows linearly. It is evident that there should exist an infinite resonance spectrum in our theory, and it is tempting to find it directly by considering the correlation functions for operators of higher spin. Unfortunately in our approximation these correlation functions contain only scalar particle thresholds, and resonances should appear in higher order approximation, so the resonance problem remains to be solved even in our model.

An interesting property of the above formulas is that they lead to confinement of half-integer charges for which the Dirac quantization condition is true:

$$e \cdot g = 2\pi$$

(where g is the minimal charge of a magnetic pole). If we double the charge of the test particles, then it is easy to check that the contribution of monopoles to $\exp \{i \int H_\mu dS^\mu\}$ will be negligible and we have no confinement of such charges. In the framework of the Georgi-Glashow model, described in Chapter 4, this result is quite natural since integer charges can be screened by $W^\pm$ bosons, while for half-integers this is impossible. However, in the case of the lattice $O(2)$ model the above conclusion is rather surprising. Thus, we have proved the anticipated result that $O(2)$ gauge theories for $\mathcal{D} = 3$ produce linear confinement of half-integer charges. For $\mathcal{D} = 4$ it is not so for $e_0^2 \ll 1$ since small instanton loops give very small contributions to the phase factors. This is easy to verify by calculations analogous to those above.

Let us now describe one more manifestation of confinement, which is of some interest because of analogies with solid state physics. Namely let us show that in the confining phase the dielectric constant is zero. In order to introduce this quantity in abelian systems let us consider an antisymmetric external field $f_{\mu\nu}(x)$ coupled to our system in the following way:

$$\exp(-W[f_{\mu\nu}]) = \int \mathcal{D}A_\mu e^{-S[F_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}]}$$

(where $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; we take the liberty of using continuum notation while meaning a lattice field theory). From this definition it is clear that $W[f]$ is invariant under gauge transformation of the "third kind":

$$f_{\mu\nu} \rightarrow f_{\mu\nu} + \partial_\mu \lambda_\nu - \partial_\nu \lambda_\mu$$

because it can be compensated in (5.32) by a change $A_\mu \rightarrow A_\mu + \lambda_\mu$. Therefore, W should depend on the following combinations of $f_{\mu\nu}$:

$$\phi_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} + \partial_\lambda f_{\mu\nu}$$

At first glance this implies that a constant external $f_{\mu\nu}$ has no influence on the system. This is indeed so if we are in a phase with finite correlation length. However, when massless photons are present we have for constant $f_{\mu\nu}$ (at first neglecting instanton effects):

$$e^{-W[f]} = \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left(-\frac{1}{e_0^2} \int F_{\mu\nu}^2 dx \right) \exp \left(-\frac{1}{e_0^2} \int f_{\mu\nu}^2 dx \right)$$

$$W[f] - W[0] = \frac{1}{e_0^2} \int f_{\mu\nu}^2 dx$$

(because $\int F_{\mu\nu} f_{\mu\nu} dx = f_{\mu\nu} \int F_{\mu\nu} dx = 0$). Accounting for small (in $\mathcal{D} = 4$) instanton effects gives:

$$W[f] - W[0] = \frac{\kappa (e_0^2)}{e_0^2} \int f_{\mu\nu}^2 dx$$

where κ is some constant which has a natural interpretation as the dielectric constant of the vacuum. The apparent paradox between (5.34) and (5.36) is easily resolved if we notice that due to the gapless photon, terms like $\int \phi_{\mu\nu\lambda} \partial^{-2} \phi_{\mu\nu\lambda} dx dx'$ (where ∂^{-2} is the inverse Laplacian) are present in the effective action. Such terms do not vanish for constant $f_{\mu\nu}$ and produce the result (5.36). We can also say that while constant $f_{\mu\nu}$ can be removed by the transformation:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + f_{\mu\nu} X^\nu$$

This transformation changes the boundary conditions which were $A_\mu|_{\text{inf}} = 0$. If the system has long range correlations, this change of boundary condition will change the partition function which thus becomes dependent on $f_{\mu\nu}$. As we know, for $e_0^2 > e_{0 \text{ crit}}^2$ in $\mathcal{D} = 4$ we have a mass gap and a confining phase. From the above argument it is clear that at this point the dielectric constant κ becomes zero, and remains zero in all the confining region:

$$\kappa (e_0^2) = 0 \text{ for } e_0^2 > e_{0 \text{ crit}}^2$$

In the case $\mathcal{D} = 3$, κ is zero for all values of the coupling. We conclude that the reaction to the homogeneous external antisymmetric field, described by the dielectric constant κ can serve as a confinement criterion; we have

$$\kappa = \begin{cases} \text{const} & \text{in the Coulomb phase} \\ 0 & \text{in the confining phase} \end{cases}$$

There exists an interesting analogy between κ in the gauge systems and certain quantities in global systems. Let us consider the response of the global $O(2)$ system to the external vector field v_μ :

$$e^{-W(v_\mu)} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S(\partial_\mu \varphi + v_\mu)}$$

Again $W[v_\mu]$ is gauge invariant:

$$W[v_\mu + \partial_\mu i] = W[v_\mu]$$

If we neglect vortices, for constant v_μ we obtain:

$$W = \frac{\beta}{2} \rho_s(\beta) \int v^2 dx$$

($\rho_s(\beta)$ being some function).

The constant v_μ can be removed from the action by the transformation:

$$\varphi \rightarrow \varphi + v_\mu x^\mu$$

but then it appears in the boundary conditions. Formula (5.42) does not contradict gauge invariance since due to massless excitations in the system $v_\mu(x)$ appears in the combination:

$$W \sim \int v_\mu \left(\delta^{\mu\nu} - \frac{\hat{C}_\mu \hat{C}_\nu}{\hat{C}^2} \right) v_\nu \, dx$$

After the phase transition, when a correlation length appears in the system, we must have:

$$\rho_S(\beta) = 0 \text{ for } \beta < \beta_{\text{cr}}$$

The analogy between ρ_S and κ is obvious. What is interesting is that if our $O(2)$ system describes ${}^4\text{He}$ then $\rho_s(\beta)$ has an interpretation as the superfluid density. Therefore, the normal phase of ${}^4\text{He}$ correspond to the confining phase of the gauge system, and the superfluid phase to the Coulomb phase. Let us show now that ρ_S is indeed the superfluid density. To do this we consider a second-quantized Hamiltonian, describing a Bose liquid:

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \left(\frac{1}{2m} |\partial_\alpha \Psi|^2 + \int \Psi^+(x) \Psi(x) u(x-y) \Psi^+(y) \Psi(y) dy \right) dx$$

where u is a shortrange interatomic interaction. Suppose that the walls, containing our liquid, move with velocity v . The question is whether the liquid will move with the same velocity (owing to friction with the walls) or whether it will stay at rest (as in the case of a superfluid). Let us go to the coordinate system where the walls are at rest. This is achieved by a Galilean transformation

$$\Psi(x) \rightarrow e^{-im\mathbf{x}\mathbf{v}} \Psi(x)$$

after which

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{H}} \rangle &\rightarrow \left\langle \int \frac{1}{2m} \left| (\partial_\alpha - imv_\alpha) \Psi \right|^2 dx + \dots \right\rangle \\ &= \langle \mathcal{H}_0 \rangle - v \langle P_0 \rangle + Nmv^2/2 \end{aligned}$$

Here

$$P_0 = \int \Psi + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi \, dx$$

is the total momentum. We see that if before the transformation the liquid was at rest ($\mathbf{P}_0 = 0, \mathcal{H}_0 = E_0$) we have to expect that the change (5.47) will add to the Hamiltonian a v^2 -term. If the liquid moves then $\mathcal{H}_0 = E_0 + Nmv^2/2$; $\mathbf{P}_0 = +Nmv$ and the substitution (5.47) should add nothing to $\langle \mathcal{H}_0 \rangle$. If we recall now that the only infrared-important quantity in ${}^4\text{He}$ is $\varphi(\mathbf{x})$, the phase of $\Psi(\mathbf{x})$, we conclude that the existence of superfluidity manifests itself in the response of our system to the transformation:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi - mvx$$

Normal liquid is indifferent to such a transformation, while the superfluid does react. We have also seen that such a response is possible exclusively because of the pole terms in (5.44). The dielectric constant in a gauge system was shown to be a precise analogue of the superfluid density ρ_s . This analogy can be extended further in order to include crystals which, as we saw, are described by the same kind of actions depending on $u_\alpha(x)$. In this case we have to examine the response of the system to a symmetric traceless field defined by:

$$u_\alpha(x) \rightarrow u_\alpha(x) + h_{\alpha\beta} x^\beta$$

($h_{\alpha\alpha} = 0$). Again, nonzero response to $h_{\alpha\beta}$ (which is a kind of external gravitational field, just as v_μ could have been considered as an external electromagnetic field), is possible in the longranged phase, and is described by the shear modulus

$$W = \frac{\mu}{2} h_{\alpha\beta}^2$$

After melting we have $\mu = 0$. All these nontrivial constants, κ, ρ_S, μ , etc., can be called, following V. L. Berezinsky, transverse rigidities. They can be formally defined as residues at the massless poles of corresponding polarization operators and therefore exist only in the broken symmetry phase. A subtle point is that, as we mentioned in Chapter 1, in the case of gauge systems, and in $\mathcal{D} = 2$ global systems, the order parameters are zero and there are no poles in the Green's functions. However, there are poles in the corresponding polarization operators and it is these poles which determine the physics of the systems.

In Non-Abelian cases with global symmetries it is quite straightforward to introduce an analogue of the superfluid density. If we take, for instance, the case of the n -field we can examine its response to an external triplet vector field:

$$e^{-W[v_\mu]} = \int \mathcal{D}\mathbf{n}(x) \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} \int (\partial_\mu \mathbf{n} + v_\mu \times \mathbf{n})^2 dx \right\}$$

Again we conclude that $W[v]$ has to possess Non-Abelian gauge invariance:

$$W[v_\mu] = \tilde{W}[\mathbf{f}_{\mu\nu}]$$

$$\mathbf{f}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{v}_\nu - \partial_\nu \mathbf{v}_\mu + \mathbf{v}_\mu \times \mathbf{v}_\nu$$

The "superfluid density" can be defined as the residue:

$$\tilde{W} \approx \frac{\beta}{2} \rho_S \int f_{\mu\nu} \frac{1}{\partial^2} f_{\mu\nu} dx$$

The Non-Abelian gauge theories present some difficulty in this respect. We have to introduce a gauge field of the "third kind", $f_{\mu\nu}$, coupled to the Yang-Mills field so as to have Non-Abelian third kind gauge invariance. I do not know how to do this in a continuum theory, though on a lattice there are some possibilities. We still can introduce a purely static dielectric constant by means of integrating over A_μ fields with boundary conditions:

$$A_{\mu x \rightarrow \infty}^a f_{\mu\nu}^a x^\nu$$

and defining κ as the coefficient before $(f_{\mu\nu}^a)^2$ in the effective action. Vanishing of this κ is a signal for quark confinement.

Ending this section, let us stress that the dielectric constants introduced above do not have a naive direct relation to static potentials. This is because they determine the response to infinitesimal fields, and static charges, being quantized, are necessarily finite.

14.6 Topology of Gauge Fields and Related Problems

We have seen in the previous chapters, that in Abelian systems the problem of charge confinement is solved by instantons.

In Non-Abelian theories instanton solutions are also present. However, due to the large perturbative fluctuations, discussed in Chapter 2, it is difficult to judge whether they play a decisive role in forming a mass gap and a confining regime. In such theories we have a kind of

instanton liquid which is difficult to treat. It is possible that due to some hidden symmetries, present in these systems, instantons may form a useful set of variables for an exact description of the system, but this has not yet been shown.

At the same time, due to the fact that instantons carry nontrivial topology (they describe configurations of the fields which can not be "disentangled"), some manifestations of instantons cannot be mixed up with perturbative fluctuations.

In this chapter we shall analyse topological properties of (mainly) nonabelian instantons and solitons and discuss some associated peculiar effects.

14.6.1 6.1 Instantons for $\mathcal{D} = 2, N = 3n$ -Fields

Let us find minima of the classical action for the n -field in the case $N = 3$. In order that this action be finite, we have to consider a boundary condition:

$$n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} n_0$$

Therefore, since infinity can be viewed as one point, our x -space is topologically a sphere. Each configuration $\mathbf{n}(x)$ defines a map of such a sphere in x -space onto the sphere $\mathbf{n}^2 = 1$, which in the case $N = 3$ gives $S^2 \rightarrow S^2$. It is known that such maps can be classified by integers q which define the number of times the second sphere is covered by the first one. The simplest example of the q -map is described by the formulas:

$$\tilde{\vartheta} = \vartheta, \tilde{\varphi} = q\varphi \pmod{2\pi}$$

Here (ϑ, φ) and $(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})$ are polar and azimuthal angles for the first and the second sphere. In this formula q must be integer since otherwise the map would be discontinuous. For the general case the number of coverings (or topological charge) is defined by:

$$q = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \frac{\partial(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})}{\partial(\vartheta, \varphi)}$$

$(\partial(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})/\partial(\vartheta, \varphi)) = (\partial\tilde{\vartheta}/\partial\vartheta)(\partial\tilde{\varphi}/\partial\varphi) - (\partial\tilde{\vartheta}/\partial\varphi)(\partial\tilde{\varphi}/\partial\vartheta)$ is the jacobian for the mapping under consideration). It is easy to check that (6.3) can be rewritten in a more invariant form. For the mapping $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x), \mathbf{n}^2 = 1$:

$$q = \frac{1}{8\pi} \int d^2x n \cdot [\partial_\mu n \partial_\nu n] \epsilon^{\mu\nu}$$

Here $\epsilon^{\mu\nu}$ is the standard antisymmetric tensor. This formula is checked by the direct substitution of $\mathbf{n} = (\cos \tilde{\vartheta}, \sin \tilde{\vartheta} \cos \tilde{\varphi}, \sin \tilde{\vartheta} \sin \tilde{\varphi})$ into (6.4) after which we obtain (6.3). We wish now to minimize the classical action in the sector with given q . This problem is simplified by the following trick. Let us consider the identity:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int (\partial_\mu n + \epsilon_{\mu\nu} [n \times \partial_\nu n])^2 d^2x \\ &= \frac{1}{2} \int (\partial_\mu n)^2 d^2x - \frac{1}{2} \int \epsilon_{\mu\nu} n \cdot [\partial_\mu n \times \partial_\nu n] d^2x \end{aligned}$$

From (6.5) we conclude:

$$S = \frac{1}{2e_0^2} \int (\partial_\mu n)^2 d^2x = \frac{4\pi q}{e_0^2} + \frac{1}{4e_0^2} \int (\partial_\mu n + \epsilon_{\mu\nu} [n \times \partial_\nu n])^2 d^2x$$

It follows from (6.6) that in order to find an absolute minimum for the n -fields with the topological charge q one can avoid the problem of solving classical equations of motion, which are second order differential equations. Instead, first order equations can be considered which are in some sense the "square root" of the classical equations. We have:

$$\partial_\mu n = -\epsilon_{\mu\nu} [n \times \partial_\nu n]$$

the so-called duality equation. If (6.7) is satisfied then, owing to (6.6), the action has the absolute minimum value equal to $4\pi g/e_0^2$.

Solution of (6.7) is easy. We introduce a complex field w by a stereographic projection:

$$\begin{aligned} n_1 + in_2 &= 2w / (1 + |w|^2) \\ n_3 &= (1 - |w|^2) / (1 + |w|^2) \quad n^2 = 1 \end{aligned}$$

The substitution of (6.8) into (6.7) reduces this equation to:

$$\partial_z w \equiv (\partial_1 + i\partial_2) w = 0$$

Therefore (6.7) are just Cauchy-Riemann equations for the function w . This function must be not only analytic, but also meromorphic, since otherwise n would have branch cuts. Hence the most general solution has the form:

$$w(z) = \prod_{j=1}^q \frac{z - a_j}{z - b_j}$$

where we have normalized w by $w(\infty) = 1$, corresponding to $n(\infty)$ pointing in the x -direction. The integer q in (6.10) is just the topological number. This can be seen without explicit computation since it is clear from (6.10) that the inverse function $z = z(w)$ is q -valued. That implies that the w -sphere is covered q times by the z -sphere. Of course, it is also not difficult to substitute (6.10) into (6.4) and to compute q explicitly.

The remarkable thing about the instantons (6.10) is that they do not interact classically. There are, however, anti-instantons

$$w = \prod_{j=1}^q \left(\frac{\bar{z} - a_j}{\bar{z} - b_j} \right)$$

having negative topological charge. The mixed configuration of instantons and anti-instantons is not a strict classical solution (as it was for kinks and anti-kinks in Chapter 4) and a dipole-dipole like interaction is present. Notice also, that the instantons (6.10) have a natural structure of dipoles with poles placed at a_j and b_j .

As we turn from this nice, clean classical mathematics to functional integrals we encounter a difficulty. Namely, while in the zeroth order approximation the one instanton contribution is proportional to $e^{-S_{c1}} = e^{-4\pi/e_0^2}$, it is quite obvious that quantum fluctuations should renormalize the bare coupling e_0^2 . The resulting contribution can be found without explicit computation by the following argument. As we see from (6.10), the effective size of the instanton with parameters a and b is $|a - b|$. So, it is natural to expect that e_0^2 in the above expression will be replaced by:

$$e^2(|a - b|) \simeq 2\pi / \log(\lambda|a - b|)^{-1}$$

obtained from (2.49) for $N = 3$. The instanton contribution $Z^{(1)}$ has to contain an integral over the parameters a and b . The measure of integration must have both translational and scale invariance (since a and b in the classical solution are defined modulo their common scale). On these grounds we expect:

$$\begin{aligned}
Z^{(1)} &\sim \int \frac{d^2a \, d^2b}{|a-b|^4} \exp(-4\pi/e^2(|a-b|)) \\
&= \lambda^2 \int \frac{d^2a \, d^2b}{|a-b|^2} \simeq \lambda^2 V \int \frac{d\rho}{\rho}
\end{aligned}$$

(V is the volume of the system and $\rho = |a-b|$). We see that this integral diverges at large values of $|a-b|$ but we learned in Chapter 2 that for $|a-b| \gtrsim \lambda^{-1}$ the formula (6.12) is not applicable since $e^2(|a-b|)$ is not small any more. For the same reason we cannot trust (6.13) in this region, since the WKB approximation used in its derivation is valid only for small couplings.

Nevertheless it makes sense to ask what happens after accounting for the multi-instanton solution. The tactic for this is to take a classical field (6.10) and to consider small fluctuations on it as background. After performing the Gaussian integral, we obtain a determinant of the corresponding quadratic form which will depend on $\{a_j\}$ and $\{b_j\}$. The logarithm of this determinant can be considered as an interaction energy between instantons, induced by quantum fluctuations. Finally we shall have to integrate over the parameters $\{a_j\}$ and $\{b_j\}$. This programme can be carried through quite explicitly, the main reason being that for any self-dual background the kernel of the abovementioned quadratic form simplifies considerably. To show this let us recall that the quadratic part of the action is described by (2.47). In the case of $O(3)$ we can introduce the complex notation:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_1 + i\varphi_2 \quad A_\mu = A_\mu^{12} \\
S^{\text{II}} &= \frac{1}{2e_2^0} \int \left\{ |(\partial_\mu + iA_\mu)\varphi|^2 - \frac{1}{2}(\varphi^\dagger\varphi) B_\mu^a B_\mu^a \right\} dx^2 \\
&= \frac{1}{2e_2^0} \int \left\{ |(\partial_\mu + iA_\mu)\varphi|^2 + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu} (\varphi^\dagger\varphi) \right\} dx^2 \quad (F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)
\end{aligned}$$

where we have used self-duality (6.7):

$$B_\mu^a = \epsilon_{ab}\epsilon_{\mu\nu} B_\nu^b$$

and the consequence of (2.45):

$$F_{\mu\nu} = i(B_\mu^* B_\nu - B_\nu B_\mu^*)$$

The kernel of this quadratic form coincides with the square of the Dirac operator:

$$\begin{aligned}
(\gamma_\mu (\partial_\mu + iA_\mu))^2 &= (\partial_\mu + iA_\mu)^2 + \frac{1}{2}\gamma_5 \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
\gamma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

It is well known (and will be discussed in Chapter 8) that the last determinant is easily computed. Namely:

$$\log \det (\gamma^\mu (\partial_\mu + iA_\mu)) = \frac{1}{4\pi} \int \left(F_{\mu\nu} \frac{1}{\partial^2} F_{\mu\nu} \right) d^2x$$

In order to calculate the multi-instanton contribution much work is still needed. One has to take account properly of collective coordinates and to compute the integral (6.17). I do not know any simple way of doing this (which, I am sure, exists). So, referring the reader for further details to the original papers, let me give the final result:

$$Z^{(q)} = \frac{\lambda^{2q}}{(q!)^2} \int d^2 a_1 \dots d^2 a_q d^2 b_1 \dots d^2 b_q \\ \times \prod_{i < j} |a_i - a_j|^2 \prod_{i < j} |b_i - b_j|^2 \prod_{i,j} |a_i - b_j|^{-2}$$

Or, after summing over q :

$$Z_{\text{INST}} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2q}}{(q!)^2} \int \prod_j d^2 a_j d^2 b_j \\ \times \exp \left\{ \sum_{i < j} (\log |a_i - a_j|^2 + \log |b_i - b_j|^2) \right. \\ \left. - \sum_{i,j} \log |a_i - b_j|^2 \right\}$$

This result is quite surprising. We see that each instanton behaves as if it is composed of a pair of opposite Coulomb charges, placed at a_j and b_j . Since the two dimensional Coulomb energy is given by $(1/4\pi) \log |a - b|^2$, the expression (6.19) is the partition function for the plasma with inverse temperature $\beta = 4\pi$. As was discussed in Chapter 4, such a plasma has two different phases. For large β the charges form dipoles and the system is neutral, with long range correlations (no mass gap). At some critical β (which is known to be equal to 8π), dissociation of the dipoles occurs and for $\beta < \beta_{\text{cr}} = 8\pi$ we have a plasma phase with Debye screening, and therefore a mass gap. We conclude that owing to quantum effects instantons "melt" and create a finite mass gap in the theory. Before discussing the validity of the approximations made, let us give a very useful representation for (6.19). It is based on the so-called bosonization formulas which we discuss later. If one considers a free massless Dirac field $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ for $\mathcal{D} = 2$ and introduces two operators: $\sigma_+(x) = \psi_L^+ \psi_R$ and $\sigma_- = \psi_R^+ \psi_L$ it can be shown that

$$\langle \sigma_+(a_1) \dots \sigma_+(a_N) \sigma_-(b_1) \dots \sigma_-(b_M) \rangle \\ = \prod_{i < j} |a_i - a_j|^2 |b_i - b_j|^2 \prod_{i,j} |a_i - b_j|^{-2} \delta_{N,M}$$

From this formula it follows, that

$$Z_{\text{INST}} = \int \mathcal{D}\psi(x) \mathcal{D}\bar{\psi}(x) \\ \times \exp \left\{ - \int (\bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \lambda \bar{\psi} \psi) \right\}$$

(where $\bar{\psi}\psi = \sigma_+(x) + \sigma_-(x)$ is a mass term).

We see that in this representation, expansion in instantons becomes a mass expansion. It is also obvious from (6.21) that

$$\log Z_{\text{INST}} = V \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \text{Tr} \log (\gamma^\mu p_\mu + \lambda)$$

Expansion in λ leads to more and more infrared singular terms, containing $\int d^2 p / p^n$ but the sum (6.22) is well behaved.

We may draw important conclusions from the above computations, but to what extent are the results reliable? There are two sources of errors. First of all we have to include anti-instantons and take account of their (classical) interaction with instantons. This interaction is

of dipole-dipole type. One can imagine that we shall have to introduce two sorts of massive fermions, ψ_1 , and ψ_2 , describing instantons and anti-instantons and to consider some kind of interaction for ψ_1 and ψ_2 . This approach † results in a completely integrable model containing the fermions just described. The problem with this approach is that the

instanton-anti-instanton configuration can be unambiguously defined only for well-separated objects, because otherwise it is difficult to distinguish it from other fluctuations with zero topological charge. This ambiguity is closely connected with another source of errors, coming from the fact that the quantum fluctuations above were treated in one loop approximation. For each separate q -instanton contribution this would be disastrous because these terms are infrared divergent and the effective charge e^2 becomes unboundedly large. [However, we see that after summation over q these divergences are cut off at the Debye length λ^{-1} .] At this length $e^2 \sim 1$ and so are higher quantum corrections. That gives hope that at least qualitatively the system is properly described by the above approach. Moreover, it often happens in integrable systems that the one loop approximation turns out to be exact. So an optimistic view of the situation is the following. One has to introduce instantons, described by a massive Dirac field ψ_1 , and anti-instantons described by ψ_2 . Next one must find a certain extrapolation of the instanton-antiinstanton interaction to small distance. Then it might be hoped that there exists such an extrapolation that the resulting system describes the n -field exactly and not only in one loop approximation. Whether this is true can in principle be checked by the use of exact solutions, but up to now this has not yet been done.

So at present we do not know whether exact properties of the n -field can be formulated in terms of instantons, but this possibility seems to be open.

The same, and even more difficult, problems exist in nonabelian gauge theories which we describe in the next section. Before coming to that let us mention briefly what kind of instanton structure is present in other versions of chiral models. First of all, n -fields with the group $O(N), N \geq 4$ do not have any nontrivial topology; that is to say any map $S^2 \rightarrow S^{N-1}$ for $N \geq 4$ is contractible. The reason for this is easy to understand if we consider the case of mapping $S^1 \rightarrow S^2$, that is a circle mapped on to an ordinary sphere, say to its equator. It is obvious, that by moving this circle to the north pole we can contract it to a point. For similar reasons any map $S^2 \rightarrow S^{N-1}$ can be deformed to the trivial one. A slightly more complicated argument shows that the map of S^2 onto any Non-Abelian Lie group G , described by the principal chiral field $g(x)$ is also contractible. These theories do not have stable instantons. The chiral theories which do have them are described by the coset spaces G/H in which H contains $U(1)$ as a factor. Let us explain how this comes about. In the above theories the fields can be represented by

$$\varphi_a(x) = g_{ab}(x)\varphi_b^{(0)}, x \in S^2$$

where $g_{ab} \in G$ and $\varphi_b^{(0)}$ is a constant field, invariant under H :

$$h_{ab}\varphi_b^{(0)} = \varphi_a^{(0)} \quad \text{for} \quad h \in H$$

The matrix $g_{ab}(x)$ in (6.23) need not be continuous. Let us consider a set of matrices $g^{(N)}(x)$ defined in the northern hemisphere and $g^{(S)}(x)$ defined in the southern one. Suppose on the equator we have the relation:

$$g^{(N)}(x) = g^{(S)}(x) \cdot h(x) \quad x \in \text{equator} = S^1 \quad h \in H$$

We see from (6.23) and (6.24) that in spite of the discontinuity in $g(x)$ the field $\varphi_a(x)$ is continuous and defines a map $S^2 \rightarrow G/H$. From (6.25) we deduce that these maps can be

† Due to Buchvostov and Lipatov (1980).

classified according to the maps of the equator to $H : S^1 \rightarrow H$. If $H = U(1)$ this is just a $S^1 \rightarrow S^1$ map, classified by the winding number. If $H = U(1) \times \text{something}$, then we can map S^1 onto the first factor in H . In mathematical notation the statement we have proved is written as:

$$\pi_2(G/H) \simeq \pi_1(H) \text{ if } \pi_2(G) = 0$$

(where $\pi_k(M)$ is the k th homotopy group, elements of which are classes of nontrivial maps of $S^k \rightarrow M$).

The most familiar example of a chiral theory with instanton structure is the so-called CP^{N-1} -model where the field belongs to the complex projective space:

$$\phi \in CP^{N-1} = \frac{SU(N)}{SU(N-1) \otimes U(1)}$$

(The case $N = 2$ is the $O(3)n$ -field.) There are some interesting dynamics in this model. We shall discuss it in Chapter 8.

14.6.2 6.2 Instantons in Non-Abelian Gauge Theories

Non-Abelian gauge theories with any symmetry group G possess topologically nontrivial fields. This can be seen from the following consideration. In order that the Yang-Mills action be finite one must require that:

$$F_{\mu\nu}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} o(1/x^2)$$

From this fact we deduce:

$$A_\mu(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} g^{-1}(x) \partial_\mu g(x) + o(1/x)$$

where $g(x) \in G$.

If we bound our $\mathcal{D} = 4$ Euclidean space by a large three-dimensional sphere S^3 we obtain, according to (6.29), a map $g(x) : S^3 \rightarrow G$. It is easy to see that all such maps are classified by the integers for any G . Let us prove this for $G = SU(2)$. Any matrix g in this case can be written as:

$$g = n_4 + i \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \\ n_4^2 + \mathbf{n}^2 = 1; \quad g^+ g = I$$

(here $\boldsymbol{\tau}$ are the Pauli matrices). Therefore, elements of the $SU(2)$ group are in one to one correspondence with points of the sphere S^3 defined by the equation (6.31). The map of the S^3 which bounds the x -space onto $SU(2)$ is therefore just the map $S^3 \rightarrow S^3$. In this latter case all the arguments we had for $S^2 \rightarrow S^2$ in Section 6.1 are applicable. We have an integer q which is equal to the number of coverings given by the integral of the Jacobian. The analogue of the formula (6.4) in the present case has the form:

$$q = \frac{1}{12\pi^2} \int d^3x \epsilon^{abcd} \epsilon_{\mu\nu\lambda} (n^a \hat{c}_\mu n^b \hat{c}_\nu n^c \hat{c}_\lambda n^d) \\ = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon_{\mu\nu\lambda} \text{Tr} (L_\mu L_\nu L_\lambda)$$

with

$$L_\mu(x) = g^{-1} \hat{\partial}_\mu g(x)$$

It is easily checked that the combination of n in the first equality is just the surface element of S^3 and hence the first term (6.32) is the Jacobian for the transformation from the x -space (forming S^3) to the n -space. The second equality can be checked by explicit computation or by realizing that the integrand in this formula is the only possible expression, having dimension 3 and invariant under $G \otimes G$:

$$g(x) \rightarrow ug(x)v$$

Therefore it must be proportional to an element of the group volume. We have obtained the following classification of A_μ . Take the asymptotic form of a given A_μ -field at $x \rightarrow \infty$, and determine $g(x)$ from (6.29). After that, compute q from (6.32). Gauge fields with different q cannot be continuously deformed to one another.

There exists a more convenient expression for q than (6.32). It is given by the formula:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{32\pi^2} \int \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}) d^4x \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_x \text{Tr} F \wedge F \end{aligned}$$

Here in the second equality we have used a convenient notation adopted in mathematics. For each skew-symmetric p -rank tensor $T^{\mu_1 \dots \mu_p}$ one can define the p -form:

$$T_p = \frac{1}{p!} T^{\mu_1 \dots \mu_p} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_p}$$

where the "wedge" product $\wedge$ is a skew-symmetric bilinear operation. Its main property is:

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad (\text{i.e. } dx_i \wedge dx_i = 0)$$

Generally,

$$T_p \wedge T_q = (-1)^{pq} T_q \wedge T_p$$

The volume element of a space of dimension n can also be represented as an n -form:

$$dV = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \frac{1}{n!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$$

Below we will use the operator one-form

$$d = dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

that transforms p -forms into $(p+1)$ -forms:

$$dT_p = \frac{1}{p!} (\partial_\nu T_{\mu_1 \dots \mu_p}) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$$

From this definition the important property $d^2 T_p = 0$ follows for arbitrary T_p . The main convenience of this notation is that we avoid writing tensor indices, thus saving a lot of ink.

Let us prove now that (6.34) is equivalent to (6.32). For this let us show first that the integrand in (6.34) is a total divergence. The easiest way of doing this is to consider a variation of the integrand under variation of the field. We have:

$$\begin{aligned}
\rho(x) &= \text{Tr}(F \wedge F) \\
\delta\rho(x) &= 2 \text{Tr}(F \wedge \delta F) \\
F &= dA + A \wedge A = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\
\delta F &= d\delta A + A \wedge \delta A + \delta A \wedge A = \nabla \cdot \delta A
\end{aligned}$$

(where F is a 2-form; d is called the exterior derivative). For pedagogical reasons let us repeat (6.35) in the ordinary notation:

$$\begin{aligned}
\rho(x) &= \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}) d^4x \\
\delta\rho &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{Tr}(F_{\mu\nu} \delta F_{\lambda\rho}) d^4x \\
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \\
\delta F_{\mu\nu} &= \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu + [A_\mu, \delta A_\nu] - (\mu \leftrightarrow \nu) = \nabla_\mu \delta A_\nu - \nabla_\nu \delta A_\mu
\end{aligned}$$

From these equalities we obtain:

$$\begin{aligned}
\delta\rho(x) &= 2 \text{Tr} F \wedge (d\delta A + A \wedge \delta A + \delta A \wedge A) \\
&= 2 \text{Tr}(F \wedge d\delta A) + 2 \text{Tr}(F \wedge A - A \wedge F) \wedge \delta A \\
&= 2 \text{Tr} F \wedge d\delta A + 2 \text{Tr} dF \wedge \delta A = 2 d(\text{Tr} F \wedge \delta A) \\
&= \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \hat{\partial}_\mu \text{Tr}(F_{\nu\lambda} \delta A_\rho) d^4x
\end{aligned}$$

where we have used the Bianchi identity:

$$\begin{aligned}
[\nabla, F] &= dF + A \wedge F - F \wedge A \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\nu F_{\lambda\rho} + [A_\nu, F_{\lambda\rho}]) dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho = 0
\end{aligned}$$

We have:

$$\begin{aligned}
\delta\rho(x) &= (\partial_\mu \delta \mathcal{K}^\mu(x)) d^4x \\
\delta \mathcal{K}^\mu(x) &= \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{Tr}(F_{\nu\lambda} \delta A_\rho)
\end{aligned}$$

Now we have to obtain the current $\mathcal{K}_\mu$ itself. To do this let us introduce a parameter $\tau : 0 \leq \tau \leq 1$ and consider a family of gauge fields $A_\mu(x, \tau) = \tau A_\mu(x)$. According to (6.39) we have:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{K}^\mu(x, \tau)}{\partial \tau} &= \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{Tr} \left(F_{\nu\lambda}(x, \tau) \frac{\partial A_\rho}{\partial \tau} \right) \\
&= \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{Tr} \left\{ (\tau (\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu) + \tau^2 [A_\nu, A_\lambda]) \cdot A_\rho \right\}
\end{aligned}$$

Integrating (6.40) on τ we obtain:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^\mu(x) &= \mathcal{K}^\mu(x, 1) \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{Tr} \left(\left(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu + \frac{2}{3} [A_\nu, A_\lambda] \right) \cdot A_\rho \right) \\
\frac{1}{2} \text{Tr}(F * F) &= \partial_\mu \mathcal{K}^\mu(x) \\
\left(*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho} \right)
\end{aligned}$$

Of course, after the answer (6.41) and (6.42) is known, it can be checked by direct computation.

Substitution of (6.42) into (6.34) gives:

$$q = \frac{1}{8\pi^2} \oint_{S^3} \mathcal{K}_\mu d^3\sigma^\mu$$

where we integrate over a large S^3 . At these distances $F_{\mu\nu} = 0$, and (6.41) can be replaced by:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^\mu(x) &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{Tr} \left(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu + \frac{4}{3} A_\nu A_\lambda \right) A_\rho \\ &\approx -\frac{1}{3} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{Tr} (A_\nu A_\lambda A_\rho) \\ &\approx -\frac{1}{3} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \text{Tr} (L_\nu L_\lambda L_\rho) \end{aligned}$$

This proves the equivalence of (6.32) and (6.34).

Our aim now is to find an instanton solution with $q = 1$. As in the case of the n -field we can avoid solving the Yang-Mills equations themselves, by considering instead the "square root" of them. Let us use an identity:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4e_0^2} \int \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 d^4x \\ &= \frac{1}{8e_0^2} \int \text{Tr} ((F_{\mu\nu} - {}^*F_{\mu\nu})^2) d^4x + \frac{1}{4e_0^2} \int \text{Tr} (F_{\mu\nu} {}^*F_{\mu\nu}) d^4x \\ &= \frac{8\pi^2 q}{e_0^2} + \frac{1}{8e_0^2} \int \text{Tr} ((F_{\mu\nu} - {}^*F_{\mu\nu})^2) d^4x \end{aligned}$$

We see that if we find a solution of the "duality" equation

$$F_{\mu\nu} = {}^*F_{\mu\nu}$$

then the action for a fixed q will be minimal. Actually, it is trivial to check that if the first-order equations (6.46) are satisfied, then the Yang-Mills equations

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

will also be satisfied (the converse is not true). To check this, let us differentiate (6.46):

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \nabla_\mu {}^*F_{\mu\nu} \equiv 0$$

(where the last equality is a consequence of the Bianchi identity:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} &= 0 \\ \text{if } F_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta] \end{aligned}$$

Notice by the way that for constant A_α this reduces to the Jacobi identity:

$$[A_\alpha, [A_\beta, A_\gamma]] + [A_\beta, [A_\gamma, A_\alpha]] + [A_\gamma, [A_\alpha, A_\beta]] = 0$$

We see that the "duality" equations (6.46) are in some sense a four dimensional analogue of the Cauchy-Riemann equations (6.9). Their most surprising property is that they possess multi-instanton solutions. Before discussing them let us present a solution with $q = 1$. The ansatz for this solution can be found by the following trick.

Let us consider instead of the gauge group $SU(2)$, a group $SU(2) \otimes SU(2) \simeq O(4)$. Then equations (6.46) will have the symmetry group $O(4) \otimes O(4)$, where the first factor is space rotations, and the second isotopic rotations. We shall be looking for a solution which breaks $O(4) \otimes O(4)$ but preserves the single $O(4)$ formed by simultaneous rotations in x -space and isotopic space. After that we shall return to $SU(2)$.

Generators of $O(4)$ are described by matrices $I^{\alpha\beta}$, skew-symmetric in (α, β) , which represent a rotation in the (α, β) -plane. Therefore, gauge fields for this group also have these indices:

$$A_\mu = A_\mu^{\alpha\beta}(x)$$

The most general $O(4)$ -symmetric ansatz is given by:

$$A_\mu^{\alpha\beta}(x) = a(r^2)(x_\alpha \delta_{\mu\beta} - x_\beta \delta_{\mu\alpha}), (r^2 = x_\mu x^\mu)$$

On symmetry grounds it must be compatible with the Yang-Mills and duality equations. The six fields $A_\mu^{\alpha\beta}$ can be split into two sets, each of three fields, A_μ^a and B_μ^a , each corresponding to an $SU(2)$. This splitting is described by:

$$\begin{aligned} A_\mu^a &= \frac{1}{2} \left(A_\mu^{a0} + \frac{1}{2} \epsilon^{abc} A_\mu^{bc} \right) \equiv \frac{1}{4} \eta_{a\alpha\beta} A_\mu^{\alpha\beta} \\ B_\mu^a &= \frac{1}{2} \left(A_\mu^{0a} + \frac{1}{2} \epsilon^{abc} A_\mu^{bc} \right) \equiv \frac{1}{4} \eta_{a\alpha\beta} A_\mu^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

(here $\eta_{abc} = \epsilon_{abc}$, $\eta_{ab0} = \delta_{ab}$, etc.). The origin of this decomposition is based on a check that the commutation relations:

$$\begin{aligned} [I^{\alpha\beta}, I^{\nu\delta}] &= \delta^{\alpha\gamma} I^{\beta\delta} + \delta^{\beta\delta} I^{\alpha\gamma} \\ &\quad - \delta^{\delta\delta} I^{\beta\gamma} - \delta^{\beta\gamma} I^{\alpha\delta} \end{aligned}$$

get decomposed as:

$$[X_a^\pm, X_b^\pm] = \epsilon_{abc} X_c^\pm, \quad [X_a^+, X_b^-] = 0$$

for

$$X_a^\pm = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{abc} I_{bc} \pm I_{a0} \right)$$

We conclude from (6.52) and (6.53) that the ansatz:

$$A_\mu^a = -\frac{1}{2} \eta_{a\mu\nu} x_\nu a(r^2)$$

is bound to be compatible with the duality equation. The substitution of (6.55) into (6.46) gives after some simple calculations:

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x) &= \frac{2\eta_{a\mu\nu}(x_\nu - a_\nu)}{(x - a)^2 + \rho^2} \\ F_{\mu\nu}^a(x) &= -\frac{4\eta_{\alpha\mu\nu}\rho^2}{((x - a)^2 + \rho^2)^2} \end{aligned}$$

with arbitrary scale parameter ρ and position parameter a_μ .

This Non-Abelian instanton can be viewed as a magnetic dipole of size ρ . If we consider now the contribution of one instanton to the partition function Z we find, just as in case of n -field, several factors. First of all we have a factor $e^{-S_{c1}} = e^{-8\pi^2/e_0^2}$ which gets replaced, after taking account of the one loop correction by $e^{-8\pi^2/e^2(\rho)}$ where, for $SU(N)$

$$e^2(\rho) = \frac{3}{11N} = \frac{8\pi^2}{-\log(\lambda\rho)}$$

is an effective coupling for the size ρ . The contribution has to be integrated over ρ and a . The measure must be both scale and translationally invariant. The only combination with these properties is $d^4R d\rho\rho^{-5}$. We find from this consideration:

$$Z_{\text{INST}}^{(1)} \sim V \int \frac{d\rho}{\rho^5} e^{-8\pi^2/e^2(\rho)} = V \int \frac{d\rho}{\rho^5} \rho^{11N/3}$$

(V is the 4 -volume).

As happened in the case of the n -field, the instanton contribution has an infrared divergence. This implies that in the multi-instanton picture, individual instantons tend to grow and to overlap. The naive dilute gas approximation is certainly inapplicable then, and we should expect something like dissociation of dipole-like instantons to their elementary constituents, as happened in the case of the n -field. However, even one loop computations on the multi-instanton background have not yet been performed, and nothing similar to the Coulomb plasma of the previous section has been discovered. This is connected partly with the fact that multi-instanton solutions have not been explicitly parametrized up to now. I expect many interesting surprises await us, even on the one loop level, in this hard problem.

There exists an interesting phenomenological description of the instanton liquid, which explains some qualitative features of hadrons. This approach [†] will not be discussed in this book.

So, our conclusion is that on the present level of understanding of instanton dynamics, we cannot obtain any exact dynamical statements concerning Non-Abelian gauge theory. In the case of n -fields the situation is slightly better, since we were able to demonstrate the appearance of the mass gap on a qualitative level. Even in this case one would like to have much deeper understanding of the situation. There are reasons to believe that some considerable progress will be achieved in the near future. In the case of gauge fields we have to pray for luck.

At the same time, the existence of fields with topological charge has a deep qualitative influence on the dynamical structure of the theory. We describe some of this in the next section.

14.6.3 6.3 Qualitative Effects of Instantons

The most dramatic manifestation of topological effects occurs when we take account of the interaction of massless Dirac fermions with instantons. We shall show in this section that instantons lead in this case to violation of some apparent conservation laws. Qualitatively, the effect can be described as follows. Let us examine an isospinor Dirac field ψ in the external Non-Abelian gauge field A_μ . It is represented by the action:

$$S_\psi = \int d^4x \bar{\psi} (i^\mu (\partial_\mu + A_\mu)) \psi$$

On a classical level, this action conserves an axial current:

$$\partial_\mu (i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi) = 0$$

However, if we consider the axial current which arises in the vacuum when we apply the external field A_μ , then equation (6.60) will be untrue because of the so-called quantum anomaly.

[†] Due to Callan and Gross (1979).

Let us show how this comes about. The partition function of fermions in the external field is given by:

$$Z[A] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left(- \int \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \psi d^4x \right)$$

The induced axial current can be written as:

$$\begin{aligned} J_{\mu 5}(x, A) &= Z^{-1}[A] \times \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left(- \int \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \psi d^4x \right) i \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi \\ &= Q + Q + \dots \\ &= -i \text{Tr} \gamma_\mu \gamma_5 G(x, x; A) \end{aligned}$$

where $G(x, x'; A)$ is a Green function for the Dirac operator in the field A_μ . The definition (6.62) diverges because of singularities of the Green function at coincident points. It is necessary therefore to introduce a cut-off and to separate the divergent terms in $J_{\mu 5}$.

In order to perform this programme, let us express $G(x, x'; A)$ in terms of eigenfunctions of the Dirac equation, $\psi_n(x)$:

$$i \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu) \psi_n(x) = E_n \psi_n(x)$$

According to standard formulas, the Green function is given by:

$$G(x, x') = \sum_n \frac{\psi_n(x) \bar{\psi}_n(x')}{E_n}$$

In order to regularize (6.64) we intend to insert into sums over eigenstates a factor $e^{-\epsilon E_n^2}$, with ϵ being of the order of Λ^{-2} and Λ being a momentum cut-off. The motivation for such a procedure is the following. High momentum divergences, or divergences for large n in (6.64) would not have arisen if we had worked with a theory on the lattice. While in this case the low lying E_n coincide with those of continuum theory, the higher E_n are not present at all because we have a finite number of degrees of freedom per unit volume. If we expect that the ultraviolet region produces only local effects, removed by renormalization, then we can imitate a lattice, which achieves this by means of a natural cut-off, by the quenching factor $e^{-\epsilon E_n^2}$. The E_n^2 is needed here, since E_n in (6.62) can be both positive and negative.

After these explanations let us compute the quantity:

$$J_{\mu 5}(x; A) = \sum_n \frac{i \bar{\psi}_n \gamma_\mu \gamma_5 \psi_n}{E_n} e^{-\epsilon E_n^2}$$

which is just the regularized axial current. We have:

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_{\mu 5} &= \sum_n \frac{i \partial_\mu (\bar{\psi}_n \gamma_\mu \gamma_5 \psi_n)}{E_n} e^{-\epsilon E_n^2} \\ &= -2 \sum_n \bar{\psi}_n \gamma_5 \psi_n e^{-\epsilon E_n^2} = 2 \text{tr} \langle x | \gamma_5 e^{-\epsilon \mathcal{D}} | x \rangle \\ &\quad (\mathcal{D} \equiv (i \gamma_\mu \nabla_\mu)^2) \end{aligned}$$

Here we have used an identity, following straight from (6.63):

$$i \partial_\mu (\bar{\psi}_n \gamma_\mu \gamma_5 \psi_n) = -2 E_n (\bar{\psi}_n \gamma_5 \psi_n)$$

The last term in (6.66) is easily calculable as $\epsilon \rightarrow 0$. We have:

$$\mathcal{D} = (i\gamma_\mu \nabla_\mu)^2 = -(\partial_\mu + A_\mu)^2 - \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}; \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

The most singular term in $e^{-\epsilon \mathcal{D}}$ will come from ∂_μ^2 in (6.67). If we neglect all fields, then:

$$\langle x | e^{-\epsilon \mathcal{D}} | x \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-\epsilon p^2} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon^2}$$

Expansion in A_μ and $F_{\mu\nu}$ will give us less singular terms. These terms are important since for $A_\mu = 0$:

$$\text{Tr} (\gamma_5 e^{-\epsilon \mathcal{D}}) = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon^2} \text{Tr} \gamma_5 = 0$$

We see that it will be useless to expand $(\partial_\mu + A_\mu)^2$ in terms of A_μ , since $\text{Tr} \gamma_5 = 0$ will remain in our formulas. Expansion up to the first term in $\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ also does not help since $\text{Tr} \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} = 0$. The first nonzero contribution arises from:

$$\text{Tr}_x \gamma_5 e^{-\epsilon \mathcal{D}} \approx \langle x | e^{\epsilon \partial_\mu^2} | x \rangle \frac{\epsilon^2}{8} \text{Tr} (\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\lambda\rho}) \cdot \text{Tr} (F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho})$$

If we notice that:

$$\text{Tr} (\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\lambda\rho}) = 4\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$$

and compare (6.70) with (6.66) we get:

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_\mu 5(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_n \partial_\mu \frac{i\bar{\psi}_n \gamma_\mu \gamma_5 \psi_n}{E_n} e^{-\epsilon E_n^2} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr} (F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

This "anomaly" relation and other similar ones have amazingly many consequences. Before coming to them, let us explain again how (6.71) arises.

We begin with a Lagrangian which conserves the axial current or, in other words it conserves separately the number of left- and righthanded fermions, $\psi_{L,R} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \psi$. Since this theory is divergent, we consider its regularized version, and then let the cut-off tend to infinity. After that we find a finite contribution (which is independent of the form of the cut-off) to the divergence of the axial current (6.71). This fact implies, that in the process of regularizing the theory we are bound to violate conservation of the axial current, and that in the limit $\Lambda \rightarrow \infty$ a finite piece of this violation remains. Let us give some examples of this phenomenon. Take a nonrelativistic Fermi gas in one dimension in its ground state. This state is formed by particles with momenta $-p_F < p < p_F$ where p_F is the Fermi-momentum. The spectrum of this system contains gapless excitations (if there is no superfluidity). These excitations are by particles and holes with momenta lying very near $\pm p_F$. The particle-hole excitation energy is given by:

$$E = \frac{(p_F + K_1)^2}{2} - \frac{(p_F - K_2)^2}{2} \approx p_F \cdot (K_1 - K_2)$$

where $p_F + K_1$ is a particle momentum and $p_F - K_2$ is a hole momentum. Therefore, all low lying excitations are described by two fields; the first, $\psi_R(k)$ corresponding to the particles with $p \simeq p_F + k$ (antiparticles for them are holes with $p = p_F - k$) and $\psi_L(k)$ corresponding to particles with $p \simeq -p_F - k$. These fields have a linear spectrum (according to (6.72) and satisfy the massless Dirac equation:

$$(\omega - k)\psi_L = 0$$

$$(\omega + k)\psi_R = 0$$

The axial current is therefore conserved. However, we see that $\psi_L(k)$ and $\psi_R(k)$ are not independent fields in an exact sense—they become mixed as $k \sim p_F$. Therefore taking into account the cut-off region (in this case the cut-off is just the Fermi-momentum) leads to nonconservation of left- and right-handed particles separately. Whether this leads to a finite effect after removing the cut-off is another matter. It depends on the compensation between the small values of amplitudes involving $p \sim p_F$ particles and the large number of particles in the Dirac sea.

Our computation which lead to (6.71) revealed that the compensation was exact in the $\mathcal{D} = 4$ case. Although this computation was performed for a specific regularization of the theory, its final and finite result (6.71) can be shown to be regularization-independent. In more than one dimension, fermions need spin σ in order to be relativistic. In this case $\omega = \sigma \mathbf{K}$. Spinless fermions cannot be relativistic, from spin statistics theory.

We recognize in the right hand side of (6.71) the density of topological charge. As we have shown in Section 6.2 this can be written as the divergence of some current $\mathcal{K}^\mu(x)$. One might have thought, therefore, that the anomaly equation (6.71) does not break the conservation of axial charge, but rather redefines this current: $J_{\mu 5} \rightarrow J_{\mu 5} - 4\pi^2 \mathcal{K}_\mu$.

This is not the case. If we consider a field A_μ with topological charge q and integrate equation (6.71) over the 4-volume, we obtain:

$$\Delta Q_5 = \int \hat{c}_\mu J_{\mu 5} \, d^4x = 2q$$

Here:

$$Q_5 = \int J_{05} \, d^3x = N_L - N_R$$

and we denote by ΔQ_5 the total change of Q_5 for infinite time under the influence of A_μ . Equation (6.74) shows that it is equal to twice the topological charge of A_μ .

This amazing result means that there exists "compulsory" production of fermions and antifermions in topological nontrivial fields and that the numbers of left- and right-handed particles N_L and N_R necessarily change.

We derived all this using the Euclidean formalism, but there is no difficulty at all in understanding this effect in Minkowski space. To do this, let us recall the Minkowskian interpretation of instantons. As we have seen in Chapter 4, the instanton represents a tunnelling transition between two states divided by a barrier (recall the double-well example). In the real time formulation we have very many different trajectories connecting these two states. However, since the classical action does not have a corresponding extremum (since the transition is forbidden classically) the interference among these trajectories is highly destructive and the amplitude is exponentially small. The instanton is a classical solution for imaginary time, which accounts for this smallness as described in Chapter 4.

Let us explain, after these reminiscences, what kind of states are connected by the instantons in the nonabelian gauge theories. In order to do this we can pass to the gauge $A_0 = 0$ in the instanton solution, finding that the nonzero part of it, $A_n(x, t)$, has the property:

$$\begin{aligned} A_n(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0 \\ A_n(x, t) &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} g^{-1}(x) \partial_n g(x) \end{aligned}$$

Here $g(x)$ is a certain matrix, satisfying the condition $g(\infty) = I$. Therefore it maps x -space, which can be considered as S^3 due to the last condition, onto the group G . This is just the same topologically nontrivial map, which was discussed in Section 6.2, only transcribed to the $A_0 = 0$ gauge.

Now we can interpret the Yang-Mills instanton as follows. The configuration space in gauge theory is formed by all possible fields $\{A_n(x)\}$. Let us consider a transition in real time such that it lead from zero A_n at $t = -\infty$ to $g^{-1}\partial_n g$ with topologically nontrivial $g(x)$ at $t = +\infty$. Due to this nontrivial $g(x)$, in the process of such a transition nonzero field strengths necessarily arise. (Otherwise the field $g(x, t)$ in $A_n(x, t) = g^{-1}(x, t)\partial_n g(x, t)$ would have interpolated between $g(x)$ and I , which is impossible.)

The Minkowskian interpretation of (6.74) is that those field strengths are such that they lead to compulsory pair-creation. The word "compulsory" here means that the transition amplitude without pair creation is exactly zero.

It is interesting to see how these properties are fulfilled in terms of explicit expressions for the amplitudes.

The vacuum-vacuum amplitude, which as we said must be zero, is given by (6.61):

$$\begin{aligned} Z[A] &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ - \int i\bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\mu + A_\mu) \psi d^4x \right. \\ &= \text{Det} (i\gamma_\mu (\partial_\mu + A_\mu)) \end{aligned}$$

(We obtain the determinant to the first power and not the inverse determinant because ψ are anticommuting variables, or in other words, fermionic loops come with a negative sign.)

The amplitude (6.76) may be seen to be zero because the Dirac operator, as we shall show in a moment, has zero eigenvalues in the topological fields, and the determinant, being a product of the eigenvalues, is zero.

The proof that the Dirac operator has zero eigenvalues is based on the Atiyah-Singer index theorem. We shall derive here a special case of this theorem sufficient for our purposes. To do this, let us notice that according to (6.71):

$$\int d^4x \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_n \bar{\psi}_n(x) \gamma_5 \psi_n(x) e^{-\epsilon E_n^2} = -q$$

The theorem follows from (6.77) after observation that all nonzero modes give zero contribution to (6.77). This happens because nonzero eigenvalues appear in pairs symmetric under reflection $E_n \rightarrow -E_n$, $\psi_n \rightarrow \gamma_5 \psi_n$. (Check this from eq. (6.63).) The value of $\psi_n \gamma_5 \psi_n$ under this reflection changes its sign. This proves the cancellation.)

As far as zero eigenmodes are concerned, they can be, and really are, asymmetric. Since the equation

$$\gamma_\mu \nabla_\mu \psi^{(0)} = 0$$

is γ_5 -invariant, $\psi^{(0)}$ may be purely left or right:

$$\gamma_5 \psi_{L,R}^{(0)} = \pm \psi_{L,R}^{(0)}$$

If we denote by $n_{L,R}$ the number of corresponding zero modes we get a beautiful theorem:

$$n_R - n_L = q$$

This result shows that for $q \neq 0$ we indeed have zero modes and thus that the vacuum-vacuum transition is zero. Moreover, we can easily compute the nonzero matrix elements for which the selection rule (6.74) is satisfied. Consider the Green functions instead of Z :

$$G(x_i, y_i) = Z^{-1} \int e^{-s_\psi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} (\psi(x_1) \dots \psi(x_N) \bar{\psi}(y_1) \dots \bar{\psi}(y_N))}$$

We find that this quantity is not well defined in the instanton field because $Z = 0$. This just means that the Green function usually represents a transition amplitude divided by the amplitude for the vacuum to remain unchanged. This is not possible in the instanton field and we have to consider the absolute value of the particle creation amplitude, described by

$$\begin{aligned} Z \cdot G(x_i, y_i) &= F(x_i, y_i) \\ &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-s_\psi (\psi(x_1) \dots \psi(x_N) \bar{\psi}(y_1) \dots \bar{\psi}(y_N))} \end{aligned}$$

Since the action is quadratic this amplitude can be computed by expansion in normal modes:

$$\psi(x) = \sum_{\alpha} C_{0\alpha} \psi_{0\alpha}(x) + \sum_{n \neq 0} C_n \psi_n(x)$$

Here $\{\psi_{0\alpha}\}$ are the zero modes of the Dirac operator and the second term represents the 'nonzero modes' contribution. The key point in computing (6.82) lies in the Berezin rule:

$$\int dC = 0 \text{ and } \int C dC = 1$$

for anticommuting variables. Since

$$\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} = \prod_{\alpha} dC_{0\alpha} d\bar{C}_{0\alpha} \prod_{n \neq 0} dC_n d\bar{C}_n$$

and

$$S(\psi, \bar{\psi}) = \sum_{n \neq 0} E_n \bar{C}_n C_n$$

we must carefully collect in the integrand of (6.82) the terms containing a product of all the $C_{0\alpha} \bar{C}_{0\alpha}$. All other terms will give zero according to (6.84). Since each left-handed $\psi_{0\alpha}$ gives a right-handed $\bar{\psi}_{0\alpha}$ the amplitude will be nonzero, only if the selection rule (6.74) is satisfied. In this case it is proportional to the product of the corresponding zero mode eigenfunctions $\psi_{0\alpha}(x)$.

The above configuration treated A_μ as an external field. It is quite obvious, however, that if we take a functional integral over A_μ , including in it nontrivial topological fields, then we shall obtain (with an amplitude $\sim e^{-8\pi^2/e_0^2}$) nonconservation of the axial current. This effect leads to important physical consequences for strong and weak interactions briefly described in the remarks to this chapter. Here we shall mention another aspect of the above result. Namely it shows that massless quarks tend to suppress instanton contribution, because $Z[A] = 0$ in the instanton field. If we consider instanton-anti-instanton configurations then their contribution will be nonzero, due to the fact that the total topological charge is zero. But the effective action $U(R_{12})$, where R_{12} is the distance between our objects, must have the property

$$U(R_{12})_{R_{12} \rightarrow \infty} \propto$$

This means, that exchange of a massless fermion pair leads to longrange forces between instantons and anti-instantons. The result of this may have several alternative consequences. The first one is that since (6.87) implies quenching of large fluctuations in the presence of massless fermions, the system loses the confining property and we would end up with massless

gauge fields together with fermions. This option seems highly improbable to me on the basis of some analogies and some model considerations. However, I am not aware of any strict statements permitting us to reject it.

The second possibility, which in my opinion is realized in the theory, is the following. Due to the strong binding force between fermions the chiral symmetry gets spontaneously broken and as a result the fermions acquire a mass. After that has happened, the long range force between instantons and anti-instantons disappears, being screened by the fermionic mass term in the effective lagrangian. The only remaining effect of anomalous non-conservation will consist of giving a mass to the corresponding Goldstone boson.

There is also another improbable option, namely that instantons get confined but some other type of large fluctuations, not suppressed by fermions, disorder the system.

Unfortunately, at present we are unable to make a decisive choice between the options.

Let us discuss another qualitative phenomenon, arising because of the instantons. The Lagrangian density for Yang-Mills fields is conventionally taken to be $(1/4e_0^2) \text{Tr} (F_{\mu\nu}^2)$. The standard reason for this choice is that this is the only invariant expression of dimension 4. Any higher invariant terms like $\text{Tr} (\nabla_\alpha F_{\mu\nu})^2$ will be irrelevant in the infrared region and can be omitted. This reason overlooks another invariant expression, $\text{Tr} F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu}$, on the basis that it is a total divergence, which has no influence on the equations of motion. But, as we already know, instantons activate this total divergence. Therefore the most general Lagrangian of dimension 4 has the form

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e_0^2} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 + \frac{i\theta}{16\pi^2} \text{Tr} F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu}$$

for the Yang-Mills theory, and the analogous Lagrangian for the n -field

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e_0^2} (\partial_\mu n)^2 + \frac{i\theta}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu} n [\partial_\mu n \times \partial_\nu n]$$

where θ in both cases is a new coupling constant. Due to the presence of instantons, physical transition amplitudes will depend on θ . For instance, the vacuum to vacuum amplitude will be

$$Z = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} e^{i\theta q} Z_q$$

where by Z_q we denoted the functional integral over the fields with a fixed value of q .

The extra terms in the above expressions are purely imaginary in Euclidean space for the following reasons. We have to have a real action in Minkowski space. As we change $t \rightarrow -it$ we have to change $A_n \rightarrow A_n$ and $A_0 \rightarrow iA_0$, because A_0 transforms as $\partial/\partial t$. Hence electric and magnetic fields change as:

$$\begin{aligned} E_n &\rightarrow iE_n \\ H_n &\rightarrow H_n \end{aligned}$$

The two terms in (6.88) change as:

$$\begin{aligned} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 &= E^2 - H^2 \rightarrow -(H^2 + E^2) \\ \text{Tr} F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu} &= -2\mathbf{H} \cdot \mathbf{E} \rightarrow -2i\mathbf{H} \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

So, in the Euclidean action (6.88) we obtain i in the second term when we transform the real Minkowskian action.

Topological " θ -terms" in the action create a problem when we apply the theory to describe strong interactions. If they really do contribute to the physical amplitudes, then the whole

theory loses invariance under time reversal (since $\mathbf{H} \cdot \mathbf{E}$ is T -odd). This implies that for some reasons the coupling θ must be zero or extremely small.

Certainly the existence of this problem somewhat depends on one's personal philosophy. One can take the view that in the cut-off region, i.e. at the Planck length, we have a gauge Lagrangian which preserves T -invariance. Then $\theta = 0$ from the very beginning and no problem of strong T -noninvariance arises. It is interesting, however, to consider another point of view, according to which there are no special symmetries at the Planck length and they persist in the low energy region only for dynamical reasons, namely because only renormalizable interactions contribute significantly for large scales. Accepting this view, we have to consider all possible terms in the lagrangian, having dimensions four or less with coefficients having their natural magnitude. If so, we do have a strong T -violation problem. An attempt to resolve this problem led to an interesting suggestion [4]. It can be shown that if massless fermions with broken chiral symmetry are present in the system, then due to instanton effects Goldstone's massless particles obtain some mass (because of nonexact conservation of $J_{\mu 5}$) and simultaneously the θ -term gets absorbed after redefinition of Goldstone's field. This consideration predicted a light isoscalar boson (which would have been massless without instantons). Unfortunately this particle, called the axion, has not been found, and the strong θ -problem remains open.

Let us mention briefly some other interesting effects of instantons together with the θ -term. It appears that their presence induces a small electric charge $\sim \theta$ for a magnetic monopole, and in this case the operator of electric charge differs from a gauge group generator by a small constant.

Another interesting thing is a probably rich phase structure of the theory as a function of θ . In the case of n -fields, periodic θ -dependence seems to have important consequences, explaining the quantized Hall effect in metals.

Let us stress that θ -dependence of physical quantities is not to be taken for granted from what we have said about it. It is quite possible that due to dynamical effects, the contributions with $q \neq 0$ may become absent in the infinite volume limit. Example of such a phenomenon is observed in the case of plasma where only states with total charge zero contribute in the thermodynamic limit (because of the enormous Coulomb energy of other states). However, this option seems unlikely in Non-Abelian gauge theory.

Another word of caution concerns the apparent periodicity in θ . It might well happen that because of dissociation of instantons, states with noninteger topological charge will give finite contributions to the partition function. These configurations certainly have infinite action, but this can be compensated by the entropy. As a result, the formal decomposition (6.30) will be untrue and we shall now have a periodic θ -dependence.

All these questions are purely dynamical and their solution requires some new concepts. In the next chapters we shall discuss what has been done in this direction.

14.7 Analogies Between Gauge and Chiral Fields. Loop Dynamics

In the previous chapters we indicated some similarities between chiral fields and gauge fields. We saw that both theories -the one for $\mathcal{D} = 2$ and the other for $\mathcal{D} = 4$ share the property of asymptotic freedom. Their strong coupling expansions also looked similar, provided that we substitute point-like excitations of chiral fields by closed flux lines for the gauge fields. Recall also the similarity of the instanton structures of n -fields and Yang-Mills fields.

In this chapter we shall explore the reasons for these analogies. Roughly speaking, it appears that small pieces of the flux lines in the gauge case move as if they were point-like excitations of a chiral field. On the other hand, the gauge field itself can be considered as a chiral field defined on the space of all possible loops.

These ideas are not well developed. But they provide us with a bridge between gauge theories, chiral fields and the theory of strings (discussed in Chapter 9). They may also help in a search for hidden symmetries in many-dimensional systems. One cannot help feeling that many beautiful secrets are concealed in loop space.

This space is the main topic of discussion below.

14.7.1 7.1 Non-Abelian Phase Factor

In the previous chapter we have already been dealing with a field:

$$\begin{aligned}\Psi(C) &= P \exp \oint_C A_\mu dx^\mu \\ &= P \exp \left(\int_0^{2\pi} ds A_\mu(x(s)) \frac{dx^\mu(s)}{ds} \right) \\ &= \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \prod_j (1 + A_\mu(x_j) \Delta x_j^\mu) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \int_0^{s_2} ds_3 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \frac{dx^\mu(s_n)}{ds_n} A_\mu(x(s_n)) \cdots \frac{dx^\mu}{ds_1} A_\mu(x(s_1))\end{aligned}$$

(Here $\mathbf{P}$ is the Dyson ordering operation, C is a loop parametrized by $x_\mu = x_\mu(s)$, $0 \leq s \leq 2\pi$; A_μ are matrices lying in the Lie algebra of the gauge group). For Abelian A_μ it would have been possible to symmetrize the integrand, obtaining n -fold integration from 0 to 2π . Then Ψ would be an ordinary exponential. For the Non-Abelian case the ordering is very important.

The most important property of (7.1) is its simple behaviour under a gauge transformation of A_μ . We have:

$$\begin{aligned}A_\mu(x) &\rightarrow \Omega^{-1}(x) A_\mu(x) \Omega(x) + \Omega^{-1} \partial_\mu \Omega \\ \Psi(C) &\rightarrow \Omega^{-1}(x(0)) \Psi(C) \Omega(x(2\pi))\end{aligned}$$

(where $x(0) = x(2\pi)$ is the beginning of the loop).

For an open path C_{xy} connecting points x and y , the transformation law has the form:

$$\begin{aligned}\Psi(C_{xy}) &= P \exp \int_{C_{xy}} A_\mu dx^\mu \\ \Psi(C_{xy}) &\rightarrow \Omega^{-1}(x) \Psi(C_{xy}) \Omega(y)\end{aligned}$$

The lattice version of Ψ is given by the formula

$$\Psi(C_{xy}) = \prod_{(C_{xy})} B_{z,\alpha}$$

where $\prod_{(C_{xy})}$ is the product of matrices $B_{z,\alpha}$ attached to the links, forming the contour C_{xy} .

Formulas (7.2) and (7.3) are most easily checked in the lattice version (7.4), since under gauge transformation

$$B_{z,\alpha} \rightarrow \Omega_z^{-1} B_{z,\alpha} \Omega_{z+\alpha}$$

and the factors Ω in (7.4) cancel each other except at the ends. The factors $\Psi(C_{xy})$ can be considered as matrices of "parallel transport" of different quantities. This means the following. Suppose we have a field $\varphi(y)$ at the point y which transforms according to the fundamental representation of the gauge group:

$$\varphi(y) \rightarrow \Omega^{-1}(y)\varphi(y)$$

Without the gauge fields, the quantities $\varphi(y)$ cannot be compared with the field $\varphi(x)$ which has a different transformation law (with the matrix $\Omega^{-1}(x)$). But, having a gauge field at our disposal, we can perform a "parallel transport" of $\varphi(y)$ to the point x , by defining the transported field " $\varphi(x)$ " as

$$\mu\varphi(x)'' = \Psi(C_{yx})\varphi(y)$$

Now, the field " $\varphi(x)$ " has the same transformation law as $\varphi(x)$ and we can consider a covariant change of the field φ as we move from x to y along C_{xy} :

$$\begin{aligned}\delta_{C_{xy}}^{\text{cov}}\varphi &= \varphi(x) - \varphi(x)'' \\ &= \varphi(x) - \Psi(C_{xy})\varphi(y)\end{aligned}$$

For infinitesimal C_{xy} this change becomes independent of C_{xy} :

$$\begin{aligned}\delta^{\text{cov}}\varphi &= \varphi(x) - [1 + A_\mu(x)(y_\mu - x_\mu)]\varphi(y) \\ &\approx (\partial_\mu + A_\mu)\varphi(x)(x_\mu - y_\mu)\end{aligned}$$

thus defining the covariant derivative.

The role of the gauge field in this geometrical language is seen to permit comparison of the fields in different points. For that reason the gauge field is called a "connection" by mathematicians. A field strength $F_{\mu\nu}$ can be defined through the field change after the parallel transport along a small closed loop:

$$\varphi(x) - \mu(x)'' \simeq \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\varphi(x)$$

($\sigma^{\mu\nu}$ is the area of the loop), where

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

the mathematical name for $F_{\mu\nu}$ is "curvature".

We see that the phase factor $\Psi(C)$ is an important object for differential geometry. On the other hand it has a well-defined physical meaning. Let us consider a quantum particle moving in the external gauge field A_μ . For $A_\mu = 0$ the transition amplitude from x to y is given by a functional integral over trajectories, connecting x and y , each entering with the weight e^{iS_0} (S_0 being the classical action for a free particle on the trajectory). It is not difficult to show, that as we switch on A_μ , the amplitude becomes $e^{iS_0}\Psi(C_{xy})$ integrated over all trajectories C_{xy} . If our particle moves along a classical trajectory in space-time (but has quantized colour) then $\Psi(C_{xy})$ defines its transition amplitude. This conforms with what we said about Ψ in Chapter 4.

The natural intention, which stems from both the mathematical and the physical importance of the phase factor, is to attempt to reformulate gauge theory in their terms.

As a first step, let us derive classical equations of motion. In the lattice version with the action

$$S = \frac{1}{e_0^2} \text{Tr} \sum_{x,x,\beta} (B_{x,x} B_{x+x,\beta} B_{x+\beta,x}^{-1} B_{x,\beta}^{-1})$$

we can obtain classical equations of motion by taking a variation:

$$\begin{aligned}\delta B_{x\alpha} &= \omega_{x\alpha} B_{x\alpha} \\ \delta B_{x\alpha}^{-1} &= -B_{x\alpha}^{-1} \delta B_{x\alpha} B_{x\alpha}^{-1} = -B_{x\alpha}^{-1} \omega_{x\alpha}\end{aligned}$$

(here $\omega_{x\alpha}$ is an arbitrary element of the Lie algebra of G , while $B_{x\alpha}$ is an element of G itself). The classical equations of motion are:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \omega_{x\alpha}} = 0$$

Their explicit form has a useful graphical representation. To find it let us consider at first the variation of the first factor, $B_{x\alpha}$, in (7.11). We have:

$$\begin{aligned}\delta^{(1)} S &\sim \text{Tr} \sum_{x,\alpha,\beta} (\omega_{xx} B_{x,\alpha} B_{x+\alpha,\beta} B_{x+\beta,\alpha}^{-1} B_{x,\beta}^{-1}) \\ &= \sum_{x,\alpha,\beta} \text{Tr} \left(\omega_{x,\alpha} \prod_{x \times} \beta \right)\end{aligned}$$

where we draw a plaquette (x, α, β) starting from the point x , and associate with each link the matrix $B_{x,\alpha}$. The product starts from the link (x, α) and proceeds anti-clockwise.

In the second term

$$\delta^{(2)} S \sim \text{Tr} \sum_{x,\alpha,\beta} (B_{x\alpha} \omega_{x+\alpha,\beta} B_{x+\alpha,\beta} B_{x+\beta,\alpha}^{-1} B_{x,\beta}^{-1})$$

we shall change $x + \alpha \rightarrow x$, $(\alpha \rightleftharpoons \beta)$ and use cyclic invariance of the trace so as to have ω in the first place. We perform similar transformations with the other terms. Recalling that for $\text{SU}(N)$ ω is an arbitrary antiHermitian matrix we obtain the following graphical equations:

$$\sum_{\beta} \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A square loop starting at } x, \text{ going right } \alpha, \text{ up } \beta, \text{ left } \alpha, \text{ down } \beta. \\ \text{Diagram 2: A square loop starting at } x, \text{ going left } -\alpha, \text{ up } -\beta, \text{ right } -\alpha, \text{ down } -\beta. \end{array} - \text{h.c.} \right\} = 0$$

(h.c., means Hermitian conjugation). The same equation can be rewritten as

$$\sum_{\beta} \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A square loop starting at } x, \text{ going right } \alpha, \text{ up } \beta, \text{ left } \alpha, \text{ down } \beta. \\ \text{Diagram 2: A square loop starting at } x, \text{ going left } -\alpha, \text{ up } -\beta, \text{ right } -\alpha, \text{ down } -\beta. \end{array} - \text{h.c.} \right\} = 0$$

or in analytic notation:

$$\sum_{\beta} \left\{ (F_{x,x,\beta} - B_{x-\beta,\beta}^{-1} F_{x-\beta,x,\beta} B_{x-\beta,\beta}) - \text{h.c.} \right\} = 0$$

$$F_{x,x,\beta} = B_{x,x} B_{x+\alpha,\beta} B_{x+\beta,x}^{-1} B_{x,\beta}^{-1}$$

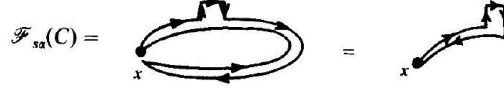
The form (7.18) has the advantage of having a familiar continuum limit: if we set $B_{x\alpha} \simeq 1 + A_{\alpha}$ and the potentials are slowly varying, we have:

$$\hat{c}_{\beta} F_{\alpha\beta} + [A_{\beta}, F_{\alpha\beta}] = 0$$

Let us transcribe the equation for $B_{x,\alpha}$ to equations for the phase factor $\Psi(C_{xy})$. To do this we introduce the "current" defined by

$$\mathcal{F}_{\alpha}(s, C) = \Psi \left(C + \prod_{s\alpha} \right) \Psi^{-1}(C)$$

where we denote by $C + \Pi_{s\alpha}$ the contour obtained from C by replacing the link $\#s$ by a segment shaped like the letter Π in the direction α . It is supposed that α is orthogonal to the direction of the original link. Graphically:



From this picture one sees that $\mathcal{F}$ is nothing but the field strength, transported along C to the beginning of the loop, x . It is now easy to check that equations (7.17) imply that

$$\sum_{\alpha} (\mathcal{F}_{s\alpha}(C) - \mathcal{F}_{s\alpha}(C - \Pi_{s\alpha})) - \text{h.c.} = 0$$

Before discussing the meaning of these relations, let us present their continuous version. Its form can be extracted from the preceding formulas. Namely, in this case the field $\Psi(C) = \Psi[x(s)]$ is a functional depending on the shape of the contour but not on its parametrization. Therefore:

$$\Psi[x(s)] = \Psi[x(\alpha(s))]$$

and

$$\frac{dx_{\mu}(s)}{ds} \frac{\delta \Psi}{\delta x_{\mu}(s)} = 0$$

Relation (7.23) follows from (7.22) if one takes $\alpha(s) = s + \epsilon(s)$ with infinitesimal $\epsilon(s)$. The variational derivative of any functional f is defined through the relation:

$$\delta f = \int ds \delta x_{\mu}(s) \left(\frac{\delta f}{\delta x_{\mu}(s)} \right)$$

Let us compute $\delta \Psi / \delta x_{\mu}$ using the definition (7.1). For that we shall use the following general relations:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{P exp} \int_0^t M dt &= \left(\text{P exp} \int_0^t M d\tau \right) M(t) \\ \delta \text{P exp} \int_0^{2\pi} M(\tau) d\tau &= \int_0^{2\pi} dt \left(\text{P exp} \int_0^t M(\tau_1) d\tau_1 \right) \delta M(t) \\ &\quad \times \left(\text{P exp} \int_t^{2\pi} M(\tau_2) d\tau_2 \right) \\ &\equiv \int_0^{2\pi} dt \text{P} \left(\delta M(t) \exp \int_0^{2\pi} M(\tau) d\tau \right) \\ \delta^2 \left(\text{P exp} \int_0^{2\pi} M(\tau) d\tau \right) &= \int_0^{2\pi} dt_1 dt_2 \text{P} \left(\delta M(t_1) \delta M(t_2) \exp \int_0^{2\pi} M(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

for an arbitrary matrix $M(\tau)$.

With the aid of these formulas we obtain:

$$\delta \Psi(C) = \int_0^{2\pi} \text{P} \left(F_{\mu\nu}(x(s)) \exp \int_0^{2\pi} A_{\mu} dx^{\mu} \right) \dot{x}_{\nu} \delta x_{\mu}(s) ds$$

where $F_{\mu\nu}$ is the Yang-Mills field strength. We see that the continuum counterpart of the quantity (7.20) is given by:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\mu(s, C) &= \frac{\delta\psi(C)}{\delta x_\mu(s)} \Psi^{-1}(C) \\ &= \dot{x}_v \left(\text{P exp} \int_0^s A_\mu \dot{x}_\mu dt F_{\mu\nu}(x(s)) \text{P exp} \left(- \int_0^s A_\mu \dot{x}_\mu dt \right) \right)\end{aligned}$$

By its definition it satisfies:

$$\begin{aligned}\dot{x}_\mu(s) \mathcal{F}_\mu(s, C) &= 0 \\ \frac{\delta \mathcal{F}_\mu(s, C)}{\delta x_\nu(s')} - \frac{\delta \mathcal{F}_\nu(s, C)}{\delta x_\mu(s')} + [\mathcal{F}_\mu(s, C), \mathcal{F}_\nu(s', C)] &= 0\end{aligned}$$

The second relation expresses the fact that a gauge field having nonzero field-strength in ordinary space, in the loop space has zero curvature being thus a chiral field.

If we take a functional divergence of (7.26) we obtain:

$$\begin{aligned}\frac{\delta \tilde{\mathcal{F}}_\mu(s, C)}{\delta x_\mu(s)} &= \delta(0) \left(\text{P exp} \int_0^s A_\mu \dot{x}_\mu dt \right. \\ &\quad \times (\partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}]) \text{P exp} \left(- \int_0^s A_\mu \dot{x}_\mu dt \right) \Big) \dot{x}_\nu\end{aligned}$$

From this relation we conclude that the Yang-Mills equations in terms of phase factors have the form:

$$\frac{\delta}{\delta x_\mu(s)} \left(\frac{\delta \Psi}{\delta x_\mu(s)} \Psi^{-1} \right) = 0$$

To be sure (7.29) is just a continuum version of the lattice equations. (7.18) and (7.21).

These formulas show a remarkable correspondence with equations of motion for chiral fields. Indeed, on the lattice the action

$$S = -\frac{1}{e_0^2} \sum_{x, \delta} \text{Tr} (g_x^{-1} g_{x+\delta})$$

leads to equations of motion (obtained by a variation $\delta g_x = \omega_x g_x$):

$$\left. \begin{aligned} \sum_\delta (A_{x, \delta} - A_{x-\delta, \delta}) - \text{h.c.} &= 0 \\ A_{x, \delta} &= g_{x+\delta} g_x^{-1} \end{aligned} \right\}$$

or in a continuum version:

$$\begin{aligned}A_\mu &= (\partial_\mu g) g^{-1} \\ \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] &= 0 \\ \partial_\mu A_\mu &= 0\end{aligned}$$

This is to be compared with (7.27) and (7.29).

Although we have derived this analogy from the classical equations of motion it persists on the quantum level as well. The classical equations of motion get transcribed in quantum theory into equations for correlations functions. The standard way to obtain these equations is to consider an infinitesimal change of variables in a functional integral (described by (7.12) in our case) and to apply the condition that the integral remains unchanged. In this way one easily obtains a Schwinger-like chain of equations in our loop space.

That will be done in the next section. Before coming to it let us sum up what we know about the connections between gauge fields and chiral fields. We have established above that gauge fields are chiral fields defined on the loop space. Unfortunately, up to now it has not

been possible to extract any practical, dynamical information from this fact. This mainly has to do with the difficulties we experience in treating equations in loop space or, what is more or less the same, with string dynamics. These problems we shall discuss in Chapter 9. I anticipate an enormous progress in this field in the near future.

On the other hand, there are several, more pragmatic, similarities between the theories under discussion. Asymptotic freedom, instantons and also large N behaviour (see Chapter 8) and the "chiral" form of the duality equations (see Chapter 6) make chiral theories an excellent theoretical laboratory for the study of gauge fields.

In the next section we shall study the dynamics of loops in a very imperfect way which is all that is known to-day. Still, it will have important consequences for the large N -expansion, examined in Chapter 8.

There are many obvious but unanswered questions concerning our subject. For example, does the similarity of equations (7.31) and (7.21) imply any similarities in the strong coupling expansions for these theories? In particular, it seems probable that scattering small bits of string (which, according to Chapter 3 are elementary excitations in the gauge case) is precisely the same as scattering of point-like excitations of a chiral field. This could be checked in the frame of the strong coupling expansion, but never has been. Another problem is to derive asymptotic freedom directly in the loop space, following the pattern we had for chiral fields in Chapter 2.

Another set of questions is the following. We derived the loop representation starting from local gauge fields. However, another view is possible (and seems even more natural to me). Let us suppose that the primary quantities are the fields on the loop space. Then we can consider gauge fields as something like Goldstone fields on the loop space, efficiently described by the chiral equations of motion (7.29). This point of view leads to many new options. For example we can consider, instead of Ψ fields which belong to a gauge group G , fields belonging to different coset spaces G/H . These seem to be interesting objects, though I do not know either their local representation or their role (if any) in Nature.

14.7.2 7.2 Quantum Theory of Loops

It appears more practical to use a set of equations slightly different from (7.29). It exploits the fact that, according to the transformation law (7.2), only $\varphi(C) = \text{Tr } \Psi(C)$ is a gauge-invariant quantity. Therefore the only quantities which make sense in quantum theory are:

$$W(C) = \langle \varphi(C) \rangle; \quad W_2(C, \tilde{C}) = \langle \varphi(C) \varphi(\tilde{C}) \rangle$$

etc. Using formulas (7.24), (7.25) we derive:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 W(C)}{\delta x_\mu(s) \delta x_\mu(s')} &= \left\langle \text{Tr } P \left(F_{\mu\nu}(x(s')) F_{\mu\lambda}(x(s')) \exp \left(\int A_\mu dx^\mu \right) \right) \dot{x}_\nu(s) \dot{x}_\lambda(s') \right. \\ &\quad \left. + \delta(s - s') \dot{x}_\nu(s) \left\langle \text{Tr } P \left(\nabla_\mu F_{\mu\nu}(x(s)) \exp \left(\int A_\mu dx^\mu \right) \right) \right\rangle \right\end{aligned}$$

Let us now introduce a local derivative:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2(s)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dt \frac{\delta^2}{\delta x_\mu(s + t/2) \delta x_\mu(s - t/2)}$$

which picks up δ -like terms in the second functional derivative. If the quantum theory is regularized, then the first term in (7.34) does not contain singularities as $s \rightarrow s'$. From this we infer that:

$$\frac{\partial^2 W(C)}{\partial x^2(s)} = \left\langle \text{Tr} \left(P \left(\nabla_\mu F_{\mu\nu}(x(s)) \exp \left(\int A_\mu \dot{x}_\mu ds \right) \right) \dot{x}_\nu \right) \right\rangle$$

For classical fields the r.h.s. of (7.36) would be zero. In the quantum case it is finite and calculable. To find it we consider the following (noninvariant) functional integral:

$$\int \mathcal{D}A_\mu \exp \left(\frac{1}{2e_0^2} \int \text{tr} F_{\mu\nu}^2 d^4x \right) \left(\text{P exp} \left(\int_0^{2\pi} A_\mu dx^\mu \right) \right)$$

and change variables by $A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu$. There are two effects coming from this change, which must cancel each other. The first is the variation of the action, proportional to $\nabla_\mu F_{\mu\nu}$, while the second is the variation of the phase factor. The cancellation condition gives the identities:

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{1}{e_0^2} \nabla_\mu F_{\mu\nu}^a(z) \Psi(x, x) \right\rangle &= \oint_C dy_\nu \delta(z - y) \langle \Psi(x, y) \lambda^a \Psi(y, x) \rangle \\ \left\langle -\frac{1}{e_0^2} \text{Tr} (\nabla_\mu F_{\mu\nu}(z) \Psi(x, x)) \right\rangle &= \oint_c dy_\nu \delta(z - y) \langle \text{Tr} \lambda^a \Psi(x, y) \lambda^a \Psi(y, x) \rangle \end{aligned}$$

Here the index a labels the generators λ^a of our Lie algebra and $\Psi(x, y)$ is a piece of the phase factor for the part of the contour C connecting x and y ($x, y \in C$). For the $\text{SU}(N)$ group, (7.38) is further simplified through the use of the identity:

$$\sum_a \lambda_{\alpha\beta}^a \lambda_{\gamma\delta}^a = \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{N} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}$$

We have:

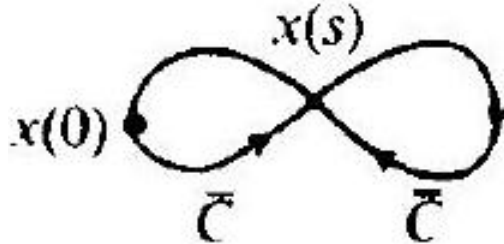
$$\begin{aligned} &\left\langle -\frac{1}{e_0^2} \text{Tr} (\nabla_\mu F_{\mu\nu}(z) \Psi(x, x)) \right\rangle \\ &= \oint dy_\nu \delta(z - y) \\ &\quad \times \left\{ \langle \text{Tr} \Psi(x, y) \text{Tr} \Psi(y, x) \rangle - \frac{1}{N} \langle \text{Tr} \Psi(x, y) \Psi(y, x) \rangle \right\} \end{aligned}$$

Substitution of (7.40) into (7.36) gives

$$\frac{\partial^2 W(C_{xx})}{\partial x^2(s)} = -e_0^2 \oint \delta(x(s) - y) \left\{ W(\bar{C})W(C) - \frac{1}{N} W(\bar{C}, C) \right\} \dot{x}_\mu(s) dy_\mu$$

which is the first equation in the Schwinger-like chain.

This equation requires some explanations. First of all, $C, \bar{C}$ and $\bar{C}$ are defined as following. The loop C_{xx} starts and terminates at the point $x = x(0)$. If this loop does not have a self-intersection at the point $x(s)$ then the r.h.s. of (7.41) will be zero because of the δ -function. If it does, then the point y splits the loop onto two closed contours $\bar{C}$ and $\bar{C}$:



A very important point, not to be forgotten, is that eq. (7.41) was derived in an unrenormalized but regularized version of the theory. So the δ -function in (7.41) must be somehow

smearing, and ϵ , entering in (7.35) must be taken much less than the smearing length. The equation itself corresponds to a particular cut-off of the gauge theory. It may be untrue for a different cut-off. All this is quite unpleasant, It would be much nicer to have an equation for the finite, renormalized $W(C)$.

Unfortunately this equation is not known, and we are unable at present to remove the scaffolding (the regularization) from our construction.

Nevertheless, equation (7.41) is meaningful. It reproduces perturbation theory and in the large N limit, presents a closed equation which sums up all planar Feynman diagrams (see the next chapter). Here we shall show how the first order of perturbation theory for $W(C)$ arises from equation (7.41).

For this, let us consider the following ansatz for $W(C)$:

$$W(C) = 1 + \oint_{s_1 < s_2} \sum_{\mu\nu} (x_1, x_2) dx_1^\mu dx_2^\nu \\ + \oint_{s_1 < s_2} \oint_{s_2 < s_3} \Gamma_{\mu\nu\lambda}(x_1, x_2, x_3) dx_1^\mu dx_2^\nu dx_3^\lambda + \dots$$

This ansatz is true for any $W(C)$ which can be represented as an average of the loop factor (7.1), with:

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda\dots}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \langle \text{Tr } A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\lambda(x_3) \dots \rangle$$

In fact, it can be shown that this ansatz is true for more or less any functional $W(C)$, being an analogue of the Taylor expansion in loop space. To see how the perturbation theory arises let us find $\partial^2 W_2(C)/\partial x^2(s)$ where W_2 is the second term in (7.43). We have:

$$\frac{\delta W_2}{\delta x_\mu(s)} = \int ds_1 ds_2 \dot{x}_\rho(s_2) \{ \dot{x}_\lambda(s_1) \partial_{1,\mu} \Gamma_{\lambda\rho}(x_1(s_1), x_2(s_2)) \delta(s - s_1) \\ + \delta_{\lambda\mu} \dot{\delta}(s_1 - s) \Gamma_{\lambda\rho}(x(s_1), x(s_2)) \} \\ = \dot{x}_\lambda(s) \int ds_2 \dot{x}_\rho(s_2) (\partial_{1,\mu} \Gamma_{\lambda\rho}(x_1(s), x_2(s_2)) \\ - \partial_{1,\lambda} \Gamma_{\mu\rho}(x_1(s), x(s_2)))$$

Next we have to take the second derivative $\delta/\delta x_\mu(s')$ and to pick out the terms containing $\delta(s - s')$. That gives:

$$\frac{\delta^2 W_2}{\delta x_\mu(s) \delta x_\mu(s')} = \int (\partial_1^2 \Gamma_{\lambda\rho} - \partial_{1\lambda} \partial_{1\sigma} \Gamma_{\sigma\rho}) \delta(s - s') \dot{x}_\lambda(s) \dot{x}_\rho(s_2) ds_2^- \\ + \text{terms, which do not contain } \delta(s - s')$$

Thus:

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2(s)} = \int \partial_1^2 \Gamma_{\lambda\rho}(x(s), x(t)) - \partial_{1,\lambda} \partial_{1,\sigma} \Gamma_{\sigma\rho}(x(s), x(t)) \dot{x}_\lambda(s) \dot{x}_\rho(t) dt$$

We must substitute this result into the r.h.s. of (7.41) replacing $W(C)$ in the l.h.s. by 1. This gives the equation for $\Gamma_{\mu\nu}$:

$$\partial_1^2 \Gamma_{\lambda\rho}(x, x') - \partial_{1,\lambda} \partial_{1,\sigma} \Gamma_{\sigma\rho}(x, x') \\ = -e_0^2 \delta_{\lambda\rho} \delta(x - x') + \frac{\partial}{\partial x'_\rho} \phi_\lambda(x, x')$$

Here ϕ is an arbitrary function which is needed to make (7.48) solvable, and which it is possible to add, since

$$\oint dx'_\rho \frac{\partial}{\partial x'_\rho} \phi_\lambda = 0$$

The solution of (7.48) has the form:

$$\Gamma_{\lambda\rho}(x, x') = \frac{e_0^2}{4\pi^2} \frac{\delta_{\lambda\rho}}{(x - x')^2} + \frac{\partial h_\rho(x, x')}{\partial x_\lambda}$$

where h_ρ is arbitrary. This arbitrariness does not appear in $W_2(C)$ itself which has the form:

$$W_2(C) = \frac{e_0^2}{8\pi^2} \oint \frac{dx_\mu dx'_\mu}{|x - x'|^2} = - - c$$

The formula (7.50) is precisely the first nontrivial perturbative contribution to $W(C)$.

In order to obtain higher orders this contribution has to be substituted into the r.h.s. of (7.41). After some complicated combinatorics (which can be found in A. A. Migdal (1977)) one finds, order by order, the standard Feynman diagrams contributing to $W(C)$. It is remarkable that no a priori gauge fixing is needed, since (7.41) is an equation for gauge invariant quantities. Ghost diagrams in the higher orders appear automatically in the process of iteration (A. A. Migdal (1977)).

So we conclude that in spite of some dubious operations performed in deriving (7.41), namely separating from the complete derivative $\delta^2/\delta x_\mu(s)\delta x_\mu(s')$ the part containing $\delta(s - s')$ only, which we called $\partial^2/\partial x^2(s)$, we did not lose any information. It appears that in the frame of the general ansatz (7.43), knowledge of $\partial^2/\partial x^2(s)$ is sufficient for the reconstruction of $W(C)$. Again, we have to warn the reader that this is true only in an unrenormalized but regularized version of the theory in which the coefficients in (7.43) do not have singularities at coincident points. Renormalized quantities, while being finite, are singular in these cases and that makes our definition of $\partial^2/\partial x^2(s)$ inoperative. I believe that there should exist some kind of renormalized equations but they have not yet been found.

What is the use of loop equations, like (7.41)? Their main purpose is to provide us with a description of gauge fields in terms of their natural elementary excitations. We have seen in Chapter 3, that in the confinement phase those excitations are closed strings. In general these strings interact with each other. In some cases, in particular in the large N limit, they must become free, as will be shown in Chapter 8.

The loop equation (7.41) is aimed at choosing from among possible free string theories the one describing or being described by the gauge fields. This task does not yet have a final solution, although considerable progress has been achieved.

Our next step will be to consider the large N approximation and to prove that in this limit particles in chiral theories and strings in gauge theories become free.

14.8 The Large N Expansion

The number N is the only free parameter both in chiral and gauge theories, because in the continuum limit the coupling constant disappears through dimensional transmutation (remember that the strong coupling expansion referred to the lattice theory and does not give a continuum theory in any finite order). It is very tempting therefore to try to make a $1/N$ expansion. This will be done in this chapter. As before, our main intention will be to improve our qualitative understanding of dynamics by means of this approximation.

14.8.1 8.1O(N) σ -Model

This case is the simplest one. Let us consider the functional integral in the form:

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}m(x) \left(\prod_x \delta(\mathbf{n}(x)^2 - 1) \right) \exp \left(-\frac{1}{2g_0^2} \int (\partial_\mu n)^2 d^2x \right) \\ &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{D}\lambda(x) \int \mathcal{D}m(x) \exp \left(-\frac{1}{2g_0^2} \int ((\partial_\mu n)^2 + \lambda(n^2 - 1)) d^2x \right) \end{aligned}$$

Here we have replaced the functional δ -function by its integral representation, involving the Lagrange multiplier $\lambda(x)$:

$$\begin{aligned} \prod_x \delta(\mathbf{n}(x)^2 - 1) &= \prod_x \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\lambda(x) \exp \{ \lambda(x) (\mathbf{n}^2(x) - 1) \} \\ &= \int \mathcal{D}\lambda(x) \exp \left\{ \int \lambda(x) (n^2 - 1) d^2x \right\} \end{aligned}$$

(The functions $\lambda(x)$ in (8.2) and (8.1) differ by an irrelevant factor $1/2g_0^2$.) We have called the field $\lambda(x)$ a "Lagrange multiplier" since in the classical limit, when we have to minimize the $O(N)$ action with the constraint $n^2 = 1$, it is just that.

The representation (8.1) is convenient, since the integral over n is Gaussian and can be performed in a standard fashion. We have:

$$Z = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{D}\lambda(x) \exp \left\{ \frac{1}{2g_0^2} \int \lambda(x) d^2x - \frac{N}{2} \log \det \left\| -\partial^2 + \lambda(x) \right\| \right\}$$

where N is the number of components of the field n . The factor N appears in (8.3) since each component enters independently in (8.1). The second term in (8.3) has the Feynman graph representation:

$$\log \det \left\| -\hat{i}^2 + i \right\| = 0 + \xi + \xi + \gamma + \cdots ,$$

in which the wavy line corresponds to the external λ -field and the propagators of the n -field, represented by solid lines, are $1/p^2$. This expansion is formal, since for $\mathcal{T} = 2$ it is both infrared and ultraviolet divergent. The ultraviolet divergence has to be cut off by hand (or, better to say, by a lattice), while the infrared one will be taken care of by the theory itself.

If we take N to be large, then since it enters the exponent (8.3), we have reasons to expect that the saddle point approximation will be applicable. This is indeed the case. To show this let us first compute the variation of the action in (8.3) with respect to λ . We get:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2g_0^2} &= \frac{N}{2} \frac{\delta}{\delta \lambda(x)} \log \det \left\| -\partial^2 + \lambda(x) \right\| \\ &= \frac{N}{2} G(x, x; \lambda) \end{aligned}$$

Here we have introduced the Green function:

$$G(x, x') = \langle x' | (-\partial^2 + \lambda)^{-1} | x \rangle$$

The last equality follows from the relation

$$\delta \log \det A = \delta \text{Tr} \log A = \text{Tr} A^{-1} \delta A$$

or else can be checked from (8.4). The meaning of equation (8.5) becomes transparent if we notice that according to (8.1):

$$\begin{aligned}\langle n_i(x)n_j(y) \rangle &= Z^{-1} \int \mathcal{D}\lambda \int \mathcal{D}n \exp \left(-\frac{1}{2g_0^2} \int \{(\partial n)^2 + \lambda(n^2 - 1)\} d^2x \right) \\ &\quad \times n_i(x)n_j(y) \\ &= g_0^2 \delta_{ij} \frac{\int \mathcal{D}\lambda e^W G(x, y; \lambda)}{\int \mathcal{D}\lambda e^W} \\ W &= \frac{1}{2g_0^2} \int \lambda(x) d^2x - \frac{N}{2} \text{Tr}_x \log(-\partial^2 + \lambda)\end{aligned}$$

If the λ -integral is to be approximated by the saddle point we obtain:

$$\langle n_i(x)n_j(y) \rangle = g_0^2 \delta_{ij} G(x, y; \lambda_*(z))$$

where λ_* is the saddle point value of λ . From here we see that (8.5) is nothing but the condition $\langle \mathbf{n}^2(x) \rangle = 1$.

Let us now solve the equation (8.5). If we guess that its solution is homogeneous in x -space, we can verify this conjecture by passing to the momentum representation in (8.5):

$$\begin{aligned}G(x, x'; \dot{\lambda}) &= \int \frac{d^Q p}{(2\pi)^Q} \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2 + \dot{\lambda}} \\ 1 &= N g_0^2 G(x, x; \dot{\lambda}) = N g_0^2 \int \frac{d^Q p}{(2\pi)^Q} \frac{1}{p^2 + \dot{\lambda}}\end{aligned}$$

As is to be expected, this equation reflects a qualitative difference between $\mathcal{R} = 2$ and $\mathcal{D} > 2$. For $\mathcal{D} = 2$ we have:

$$\begin{aligned}1 &= \frac{N g_0^2}{4\pi} \log \frac{\Lambda^2}{i} \\ i &= \Lambda^2 \exp \left(-\frac{4\pi}{N g_0^2} \right)\end{aligned}$$

(where Λ is the momentum cut-off and $\sqrt{\lambda}$ is a physical mass or inverse correlation length as is seen from (8.9) and (8.8)). This formula agrees with (2.49), the only difference being that $N - 2$ in the "exact" formula (2.49) is replaced by N in (8.10). So, we see that for all values of g_0^2 we have the same phase, with a finite correlation length. It would be quite easy to repeat the derivation in a lattice version of the theory and to see explicitly how the strong coupling expansion connects without a phase transition to the weak coupling region, giving (8.10).

For $\mathcal{D} > 2$, the situation is different. We have a critical coupling $g_{0,\text{cr}}^2$, defined by:

$$1 = N g_{0,\text{cr}}^2 \int \frac{d^{\mathcal{D}} p}{(2\pi)^{\mathcal{D}} p^2} \sim N g_{0,\text{cr}}^2 \frac{\Lambda^{\mathcal{D}-2}}{\mathcal{D}-2}$$

If $g_0^2 > g_{0,\text{cr}}^2$ then the equation (8.9) has a solution with $\lambda > 0$ and we are in the strong coupling phase. The theory has a continuum limit as $g_0^2 \rightarrow g_{0,\text{cr}}^2 + 0$ as can be seen by rewriting (8.9) using (8.11) as:

$$\begin{aligned}1 &= N g_0^2 \int \frac{d^{\mathcal{W}} p}{(2\pi)^{\mathcal{W}} p^2} - N g_0^2 \int \frac{d^{\mathcal{W}} p}{(2\pi)^{\mathcal{D}}} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + \lambda} \right) \\ &= \frac{g_0^2}{g_{0,\text{cr}}^2} - N g_0^2 \int \frac{d^{\mathcal{W}} p}{(2\pi)^{\mathcal{W}}} \frac{\lambda}{p^2 (p^2 + \lambda)}\end{aligned}$$

For $2 < \mathcal{D} < 4$ the integral in (8.12) is convergent and proportional to $\lambda^{(\mathcal{D}/2)-1}$. Therefore:

$$m^2 \equiv \lambda = \text{const} \Lambda^2 \left(\frac{g_0^2 - g_{0,\text{cr}}^2}{g_{0,\text{cr}}^2} \right)^{2/(\mathcal{D}-2)}$$

We achieve the continuum limit by taking $g_0^2 \rightarrow g_{0,\text{cr}}^2$ and $\Lambda \rightarrow \infty$ so that $m^2 = \lambda$ remains fixed. We see also, that while the value of $g_{0,\text{cr}}^2$ depends on the cut-off and is not at all universal the "critical exponent" $2/(\mathcal{D} - 2)$ in (8.13) is independent of the short distance dynamics. As we explained in Chapter 1 this is quite a general situation.

If we take $g_0^2 < g_{0,\text{cr}}^2$ something goes wrong with equation (8.9)-it does not have solutions any more. That means that we have lost the saddle point. To understand what happens in this case we have to recall that originally we had an integral over λ . If we introduce the Fourier expansion:

$$\lambda(x) = \sum_q \lambda_q e^{iqx}$$

then

$$\mathcal{D}\lambda(x) = \left(\prod_{q \neq 0} d\lambda_q \right) \cdot d\lambda_0$$

In the large N limit all $q \neq 0$ integrations are irrelevant (we shall prove this later in this Section) and the integral over λ has the form:

$$Z = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\lambda_0 \exp \left\{ V \left(\frac{\lambda_0}{2g_0^2} - \frac{N}{2} \int_{|p| < \Lambda} \frac{d^{\mathcal{W}} p}{(2\pi)^{\mathcal{E}}} \log(p^2 + \lambda_0) \right) \right\}$$

which is obtained by the substitution $\lambda(x) = \lambda_0 = \text{const.}$ into (8.3); V here is the volume of the system. In the complex plane of the λ_0 variable we have a cut from the logarithm in (8.16) which goes from $-\infty$ to zero, and a saddle point when $g_0^2 > g_{0,\text{cr}}^2$. For $g_0^2 < g_{0,\text{cr}}^2$ this saddle point disappears under the cut. Therefore, in order to obtain the dominant contribution to the integral, our contour for $g_0^2 > g_{0,\text{cr}}^2$ must be taken to pass through the saddle point and the integrand is strongly concentrated near this saddle point. This situation we have analysed above.

For $g_0^2 < g_{0,\text{cr}}^2$ the contour can be deformed so that it goes around the cut. In the limit of infinite volume the dominant contribution comes from the origin of the cut at $\lambda_0 = 0$. In order to estimate the most important values of λ_0 , let us notice that the singular part of the integral in (8.16) is given by:

$$\int d^{\mathcal{D}} p \log(p^2 + \lambda) = \text{const.} \lambda^{\mathcal{D}/2} + \text{regular terms}$$

From this we conclude that the essential λ_0 is defined by:

$$\begin{aligned} NV\lambda_0^{\mathcal{D}/2} &\sim 1 \\ \lambda_0 &\sim (NV)^{-2/\mathcal{D}} \rightarrow 0 \\ V &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

The conclusion we reach is that for $g_0^2 < g_{0,\text{cr}}^2$ the quantity λ_0 has to be zero in the infinite volume limit, and we have massless particles in our system. That implies that the symmetry has been broken as we go to $g_0^2 < g_{0,\text{cr}}^2$ and these massless particles are Goldstone's. We postpone direct verification of this fact and proceed to consider corrections to the naive saddle point picture.

We have to take into account that the field $\lambda(x)$ acquires a vacuum expectation value in the phase with unbroken $O(N)$ symmetry (the only existing one for $\mathcal{D} \leq 2$). In the leading approximation it is given by (8.10). Successive approximations will change this value by an amount $\sim 1/N$. In order to develop a general formalism we must not fix $\langle \lambda(x) \rangle = \lambda$ from the beginning, but keep it arbitrary while performing integrations over $\{\lambda_{q \neq 0}\}$. After that we shall obtain an effective action

which depends on λ . Eventually we have to take the minimum in λ or, equivalently, impose the condition $\langle \mathbf{n}^2(x) \rangle = 1$.

Let us see how this programme works. The action for $\{\lambda_{q \neq 0}\}$ is given by:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \mu^2 + i\alpha(x), \quad \alpha_{q=0} = 0 \\ W(\lambda) &= -\frac{N}{2} \text{Tr} \log [-\partial^2 + \mu^2 + i\alpha(x)] \\ &= \frac{N}{2} W_0 [\mu^2] - \frac{N}{2} \left\{ \frac{1}{2} \int \Pi(q) \alpha_q \alpha_{-q} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} - \frac{1}{3} \int \Gamma_{q_1 q_2 q_3} \right. \\ &\quad \left. \times \alpha_{q_1} \alpha_{q_2} \alpha_{q_3} \delta(q_1 + q_2 + q_3) \frac{d^2 q_1 d^2 q_2 d^2 q_3}{(2\pi)^4} + \dots \right\} \\ &= \frac{N}{2} W_0 [\mu^2] - \frac{1}{2} \int \Pi(q) \beta_q \beta_{-q} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{N}{2} \right)^{-1/2} \int \Gamma_{q_1 q_2 q_3} \beta_{q_1} \beta_{q_2} \beta_{q_3} \delta(q_1 + q_2 + q_3) \frac{d^2 q_i}{(2\pi)^4} + \dots \end{aligned}$$

Here:

$$\begin{aligned} \beta &= \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \alpha \\ \Pi(q) &= -\Gamma^2 = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 + \mu^2)((q-k)^2 + \mu^2)} \\ \Gamma_{q_1 q_2 q_3} &= \left. \right\}_{q_1}^{q_2} \right\}_{q_3}^{q_2}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

We see, that the effective nonlinearity in (8.19) contains $N^{-1/2}$ factors, and that perturbation theory for this β -field has a good parameter $1/\sqrt{N}$. The quantity μ^2 is to be adjusted at the very end of calculation. To give an example, we see from (8.19) that up to the order $1/\sqrt{N}$ we have:

$$\begin{aligned} V^{-1} W [\mu^2] &= \frac{1}{2} N V^{-1} W_0 + V^{-1} W_1 + \frac{1}{\sqrt{N}} V^{-1} W_2 + \dots \\ &= \left\{ \frac{\mu^2}{2g_0^2} - \frac{N}{2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \log(p^2 + \mu^2) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \log \Pi(q^2) + O(N^{-1/2}) \end{aligned}$$

The second term in (8.21) comes from the fluctuations of the Lagrange multiplier.

At this point we encounter some trouble. From (8.19) (8.20) we see that the propagator for the β -field is

$$\mathcal{D}(q^2) = \frac{1}{\Pi(q^2)} \xrightarrow{q \rightarrow \infty} \frac{2\pi q^2}{\log(q^2/\mu^2)}$$

This rising propagator introduces some power-like divergences in Feynman graphs and this is clearly unphysical. Let us locate the origin of this trouble and explain how to avoid it. First of all we see that these divergences persist even in the $\mathcal{D} = 1$ system which is the quantum mechanics of the n -field. Quantum mechanics is a finite theory, hence we have done something wrong.

To locate the difficulty let us consider instead of the n -field with its rigid constraint $\mathbf{n}^2 = 1$ a theory with a Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu n)^2 + \frac{g}{4} (n^2 - 1)^2$$

which in the limit $g = \infty$ goes over to the theory of the n -field. If we introduce a λ -field, we replace (8.23) by the Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu n)^2 + \frac{1}{2} \lambda (n^2 - 1) - \frac{\lambda^2}{2g}$$

and we shall have the same large N expansion as above except that $\mathcal{D}(q^2)$ will be replaced by:

$$\mathcal{D}(q^2) = \frac{1}{\Pi(q^2) + (2/Ng)}$$

Since $\Pi(q^2) \sim \log(q^2/\mu^2)/q^2$, this new propagator does not rise at $q^2 \rightarrow \infty$ and we shall have no power divergences. In particular, quantum mechanics will be finite, as it should be.

In order to understand the origin of the power divergences, let us stick to the case of quantum mechanics ($\mathcal{D} = 1$). The potential:

$$V = \frac{g}{4} (n^2 - 1)^2$$

has the tendency, as $g \rightarrow \infty$, to confine our particle to the surface of the sphere. However, owing to the uncertainty principle, attempting such confinement leads to large kinetic energy. Therefore, the energy levels of the particle are shifted to infinity; that is, we have zero point energy of the order of $\sqrt{g}$ and radial excitations of the same order. But, on top of this large vacuum energy we have finite angular excitations, labelled by angular momentum. In the limit $g \rightarrow \infty$ we have to subtract an infinite constant from the ground state energy, and after that the theory will be finite.

Returning to our problem we are led to expect that power divergences caused by (8.22) will be removed if we renormalize the mass of elementary excitations. A convenient procedure is the following. Let us introduce a quantity:

$$m^2 = G^{-1}(p = 0)$$

and self-energy part:

$$-\sum(p) = \frac{\int_{(n)}^\Omega}{n} + \frac{\sqrt{\xi}}{(n)} + \dots$$

The Green function is defined by:

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + m^2 + \Sigma(p^2) - \Sigma(0)}$$

While $\Sigma(p^2)$ contains power divergences, it is easy to see that $\Sigma(p^2) - \Sigma(0)$ does not. Let us estimate as an example the first term in (8.28) (we consider $p \gg m$):

$$\begin{aligned}
\Sigma(p) - \Sigma(0) &= \frac{2}{N} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2 \Pi(k^2)} \left(\frac{1}{(p-k)^2} - \frac{1}{k^2} \right) \\
&\approx \frac{2}{N} \int_{\rho < |k| < \Lambda} \frac{k^2 d^2 k}{2\pi \log(k^2/m^2)} \left(\frac{4(p \cdot k)^2}{k^6} - \frac{p^2}{k^4} \right) + \text{finite terms} \\
&= \frac{p^2}{N} \log \{ (\log \Lambda^2/m^2) / (-\log m^2/p^2) \} + \text{finite part}
\end{aligned}$$

We have obtained a strange double-log divergence. In order to interpret it, let us recall that the correlation function $\langle n(0)n(R) \rangle$ must not be finite after charge renormalization only, since, according to Chapter 2, we have to renormalize the n -field itself. In this chapter we have obtained the result:

$$\langle n(0)m(R) \rangle = \left(1 - \frac{N-2}{2\pi} g_0^2 \log R/a \right)^{(N-1)/(N-2)}$$

while in the leading $1/N$ approximation:

$$\begin{aligned}
\langle n(0)n(R) \rangle &= N g_0^2 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{e^{ipR}}{p^2 + m^2} \\
&= \frac{N g_0^2}{2\pi} \log \frac{1}{mR}
\end{aligned}$$

Let us compare these expressions. Since

$$ma = \exp \left(-\frac{2\pi}{N g_0^2} \right)$$

we have:

$$\frac{N g_0^2}{2\pi} \log \frac{1}{mR} = 1 - \frac{N}{2\pi} g_0^2 \log \frac{R}{a}$$

We see that in the leading approximation (8.32) matches with (8.31), owing to the fact that the "anomalous dimension" $(N-1)/(N-2) \rightarrow 1$. As we expand (8.31) in $1/N$, in the next order we shall get: $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\langle n(0)m(R) \rangle &= \left(1 - \frac{N-2}{2\pi} g_0^2 \log \frac{R}{a} \right) \left(1 - \frac{N-2}{2\pi} g_0^2 \log \frac{R}{a} \right)^{1/N-2} \\
&\simeq \left(1 - \frac{N-2}{2\pi} g_0^2 \log \frac{R}{a} \right) \left(1 + \frac{1}{N} \log \left(\frac{\log(1/mR)}{\log(1/ma)} \right) + \dots \right)
\end{aligned}$$

Equation (8.35) demonstrates how double logarithms arise in the $1/N$ expansion of the "exact" formula (8.31); and they are precisely those obtained in (8.30).

Finally, all that we have said implies that after mass renormalization (8.29) (which is essentially charge renormalization), and renormalization of the n -field, all terms in the $1/N$ expansion will be finite. This can be proved by standard methods, used in field theory.

It might have seemed strange that we needed to renormalize the field n , the scale of which is defined by $n^2 = 1$. As we see from (8.31) and (8.32) this happens because in $\langle \mathbf{n}(0)\mathbf{n}(R) \rangle$ the constraint is satisfied only after we take $R \leq a$ (a -being the lattice size) and finite isotropic correlations exists only at $R \gg a$. Therefore, the constraint could not be directly applied in the continuum limit. As we see from (8.32), the correlation of the original n -field in this limit contains the cut-off dependent factor

$$\frac{Ng_0^2}{2\pi} \sim \frac{1}{\log(1/ma)}$$

The other way to express the same thing is to notice that after integrating out high frequencies of our field we obtain an effective action for block spins, which are normalized differently from the original ones.

To sum up, after proper renormalizations, the $1/N$ expansion is perfectly defined. Its main advantage is that it explicitly describes continuum theory in the correct phase. In principle, there could be a phase transitions as we decrease N , but in the case of the $\mathbf{n}$ -field this does not happen. In the large N limit, the $\mathcal{D} = 2n$ -field appeared to be a theory of free massive particles. The scattering amplitudes, which are easily computed (see the next chapter), are of the order $1/N$.

Unfortunately, this simple picture is not true, as far as principal chiral fields and $\mathcal{D} = 4$ gauge fields are concerned. The first indication of the trouble comes from the formula (2.35) for the correlation function of the chiral field. In the limit $N \rightarrow \infty$ it reads

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(R) &= \left(1 - \frac{Ne_0^2}{4\pi} \log \frac{R}{a}\right)^{2(N^2-1)/N^2+1} \\ &\simeq \left(1 - \frac{Ne_0^2}{4\pi} \log \frac{R}{a}\right)^3 \sim \log^3 \frac{1}{mR}, \quad mR \ll 1 \end{aligned}$$

while the free Green function should behave as $\log(1/mR)$. We see that in contrast with the n -field, the field $g(x)$ does not become free in the large N limit. In the next section we shall try to understand why.

14.8.2 8.2 The Principal Chiral Field For $SU(N)$

Let us start by attempting the previous trick with the Lagrange multiplier. In this case our variables are complex matrices $g_{ab}(x)$. The partition function can be written as:

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_{a,b} \mathcal{D}g_{ab} \mathcal{D}g_{a,b}^* \prod_{a,b} \delta \left(\sum_c g_{ac} g_{bc}^* - \delta_{ab} \right) \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{e_0^2} \sum_{a,b} \int \partial_\mu g_{ab} \partial_\mu g_{ab}^* d^2x \right\} \\ &= \prod_{a < b} \int_{c+i\infty}^{c-i\infty} \mathcal{D}\lambda_{ab} \mathcal{D}\lambda_{ab}^* \exp \left(\frac{1}{e_0^2} \int \sum_a \lambda_{aa} d^2x \right) \int \mathcal{D}g_{ab} \mathcal{D}g_{ab}^* \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{e_0^2} \sum_{a,b} \int |\partial_\mu g_{ab}|^2 d^2x - \frac{1}{e_0^2} \int \lambda_{ab} g_{ac} g_{bc}^* d^2x \right\} \end{aligned}$$

Here we have introduced a Lagrange multiplier, which is in this case a Hermitian matrix (because gg^+ is Hermitian). It ensures that in (8.37) we integrate over unitary matrices only. So, strictly speaking, the model (8.37) describes the $U(N)$ and not the $SU(N)$ group. However, it is easy to see that in the product $U(N) = U(1) \otimes SU(N)$ the field corresponding to the $U(1)$ factor decouples and can be ignored.

As before, the Gaussian integral in (8.37) can be represented as a functional determinant. We have:

$$\begin{aligned}
Z &= \int \prod_{a \leq b} d^2 \lambda_{ab} \exp \left\{ \frac{1}{e_0^2} \sum_a \lambda_{aa} - N \operatorname{Tr} \log (-\partial^2 \delta_{ab} + \lambda_{ab}) \right\} \\
&\equiv \int \prod_{a \leq b} \mathcal{D} \lambda_{ab} e^{W(\lambda)}
\end{aligned}$$

(N appears here owing to the fact that we had a sum over c in (8.37)).

It now seems very natural to follow the same strategy as in the case of the n -field. Here, however, it leads to trouble. Let us demonstrate this fact and discuss possible ways out (at present the only way to overcome this problem is to expand its exact solution in $1/N$ -not very practical for generalizations).

It is natural to expect that λ_{ab} acquires a nonzero expectation value:

$$\langle \lambda_{ab} \rangle = \mu^2 \delta_{ab}$$

Therefore we expand:

$$\begin{aligned}
\lambda_{ab} &= \mu^2 \delta_{ab} + \frac{i}{\sqrt{N}} v_{ab} \quad \sum_a \int v_{aa} d^2 x = 0 \\
\frac{W}{V} &= \frac{1}{e_0^2} \sum_a \lambda_{aa} - N \operatorname{Tr} \log (-\partial^2 \delta_{ab} + \lambda_{ab}) \\
&= N \mu^2 / e_0^2 - N \operatorname{Tr} \log [(-\partial^2 + \mu^2) \delta_{ab} + i(N)^{-1/2} v_{ab}] \\
&= N \left(\frac{\mu^2}{e_0^2} - N \operatorname{Tr} \log (-\partial^2 + \mu^2) \right) - \frac{1}{2} \sum_q \Pi_{ab|cd}(q) v_{ab}(q) v_{cd}(-q) \\
&\quad + \frac{N^{-1/2}}{3} \sum_{k_1+k_2+k_3=0} \Gamma_{ab|cd|ef} v_{ab}(k_1) v_{cd}(k_2) v_{ef}(k_3) + \dots
\end{aligned}$$

The value of μ^2 has to be determined from the minimum of the effective action or else from the unitarity condition

$$\langle \operatorname{Tr} (g^+ g) \rangle = N$$

Up to now everything has mimicked precisely the consideration of Section 8.1. Now we come to the crucial difference. Namely, in spite of the $N^{-1/2}$ -factor before higher powers in v , the nonlinearity in (8.40) is absolutely important, because this smallness is compensated by summation over isotopic indices in Feynman diagrams. Let us prove this and simultaneously separate the relevant set of diagrams. According to (8.40):

$$\begin{aligned}
\Pi_{ab|cd}(q) &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 + \mu^2)((k+q)^2 + \mu^2)} \\
&\quad \times \frac{1}{2} (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \\
&\equiv \pi(q^2) \frac{1}{2} (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc})
\end{aligned}$$

(This follows from the matrix equation:

$$\begin{aligned}
 & \text{Tr} \log \left((-\hat{r}^2 + \mu^2) I + \iota \right) \\
 &= \text{Tr} \log (-\hat{r}^2 + \mu^2) + \text{Tr} \log \left(I + \frac{1}{\mu^2 - \hat{c}^2} v \right) \\
 &= \dots - \frac{1}{2} \text{Tr} \left(v \frac{1}{\mu^2 - \hat{c}^2} v \frac{1}{\mu^2 - \hat{c}^2} \right) + \dots
 \end{aligned}$$

where Tr is understood both in coordinate and isotopic indices).
 The propagator for the v -field is given by:

$$\langle v_{ab}(q) v_{cd}(-q) \rangle = \frac{1}{2} (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \frac{1}{\pi(q^2)}$$

The isotopic structure in (8.43) is conveniently represented by the picture

$$\langle v_{ab} v_{cd} \rangle = \frac{b-d}{a-c} + \frac{b}{a} X_c^d$$

where each line corresponds to a δ -symbol. Let us now consider the nonlinear correction to this propagator, coming from the cubic term in (8.40). The structure of Γ , obtained in the same way as in (8.42) is:

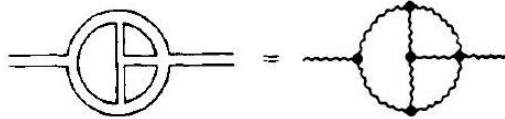
$$\Gamma_{ab|cd|ef} = N^{-1/2} \left(\frac{b}{a} \underbrace{d}_f + \text{permutations} \right)$$

(here single lines are ordinary propagators $\delta_{ab}((k^2 + \mu^2))$). Therefore, the first correction to $\langle v_{ab} v_{cd} \rangle$ contains a term which has the form:

$$\langle v_{ab} v_{cd} \rangle^{(1)} = N^{-1} \times \frac{b}{a} \bigcirc \frac{c}{d}$$

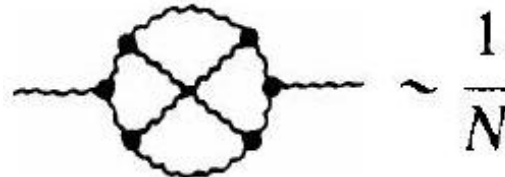
We see, that because of the summation over e , the diagram in (8.46) acquires a factor N which cancels the N^{-1} in front.

It is easy to check that such a cancellation will take place in any planar graph (i.e. a graph which does not have overlapping lines). For instance consider the diagram:



It contains four cubic and one quartic vertices. According to (8.42) it will come with a factor $(N^{-1/2})^4 N^{-1} = N^{-3}$. At the same time we have three windows in (8.47) each carrying a free isotopic index, thus giving a factor N^3 . The diagram doesn't contain any small factor as $N \rightarrow \infty$.

Nonplanar diagrams are small. For example:



This is easily checked by the above double line representation.

We have reached the conclusion that in order to find the large N limit for principal chiral fields one has to sum all planar diagrams for the field of the Lagrange multiplier.

Why is it that despite the large action W in (8.40), the saddle point approximation appears to be wrong? The reason is the following. The order of magnitude of the action W is N^2 (one N entering in front of the trace, and the other because the trace itself is of the order of N

). However, the number of variables λ_{ab} is also $\sim N^2$. Therefore corrections to the effective action coming from the fluctuations of λ_{ab} are $\sim N^2$, i.e. of the same order as the leading term. In the case of the n -field we had the effective action $\sim N$, but the number of variables was one. That explains why we have a good saddle point approximation for n fields and nothing similar for chiral ones. Together with the above discussion it also explains why the propagator has an extra $\log^2(1/mR)$ at $mR \ll 1$, according to (8.36). One can think that it comes from exponentiating $\log \log(1/mR)$ terms which are, according to (8.30), present in planar graphs.

At the same time, though the propagators are not free and infinitely many graphs contribute to them, the theory in the limit $N \rightarrow \infty$ describes free particles. To show this, let us estimate the scattering amplitude $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} \sim \bar{\square}\square + \overline{\square\square}L + \dots \sim 1/N$$

This is an important observation. It means that in the large N limit the field $g(x)$ is some complicated but almost local function of some free field, and that in fact we are dealing with a disguised free theory. If we were able to introduce this function explicitly, the perturbation theory in $1/N$ might become tractable.

This task has not been solved yet, although an exact solution of the $SU(N)$ -chiral field exists. The best we can do at the moment is to present some steps leading, so it seems, in the right direction. As the trouble was identified as the large number of integration variables, let us introduce the following decomposition:

$$\lambda = \omega \Lambda \omega^{-1} \quad \omega^+ = \omega^{-1}$$

with

$$\Lambda_{ab} = \Lambda_a \delta_{ab}$$

Substitution of (8.50) into (8.38) gives after some standard regauging:

$$\begin{aligned} \frac{W}{V} &= \frac{1}{e_0^2} \sum_{a=1}^N \Lambda_a - N \operatorname{Tr} \log \left[-(\partial_\mu \delta_{ab} + A_\mu^{ab})^2 + \Lambda_a \delta_{ab} \right] \\ A_\mu^{ab} &= (\omega^{-1} \partial_\mu \omega)^{ab} \end{aligned}$$

We have to replace the integral over λ_{ab} by one over Λ_a, ω :

$$\prod_{a,b} \mathcal{D}\lambda_{ab} = \prod_a \mathcal{D}\Lambda_a \mathcal{D}A_\mu^{ab} \delta(F_{\mu\nu}^{ab})$$

($F_{\mu\nu}^{ab}$ being the Yang-Mills field strength).

Let us suppose now that we manage somehow to integrate over A_μ^{ab} (it is here that the real difficulty lies). After that we obtain an effective action depending on Λ_a . This time the size of the action is N^2 , while the number of variables is of the order of N . Hence, we have just to minimize over Λ_a and not to bother about their fluctuations.

The integration over A_μ^{ab} is highly nontrivial, and we do not know how to perform it. A useful observation in this respect is that for equal $\Lambda_a = \Lambda$ the action W , being gauge invariant, depends on $F_{\mu\nu}$ only or, since $F_{\mu\nu} = 0$, does not depend on A_μ at all. So, if we assume that in the vacuum we have an a -independent condensate of $\{A_a\}$, we deduce that we are indeed dealing with a free field theory. At the same time, the Green functions of $g(x)$ depend on A_μ and are nontrivial. So, we have arrived qualitatively at the expected picture. A quantitative check of these guesses has not yet been done. There are no doubts, however, that the mystery of the large N limit for chiral fields will soon be resolved.

14.8.3 8.3 The $CP^{N-1}n$ -Model

Being unable to proceed further with principal chiral fields, we consider in this section another interesting model, namely the field which belongs to the coset space $CP^{N-1} = SU(N)/SU(N-1) \otimes U(1)$. It resembles the n -field in the respect that the large N expansion in this case is easy, with no planar graphs arising. On the other hand the model is topologically nontrivial and contains instantons. This gives the possibility to analyse effects of topological charge quantitatively. Another remarkable feature of this model, as we shall see, is the dynamical generation of gauge fields.

Complex projective space CP^{N-1} is defined by taking N -dimensional complex space and identifying in it the point $(z_1, \dots, z_N)$ with the point $(\lambda z_1, \dots, \lambda z_N)$ where $\lambda \neq 0$ is an arbitrary complex number. By choice of λ we can parametrize the points of CP^{N-1} by a unit sphere:

$$|z|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_N|^2 = 1$$

with the identification

$$z \sim e^{iy} z$$

The complex dimensionality of the resulting space is $N-1$. The Lagrangian of the $z(x)$ -field must be invariant under the gauge group:

$$z(x) \rightarrow e^{i\gamma(x)} z(x)$$

Only in this case does it describe a field belonging to CP^{N-1} and not to the N -dimensional complex sphere (8.53) (which would be the same as the $2N$ -dimensional n -field). Such a Lagrangian can be written as

$$S = \frac{1}{e_0^2} \int d^2x |(\partial_\mu - iA_\mu) z|^2$$

with A_μ being a new independent field which transforms as

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \gamma$$

It is quite obvious that (8.56) is invariant under simultaneous transformations (8.55) and (8.57). Also, since (8.56) does not contain a kinetic term for the A_μ -field this field can be eliminated (at least classically) by minimizing S . We have:

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = \frac{\delta}{\delta A_\mu} (|\partial_\mu z|^2 + i(z^* \partial_\mu z - (\partial_\mu z^*) z) A_\mu + A_\mu^2) = 0$$

From (8.58) we find:

$$A_\mu = -\frac{i}{2} (z^* \partial_\mu z - (\partial_\mu z^*) z)$$

This value of A_μ can be substituted back into (8.56), providing us with a nonlinear Lagrangian which depends on the z -field only. In the case $N=2$ these Lagrangians describe the $O(3)n$ -field, because CP^1 is equivalent to a two-dimensional sphere. A simple way to see this is based on the relation:

$$n = \begin{pmatrix} z^\dagger \sigma z & z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ l \end{pmatrix}$$

(σ are the Pauli matrices).

If $z^\dagger z = 1$, the n -vector satisfies the condition:

$$n^2 = 1$$

These formulas define a topologically interesting projection of the sphere S^3 in z -space onto a sphere S^2 defined by the n . It is called Hopf's bundle in mathematics. The aspect which is interesting for us now is that the Lagrangian (8.56) with the constraint (8.59) can be written as a Lagrangian for the n -field, with n given by the Hopf projection (8.60). This can be checked by a straightforward calculation, but instead one can argue that $(\partial_\mu n)^2$ expressed in terms of z gives a nonlinear Lagrangian, with two derivatives only, which is invariant under the gauge transformation (8.55) (because n does not change at all under this transformation). There is only one expression with such a property and hence

$$\frac{1}{4} (\partial_\mu n)^2 = |(\partial_\mu - iA_\mu) z|^2$$

$$n = z^\dagger \sigma z; \quad A_\mu = -\frac{i}{2} [z^\dagger \partial_\mu z - (\partial_\mu z^\dagger) z].$$

Another useful relation concerns the density of topological charge. We have:

$$\frac{1}{2} n [\partial_\mu n \times \partial_\nu n] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

which again can be expected on the basis of counting derivatives, tensor properties and gauge invariance (and after that checked by direct computation).

Let us stress again that the option of introducing a local, gauge invariant field n exists only in the case of CP^1 ; for CP^{N-1} with $N > 2$ it is not possible and we have to work with "charged" fields z . We shall investigate now the limit of large N which exhibits some interesting phenomena.

Let us write the partition function as:

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}^2 z(x) \mathcal{D} A_\mu(x) \delta(z^\dagger z - 1) \exp \left(-\frac{1}{e_0^2} \int |(\partial_\mu - iA_\mu) z|^2 d^2 x \right) \\ &= \int \mathcal{D} \lambda(x) \mathcal{D}^2 z(x) \mathcal{D} A_\mu(x) \exp \left\{ \frac{\int \lambda d^2 x}{e_0^2} - \frac{1}{e_0^2} \int \{ |(\partial_\mu - iA_\mu) z|^2 + \lambda |z|^2 \} d^2 x \right\} \\ &= \int \mathcal{D} \lambda(x) \mathcal{D} A_\mu(x) \exp \left\{ \frac{1}{e_0^2} \int \lambda(x) d^2 x - N \text{Tr} \log [-(\partial_\mu - iA_\mu)^2 + \lambda] \right\} \end{aligned}$$

In this case, in the large N limit the saddle point approximation works perfectly. In the vacuum:

$$\langle \lambda \rangle = m^2 \quad \langle A_\mu \rangle = 0$$

$$1 = N e_0^2 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 (p^2 + m^2)}$$

At this point, a new phenomenon occurs. The field A_μ originally had no kinetic energy and could have been eliminated from the Lagrangian. However, as we consider corrections to the $1/N$ expansion using an expansion of the determinant in (8.64) near the saddle point (8.65), we obtain in the quadratic approximation:

with:

$$W_{\text{II}} = \frac{N}{2} \left\{ \sum_q (\Pi(q) v(q) v(-q) + \Pi_{\mu\nu}(q) A_\mu(q) A_\nu(q)) \right\}$$

$$\begin{aligned}\Pi(q) &= \cdots = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 + m^2)((k+q)^2 + m^2)} \\ \Pi_{\mu\nu}(q) &= - \bigcirc - + = \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(2k+q)_\mu(2k+q)_\nu}{(k^2 + m^2)((k+q)^2 + m^2)} - 2\delta_{\mu\nu} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 + m^2)}\end{aligned}$$

As could have been expected on the basis of gauge invariance, $\Pi_{\mu\nu}$ satisfies the relation:

$$\begin{aligned}q_\mu \Pi_{\mu\nu}(q) &= 0 \\ \Pi_{\mu\nu}(q) &\underset{q \rightarrow 0}{\approx} \frac{\text{const.}}{m^2} (q^2 \delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)\end{aligned}$$

On substituting it into (8.66) we find that for large wavelengths the effective action contains a term:

$$W_{\text{II}} \sim \frac{N}{m^2} \int d^2x F_{\mu\nu}^2 + \cdots$$

This shows that, owing to quantum effects, the system acquires a real electromagnetic field, which actually was not present in the original lagrangian. The z -field has a charge proportional to m^2/N . Since the Coulomb energy for $\mathcal{D} = 2$ is infrared infinite, one expects that the quanta of the z -field will be confined by forming neutral pairs, like $z_i z_j$. It is possible to investigate the spectrum using the Shrödinger equation with a Coulomb potential, but we shall not dwell on this. Instead, we shall study topological effects in the large N limit. First of all, let us consider the average fluctuations of the topological charge given by:

$$\begin{aligned}V^{-1} \langle q^2 \rangle &\sim V^{-1} \left\langle \left(\int \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^2x \right)^2 \right\rangle \\ &= \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\lambda\rho} k_\mu k_\lambda \langle A_\nu A_\rho \rangle|_{k \rightarrow 0} \sim \frac{m^2}{N}\end{aligned}$$

As we have discussed before, it is exactly this quantity which is relevant for the resolution of the $U(1)$ -problem in QCD. Also, (8.70) implies that the ground state energy is θ -dependent for the action $S_\theta = S + i\theta q$. Namely, we have:

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial \theta^2} = \langle q^2 \rangle \neq 0$$

This implies that strong CP violation, due to the θ -term, is present in this model. To show this, let us note that the θ -term is represented in Feynman diagrams by a photon disappearing into the vacuum with the amplitude $\theta \epsilon_{\mu\nu} k_\nu|_{k \rightarrow 0}$. Since the photon propagator has a pole at $k^2 = 0$, this process contributes to the vacuum energy, as was demonstrated in (8.70). If we consider the Green function for neutral objects the first θ correction will be given by:

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)}(p_1, p_2) &= p_{p_2} p_1 - k|_{k \rightarrow 0} \\ &= \theta \Gamma_\mu(p_1, p_2; k) \cdot \frac{1}{k^2} \epsilon_{\mu\nu} k_\nu \Big|_{k \rightarrow 0}\end{aligned}$$

Here the wavy line corresponds to some neutral operator such as $z_i z_j$. The photon emission vertex $\Gamma_\mu(p_1, p_2; k)$ has to satisfy:

$$k_\mu \Gamma_\mu(p_1, p_2; k) = 0$$

We see from (8.72) that we should have terms at least linear in k in $\Gamma_\mu(p_1, p_2; k)$ (satisfying (8.73)) in order to get a nonzero result. It is easy to construct such terms:

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu(p_1, p_2; k) &\sim (\epsilon_{\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta}) \epsilon_{\mu\nu} k_\nu \\ &= p_{1\mu}(p_2 k) - p_{2\mu}(p_1 k)\end{aligned}$$

If we substitute this into (8.72) we obtain:

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)}(p_1, p_2) &\sim \theta(\epsilon_{\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta}) \frac{1}{k^2} \epsilon_{\mu\lambda} k_\lambda \epsilon_{\mu\nu} k_\nu \\ &= \theta \epsilon_{\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta}\end{aligned}$$

Presence of the $\epsilon_{\mu\nu}$ -containing terms in the two point function indicates breakdown of CP -invariance. As we have discussed before, the analogous phenomenon in QCD creates some unsolved problems.

Let us finally discuss to what extent the topological effects described above can be attributed to instantons. A naive estimate of the instanton contribution to Z would give a contribution of the order of e^{-N} . This happens because the instanton action for the CP^{N-1} action is finite and independent of N . At the same time, the coupling constant e_0^2 scales as $1/N$. Hence we obtain an exponentially small contribution. However, this naive argument is wrong. The one loop calculation of the determinant near a multi-instanton configuration reduces the partition function of the CP^{N-1} model to one of some generalized plasma, in the same way as in CP^1 (see Chapter 6). The correlation length which is established in this plasma is such that the entropy, coming from the fluctuations, compensates the smallness of the classical contribution. Roughly speaking the following happens. The one instanton contribution to the partition function has the form:

$$\begin{aligned}V^{-1} \log Z^{(1)} &\sim \int \frac{d\rho}{\rho^3} \exp\left(-\frac{2\pi N}{2\pi} \log(\mu\rho)^{-1}\right) \\ &= \int \frac{d\rho}{\rho^3} (\mu\rho)^N\end{aligned}$$

This formula is strictly correct only for $\mu\rho \ll 1$, thus indicating the exponential damping described above. However, if we consider the plasma and not a dilute gas approximation, the infrared divergence in (8.76) gets cut off at $\rho \sim \mu^{-1}$. It is true that at this point, where instantons dissociate (just as in the $O(3)$ case of Chapter 6) the one loop approximation is not applicable, and we have to deal with a strong coupling problem. By counting powers of N , we can easily show that multiloop corrections to the (8.76) would lead to the replacement:

$$\int \frac{d\rho}{\rho^3} (\mu\rho)^N \rightarrow \int \frac{d\rho}{\rho^3} (f(\mu\rho))^N$$

with some unknown f , which can be computed for small $\mu\rho$ loop by loop. The use of the approximation $f(x) \simeq x$ for $x \sim 1$ is only qualitatively justified.

So, the final conclusion is the following. At all values of N we have nontrivial topological fluctuations of the fields. They can be efficiently described by the $1/N$ approximation. There could be another, complementary, description in which they are represented as a collection of melted instantons. Unfortunately rigorous quantitative methods for the second description are not known at present. It seems that the one-loop WKB approximation is qualitatively sensible. But before the development of quantitative methods, the possibility of describing topological excitations in terms of instantons remains a semantic question.

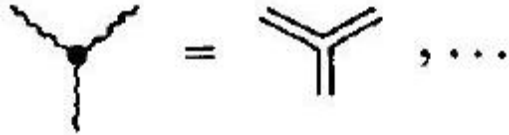
14.8.4 8.4 Non-Abelian Gauge Theory

This is the case most interesting for us. Its $1/N$ properties are to some extent similar to those of principal chiral fields. It is convenient to consider not $SU(N)$ but the $U(N) = SU(N) \otimes U(1)$ case. Here again, the $U(1)$ part trivially decouples. The field is described by antiHermitian matrices:

$$\begin{aligned}(A_\mu)_i^j &= -(A_\mu^*)_j^i; \quad i, j = 1, \dots, N \\ (F_{\mu\nu})_i^j &= \partial_\mu A_{\nu i}^j - \partial_\nu A_{\mu i}^j - A_{\mu i}^k A_{\nu k}^j + A_{\nu i}^k A_{\mu k}^j \\ S &= -\frac{N}{4e_0^2} \int \text{Tr } F_{\mu\nu}^2 \, d^4x \\ &= -\frac{N}{4e_0^2} \int (F_{\mu\nu})_i^j (F_{\mu\nu})_j^i \, d^4x\end{aligned}$$

Here we have changed the normalization for the bare coupling constant (in comparison with the previous chapters) so as to make the action have its natural scale N^2 . One of the N -factors come from the trace; the scale is natural since the Lagrangian (8.77) describes N^2 interacting gluons. Their vacuum fluctuations provide the energy or effective action $\sim N^2$, of the same scale as the classical action (8.77). Another check is the formula (2.68) of asymptotic freedom. For rescaled coupling it is N independent.

Just as before, in spite of the large factor in front of the action, the naive saddle point approximation does not work owing to the large number of fields, and the sum over all planar diagrams is needed. To see this one has to use a double line representation, as in Section 8.2:

$$\langle (A_\mu)_i^j (A_\nu)_k^l \rangle = \delta_i^l \delta_k^j \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y) \equiv \frac{i}{j} \rightarrow \overbrace{j}^i \frac{l}{k}$$


In a certain sense the gauge field is represented by a "quark" with index i and an antiquark with index j . Each "quark" line in (8.78) corresponds to a δ -symbol. Of course the word "quark" here is just a way of expressing the fact that the adjoint representation can be obtained as a product of two conjugate fundamental ones. We have not yet introduced quarks as physical particles.

With this notation, the logarithm of the partition function is represented by planar Feynman graphs:

$$\begin{aligned}\log Z &= \text{[single loop]} + \text{[figure-eight]} + \text{[double figure-eight]} + \dots \\ &= N^2 f(e_0^2)\end{aligned}$$

Let us check this. The first diagram contains the summation $\delta_i^j \delta_k^k = N^2$. The second one has three closed paths and hence the factor N^3 , but it is also proportional to the coupling constant, which in our notation, gives a factor e_0^2/N . In the same way it is checked that any planar diagram has the same magnitude, while any nonplanar one is suppressed by $1/N$. This has an important topological interpretation. Take the first diagram in (8.79), and imagine that it is a picture of two disks, lying one upon the other. The orientation of each disk is defined by the corresponding arrow on its boundary. Let us now glue together the "quark" and "anti-quark" lines. As a result we shall obtain a topological sphere. Any planar diagram has this

property-after gluing all the cuts we obtain a sphere. Now, according to (8.77), each vertex of a diagram carries a factor N , each propagator (or edge on our surface) contains N^{-1} , and each free face contains a closed loop giving N . Hence the total contribution is:

$$N^{V-E+F} \equiv N^\chi$$

where V, E, F are numbers of vertices, edges and faces, and χ is the Euler character. For a sphere $\chi = 2$ and we confirm (8.79). What is more interesting is that any nonplanar gluon corresponds to a handle attached to the sphere. For example:

$$\text{Sphere with cross} = \text{Circle with cross} \sim N^\chi = N^0$$

Here we have used the fact that a sphere with one handle is topologically a torus and has $\chi = 0$. Of course it is trivial to check (8.81) directly, and to prove that all graphs with one nonplanar gluon have a magnitude N^0 . That would just be the proof of the topological invariance of the Euler character.

We shall see below that this representation of planar graphs as a surface with edges is something more than a convenient trick. Namely, it is possible to interpret these surfaces as the world surfaces of colorelectric strings. But before plunging into this hard dynamical problem, let us proceed a little with kinematic power counting, which gives surprisingly much in this problem.

Let us assume that the pure gluon theory has the confining property. That means that its spectrum consists of colour singlets only. It follows from this assumption that in the $N = \infty$ limit all amplitudes of the theory contain only poles in momentum space, while all the cuts have an extra $1/N$. Also, the number of these poles is infinite. An important physical conclusion is that the sum of planar diagrams describes, under the assumption of confinement, an infinite number of stable particles with rising masses. Higher corrections in $1/N$ would turn these particles into narrow resonances.

In order to prove these statements, let us consider correlation functions of some singlet operator, say of:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{N} \text{Tr} (F_{\mu\nu}^2(x)).$$

By the use of the double line representation we count the leading power of N :

$$\langle \varepsilon \varepsilon \rangle = N^{-2} \sim N^{-2} N^2 \sim N^0$$

$$\langle \varepsilon \varepsilon \varepsilon \rangle = N^{-3} \Delta \sim N^{-3} N^2 \sim N^{-1} \quad \text{etc.}$$

Let us now suppose that we have a pole in the $\langle \varepsilon \varepsilon \rangle$ correlation function. It describes some one-particle state, $|r\rangle$. According to the first of equation (8.83) we have:

$$\langle \varepsilon \varepsilon \rangle = \text{Diagram with two external lines and a horizontal internal line labeled } r \text{ in the middle} + \dots \sim N^0$$

$$\langle 0 | \varepsilon | r \rangle \sim N^0$$

At the same time, the second of equations (8.83) gives:

$$\langle \varepsilon \varepsilon \varepsilon \rangle = \text{Diagram with three external lines meeting at a central vertex} + \text{Diagram with three external lines meeting at a central vertex with a different topology} + \dots \sim N^{-1}$$

From this we conclude that:

$$\langle 0 | \varepsilon | r_1 r_2 \rangle = \text{diagram} \sim N^{-1}$$

$$g = \text{diagram} \sim N^{-1}$$

These estimates show that we have no thresholds in the correlation functions as $N = \infty$, and that the width of resonant states scale as $g^2 \sim N^{-2}$. The same is the scale of the two particle scattering amplitude.

It is quite clear that the number of particles in the theory must be infinite and that their masses should increase. This follows from the representation:

$$\langle \varepsilon(p) \varepsilon(-p) \rangle = \sum_r \frac{g_r^2}{p^2 + m_r^2}$$

If we consider the limit $p^2 \rightarrow \infty$, then for a finite number of resonances we would get the behaviour $\sim p^{-2}$ from (8.87). However, as we know from asymptotic freedom, the true result contains powers of $\log^{-1}(p/m)$. This is compatible with (8.87) only in the case of an infinite number of poles.

This result is very natural from the point of view of string representations. Indeed, as we have seen in Chapter 3, in the confining phase elementary excitations are formed from closed strings of electric flux. Such closed string have infinitely many vibrational modes (we shall study them in Chapter 10), each of which corresponds to a particle and produces a pole in (8.87). It is easy to give a crude estimate for the number of states of a given mass. For a string of length L , the number of its configurations increases as e^{cL} . The mass of a configuration is proportional to L . Hence

$$N(M) \sim e^{cM}$$

(where $N(M)$ is the number of particles with mass M , and c is some constant).

In Chapter 10 we shall discuss these things in more detail.

Another important feature of the large N limit concerns the phase factors $\psi(c)$. Let us show that the field:

$$\varphi(C) = \frac{1}{N} \text{Tr} \left(\text{P exp} \oint_C A_\mu dx^\mu \right)$$

has the following decoupling property: †

$$\langle \varphi(C_1) \varphi(C_2) \rangle \underset{N \rightarrow \infty}{\simeq} \langle \varphi(C_1) \rangle \langle \varphi(C_2) \rangle$$

This is again immediately seen from the "double line" representation. We have

$$\langle \varphi(c) \rangle = 1 + \frac{1}{N} C_c + \dots = 1 + \frac{1}{N} \bigcirc N^+ \dots$$

$$\sim N^0$$

$$\langle \varphi(C_1) \varphi(C_2) \rangle - \langle \varphi(C_1) \rangle \langle \varphi(C_2) \rangle$$

$$= \frac{1}{N^2} \bigodot_{c_1} - 2 + \dots = \frac{1}{N^2} \bigodot_{c_1} \int_{c_2} + \dots \sim N^{-1}$$

Equation (8.90) implies that the field $\varphi(C)$ can be considered as a classical field in loop space, because its fluctuations $\langle(\varphi(c) - \langle\varphi(c)\rangle)^2\rangle$ are negligible. This does not imply, however, that A_μ itself becomes classical in the large N limit.

This classical field $W(C) = \langle\varphi(C)\rangle$ satisfies a closed nonlinear equation in loop space which follows from (7.41). We have:

$$\frac{\partial^2 W(C)}{\partial x^2(s)} = -e_0^2 \oint \delta(x(s) - y) \dot{x}_\mu(s) dy_\mu \\ \times W(\bar{C})W(\bar{C})$$

It can be shown by proceeding along the lines mentioned in Chapter 7, that perturbative solution of (8.93) gives all planar diagrams, as it should, in their unrenormalized form. However, the real destination of this equation is to help one to choose from among possible theories of free strings the one which describes large N gauge theory. Unfortunately this most important question is not settled yet. The main difficulty

lies in the inadequacy of our understanding of string theory. This will be discussed in Chapter 10. Another problem is related to the following clumsy feature of equation (8.93). This equation is true only for a definite regularization of gauge theory and of string theory. Therefore it is possible that the "correct" string theory will not satisfy (8.93) just because it has been regularized in a different way. It makes attempts to solve (8.93) by the use of the string ansatz very difficult. Perhaps it will be easier to compare directly the small distance behaviour in the string theory with the one described by asymptotically free gluons. The situation with the loop equations, described above, is reminiscent of the one with Shrödinger equations for field theory. Although these functional equations are in principle correct for the regularized theory, and can be renormalized with some effort, their practical use up to now has been quite limited. Instead, it appears more convenient to study directly their solutions in the form of functional integrals.

In the next chapter we shall describe a similar approach to the theory of strings.

14.9 Quantum Strings and Random Surfaces

We have seen in the previous chapters that while chiral fields in the large N limit describe free particles, gauge theories describe, or are described by, noninteracting strings. The notion of "free string" is far from being trivial, and actually, we have used this term before rather loosely. It is the purpose of this chapter to present the theory of strings. Unfortunately this theory is not yet completed. So, we shall give a review of existing results and indicate the possible directions of future development.

We begin our discussion with a very simple special case of infinitely short strings or, which is the same, point-like particles. After this warmup we will proceed to our main case of interest-the general theory of strings.

14.9.1 9.1 Mathematical Preliminaries: Summation of Random Paths

The position of a point-like particle is described by a four-vector x_μ . The meaningful question is: what is the amplitude $G(x, x')$ for a particle to go from the point x to a point x' . As usual, this amplitude is given by the sum over all possible trajectories connecting the points x and x' . In Euclidean space the amplitude is given by:

† This property was discovered by A. A. Migdal (1977).

$$G(x, x') = \sum_{(P_{xx'})} \exp\left(-\frac{S[P_{xx'}]}{\hbar}\right)$$

Here $P_{xx'}$ are paths connecting x and x' , and $S[P_{xx'}]$ is the classical action for the given path. As such, one takes the simplest invariant characteristic of the path—its length. So, we have the following expression for the action:

$$S[P_{xx'}] = m_0 L(P_{xx'})$$

where m_0 is some parameter (connected with the mass of the particle) and L is the length of the path $P_{xx'}$.

Our aim now is to define properly the sum in (9.1) and to proceed to its computation. Had we had a lattice in the $\mathbf{x}$ space, the definition of the sum would be easy, because on the lattice there are a finite number of $P_{xx'}$ having a fixed length. So, one respectable way of doing things is to start on a lattice, compute the sum (9.1), and then take the mesh $a \rightarrow 0$, simultaneously choosing $m_0(a)$ so as to make the amplitude $G(x, x')$ finite. Since the problem of the random walk on a lattice is exactly solvable, the way described will readily give the desired answer. It has only one flaw (apart from the aesthetic one): there exists no generalization of this approach to the case of surfaces. Because of this we shall not take this standard route but try to develop continuum theory *ab initio*.

In the continuum theory the action (9.2) takes the form:

$$S = m_0 \int_0^1 d\tau \left[\left(\frac{dx_\mu}{d\tau} \right)^2 \right]^{1/2}$$

(here we have parametrized the path by $x_\mu = x_\mu(\tau)$ with $x_\mu(0) = x_\mu$; $x_\mu(1) = x'_\mu$). This action is invariant under the "gauge transformations" or "diffeomorphisms" or "reparametrizations", given by

$$x_\mu(\tau) \rightarrow x_\mu(f(\tau))$$

with the function $f(\tau)$ satisfying the conditions

$$f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \quad \frac{df(\tau)}{d\tau} > 0$$

At this point we encounter two difficulties. First, we have to manage the integration of the action (9.3) containing a square root. Second, the measure of integration should be defined so as to count only $x_\mu(\tau)$ modulo reparametrization (9.4) (it is obvious that two functions $x_\mu(\tau)$ and $x_\mu(f(\tau))$ describe the same single path). We shall now show how to resolve these difficulties which, to some extent, compensate each other.

We wish to compute the integral:

$$G(x, x') = \int \left(\frac{\mathcal{D}x(\tau)}{\mathcal{D}f(\tau)} \right) \exp\left(-m_0 \int_0^1 (\dot{x}^2(\tau))^{1/2} d\tau\right)$$

where we have denoted by the ratio $\mathcal{D}x(\tau)/\mathcal{D}f(\tau)$ the measure on the coset space obtained from the space of all $x_\mu(\tau)$ by identifying functions connected by reparametrizations. In other words $\mathcal{D}f(\tau)$ can be understood as the volume of the gauge (reparametrization) group. Let us rewrite (9.6) as

$$G(x, x') = \int \frac{\mathcal{D}h(\tau)}{\mathcal{D}f(\tau)} \exp \left(-m_0 \int_0^1 (h(\tau))^{1/2} d\tau \right) \\ \times \int \mathcal{D}x(\tau) \delta(\dot{x}^2(\tau) - h(\tau))$$

where we have introduced a "metric tensor" $h(\tau)$ on the path and inserted a functional δ -function into the integrand. Let us begin with computation of the second integral in (9.7) and use a Lagrange multiplier to define the δ -function:

$$\mathcal{K}(x, x', h(\tau)) \\ \equiv \int \mathcal{D}x(\tau) \delta(\dot{x}^2(\tau) - h(\tau)) \\ = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{D}\lambda(\tau) \exp \left(\int_0^1 \lambda(\tau) h(\tau) d\tau \right) \int \mathcal{D}x(\tau) \exp \left(- \int_0^1 \lambda(\tau) \dot{x}^2(\tau) d\tau \right)$$

The action in (9.8) is invariant under reparametrizations, if we transform:

$$x(\tau) \rightarrow x(f(\tau)) \\ h(\tau) \rightarrow \left(\frac{df}{d\tau} \right)^2 h(f(\tau)) \\ \lambda(\tau) \rightarrow \left(\frac{df}{d\tau} \right)^{-1} \lambda(f(\tau))$$

The measures of integration and the cut-off have to be defined so as to preserve (9.9). In particular, it will be quite a mistake to split the interval $0 \leq \tau \leq 1$ into small equal pieces, because such a procedure violates gauge invariance. Instead the size of the mesh $\Delta\tau$ has to be defined by:

$$h(\tau_j) (\Delta\tau_j)^2 = \epsilon^2$$

(because $h(\tau)$ is the metric tensor).

It is convenient to introduce instead of the "tensor" λ the "scalar" Lagrange multiplier, $\alpha(\tau)$:

$$\lambda(\tau) \equiv \alpha(\tau) h(\tau)^{-1/2} \\ \alpha(\tau) \rightarrow \alpha(f(\tau))$$

So that:

$$\mathcal{K}(x, x', h(\tau)) = \int \mathcal{D}\alpha(\tau) \exp \int_0^1 \alpha(\tau) (h(\tau))^{1/2} d\tau \\ \times \int \mathcal{D}x(\tau) \exp \left\{ - \int_0^1 \alpha(\tau) \frac{\dot{x}^2(\tau)}{(h(\tau))^{1/2}} d\tau \right\}$$

We shall show now that in the continuum limit $\alpha(\tau)$ in (9.12) can be replaced by a constant $\langle\alpha\rangle$, just as happened in Chapter 8 with the σ model in the large N limit. It is convenient to make one more (the last) change of variables in (9.12) by introducing instead of τ the proper time t :

$$\begin{aligned}
 t &= \int_0^T \left(h(\tau_1)^{1/2} d\tau_1; \quad T = t(1) \right) \\
 \mathcal{K}(x, x', T) &= \int \mathcal{D}\alpha(t) \exp \int_0^T \alpha(t) dt \\
 &\quad \times \int_{\substack{x(T)=x' \\ x(0)=x}} \mathcal{D}x(t) \exp \left(- \int_0^T \alpha(t) \dot{x}^2(t) dt \right)
 \end{aligned}$$

According to (9.10), the functional integral in (9.14) is defined in the conventional fashion, namely by splitting the interval $[0, T]$ into equal pieces:

$$(\Delta t_j) = \varepsilon$$

It is not hard to compute the Gaussian integral in (9.14) with the regularization (9.15). Let us do it, though as we shall explain later, the final answer could have been foreseen without this computation. We have:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\substack{x(T)=x' \\ x(0)=x}} \mathcal{D}x(t) \exp \left[- \int_0^T \alpha(t) \dot{x}^2(t) dt \right] \\
 &\simeq \int \prod_{t=0}^{T/\varepsilon} dx_t \exp \left[- \sum_{t=0}^{T/\varepsilon} \alpha_t \frac{(x_{t+1} - x_t)^2}{\varepsilon} \right] \\
 &= \int \prod_{t=0}^{T/\varepsilon} dV_t \delta \left(\sum_{t=0}^{T/\varepsilon} V_t + x - x' \right) \exp \left[- \sum_{t=0}^{T/\varepsilon} \frac{\alpha_t V_t^2}{\varepsilon} \right] \\
 &= \int \frac{dp}{(2\pi)^{\mathcal{D}}} \exp(ip(x - x')) \prod_t \int dV_t \exp \left(ipV_t - \frac{\alpha_t V_t^2}{\varepsilon} \right) \\
 &= \text{const.} \left(\prod_{t=0}^{T/\varepsilon} \alpha_t^{-\mathcal{D}/2} \right) \exp \left[- \frac{(x' - x)^2}{\varepsilon \left(\sum_t \alpha_t^{-1} \right)} \right] \left(\sum_t \varepsilon \alpha_t^{-1} \right)^{-\mathcal{D}/2}
 \end{aligned}$$

Next, we have to compute a seemingly complicated integral:

$$\mathcal{K}(x, x', T) \sim \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\prod_{t=0}^{T/\varepsilon} d\alpha_t \alpha_t^{-\mathcal{M}/2} e^{\varepsilon \alpha_t} \right) \Phi \left(x - x'; \varepsilon \sum_t \alpha_t^{-1} \right)$$

where:

$$\Phi(R, \alpha) = \alpha^{-\Phi/2} \exp(-R^2/\alpha)$$

The major idea which permits us to compute (9.17) in the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ is the "law of large numbers". Namely the interesting piece Φ in the integrand depends only on $\sum_t \alpha_t^{-1}$. Each α_t fluctuates near its mean value $\langle \alpha \rangle$ and its fluctuation is ~ 1 ; the average is defined by:

$$\begin{aligned}
 \overline{f(\alpha)} &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\alpha \alpha^{-\Phi/2} e^{\varepsilon \alpha} f(\alpha) \left[\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\alpha \alpha^{-\Phi/2} e^{\varepsilon \alpha} \right]^{-1} \\
 \varepsilon^2 \overline{(\Delta \alpha)^2} &= \varepsilon^2 \left(\overline{\alpha^2} - (\bar{\alpha})^2 \right) \sim 1 \\
 \overline{\left(\Delta \frac{1}{\varepsilon \alpha} \right)^2} &\sim 1 \\
 \left[\overline{\Delta \left(\sum_t \left(\frac{1}{\varepsilon \alpha_t} \right)^2 \right)} \right]^{1/2} &\sim \left(\frac{T}{\varepsilon} \right)^{1/2} < \overline{\sum_t \frac{1}{\varepsilon \alpha_t}} \sim \frac{T}{\varepsilon}
 \end{aligned}$$

As a result, in the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ the formula (9.17) gives:

$$\mathcal{K}(x, x', T) = \text{const. } T^{-\mathcal{A}/2} \exp \left(-\frac{(x' - x)^2}{T} \langle \alpha \rangle + T \langle \alpha \rangle \right)$$

In the process of this derivation it became clear that we could do much better than performing the dumb discretization (9.16). If we look at (9.14), we discover that the fluctuations of $\alpha(t)$ are short ranged. Indeed, if we write

$$\alpha(t) = \langle \alpha \rangle + \beta(t)$$

then the bilinear term in β in the effective action, W_{II} , obtained after Gaussian integration has the representation:

$$\begin{aligned} W_{\text{II}} &= -\frac{q}{\beta} - \frac{q-k}{\beta} - \int \frac{dq}{2\pi} \beta(q) \beta(-q) \int \frac{dk}{2\pi} \frac{k \cdot (q-k) k \cdot (q-k)}{k^2 (q-k)^2 \langle \alpha \rangle^2} \\ &\simeq \varepsilon \sum_q \beta(q) \beta(-q). \end{aligned}$$

(Here we have the vertex of the $\beta x x$ -interaction from the term $\int \beta(t) \dot{x}^2(t) dt$ in the Lagrangian.) This computation shows that the field β does not acquire any kinetic energy, and therefore has a correlation in t of the order of ε . That in turn means that in all expressions containing a "large number" of α , as in $\int \alpha(t) \dot{x}^2(t) dt$ (provided $x(t)$ is smooth) one can boldly replace $\alpha(t)$ by its mean value $\langle \alpha \rangle$. This is an important lesson.

So far we have solved only one part of the problem with the result:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x, x', h(\tau)) &= \int_{\substack{x(0)=x \\ x(1)=x'}} \mathcal{D}x(\tau) \delta(\dot{x}(\tau) - h(\tau)) \\ &= \text{const. } T^{-\mathcal{Q}/2} \exp \left(-\frac{(x - x')^2}{T} \langle \alpha \rangle + \langle \alpha \rangle T \right), \quad \langle \alpha \rangle \sim \frac{1}{\varepsilon} \\ T &= \int_0^1 d\tau (h(\tau))^{1/2} \end{aligned}$$

Now we have to complete the integration in (9.7). Let us notice, first of all, that (9.22) depends on $h(\tau)$ only through T . This of course is not an accident since T is the only invariant quantity in one-dimensional Riemannian geometry (things like scalar curvatures etc. are zero in this case). It is natural to expect that the integration over $\mathcal{D}h(\tau)/\mathcal{D}f(\tau)$ in (9.7) will become just the integration over T . This is indeed the case, but it is worthwhile for future generalizations to work out this fact in detail.

14.9.2 9.2 Measures in the Space of Metrics and Diffeomorphisms

In order to define an invariant measure for the h integration, we shall start from the definition of the metric in the space of metrics h , and then use the "metric tensor" in this functional space for finding the volume element. The only local expression for the "distance" $\|\delta h\|$ between the metrics $h(\tau)$ and $h(\tau) + \delta h(\tau)$ has the form:

$$\|\delta h\|^2 = \int_0^1 d\tau (\delta h(\tau))^2 h^{-3/2}(\tau)$$

It is quite obvious that (9.23) is invariant under reparametrizations.

Let us notice now that any metric $h(\tau)$ can be made τ -independent by means of a properly chosen gauge transformation $f(\tau)$. Due to (9.9) this implies that any h can be represented as:

$$h(\tau) = T^2 \left(\frac{df}{d\tau} \right)^2$$

with some T and f . Our strategy will be to pass from the integration over $\mathcal{D}h(\tau)$ to integration over the new variables T and f . According to general rules:

$$\mathcal{D}h(\tau) = dT \mathcal{D}f(\tau) \times (\text{jacobian})$$

If we manage to find the jacobian, our problem will be solved, since instead of $\mathcal{D}h(\tau)/\mathcal{D}f(\tau)$ we shall obtain a properly defined integral over dT . The easiest way for solving this problem is to substitute the decomposition (9.24) into (9.23) so as to find the "distance" in terms of the new coordinates.

The computation is greatly simplified if we use a general geometrical formula, which we derive now in its n -dimensional form (needed for future applications). Suppose, that we have two metric tensors $g_{ab}(\xi)$ and $h_{ab}(\xi)$, where ξ are coordinates of some n -dimensional Riemannian manifold. Let these two metrics be connected by the coordinate transformation (or diffeomorphism) $\xi \rightarrow f(\xi)$:

$$g = h^{(f)}$$

or, explicitly:

$$g_{ab}(\xi) = \frac{\partial f^c(\xi)}{\partial \xi^a} \frac{\partial f^d(\xi)}{\partial \xi^b} h_{cd}(f(\xi))$$

We should like to prove the following relation, connecting small variations of g, h , and f :

$$\begin{aligned} \delta g_{ab} &= [\delta h_{ab} + \nabla_a \omega_b + \nabla_b \omega_a]^{(f)} \\ &= \frac{\partial f^c}{\partial \xi^a} \frac{\partial f^d}{\partial \xi^b} (\delta h_{cd} + \nabla_c \omega_d' + \nabla_d \omega_c) (f(\xi)) \end{aligned}$$

with

$$\omega^a(\xi) = \delta f^a (f^{-1}(\xi))$$

Here by ∇_a we mean the standard covariant derivative computed in the metric h , and the symbol f^{-1} means the inverse function. This formula (9.27) can be checked by direct computations, but it can be easily understood without that by the following consideration, based on the group properties of diffeomorphism. We can consider the transformation $f + \delta f$ as the transformation f , followed by the infinitesimal transformation $1 + \omega$. Hence it is sufficient to compute the change of the metric tensor under the infinitesimal transformation ω , which is given by the expression in brackets in (9.27). Let us also notice, that the analogous formula for gauge fields has the form:

$$\begin{aligned} A_\mu &= f^{-1} B_\mu f + f^{-1} \hat{C}_\mu f \\ \delta A_\mu &= f^{-1} [\delta B_\mu + \nabla_\mu \omega] f \\ \omega &= \delta f f^{-1}; \quad \nabla_\mu \omega = \hat{C}_\mu \omega + [B_\mu, \omega] \end{aligned}$$

(here $f(x)$ is the field of unitary matrices, performing gauge transformations).

It is straightforward now to use these general geometrical formulas in our special case. Substitution of (9.24) into (9.23) gives:

$$\begin{aligned}
\|\delta h\|^2 &= \int d\tau h^{-3/2}(\tau) \left(\frac{df}{d\tau} \right)^4 [T\delta T + \dot{\omega}]^2 \\
&= \int_0^1 d\tau \left(\frac{df}{d\tau} \right)^{-3} \left(\frac{df}{d\tau} \right)^4 T^{-3} (T\delta T + \dot{\omega}[f])^2 \\
&= \frac{(\delta T)^2}{T} + T^{-3} \int_0^1 df \dot{\omega}^2(f)
\end{aligned}$$

Here $\dot{\omega}(f) = d\omega/df$, and the relation $\omega(1) = \omega(0) = 0$ has been used (which follows from the conditions $f(1) = 1$ and $f(0) = 0$).

As the next step let us determine the measure and the metric in the space of diffeomorphisms. Just as in the case of ordinary groups there is only one metric invariant under left and right multiplication simultaneously. It is given by the following general formula:

$$\begin{aligned}
\|\delta f\|^2 &= \int (h)^{1/2} h_{ab}(\xi) \omega^a(\xi) \omega^b(\xi) d^n \xi \\
\omega^a(\xi) &= \delta f^a(f^{-1}(\xi))
\end{aligned}$$

This formula is a consequence of two facts. Let us consider first "right multiplication", namely the change:

$$\begin{aligned}
f &\rightarrow f \circ \alpha \\
f(\xi) &\rightarrow f(\alpha(\xi))
\end{aligned}$$

Then we have:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\xi) &\rightarrow x^{-1}(f^{-1}(\xi)) \\
\delta f(\xi) &\rightarrow \delta f(\alpha(\xi)) \\
\omega(\xi) &\rightarrow \delta f(\alpha(x^{-1}(f^{-1}(\xi)))) = \omega(\xi)
\end{aligned}$$

So, the form $\omega(\xi)$ is invariant under "right multiplication" of a diffeomorphism. If we look at "left multiplication", we have:

$$\begin{aligned}
f &\rightarrow \beta \circ f \\
f^a(\xi) &\rightarrow \beta^a(f(\xi)) \\
\delta f^a(\xi) &\rightarrow \frac{\partial \beta^a(f)}{\partial f^b} \delta f^b(\xi) \\
\delta f^a(f^{-1}(\xi)) &\rightarrow \frac{\partial \beta^a(\beta^{-1})}{\partial (\beta^{-1})^b} \delta f^b(f^{-1}(\beta^{-1})) \\
\omega^a(\xi) &\rightarrow \frac{\partial \beta^a(\beta^{-1})}{\partial (\beta^{-1})^b} \omega^b(\beta^{-1}(\xi))
\end{aligned}$$

Therefore ω^a transforms as a standard covariant vector under the left multiplication. If we transform the metric h_{ab} simultaneously, the distance (9.31) will be invariant. It is obviously the only local expression with these two properties. This expression generalizes the well known double invariant Killing metrics for finite dimensional groups. In the finite dimensional case, if f is a group element then the Killing metric is given by:

$$\|\delta f\|^2 = \text{Tr}(\omega^2), \quad \omega = \delta f \cdot f^{-1}$$

This metric is invariant under the change:

$$f \rightarrow \beta \cdot f \cdot \alpha; \quad \omega \rightarrow \beta \cdot \omega \cdot \beta^{-1}$$

(where dots mean the usual matrix multiplication.)

Diffeomorphisms, while forming an infinite dimensional group, behave very similar to the finite dimensional cases. The only crucial difference is that in order to define the analogue of the trace in (9.35) we have to use the metric of the manifold h_{ab} , as seen from (9.31).

Certainly, our manipulations with metrics in the functional spaces make sense only if some invariant regularization and renormalization is performed. This will be the case in all our future applications.

Returning to our problem we see that:

$$\|\delta f\|^2 = T^{-3} \int_0^1 \dot{\omega}^2(f) df$$

$$\omega = \delta f$$

After rescaling $t = T \cdot f, \omega \rightarrow T\varepsilon$ our expressions can be written as

$$\|\delta h\|^2 = \frac{(\delta T)^2}{T} + \int_0^T dt \varepsilon^2(t)$$

$$\|\delta f\|^2 = \int_0^T dt \varepsilon^2(t)$$

From (9.38) we deduce that:

$$\mathcal{D}h(\tau) = \frac{dT}{\sqrt{T}} \text{Det}^{1/2} \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) \mathcal{D}f(\tau)$$

$$\frac{\mathcal{D}h(\tau)}{\mathcal{D}f(\tau)} = \frac{dT}{\sqrt{T}} \text{Det}^{1/2} \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right)$$

and hence we have found the desired jacobian. Now it is time to regularize and compute the determinant in (9.39). Its infiniteness reflects the formal nature of our manipulations with infinite dimensional measures. However, we know that the ultraviolet divergences, according to (9.15), have to be cut off by splitting the interval into equal small pieces, since our metric tensor on the interval $[0, T]$ is equal to 1. There are many equivalent and more convenient regularizations. We shall use the following expression:

$$\log \text{Det}_R \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) = - \int_{\tau^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \sum_n e^{-\tau \lambda_n}$$

(where λ_n are the eigenvalues for $-d^2/dt^2$ which are equal to: $\lambda_n = \pi^2 n^2 T^{-2}$).

For the n for which $\lambda_n \ll \varepsilon^{-2}$ the contribution to (9.40) is just $\log(1/\lambda_n \varepsilon^2)$. Harmonics with $\pi n T^{-1} \gg \varepsilon^{-1}$ give negligible contribution to (9.40). But $\pi n/T$ is just the wave vector corresponding to the eigenfunction ψ_n of $-d^2/dt^2$:

$$\psi_n \sim \sin(\pi n t/T)$$

Therefore, the definition (9.40) accounts correctly for the eigenmodes which vary slowly in the time intervals $\sim \varepsilon$, but cuts off higher modes. Hence ε plays the role of a lattice spacing. A little later we shall see that after renormalization we can take the limit $\varepsilon \rightarrow 0$, and that the concrete form of the cut-off is irrelevant.

To do the computation, we represent the sum in (9.40) in the form:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi^2 n^2 \tau / T^2) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi^2 n^2 \tau / T^2) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dn \exp(-\pi^2 n^2 \tau / T^2) - \frac{1}{2} + O(\exp(-c/\tau)) \\
&= \frac{T}{2\sqrt{\pi\tau}} - \frac{1}{2} + O(\exp(-c/\tau))
\end{aligned}$$

(where the exponential smallness of the correction follows from the Poisson summation formula). We obtain:

$$\begin{aligned}
& -\log \det_R \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right) \\
&= \int_{\varepsilon^2}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi^2 n^2 \tau / T^2) \\
&= \int_{(\varepsilon/T)^2}^{\infty} \frac{dx}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi^2 n^2 x) \\
&= \int_{(\varepsilon/T)^2}^1 \frac{dx}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi^2 n^2 x) + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi^2 n^2 x) \\
&= \int_{(\varepsilon/T)^2}^1 \frac{dx}{x} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi x}} - \frac{1}{2} \right) + \int_0^1 \frac{dx}{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi^2 n^2 x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \right) \\
&+ \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi^2 n^2 x)
\end{aligned}$$

Now, the last two terms in the last formula are T -independent constants. Therefore:

$$-\log \det \left(-\frac{d^2}{dt^2} \right)_{\varepsilon \rightarrow 0} = \frac{T}{\varepsilon\sqrt{\pi}} - \log \frac{T}{\varepsilon}$$

If we substitute this expression into (9.39) we obtain:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{D}h(\tau)}{\mathcal{D}f(\tau)} &= \text{const} \cdot \exp(-T/2\varepsilon\sqrt{\pi}) \frac{dT}{\sqrt{T}} \cdot T^{1/2} \\
&= \text{const} \cdot \exp(-T/2\varepsilon\sqrt{\pi}) dT
\end{aligned}$$

The divergences are condensed into the constant factor in front and the term $\exp(-T/2\varepsilon\sqrt{\pi})$. Now we are ready to compute (9.6). Combining (9.45), (9.22) and (9.7) we obtain:

$$\begin{aligned}
G(x, x') &= \text{const.} \int_0^{\infty} dT \exp(-(m_0 - \text{const.}/\varepsilon)T) \\
&\quad \times T^{-\mathcal{J}/2} \exp(-(x - x')^2 / \varepsilon T) \\
&= \text{const.} \int_0^{\infty} dT \exp(-\mu\varepsilon T) T^{-\mathcal{J}/2} \exp(-(x - x')^2 / \varepsilon T) \\
&= \text{const.} \int \frac{d^{\mathcal{J}}\mathbf{p}}{p^2 + \mu} \exp(ip(x - \mathbf{x}')) \\
&\quad \mu = \varepsilon^{-1}(m_0 - m_{0,\text{cr}}) \equiv \varepsilon^{-1} \left(m_0 - \frac{\text{const}}{\sqrt{\varepsilon}} \right)
\end{aligned}$$

All our derivations make sense only if relevant values of T in the integral (9.46) are much larger than the cut-off (or "lattice spacing") ε . Therefore, the integral (9.6) has a continuum limit only if we adjust m_0 to be very close to the critical value, or, in other words we have to take the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ for the cut-off simultaneously with $m_0(\varepsilon) \rightarrow m_{0,\text{cr}}$. Then the terms like $e^{T/\varepsilon}$ will be compensated and we obtain the continuum theory. This result is quite easy to understand from the lattice point of view. On a lattice we have:

$$G(x, x') = \sum_{L=0}^{\infty} N_L(x, x') e^{-m_0 L}$$

where $N_L(x, x')$ is the number of paths of the length L connecting points x and x' . We know that for large L , $N_L(x, x') \sim (c)^L$ where c depends on the type of the lattice. We see, that for $m_0 > \log c$, the relevant paths in (9.47) have a length of the order of the lattice spacing and no continuum limit is possible. But as we approach $m_0 \rightarrow m_{0,\text{cr}} = \log c$, then a typical $L \sim (m_0 - m_{0,\text{cr}})^{-1} \gg 1$ and the theory becomes continuous and lattice independent. Our description refers precisely to this limit.

We see from (9.46) that the correlation length or the physical mass have a nontrivial critical exponent:

$$\tau_{\text{corr}}^{-1} \sim m_{\text{phys}} = \sqrt{\mu} \sim (m_0 - m_{0,\text{cr}})^{1/2}$$

The procedure of renormalization in this case consists of expressing everything in terms of the physical mass and eliminating the irrelevant constant factor in front of (9.46). After that we obtain a finite amplitude in the limit $\varepsilon \rightarrow 0$.

In view of the future generalizations we have to develop the same formalism as above for closed paths.

14.9.3 9.3 Closed Paths

In this case there are some technical differences in the integration over the metric field. Let us begin with the integration over $x(\tau)$, provided that the Lagrange multiplier is replaced by its average, which we shall choose to be $\frac{1}{2}$ by a choice of scale. We have:

$$\mathcal{K}[h(\tau)] = \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x(\tau) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^T \dot{x}^2 d\tau \right)$$

$$T = \int_0^1 h^{1/2}(\tau) d\tau$$

First of all we have to remove the trivial divergence in (9.49) connected with the fact that the integrand has translation invariance $x_\mu \rightarrow x_\mu + c_\mu$ and so we have to fix some point of our loop. Such fixing is most conveniently performed by inserting the relation

$$\int dc \left(\frac{1}{T} \int_0^T \delta(x(\tau) - c) d\tau \right) = 1$$

and omitting the $\int dc = V$. After that we have (with the choice $c = 0$):

$$\mathcal{K}[h(\tau)] = \int \mathcal{D}x(\tau) \left(\frac{1}{T} \int_0^T \delta(x(\tau)) d\tau \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^T \dot{x}^2 d\tau \right)$$

The δ -function in (9.51) will exclude the dangerous zero mode of the operator $-d^2/dt^2$. If we expand

$$x(\tau) = \left(a_0 + \sum_{n \neq 0} a_n \exp(2\pi i n \tau / T) \right) \frac{1}{\sqrt{T}}$$

then

$$\int_0^T \dot{x}^2 d\tau = \sum_{n \neq 0} \lambda_n a_n^2, \quad \lambda_n = \frac{4\pi^2 n^2}{T^2}$$

$$\mathcal{D}x(\tau) = da_0 \prod_{n \neq 0} da_n$$

From this we derive:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[h(\tau)] &= \int d^{\mathcal{W}} a_0 \frac{1}{T} \int_0^T \delta \left(\frac{a_0}{\sqrt{T}} + \dots \right) d\tau \int \prod_{n \neq 0} da_n \exp \left(- \sum_{n \neq 0} \lambda_n a_n^2 \right) \\ &= T^{\mathcal{W}/2} \left[\det' \left(- \frac{d^2}{dt^2} \right) \right]^{-\mathcal{J}/2} \end{aligned}$$

(where $\det'(x)$ is defined as the product of the nonzero eigenvalues). Using the representation of the preceding section we get:

$$\begin{aligned} -\log \text{Det}' \left(- \frac{d^2}{dt^2} \right) &= \int_{\varepsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \sum_{n \neq 0} \exp(-4\pi^2 n^2 s / T^2) \\ &= \int_{\varepsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \left(\sum_n \exp(-4\pi^2 n^2 s / T^2) - 1 \right) \\ &= \int_{(\varepsilon/T)^2}^{\infty} \frac{dx}{x} \left(\sum_n \exp(-4\pi^2 n^2 x) - 1 \right) \\ &= \int_{(\varepsilon/T)^2}^1 \frac{dx}{x} \left(\sum_n \exp(-4\pi^2 n^2 x) - 1 \right) \\ &\quad + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \left(\sum_n \exp(-4\pi^2 n^2 x) - 1 \right) \\ &= \int_{(\varepsilon/T)^2}^1 \frac{dx}{x} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} - 1 + O(\exp(-c/x)) \right\} + \text{const} \\ &= \frac{T}{\varepsilon\sqrt{\pi}} - 2 \log \frac{T}{\varepsilon} \end{aligned}$$

This gives the result:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[h(\tau)] &= T^{\mathcal{J}/2} T^{-\mathcal{J}} \exp(cT/\varepsilon) \\ &= T^{-\mathcal{J}/2} \exp(cT/\varepsilon) \end{aligned}$$

Now we have to find the measure $\mathcal{D}h(\tau)/\mathcal{D}f(\tau)$. Here again we must treat zero modes carefully. Since our parametrization space is a circle it now admits an isometry—a transformation which does not change the metric. This is just a translation $\tau \rightarrow \tau + a$ and it must be excluded from our gauge group. This can be done in the same way as in the case of the x integration, by inserting the relation:

$$\int_0^T da \int_0^T \frac{d\tau}{T} \delta(f(\tau) - a) = 1$$

As a result the measure in T will be the same as for open paths and we get the following answer for the number of closed paths of length T :

$$dN(T) = \frac{dT}{T} T^{-\mathcal{J}/2} \exp(-cT/\varepsilon)$$

Of course, this formula could have been anticipated from (9.46). If we set $x = x'$ we get the integrand in this formula to be $T^{-\mathcal{J}/2} \exp(cT/\varepsilon)$. The extra $1/T$ in (9.57) follows from the fact that we should count paths with different starting points x as one path. Since for a path of the length T we have T different possibilities for a choice of the starting point we obtain a $1/T$ factor.

Different physical quantities can be expressed in terms of the amplitudes for a path to pass through a prescribed set of points $\{\mathbf{x}_i\}$. These amplitudes are obtained as expectation values of the following type:

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_N) &= \left\langle \prod_j \int_0^T d\tau_j \delta(x(\tau_j) - x_j) \right\rangle \\ &= \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int \mathcal{D}x(\tau) \exp\left(-\frac{1}{2} \int \dot{x}^2 d\tau\right) \prod_j \int_0^T d\tau_j \delta(x(\tau_j) - x_j) \end{aligned}$$

In order to compute these integrals it is convenient to go to the momentum representation:

$$F(q_1, \dots, q_N) = \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int \mathcal{D}x(\tau) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T \dot{x}^2 d\tau\right) \int_0^T \prod_j d\tau_j \exp\left(i \sum_j q_j x(\tau_j)\right)$$

The integrals in (9.59) are Gaussian. According to the general rules, to find them we have first to solve the classical equations:

$$\ddot{x}_{\text{cl}} = -i \sum_j q_j \delta(\tau - \tau_j)$$

and then to compute the classical action. We have:

$$x_{\text{cl}}(\tau) = i \sum_j q_j \mathcal{D}(\tau | \tau_j)$$

where $\mathcal{D}(\tau | \tau')$ is a Green function for the operator $-d^2/dt^2$. The substitution of (9.61) into the classical action gives:

$$\begin{aligned} S_{\text{cl}} &= \frac{1}{2} \int \dot{x}_{\text{cl}}^2 d\tau - i \sum_j \mathbf{q}_j x_{\text{cl}}(\tau_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j \mathcal{D}(\tau_i | \tau_j) \end{aligned}$$

The Green function on a circle contains a zero mode contribution:

$$\mathcal{D}(\tau | \tau') = \sum_{n \neq 0} \frac{\exp i\sqrt{\lambda_n}(\tau - \tau')}{T\lambda_n} + C$$

(here $\lambda_n = 4\pi^2 n^2 / T^2$, and C is the zero mode contribution which is arbitrary). However if momentum is conserved ($\sum_j \mathbf{q}_j = 0$) this arbitrariness disappears from (9.62):

$$C \sum_{i,j} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j = C \left(\sum_j \mathbf{q}_j \right)^2 = 0$$

The necessity of momentum conservation can be seen also from (9.60) by integrating it over τ . Then periodicity of $\dot{x}_{\text{cl}}$ requires $\sum_j \mathbf{q}_j = 0$.

We obtained the following expression:

$$F(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) = \int_0^\infty \frac{dT}{T} T^{-\mathcal{D}/2} e^{-m^2 T/2} \int_0^T \prod_j d\tau_j \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{ij} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j \mathcal{D}(\tau_i | \tau_j) \right\}$$

In order to elucidate its meaning, we shall consider the case of the two point function with $\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_2 \equiv \mathbf{q}$. Let us compute, first of all, the $\mathcal{D}$ -function. We have:

$$\mathcal{D}(\tau | \tau') = \sum_{n \neq 0} \frac{\exp(i\sqrt{\lambda_n}(\tau - \tau'))}{T\lambda_n}, \quad \lambda_n = \frac{4\pi^2 n^2}{T^2} \\ -\partial_\tau^2 \mathcal{D}(\tau | \tau') = \delta(\tau - \tau') - 1/T$$

(where the second terms in the r.h.s. follows from the constraint $n \neq 0$ in the definition of the $\mathcal{D}$ -function). Since the $\mathcal{D}$ -function on a circle depends on $s = |\tau - \tau'|$ we can trivially solve (9.66), finding the result:

$$\mathcal{D}(\tau | \tau') = -\frac{s(T-s)}{2T} + \text{const.} \quad \text{for } 0 \leq s \leq T$$

Therefore:

$$F(q) = \int_0^\infty \frac{dT}{T} T^{-\mathcal{D}/2} e^{-m^2 T/2} \int_0^T d\tau \int_0^T d\tau' e^{-q^2 s(T-s)/2T} \\ = \int_0^\infty dT T^{-\mathcal{D}/2} e^{-m^2 T/2} \int_0^T ds e^{-q^2 s(T-s)/2T} \\ = \int_0^1 dx \int_0^\infty dT T^{1-\mathcal{D}/2} e^{-m^2 T/2} e^{-q^2 x(1-x)T/2} \\ \sim \int_0^1 \frac{dx}{[m^2 + q^2 x(1-x)]^{2-\mathcal{D}/2}}$$

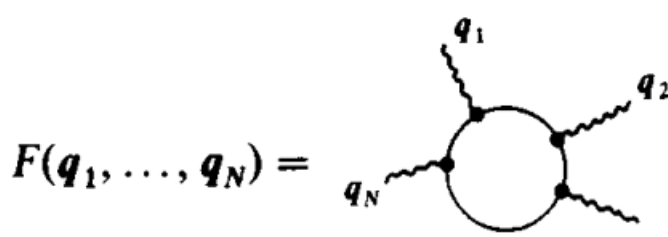
(here we have introduced a new variable $x = s/T = |\tau_1 - \tau_2|/T$). It is quite interesting that the amplitude (9.67) can be interpreted in terms of ordinary Feynman diagrams. Let us consider the expression:

$$F(\mathbf{q}) = \overbrace{q}^{q-k} \underbrace{q-k}_k = \int \frac{d^{\mathcal{D}} \mathbf{k}}{(\mathbf{k}^2 + m^2)((\mathbf{q} - \mathbf{k})^2 + m^2)} \\ = \int_0^1 dx \int \frac{d\mathbf{k}}{(x\mathbf{k}^2 + (1-x)(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2 + m^2)^2} \\ \sim \int_0^1 \frac{dx}{(m^2 + x(1-x)q^2)^{2-\mathcal{D}/2}}$$

where we have used the standard representation:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{(Ax + B(1-x))^2}$$

The derivation we have given serves as a check that all normalizations, measures etc. in the path integrals were correctly chosen because at the end it produced the standard answer for the amplitude (9.69). In the same way it can be shown that $F(q_1, \dots, q_N)$ defined by (9.59) reduces to the standard diagram:

$$F(q_1, \dots, q_N) =$$


In this section we have developed an unusual formalism which deals with path integrals but in the end all the answers have appeared to be much more easily described by the standard Feynman graphs. However, there are serious reasons for working with geometrical integrals directly. They lie in the fact that as we go from paths to surfaces and higher dimensional objects, geometrical functional integrals remain our only existing tool. In the next section we are going to show how this tool works in the case of string theory.

14.9.4 9.4 General Theory of Random Hypersurfaces

In the previous sections we discussed one dimensional curves randomly immersed into $\mathcal{D}$ -dimensional Euclidean space. This problem was equivalent to the problems of Brownian motion and (after analytic continuation to Minkowski space) to the quantum theory of a free relativistic particle. It was hardly possible to get any new results in this field since it has been completely investigated for many years by classical mathematics and quantum physics. However, we have developed an approach which is readily generalizable to the case of an n dimensional hypersurfaces immersed into $\mathcal{D}$ -dimensional space.

This problem is of great interest for both physics and mathematics. At the same time, the case $n > 1$ is incomparably harder than that of $n = 1$. Some incomplete success has been achieved for $n = 2$ and will be discussed in later sections. Here we shall develop the general formalism for any n up to the furthest point possible at present.

Let us consider an immersion of the hypersurface described by the functions:

$$x_\mu(\xi^1, \dots, \xi^n) \equiv x_\mu(\xi) \quad \mu = 1, \dots, \mathcal{D}$$

The action must depend on $x_\mu(\xi)$ in such a way that it is invariant under the transformation of diffeomorphisms:

$$\xi \rightarrow f(\xi)$$

or, explicitly:

$$\xi^a \rightarrow \tilde{\xi}^a = f^a(\xi^1, \dots, \xi^n) \quad a = 1, \dots, n$$

where the functions f^a have to satisfy the condition:

$$\frac{\partial(f', \dots, f^n)}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^n)} \equiv \det \left\| \frac{\partial f^a}{\partial \xi^b} \right\| > 0$$

This claim follows from the fact that $x = x(\xi)$ and $x = x(f(\xi))$ represent the same hypersurface, differently parametrized.

When we are looking for a continuous theory of surfaces, we have to start from actions containing the minimal number of derivatives. If a theory with such an action is renormalizable, then all the terms with higher derivatives are irrelevant. Sometimes in order to achieve renormalizability one has to include higher terms. These questions we shall discuss later.

A covariant expression with the minimal number of derivatives is just the hypervolume A of our hypersurface. Therefore, the simplest action which can be constructed is the following:

$$\begin{aligned} S[x(\xi)] &= m_0^n \int d^n \xi (h(\xi))^{1/2} \\ h(\xi) &\equiv \det \|h_{ab}(\xi)\| \\ h_{ab}(\xi) &= \partial_a x^\mu \partial_b x_\mu \end{aligned}$$

In principle, one can add some higher derivative terms like

$$\begin{aligned} S_1 &= c_1 \int d^n \xi R(h) h^{1/2} \\ S_2 &= c_2 \int d^n \xi (\Delta(h)x)^2 h^{1/2} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

(Here $R(h)$ is the scalar curvature computed with the metric h_{ab} and $\Delta(h)$ is the corresponding Laplace operator). In each case special analysis is needed in order to determine the relevance of those terms. It is reasonable, however, to begin with the simplest action (9.74) and to postpone the question whether renormalization produces higher derivative terms.

The amplitude for a surface with a given boundary can be written as:

$$\begin{aligned} G(c(s)) &= \int \frac{\mathcal{D}x(\xi)}{\mathcal{D}f(\xi)} \exp \left(-m_0^n \int (\det \|\partial_a x \partial_b x\|)^{1/2} d^n \xi \right) \\ &= \int \frac{\mathcal{D}h_{ab}(\xi)}{\mathcal{D}f(\xi)} \exp \left(-m_0^n \int h^{1/2} d^n \xi \right) \int \mathcal{D}x(\xi) \delta(\partial_a x \partial_b x - h_{ab}) \end{aligned}$$

Here the boundary of the surface $\mathbf{x}(\xi)$ is an $n - 1$ -dimensional hypersurface parametrized by the functions $c_\mu(s_1, \dots, s_{n-1})$. To give a precise formulation for the boundary condition to the functional integral (9.76) one has to postulate that the topology of the ξ -space is identical to the topology of the surfaces which we consider. This is the necessary condition under which we can consider $x_\mu(\xi)$ as smooth functions. If the boundary in ξ -space is determined from the equations

$$\xi^a = \xi^a(s^1, \dots, s^{n-1})$$

then the boundary conditions for the integral (9.76) are

$$\mathbf{x}(\xi(s)) = c(s)$$

The measure $\mathcal{D}x(\xi)/\mathcal{D}f(\xi)$ is, just as in the case of paths, the measure on a coset space obtained by factorising all functions $x(\xi)$ by the group of diffeomorphisms $f(\xi)$. In other words

it is an invariant measure on the space of gauge orbits where the gauge transformations in this case are induced by the changes

$$\xi \rightarrow \tilde{\xi} = f(\xi)$$

For the invariance of our integral we have to restrict the possible $f(\xi)$ not only by (9.73) but also by the condition that they do not move the boundary points:

$$f(\xi(s)) = \xi(s)$$

The result of integration, $G[c(s)]$, is invariant under the reparametrization of the boundary:

$$G[c(s)] = G[c(\alpha(s))]$$

(where:

$$\{\alpha^i(s^1, \dots, s^{n-1}), \quad i = 1, \dots, n-1\}$$

is a diffeomorphism).

As we have done before, let us begin with the computation of the quantity

$$\mathcal{K}[c(s), h(\xi)] = \int \mathcal{D}x(\xi) \delta(\partial_a x \cdot \partial_b x - h_{ab}(\xi))$$

which is equal to the number of immersions of a surface with fixed intrinsic metric.

The use of the Lagrange multiplier representation gives:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[c, h] &= \int_{A-i\infty}^{A+i\infty} \mathcal{D}\lambda^{ab} \exp\left(\int h^{1/2} \lambda^{ab} h_{ab} d^n \xi\right) \\ &\quad \times \int \mathcal{D}x(\xi) \exp\left(-\int h^{1/2} \lambda^{ab} \partial_a x \cdot \partial_b x d^n \xi\right) \end{aligned}$$

The norms in functional spaces defining the volume elements in this functional integral are given by:

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{x}(\xi)\|^2 &= \int h^{1/2} (\delta \mathbf{x}(\xi))^2 d^n \xi \\ \|\delta \lambda^{ab}\|^2 &= \int h^{1/2} (h_{aa'} h_{bb'} + c h_{ab} h_{a'b'}) \\ &\quad \times \delta \lambda^{ab} \delta \lambda^{a'b'} d^n \xi \end{aligned}$$

In deriving these formulas we have used, apart from locality and general covariance, the claim that the distance in functional space has to be invariant under

$$\begin{aligned} x(\xi) &\rightarrow x(\xi) + a(\xi) \\ \lambda^{ab}(\xi) &\rightarrow \lambda^{ab}(\xi) + c^{ab}(\xi) \end{aligned}$$

where a and c^{ab} are arbitrary. The invariance (9.85) of the measure ensures the possibility of using the equations of motion for x and λ , which are derived just by the replacements (9.85) in the action.

It appears to be convenient to decompose

$$\lambda^{ab}(\xi) = \alpha(\xi) h^{ab} + f^{ab}(\xi)$$

with

$$h_{ab}(\xi)f^{ab}(\xi) = 0$$

The integral (9.83) takes the form:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[c, h] = & \int \mathcal{D}\alpha(\xi) \exp \left(n \int \alpha(\xi) h^{1/2} d^n \xi \right) \\ & \times \int \mathcal{D}f^{ab}(\xi) \mathcal{D}x(\xi) \exp \left(- \int h^{1/2} (\alpha h^{ab} \partial_a x \partial_b x + f^{ab} \partial_a x \partial_b x) d^n \xi \right) \end{aligned}$$

In order to continue the calculation we have to conjecture (and check it later) that the correlation lengths of $\alpha(\xi)$ and $f^{ab}(\xi)$ are small in comparison with the size of our region. If this is true, then, as we have seen in case of paths, these quantities can be replaced by their mean values. On the grounds of general covariance we have:

$$\begin{aligned} \langle \alpha(\xi) \rangle &= \bar{\alpha} + c_1 R(\xi) + \dots \\ \langle f^{ab}(\xi) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

where $\bar{\alpha}$ is an unknown constant, being of the order of Λ^n and $R(\xi)$ is the scalar curvature, computed with the metric h_{ab} . Equation (9.88) reflects the fact that $\alpha(\xi)$ is a scalar, while $f^{ab}(\xi)$ is a traceless tensor.

We shall be interested in such metrics h_{ab} which are slowly varying on the cut-off scale, or, in other words with $R(\xi) \ll \Lambda^2$, and we can neglect the second term in (9.88).

After that we obtain the following expression for $\mathcal{K}[c, h]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[c, h] = & \exp \left(n \bar{\alpha} \int h^{1/2} d^n \xi \right) \\ & \times \int \mathcal{D}x(\xi) \exp \left(- \bar{\alpha} \int h^{1/2} h^{ab} \partial_a x \cdot \partial_b x d^n \xi \right) \end{aligned}$$

Before going further, we have to check whether our conjectures concerning the "freezing" of the Lagrange multipliers are correct.

Let us begin with fluctuations of α . Introducing:

$$\alpha(\xi) = \bar{\alpha}(1 + i\beta(\xi))$$

we can easily find the quadratic term in the induced action for the β -fields. Taking for simplicity of estimate $h_{ab} = \delta_{ab}$ we obtain

$$S_{\text{II}}(\beta) = \frac{1}{2} \int \beta(q) \beta(-q) B(q^2) \frac{d^n q}{(2\pi)^n}$$

with

$$B(q^2) = - \bigodot_k^{k+q} = \frac{1}{2} \int \frac{d^n k [k(k+q)]^2}{(2\pi)^n k^2 (k+q)^2}$$

where we have accounted for the fact that β interacts with the x -field through the Lagrangian:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = i\bar{\alpha}^2 \int \beta(\xi) (\partial_a x)^2 d^n \xi$$

A straightforward estimate of (9.91) gives:

$$B(q^2) = c\Lambda^n (1 + O(q^2/\Lambda^2))$$

If the constant c in (9.93) does not vanish, then the correlation length for the β -field, which is determined by the singularities in q -space, is of the order of Λ^{-1} . Therefore, in the generic case $c \neq 0$, we can neglect the influence of β -fluctuations since:

$$\frac{\left(\overline{(\Delta\alpha)^2}\right)^{1/2}}{\alpha} \sim \left(\overline{\beta^2}\right)^{1/2} \sim (\Lambda A)^{-1/2} \ll 1$$

where A is the volume of our object. In the presence of nontrivial h_{ab} our computation indicates that we have a term in the induced action

$$S_{\text{II}}(\beta) = \frac{c}{2} \Lambda^n \int \beta^2(\xi) h^{1/2}(\xi) d^n \xi + \dots$$

which suppresses fluctuations of β . Turning to the case of f -fluctuations, by similar arguments we find the most singular term in the corresponding action:

$$S_{\text{II}}[f] = d \cdot \Lambda^n (\bar{x})^{-2} \int h^{1/2} h_{aa'} h_{bb'} f^{ab} f^{a'b} d^n \xi$$

which for $d \neq 0$ indicates the irrelevance of f -fluctuations.

Let us notice at this point that the question of whether c and d may be taken to have generic values or whether one should apply the condition that either of them be zero is far from trivial. There could exist different continuum limits for string theory, the simplest one obtained without extra conditions on c and d , while the others require fine tuning of these constants. One has to decide what kind of possible continuum limits have the desired properties and correspond to gauge theory. At present, this question is unsolved, and we shall mainly investigate the generic continuum theory, keeping in mind other options.

In the generic case we have shown that the fluctuations of the Lagrange multiplier may be dropped, and we end up with the following expression (after trivial change of scale):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[c(s), h_{ab}(\xi)] &= \exp \left(A \int h^{1/2} d^n \xi \right) \\ &\times \int_{x(\xi(s))=c(s)} \mathcal{D}x(\xi) \exp \left(- \int h^{1/2} h^{ab} \partial_a x \cdot \partial_b x d^n \xi \right) \end{aligned}$$

The Green function for the contour $c(s)$ is obtained by integration on h_{ab} :

$$\begin{aligned} G[c(s)] &= \int \frac{\mathcal{D}h_{ab}}{\mathcal{D}f} \exp \left(-\mu \int h^{1/2} d^n \xi \right) \\ &\times \int \mathcal{D}x(\xi) \exp \left(- \int h^{1/2} h^{ab} \partial_a x \cdot \partial_b x d^n \xi \right) \end{aligned}$$

(where μ is the critical parameter).

Since expressions like (9.97) will form the basis of our further discussion, it is worthwhile to present another derivation of it. Let us consider the integral:

$$\int \mathcal{D}h_{ab} \exp \left(-\mu \int h^{1/2} d^n \xi - \int h^{1/2} h^{ab} g_{ab} d^n \xi \right)$$

where $g_{ab}(\xi)$ is some tensor. The integral in (9.98) is supposed to be covariantly regularized. That means that we can compute it by the following procedure. First find the saddle point of the action (9.98):

$$\begin{aligned}
 \delta \left(\mu \int h^{1/2} d^n \xi + \int h^{1/2} h^{ab} g_{ab} d^n \xi \right) \\
 = \frac{1}{2} \int h^{1/2} h^{ab} (\mu \delta h_{ab}) d^n \xi \\
 + \frac{1}{2} \int h^{1/2} (h^{cd} g_{cd} h^{ab} \delta h_{ab} + g_{cd} \delta h^{cd}) d^n \xi = 0
 \end{aligned}$$

This equation gives the position of the saddle point and the value of the action:

$$h_{ab} \sim g_{ab}, S \sim \int g^{1/2} d^n \xi$$

If we consider small fluctuations near this saddle point, we notice that they are nonpropagating owing to the absence of derivatives in (9.98).

More precisely, this means that they have a correlation length proportional to the inverse cut-off. Therefore their leading correction to the effective action must be local, and on the basis of general covariance must have the form (9.100). This is again the demonstration of our general rule that fields with short range correlations can be replaced by their mean values. In our case covariance dictates that these mean values are given by (9.100).

So, by the h -integration of (9.98) we have recovered the action (9.74), provided that $g_{ab} = \partial_a x \cdot \partial_b x$. This proves the equivalence of (9.97) to (9.76). Again, as in our first derivation of this equivalence, we have assumed the generic situation, i.e. that no divergent constants are zero. Whether this continuum limit is what we are interested in must be investigated separately in each particular case. In the next section we shall show how to compute (9.97) in the case $n = 2$ and what kind of physics is described by it.

14.9.5 9.5 Two-Dimensional Surfaces. Geometrical Introduction

For $n = 2$ we can proceed much further with (9.97), by explicit computation of the functional integrals.

To do this we shall first present the necessary geometrical properties of the functionals involved in the game.

Let us consider first:

$$W = \int h^{1/2} h^{ab} \hat{\partial}_a x \cdot \partial_b x d^2 \xi$$

where the function $\mathbf{x}(\xi)$ satisfies the boundary condition:

$$x(\xi(s)) = c(s).$$

Variation of W with respect to h_{ab} gives as we have seen in the preceding section:

$$\delta W = \int h^{1/2} T_{ab}(\xi) \delta h^{ab}(\xi) d^2 \xi$$

where T_{ab} can be considered as an energy-momentum tensor for the x field:

$$T_{ab} = \partial_a x \cdot \partial_b x - \frac{1}{2} h_{ab} h^{cd} \partial_c x \cdot \partial_d x$$

If we take h_{ab} so as to minimise W , that is apply the condition

$$T_{ab} = 0$$

we obtain:

$$h_{ab}^{\text{extr}} = c(\xi) \partial_a x \cdot \partial_b x$$

where $c(\xi)$ remains undetermined by (9.105). Substituting this into (9.101) we get:

$$W|_{h_{ab}=h_{ab}^{\text{extr}}} = \int (\det \|\partial_a x \cdot \partial_b x\|)^{1/2} d^2 \xi$$

We conclude, that the problem of finding the minimal area, given by (9.107) can be reduced to two equations:

$$\begin{aligned} \partial_a (h^{1/2} h^{ab} \partial_b x) &= 0 \\ T_{ab} = \partial_a x \cdot \partial_b x - \frac{1}{2} h_{ab} h^{cd} \partial_c x \cdot \partial_d x &= 0 \end{aligned}$$

The next important geometrical fact which will be extensively used below is the possibility of choosing a "conformal gauge" in which the metric tensor h_{ab} takes the form:

$$h_{ab}(\xi) = e^{\varphi(\xi)} \delta_{ab}$$

This extremely convenient gauge has some topological limitations. We shall discuss now both the derivation of (9.109) and these limitations.

The first naive argument which shows that (9.109) is possible is the following. The possibility of the choice (9.109) means that any metric h_{ab} can be given in the form:

$$g_{ab}(\xi) = (e^{\varphi(\xi)} \delta_{ab})^f = e^{\varphi(f(\xi))} \frac{\partial f^c}{\partial \xi^a} \frac{\partial f^c}{\partial \xi^b}$$

where $\{f^a(\xi)\}$ defines the necessary coordinate transformation. Hence, the r.h.s. of (9.110) depends on 3 arbitrary functions $f^1(\xi), f^2(\xi), \varphi(\xi)$. But $h_{ab}(\xi)$ also has three independent components. Therefore, the number of independent functions matches. However, this is not enough. We must show that the transformation (9.110) is nonsingular, i.e. the jacobian for passing to the (φ, f^a) variables is nonzero. To show this we shall consider a small variation of (9.110):

$$\delta g_{ab} = [\delta \varphi(\xi) h_{ab} + \nabla_a \omega_b + \nabla_b \omega_a]^J$$

where $\omega^a = \delta f^a(f^{-1}(\xi))$ and we have used the equation (9.28). The nonsingular nature of the transformation (9.110) will be proved if for any δg_{ab} we can find $\delta \varphi$ and ω such that (9.111) will hold. In other words, we must be able to solve the equation:

$$\delta \varphi(\xi) h_{ab} + \nabla_a \omega_b + \nabla_b \omega_a = \delta g_{ab}^{f^{-1}} \equiv \gamma_{ab}$$

or

$$(L\omega)_{ab} = \nabla_a \omega_b + \nabla_b \omega_a - h_{ab} \nabla^c \omega_c = \gamma_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} \gamma^c_c$$

which is obtained from (9.112) by subtracting the trace. The question, whether the conformal gauge is always accessible, is reduced now to the possibility of solving equation (9.113) which we shall rewrite symbolically:

$$L\omega = \gamma$$

Here we have denoted by L the differential operator, defined by (9.113) which takes vector fields into traceless tensors (notice that the number of independent components is the same). There exists a conjugate operator which acts in the opposite direction-transforming tensors into vectors. It is easy to realize that the equation (9.114) will be solvable if and only if the conjugate operator doesn't have zero modes. Indeed, let us multiply (9.114) by some tensor field f :

$$(f, L\omega) = (L^+ f, \omega) = (f, \gamma)$$

where:

$$(L^+ f_{ab}) = -\nabla^a f_{ab}; \quad f_a^a = 0$$

and scalar products are defined in a covariant way. We see that if f is a zero mode, i.e.

$$L^+ f = 0$$

then for such γ that $(\gamma, f) \neq 0$ equation (9.114) is not solvable. Now, if zero modes are absent then from

$$L^+ L\omega = L^+ \gamma$$

it follows that

$$L\omega = \gamma$$

since otherwise $L\omega - \gamma$ would be a zero mode.

The operator $L^+ L$ is a self-conjugate operator and (9.118) has a solution

$$\omega = \frac{1}{L^+ L} L^+ \gamma$$

provided that L doesn't have a zero mode either. If it has, then the solution of (9.118) still exists but is not unique. Namely in this case we have to define the Green function $1/L^+ L$ as the sum over nonzero modes only:

$$\langle \xi' | \frac{1}{L^+ L} | \xi \rangle = \sum_{n \neq 0} \frac{\omega_n(\xi') \omega_n(\xi)}{E_n}$$

$$L^+ L\omega_n = E_n \omega_n$$

and the general solution of (9.119) is:

$$\omega = \frac{1}{L^+ L} (L^+ \gamma) + \sum_{\alpha} c_{\alpha} \omega_{\alpha,0}$$

where $\{\omega_{\alpha,0}\}$ is the set of zero modes:

$$L\omega_{\alpha,0} = 0$$

and $\{c_{\alpha}\}$ are arbitrary constants.

So, our conclusion is that zero modes of the operator L^+ mean that the conformal gauge is not accessible, and zero modes of L that it is not unique.

The number of zero modes is regulated by the index theorem which we have mentioned in Chapter 6, and is closely connected with the topology of our manifold. We shall show this for the case of closed manifolds. The demonstration is based on the identity:

$$N_0(L) - N_0(L^+) = \text{Tr} \left(e^{-iL^+L} - e^{-iLL^+} \right)$$

(where N_0 is the number of zero modes) which in turn follows from the coincidence of nonzero eigenvalues of the operators L^+L and LL^+ . From the first order equations:

$$\begin{aligned} L\varphi &= \varepsilon\chi \\ L^+\chi &= \varepsilon\varphi \end{aligned}$$

we deduce:

$$\begin{aligned} L^+L\varphi &= \varepsilon L^+\chi = \varepsilon^2\varphi \\ LL^+\chi &= \varepsilon L\varphi = \varepsilon^2\chi \end{aligned}$$

Therefore the only contribution to (9.124) comes from the zero modes. The right hand side of (9.124) can be evaluated by taking $t \rightarrow 0$. In this limit it is a local, invariant expression depending on the metric tensor h_{ab} . If the metric were Euclidean then

$$\begin{aligned} (L^+L\omega)_a &= -\nabla^b (\nabla_a\omega_b + \nabla_b\omega_a - h_{ab}\nabla^c\omega_c) \\ &= -\partial^2\omega_a \\ (h_{ab} &= \delta_{ab}) \end{aligned}$$

and

$$\langle \xi | e^{-tL^+L} | \xi \rangle = 2 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} e^{-tp^2} = \frac{1}{2\pi t}$$

where the coefficient 2 comes from the number of the components of ω . As $t \rightarrow 0$ the external gravitational field does not have time to influence (9.128). As we see from this formula the characteristic intervals for the motion of a "particle" described by the wave equation (9.127) are $\Delta\xi \sim 1/p \sim \sqrt{t}$ which is just a diffusion law. The curvature $R(\xi)$ will have a considerable effect only if:

$$R(\xi)(\Delta\xi)^2 \sim tR(\xi) \sim 1$$

This consideration makes plausible the statement that for $t \rightarrow 0$ the expansion parameter in $\langle \xi | e^{-tL^+L} | \xi \rangle$ is $t \cdot R$. We expect that:

$$\begin{aligned} \langle \xi | e^{-tL^+L} | \xi \rangle &= \frac{1}{2\pi t} \{ 1 + a_1 t R(\xi) + O(t^2) \} \\ \langle \xi | e^{-tLL^+} | \xi \rangle &= \frac{1}{2\pi t} \{ 1 + a_2 t R(\xi) + O(t^2) \} \end{aligned}$$

Later we shall derive these formulas explicitly and compute $a_{1,2}$. Now, substituting (9.130) into (9.124) we get

$$N_0(L) - N_0(L^+) = c \cdot \chi$$

where $c = 2(a_1 - a_2)$ is still to be determined and

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int R \sqrt{h} \, d^2\xi$$

is the Euler character of our manifold. Here, in order to find c , it is sufficient to consider a sphere as an example in which $N_0(L)$ and $N_0(L^+)$ can be explicitly found. Using formulas of Riemannian geometry one has for $g_{ab} = e^\varphi \delta_{ab}$:

$$\begin{aligned}\nabla_a \omega_b &= \partial_a \omega_b - \Gamma_{ab}^c \omega_c \\ \Gamma_{ab}^c &= \frac{1}{2} (\partial_a \varphi \delta_{bc} + \partial_b \varphi \delta_{ac} - \partial_c \varphi \delta_{ab})\end{aligned}$$

Substituting these into equation (9.123) we reduce it to

$$\partial_z \varepsilon = 0$$

Here we have introduced the notation:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \omega^1 + i\omega^2 = e^{-\varphi} (\omega_1 + i\omega_2) \\ z &= \xi^1 + i\xi^2, \quad \partial_{\bar{x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} + i \frac{\partial}{\partial \xi^2} \right)\end{aligned}$$

At first glance there is a continuum number of solutions of (9.134):

$$\varepsilon = \varepsilon(z)$$

However, we have to consider only normalizable ones:

$$\begin{aligned}\|\omega_a\|^2 &= \int \sqrt{h_{ab}} \omega^a \omega^b \, d^2 \xi \\ &= \int e^{2\varphi} |\varepsilon|^2 \, d^2 z < \infty\end{aligned}$$

The standard metric for a sphere in stereographic coordinates is

$$ds^2 = \frac{dz \, d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}; \quad e^\varphi \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} |z|^{-4}$$

Therefore the only possible function (9.136) with a finite norm is:

$$\varepsilon(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2$$

Therefore $N_0(L) = \sigma$ (since α, β, γ are complex). The geometrical meaning of these solutions is clear—they are transformations which leave the original metric conformal. Therefore (9.139) describes the two-dimensional conformal group $O(2, 1)$.

As far as L^+ is concerned, the same reasoning leads to:

$$\begin{aligned}\nabla^a \gamma_{ab} &= \gamma_a^a = 0, \quad \text{or} \quad \partial_{\bar{z}} \phi = 0 \\ \phi &= e^{-\Phi} (\gamma_{11} - \gamma_{22} + 2i\gamma_{12})\end{aligned}$$

and the norm is defined as:

$$\begin{aligned}\|\gamma\|^2 &= \int \sqrt{h} h^{aa'} h^{bb'} \gamma_{ab} \gamma_{a'b'} \, d^2 \xi \\ &= \int e^{-\varphi} |\phi|^2 \, d^2 z\end{aligned}$$

Since $e^{-\varphi} \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} |z|^4$, we conclude that the operator L^+ does not have normalizable zero modes.

Recalling at last that a sphere has Euler character $\chi = 2$ we obtain:

$$N_0(L) - N_0(L^+) = 3\chi$$

Actually, this result can be strengthened. Let us show, that for $\chi < 0$ (a sphere with more than one handle) $N_0(L) = 0$. For this we compute:

$$\begin{aligned}(L^+ L\omega)_a &= -\nabla^b (\nabla_a \omega_b + \nabla_b \omega_a - h_{ab} \nabla^c \omega_c) \\ &= -\nabla^2 \omega_a - [\nabla^b, \nabla_a] \omega_b \\ &= -\left(\nabla^2 + \frac{1}{2}R\right) \omega_a\end{aligned}$$

For the manifolds with $\chi < 0$ one can consider a metric with constant $R < 0$ everywhere. For such a metric we have:

$$(L\omega, L\omega) = (\nabla_b \omega_a, \nabla_b \omega_a) - \frac{1}{2}R(\omega_a, \omega_a) > 0$$

(where scalar products are understood in the same way as above). From this inequality we conclude that $N_0(L) = 0$. This means that:

$$N_0(L^+) = -3\chi = 6g - 6 \quad (\text{for } g \geq 2)$$

where g is the number of handles. It is easy to check directly, that on a torus ($g = 1, \chi = 0$) $N_0(L) = N_0(L^+) = 2$.

So, we have found that on a sphere we can always introduce a conformal gauge, which is defined modulo $SL(2, C)$ transformations (9.139), which require extra gauge fixing. In the case of manifolds with higher topologies we have topological obstructions for the conformal gauge. The best thing which can be done is the following choice of gauge:

$$h_{ab}(\xi) = e^{\varphi(\xi)} h_{ab}^{(0)}(\xi; \tau_1, \dots, \tau_{6g-6})$$

where $h_{ab}^{(0)}$ is some metric, which can be chosen to have constant negative curvature and which depends on $6g - 6$ extra parameters. Integration over all metrics must include not only functional integration over $\varphi(\xi)$ but also the $6g - 6$ dimensional integral over $\{\tau_i\}$. The theory of such integrations is not well developed, but we shall explain here a qualitative meaning of these extra parameters.

Let us first consider a torus. It can be represented as a parallelogram in the ξ -plane for which opposite sides are identified. In general, this figure can be mapped by a conformal transformation onto any other, say onto a square. However, the identification of the opposite sides will be lost. If we insist on preserving the identifications, the only options for a conformal map onto another parallelogram will be rigid rotations and scale transformations. Hence each parallelogram representing the torus can be characterized by the two conformal invariants-the ratio

of its sides and the angle between them. They are just the extra parameters, described above. One of them can be interpreted as a "length" of the torus, while the other is the angle which determines some canonical directions on it.

To finish this section, let us discuss briefly what happens in the case of surfaces with a boundary, taking the topology of a disc as an example. The analysis again rests on equation (9.114) but in this case we have to think of boundary conditions. If we try to consider transformations $\xi \rightarrow f(\xi)$ which do not change the boundary, i.e.:

$$f(\xi_0(s)) = \xi_0(s)$$

(where $\xi = \xi_0(s)$ is the equation for the boundary) we shall find that this requires the boundary condition:

$$\omega^a(\xi(s)) = 0$$

However, it is not possible for general γ in (9.114) to find such a solution because it is a first-order differential equation. Equation (9.118) could have been solved with conditions (9.147) since it is a standard Dirichlet problem, but its solution (9.120) will not satisfy (9.114). This means that we cannot reach the conformal gauge by transformations with the condition (9.146), and we have to weaken this condition.

What is possible, is to use the transformations which reparametrize the boundary:

$$f^a(\xi_0(s)) = \xi_0^a(\alpha(s))$$

but leave the shape of the disc unchanged. In terms of ω , that means that:

$$\begin{aligned}\omega_\perp(\xi_0(s)) &\equiv n_a(s)\omega^a(\xi_0(s)) = 0 \\ \omega_\parallel(\xi_0(s)) &\equiv t_a(s)\omega^a(\xi_0(s)) - \text{unconstrained}\end{aligned}$$

(where n and t are the tangent and normal vectors of the boundary).

In this case it is easy to solve equation (9.119) explicitly. According to (9.134) it takes the form:

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}}\varepsilon &= \gamma(z, \bar{z}) \\ \varepsilon_\perp &= \text{Re}(e^{-is}\varepsilon(e^{is})) = 0\end{aligned}$$

where we have parametrized the boundary of the disc by

$$z_0(s) = e^{is}, \quad 0 \leq s < 2\pi$$

The general solution of (9.150) is given by:

$$\varepsilon(z, z) = \partial_z \int G(z, w)\gamma(w)d^2w + f(z)$$

where $f(z)$ must be adjusted so as to satisfy the boundary conditions and $G(z, w)$ is a Green function for the Laplacian.

The solution of this problem always exists, but is it unique? To answer this question we have to look at the homogeneous equation:

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}}\varepsilon &= 0 \\ \varepsilon_\perp &= \text{Re}(e^{-is}\varepsilon(e^{is})) = 0\end{aligned}$$

It is easy to check that this has three linearly independent solutions:

$$\varepsilon^{(1)} = iz, \quad \varepsilon^{(2)} = 1 - z^2, \quad \varepsilon^{(3)} = i(1 + z^2)$$

which can be added to (9.151). These solutions are infinitesimal conformal transformations of the $SL(2, R)$ group which map the unit disc onto itself. The finite version of these maps is given by:

$$z \rightarrow \tilde{z} = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

(where α is a real phase and a a complex number).

Notice, that after the solution of (9.150) is found, then $\omega_\parallel(\xi_0(s))$ is uniquely defined (modulo $SL(2, R)$ transformations).

Our conclusion for the case of the unit disc is thus the following. The conformal gauge is accessible provided we include diffeomorphisms which reparametrize the boundary. This

reparametrization, defined modulo $SL(2, R)$ transformations, is determined by the original metric $h_{ab}(\xi)$. Since in our original formulation of the functional integral (9.76) we factored out the diffeomorphisms which become identical at the boundary, we have to expect that the integration will be reduced to the form:

$$\frac{\mathcal{D}h_{ab}(\xi)}{\mathcal{D}f(\xi)} = \mathcal{D}\varphi(\xi)\mathcal{D}\alpha(s) \times (\text{jacobian})$$

We shall compute the jacobian later, by now it is important to realize that the integration over all metrics must include not only the φ integration, but also integration over all possible reparametrizations $\alpha(s)$. In a certain sense $\{\alpha(s)\}$ replaces the discrete set of parameters which we had for closed surfaces with complicated topology.

14.9.6 9.6 Computation of Functional Integrals

The aim of this section is to compute the integral:

$$G[c(s)] = \int \frac{\mathcal{D}h_{ab}(\xi)}{\mathcal{D}f(\xi)} \exp\left(-\mu \int h^{1/2} d^2\xi\right) \\ \times \int_{x(\xi(s))=c(s)} \mathcal{D}x(\xi) \exp\left(-\int h^{1/2} h^{ab} \partial_a x \cdot \partial_b x d^2\xi\right)$$

to which the problem of random surfaces has been reduced.

We shall begin with the x -integration. The reason why it can be performed is easy to see. If we substitute h_{ab} in the conformal gauge $h_{ab} = e^\varphi \delta_{ab}$ into (9.156) we see that the φ -dependence disappears, indicating conformal invariance of the action. However, since we are dealing with quantum theory, there is a conformal anomaly which will bring φ -dependence back. The anomaly is due to the regularization (which breaks conformal invariance) of (9.156) at small distances, which is needed to avoid divergences. Since it is an important point we shall derive it by several different approaches. First, let us consider the case of weak gravitational fields:

$$h_{ab} = \delta_{ab} + h_{ab}^{(1)}$$

In the case of infinite system, the induced action in quadratic approximation will be given by:

$$S_{\Pi} = -\frac{1}{2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} h_{ab}^{(1)}(q) h_{cd}^{(1)}(-q) \Pi_{ab|cd}(q) \\ \Pi_{ab|cd}(q) = -\sum_k^{k+q} -\frac{\mathcal{D}}{8} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{t_{ab}(k, q) t_{cd}(k, q)}{k^2(k+q)^2} \\ t_{ab}(k, q) = k_a(k+q)_b + k_b(k+q)_a - \delta_{ab} k \cdot (k+q)$$

(the vertex t_{ab} is easily read off from (9.104)).

The integral (9.158) is divergent and must be regularized. This means that the integral itself defines only the part of $\Pi(q)$ which has singularities in q or in other words, propagates in ξ -space, while the regularization adds to this expression arbitrary (a priori) polynomials in q or local expressions in ξ -space. The condition which fixes these local parts uniquely is gauge invariance of the effective action. For the actual computation it is convenient to introduce complex notation:

$$k_{\pm} = k_1 \pm ik_2 = |k|e^{\pm i\alpha} \\ k^2 = k_+ k_-$$

and to consider first the component:

$$\begin{aligned}\Pi_{++++} &= \frac{\mathcal{D}}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_+^2 (q_+ + k_+)^2}{k^2 (q_+ + k)^2} \\ &= \frac{\mathcal{D}}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_+ (q_+ + k_+)}{k_- (q_- + k_-)} = \mathcal{D} C(q^2) q_+^4\end{aligned}$$

with as yet unknown $C(q^2)$; we have used the $O(2)$ invariance of the integral and the fact that $1/k_-$ transforms as k_+ . It is tempting to split the integral (9.160) into $(+)$ and $(-)$ factors since $2\pi i d^2k = dk_+ dk_-$. This is almost possible but requires some extra care. Oddly, one has to go to Minkowskian space. The propagators and momenta change as:

$$\begin{aligned}k_{\pm} &\rightarrow k_0 \pm k_1 \\ \frac{1}{k^2} &\rightarrow \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \\ \frac{1}{k_-} &\rightarrow \frac{k_+}{k^2 + i\epsilon} = \frac{1}{k_- + i\epsilon \operatorname{sign} k_+}\end{aligned}$$

So our integral has the form:

$$\begin{aligned}\Pi_{++++} &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_+ k_+ (q_+ + k_+) \frac{\mathcal{D}}{16i\pi^2} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_-}{(k_- + i\epsilon \operatorname{sign} k_+) (q_- + k_- + i\epsilon \operatorname{sign} (q_+ + k_+))}\end{aligned}$$

If we take $q_+ < 0$ then the singularities in k -space are on opposite sides of the real axis only if $0 < k_+ < -q_+$. Otherwise the k_- -integral gives zero. We have:

$$\begin{aligned}\Pi_{++++} &= -\frac{\mathcal{D}}{8} \frac{1}{q_-} \int_0^{-q_+} dk_+ k_+ (q_+ + k_+) \\ &= \frac{\mathcal{D}}{48\pi} \frac{q_+^3}{q_-}\end{aligned}$$

which is the desired answer.

The finiteness of the integral (9.160) also allows one to use the following trick to compute it:

$$\begin{aligned}(9.160) &= \frac{\mathcal{D}}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_+ (k_+ + q_+)}{k_- (k_- + q_-)} e^{-\epsilon k^2} \Big|_{\epsilon \rightarrow 0} \\ &= \frac{\mathcal{D}}{2q_-} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-\epsilon k^2 k_+ (k_+ + q_-) \left(\frac{1}{k_-} - \frac{1}{k_- + q_-}\right)} \Big|_{\epsilon \rightarrow 0} \\ &= -\frac{\mathcal{D}}{2q_-} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-\epsilon (k-q)^2} \frac{(k-q)_+ k_+}{k_-} \Big|_{\epsilon \rightarrow 0} \\ &= -\frac{\mathcal{D}}{2q_-} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-\epsilon k^2} e^{\epsilon k_- q_+} \frac{k_+^2 - k_+ q_+}{k_-} \Big|_{\epsilon \rightarrow 0} \\ &= -\frac{\mathcal{D}}{2q_-} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-\epsilon k^2} \left(\frac{1}{6} \epsilon^3 q_+^3 k^4 - \frac{1}{2} q_+^3 \epsilon^2 k^2 \right) \Big|_{\epsilon \rightarrow 0} \\ &= \frac{\mathcal{D} q_+^3}{16\pi q_-} \int dt e^{-t} (t - t^2/3) = \frac{\mathcal{D} q_+^3}{48\pi q_-}\end{aligned}$$

Obviously this also implies:

$$\Pi_{--,--} = \frac{\mathcal{D}}{48\pi} \frac{q_-^3}{q_+}$$

Let us now consider the remaining component

$$\begin{aligned} \Pi_{++,--} &= \frac{\mathcal{D}}{2} \int \frac{d^2k}{k^2(q+k)^2} k_+(q+k)_+ k_-(q+k)_- \\ &= \int d^2k = A \end{aligned}$$

where A is a quadratically divergent constant which we shall fix in a moment. So the general form of the induced action is the following:

$$\begin{aligned} S_{\text{II}} &= -\frac{\mathcal{D}}{48\pi} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{q_-^3}{q_-} h_{--}(q) h_{--}(-q) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{q_-^3}{q_+} h_{++}(q) h_{++}(-q) + A q_-^2 h_{++}(q) h_{--}(-q) \\ &\quad \left. + B q_-^2 h_{+-}(q) h_{+-}(-q) + C [h_{+-} q_-^2 h_{++} + q_+^2 h_{+-} h_{--}] \right\} \end{aligned}$$

where we have added another possible local counter-terms with some constants A, B and C . The constants A, B and C can be determined from the condition that the induced action is generally covariant. The transformation law for h_{ab} is:

$$h_{ab} \rightarrow h_{ab} + \nabla_a \omega_b + \nabla_b \omega_a$$

which in the linearized approximation takes the form:

$$\begin{aligned} h_{++} &\rightarrow h_{++} + 2q_+ \omega_+(q) \\ h_{--} &\rightarrow h_{--} + 2q_- \omega_-(q) \\ h_{+-} &\rightarrow h_{+-} + q_+ \omega_-(q) + q_- \omega_+(q) \end{aligned}$$

An important point is that although the nonlocal part in (9.166) is not gauge invariant, its gauge variation appears to be local and hence can be compensated by the gauge variation of the local part. We have the only gauge invariant choice:

$$S_{\text{II}} = -\frac{\mathcal{D}}{48\pi} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} R(q) \frac{1}{2q^2} R(-q)$$

where:

$$\begin{aligned} R(q) &= \frac{1}{4} (q_+^2 h_{--} + q_-^2 h_{++} - 2q^2 h_{+-}) \\ &= (q_\alpha q_\beta - q^2 \delta_{\alpha\beta}) h^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

(it is easy to recognize in $R(q)$ a linearized scalar curvature made of h_{ab}). In the conformal gauge:

$$h_{++} = h_{--} = 0, \quad h_{+-} \approx 2\varphi$$

and

$$S_{\text{II}} = -\frac{\mathcal{D}}{96\pi} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} q^2 \varphi(q) \varphi(-q)$$

The dependence on φ which was originally absent in the action has appeared here through the following mechanism. The induced action contained φ -independent nonlocal terms which were not gauge invariant. We were forced to add a certain combination of local terms which restore the gauge invariance. These terms were φ -dependent. It is quite obvious that in higher orders the nonlocal part of the induced action will also be φ -independent. From this follows an important conclusion: in the conformal gauge the induced action is local. This can be considered as a manifestation of the fact that the original action was conformally invariant and the conformal anomaly arises only because of the small distance cut-off, the effect of which must necessarily be local.

The locality of the action, together with invariance properties, permits us to determine its exact form. To do this, let us notice that the conformally Euclidean metric

$$ds^2 = e^{\varphi(\bar{z}, z)} dz d\bar{z}$$

preserves its form under analytic changes of coordinates:

$$z \rightarrow w(z)$$

$$\bar{z} \rightarrow \bar{w}(\bar{z})$$

$$ds^2 = e^{\varphi(z, \bar{z})} dz d\bar{z} \rightarrow e^{\varphi(z(w), \bar{w}(\bar{z}))} \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 dw d\bar{w}$$

Therefore, in the conformal gauge, the induced action must be a local function of φ invariant under the transformation:

$$\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}(z, \bar{z}) = \tilde{\varphi} \left(w(z), \overline{w(z)} \right) + \log \left| \frac{dw}{dz} \right|^2$$

where $w(z)$ is an arbitrary analytic function. The invariance is correct only modulo boundary terms since the shape of the domain inevitably changes under the analytic map w . We shall postpone the discussion of boundary effects. As far as the bulk part of the action is concerned, the only option consistent with the above requirement is

$$S[\varphi] = A \int d^2z (2\partial_z \varphi \partial_{\bar{z}} \varphi + \mu^2 e^\varphi)$$

(where A is some constant).

We will call S the Liouville action.

The invariance (9.175) of (9.176) is quite obvious since

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \log \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = 0$$

Any other invariant expression would have a higher number of derivatives and so can be dropped in the continuum limit.

Comparing (9.176) with the approximate expression (9.172) one gets:

$$A = -\frac{\mathcal{D}}{48\pi}$$

Now, it remains to compute the Jacobian in (9.155), and the problem of the distribution of random surfaces in internal geometries will be solved. The simplest way to find the jacobian is to consider the norm in the space of all metrics:

$$\|\delta h\|^2 = \int h^{1/2} \left(h^{aa'} h^{bb'} + c h^{ab} h^{a'b'} \right) \delta h_{ab} \delta h_{a'b'}$$

and to substitute

$$h^{ab} = e^{-\varphi} \delta^{ab}; \quad h^{1/2} = e^{\varphi}$$

$$\delta h_{ab} = (\delta\varphi + \nabla^a \varepsilon_a) h_{ab} + (L\varepsilon)_{ab}$$

(where L was defined in (9.113)).

We obtain:

$$\|\delta h\|^2 = \int e^{\varphi} (\delta\varphi + \nabla^a \varepsilon_a)^2 (2 + 4c) d^2\xi + (L\varepsilon, L\varepsilon)$$

From here it follows:

$$\mathcal{D}h = \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varepsilon \det^{1/2} (L^+ L)$$

$$(L^+ L \omega)_a = \nabla^b (\nabla_a \omega_b + \nabla_b \omega_a - h_{ab} \nabla^c \omega_c)$$

We perform now the computation of $\det (L^+ L)$ in a way similar to the one we used for the ordinary Laplacian. Namely, let us again take a weak gravitational field. The formal quadratic form, from which the operator (9.180) arises as a kernel, can be written as:

$$W = \int h^{1/2} h^{aa'} h^{bb'} \phi_{ab} \phi_{a'b'} d^2\xi$$

$$\phi_{ab} = \frac{1}{2} (\nabla_a \omega_b + \nabla_b \omega_a - h_{ab} \nabla^c \omega_c)$$

Now, we shall compute the polarization operator $\Pi_{-,-}$ as in (9.164). For doing this it is sufficient to take h_{ab} in the form:

$$\|h_{ab}\| = \begin{pmatrix} h_{++} & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

with small h_{++} . As we have seen in the scalar case, the general determinant can be reconstructed from this small h -field limit. Standard formulae for covariant derivatives give:

$$\begin{aligned} \phi_{++} &\approx \nabla_+ \omega_+ - \frac{1}{4} (\nabla_+ \omega_- + \nabla_- \omega_+) h_{++} \\ &\approx \partial_+ \omega_+ + \frac{1}{4} (\partial_- h_{++}) \omega_+ - \frac{1}{4} (\partial_+ h_{++}) \omega_- \\ &\quad - \frac{1}{4} h_{++} (\partial_+ \omega_- + \partial_- \omega_+) \\ \phi_{--} &\approx \partial_- \omega_- \end{aligned}$$

Hence:

$$\begin{aligned} W = \int &\left[(\partial_+ \omega_+) (\partial_- \omega_-) + \frac{1}{4} (\partial_- h_{++}) (\omega_+ \partial_- \omega_-) \right. \\ &\left. - \frac{1}{4} (\partial_+ h_{++}) \omega_- \partial_- \omega_- \right) - \frac{1}{4} h_{++} (\partial_+ \omega_-) (\partial_- \omega_-) \\ &\left. - \frac{1}{4} h_{++} (\partial_- \omega_+) (\partial_- \omega_-) \right] d^2\xi \end{aligned}$$

Since only the $\langle \omega_+ \omega_- \rangle$ propagator is nonzero, the third and the fourth terms do not contribute.

We are left with

$$\det^{-1/2} (L^+ L) = \int \mathcal{D}\omega_{\pm} \exp \left\{ - \int d^2\xi [\partial_+ \omega_+ \partial_- \omega_- + \frac{1}{4} (\partial_- h_+) \omega_+ \partial_- \omega_- - \frac{1}{4} h_{++} (\partial_- \omega_+) \partial_- \omega_-] \right\}$$

From this it is easy to obtain the quadratic term of the effective action for h_{++} :

$$\begin{aligned} S_{\text{II}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} h_{++}(q) h_{++}(-q) \Pi_{--,--}^{gh}(q); \\ \Pi_{--,--}^{gh}(q) &= \bigcirc_k^{k+q} + \partial_- \bigcirc_k^{k+q} + \partial_- \bigcirc_k^{k+q} \partial_- \\ &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{16} \frac{k^2 (k+q)_-^2}{k^2 (k+q)^2} + 2 \cdot \frac{1}{16} q_- \frac{k_-^2 (k+q)_-}{k^2 (k+q)^2} - \frac{1}{16} q_-^2 \frac{k_- (k+q)_-}{k^2 (k+q)^2} \right) \end{aligned}$$

A computation similar to (9.160)-(9.163) gives the result

$$\Pi_{--,--}^{gh} = \dots(q) = \frac{q_-^3}{16q_+} \left(\frac{1}{24\pi} + \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} \right) = \frac{26}{48\pi} \frac{q_-^3}{16q_+}$$

Substituting into (9.186) and comparing with (9.165) we conclude that the role of $\mathcal{D}$ is now played by the number 26 and in the gauge (9.180)

$$\det^{1/2} (L^+ L) = \exp \left\{ -\frac{26}{48\pi} \int d^2 \bar{z} (2\partial_z \varphi \partial_{\bar{z}} \varphi + \tilde{\mu}^2 e^{\varphi}) \right\}$$

Collecting now (9.176), (9.177), (9.180) and (9.188) we get the final expression for the distribution of the surfaces in internal metrics in (9.156):

$$Z^{\text{closed surf.}} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -\frac{26 - \mathcal{D}}{48\pi} \int d^2 \xi \left(\frac{1}{2} (\partial_a \varphi)^2 + m^2 e^{\varphi} \right) \right\}$$

14.9.7 9.7 Scattering Amplitudes

In the case of paths we have demonstrated how to compute Green functions and amplitudes i.e. the amplitudes for a path to pass through a set of given points. The answer was given by Feynman diagrams as it should be. What shall we obtain in the case of surface, now that we have learned how to compute the functional integral?

Let us consider a surface with pinned points $\{x_i\}$. The corresponding amplitude is given by:

$$G(x_1, \dots, x_N) = \left\langle \prod_i \int h^{1/2}(\xi_i) \delta(x_i - x(\xi_i)) d^2 \xi_i \right\rangle$$

(where the average is taken with respect to the random surface functional measure). By passing to the momentum representation, we rewrite (9.190) as:

$$G(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \left\langle \prod_i \int h^{1/2}(\xi_i) e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}(\xi_i)} d^2 \xi_i \right\rangle$$

A nice thing about this formula is that the $\mathbf{x}$ -integration in it remains Gaussian and can be easily performed. Namely, we have to compute:

$$G(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \int \frac{\mathcal{D}h_{ab}(\xi)}{\mathcal{D}f(\xi)} \exp \left(-\lambda_0 \int h^{1/2} d^2\xi \right) \int \prod_j d^2\xi_j h^{1/2}(\xi_j) \\ \times \int \mathcal{D}x(\xi) \exp \left\{ -\frac{1}{16\pi} \int h^{1/2} h^{ab} \partial_a x \cdot \partial_b x + i \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{x}(\xi_j) \right\}$$

(The coefficient $1/16\pi$ is a convenient x -normalization). Passing to the conformal gauge, and writing $x = x_{\text{cl}} + y$ where x_{cl} satisfies

$$-\frac{1}{8\pi} \partial^2 x_{\text{cl}} = i \sum_j p_j \delta(\xi - \xi_j) \\ x_{\text{cl}} = i \sum_j \mathcal{D}(\xi | \xi_j) p_j = -i \sum_j p_j \log |\xi - \xi_j|^2$$

(Here $\mathcal{D}(\xi | \xi')$ is the Green function of the Laplacian). We obtain:

$$G(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \int \mathcal{D}\varphi(\xi) \exp \left[-\frac{1}{\gamma} \int ((\partial\varphi)^2 + \mu_0 e^\varphi) d^2\xi \right] \\ \times \int \prod_j d^2\xi_j \exp \left(\varphi(\xi_j) - \frac{1}{2} \mathbf{p}_j^2 \mathcal{D}(\xi_j | \xi_j) \right) \\ \times \exp \left\{ \sum_{i<j} 2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \log |\xi_i - \xi_j| \right\}$$

The quantity $\mathcal{D}(\xi | \xi)$ is singular and an explanation of its meaning will be given shortly below. Before doing this let us rewrite (9.194) in the form:

$$G(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \int \prod_j d^2\xi_j \prod_{i<j} |\xi_i - \xi_j|^{2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j} \\ \times F(\mathbf{p}_1^2, \dots, \mathbf{p}_N^2; \xi_1, \dots, \xi_N)$$

where F is given by a Liouville functional integral. We have to expect that F has poles in p_j^2 corresponding to the physical spectrum of the string. The on-shell scattering amplitude will be given by the residue at these poles. Denoting

$$\phi(\xi_1, \dots, \xi_N) = \text{res}_{p_j^2 = -m^2} F(p_1^2, \dots, p_N^2; \xi_1, \dots, \xi_N)$$

(where m^2 is the position of the presumed pole and the space-time signature is chosen such that $p^2 = p_i^2 - p_0^2 = -m^2$) we obtain an expression for the scattering amplitude $\mathcal{A}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$:

$$\mathcal{A}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \int \prod_{j=1}^N d^2\xi_j \prod_{i<j} |\xi_i - \xi_j|^{2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j} \phi(\xi_1, \dots, \xi_N)$$

Even without knowledge of ϕ this formula contains information, since ϕ depends on fewer variables than A . But what is the meaning of ϕ ? To be sure it is some correlation function of the Liouville field theory, and so in principle we have reduced the problem of finding the $\mathcal{D}$ dimensional scattering amplitude to two-dimensional theory. In order to find the kind of the

correlation functions we need let us go back to (9.195) and try to decipher $\mathcal{D}(\xi | \xi)$ in it. It is clear that we have to use a cut-off in this expression which does not destroy general covariance. A suitable choice is

$$\mathcal{D}(\xi | \xi) = \sum_n \frac{\psi_n^2(\xi)}{\lambda_n} e^{-\epsilon \lambda_n}$$

where $\psi_n(\xi)$ and λ_n are eigenfunctions and eigenvalues of the laplacian. This choice is the same one which we used in defining determinants (which were regularized by the Schwinger proper time cut-off) and is equivalent to the use of Pauli-Villars regulators. There is a simple naive way to compute (9.198). It consists of the observation that:

$$\mathcal{D}(\xi | \xi) = -\log(\Delta\xi)_{\min}^2$$

where $(\Delta\xi)_{\min}^2$ is the cut-off in the ξ -space. However, this cut-off is ξ -dependent, since we have to fix the minimal invariant interval $(\Delta s)_{\min}^2$.

We have:

$$\begin{aligned} (\Delta s)_{\min}^2 &= e^{\varphi(\xi)} (\Delta\xi)_{\min}^2 = \epsilon \\ (\Delta\xi)_{\min}^2 &= \epsilon e^{-\varphi(\xi)} \end{aligned}$$

and on substituting this into (9.199) we get:

$$\mathcal{D}(\xi | \xi) = \log \frac{1}{\epsilon} + \varphi(\xi)$$

This formula looks suspicious, since the left-hand side must be scalar under conformal transformation:

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow f(\xi) \\ \mathcal{D}(\xi | \xi) &\rightarrow \mathcal{D}(f(\xi) | f(\xi)) \end{aligned}$$

At the same time:

$$\varphi(\xi) \rightarrow \varphi(f(\xi)) + \log \left| \frac{df}{d\xi} \right|^2$$

This is slightly confusing. We can even strengthen this confusion by noticing that the Green function for non-coincident points,

$$\mathcal{D}(\xi_1 | \xi_2) = -\log |\xi_1 - \xi_2|^2$$

is not scalar either, since, for example under the scale transformation $\xi \rightarrow \lambda\xi$, it changes. The origin of the trouble is that the Laplace operator on any compact manifold has a zero mode—the constant function. This zero mode, which is revealed as translation invariance $x \rightarrow x + a$ in the integrand (9.192) must be carefully subtracted from the Green function. The Green function without zero mode $\mathcal{D}'(\xi_1 | \xi_2)$ is well defined and does not increase logarithmically as (9.204). It is easy to show that

$$\mathcal{D}'(\xi_1 | \xi_2) = \mathcal{D}(\xi_1 | \xi_2) + f(\xi_1) + f(\xi_2)$$

where $f(\xi)$ is determined from the conditions that its Laplacian is constant and that it cancels the logarithmic increase at infinity. It is easy to give explicit formulas for $f(\xi)$, but they are not needed. Indeed:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \mathcal{D}'(\xi_i | \xi_j) &= \sum_{i,j} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \mathcal{D}(\xi_i | \xi_j) \\
 &\quad + \sum_{i,j} \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j (f(\xi_i) + f(\xi_j)) \\
 &= \sum_{i,j} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \mathcal{D}(\xi_i | \xi_j) + 2 \left[\sum_i \mathbf{p}_i f(\xi_i) \right] \cdot \left(\sum_j \mathbf{p}_j \right) \\
 &= \sum_{i,j} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \mathcal{D}(\xi_i | \xi_j)
 \end{aligned}$$

where we have used momentum conservation. By its construction $\mathcal{D}'$ has correct transformation properties, but we need not bother to replace $\mathcal{D}$ by $\mathcal{D}'$ in the previous formulas.

So, we obtain the following expression for the function ϕ in (9.190):

$$\begin{aligned}
 \phi(\xi_1, \dots, \xi_N) &= \langle \psi_\Delta(\xi_1), \dots, \psi_\Delta(\xi_N) \rangle \\
 \psi_\Delta &= e^{\Delta \varphi(\xi)}, \quad \Delta = 1 + m^2/2
 \end{aligned}$$

The average in this formula is taken with respect to the Liouville action. The value of Δ is determined from the condition that the function $F(\mathbf{p}_1^2, \dots, \mathbf{p}_N^2; \xi_1, \dots, \xi_N)$ in (9.196) has a pole at $\mathbf{p}_j^2 = -m^2$. This correlation function can also be presented as a partition function of a punctured sphere on which the Liouville field $\varphi(\xi)$ has parabolic singularities:

$$e^{\varphi(\xi)} \rightarrow \frac{1}{|\xi - \xi_i|^2 \log^2 |\xi - \xi_i|}$$

The next natural question which we shall address in the following section concerns the properties of the correlation functions (9.207) and their relation to the properties of the string scattering amplitudes (9.197).

14.9.8 9.8 Scattering Amplitudes and the Operator Product Expansion

The results of the preceding section can be summarized as follows. The amplitude is given by:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) &\sim \int \prod_{j=1}^N d^2 \xi_j \langle V_{\mathbf{p}_1}(\xi_1) \dots V_{\mathbf{p}_N}(\xi_N) \rangle \\
 V_{\mathbf{p}}(\xi) &= \psi_\Delta(\xi) : \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}(\xi)) :
 \end{aligned}$$

Here we have introduced a new notation, $: \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}(\xi)) :$. By it we mean that $x(\xi)$ is a free bosonic field and when computing averages of the product of different exponents, one has, while using the Wick theorem, to avoid pairing of x inside the symbol: $:$. Therefore:

$$\begin{aligned}
 &\langle : e^{i\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}(\xi_1)} \dots : e^{i\mathbf{p}_N \cdot \mathbf{x}(\xi_N)} : \rangle \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} \exp \left(2 \sum_{i < j}' \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \log |\xi_i - \xi_j| \right) \\
 &= \prod_{i < j} |\xi_i - \xi_j|^{2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j}
 \end{aligned}$$

From this we recover (9.197) (A helpful note: to compute such averages it is convenient to consider small p_i and to write

$$\begin{aligned}
 \left\langle \prod_j : e^{ip_j \cdot x(\xi_j)} : \right\rangle &\approx \left\langle \prod_j (1 + ip_j \cdot x(\xi_j)) \right\rangle \\
 &= 1 - \sum_{i < j} p_i \cdot p_j \langle x(\xi_i) \cdot x(\xi_j) \rangle + O(p_i^4) \\
 &\approx \exp \left(- \sum_{i < j} p_i \cdot p_j \langle x(\xi_i) x \cdot (\xi_j) \rangle \right)
 \end{aligned}$$

(because we know in advance that the result is Gaussian with respect to p_i).

The correlation functions (9.209) have a remarkable property. They are covariant under the group of projective transformations $SL(2, C)$. Let us introduce complex variables $z = \xi^1 + i\xi^2$ and $\bar{z} = \xi^1 - i\xi^2$, and check what happens with the product (9.207) if we change:

$$z \rightarrow \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = w(z); \quad \alpha\delta - \gamma\beta = 1$$

We have:

$$z_1 - z_2 \rightarrow \frac{z_1 - z_2}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_2 + \delta)}$$

And, hence:

$$\begin{aligned}
 \prod_{i < j} |\xi_i - \xi_j|^{2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j} &= \prod_{i < j} ((z_i - z_j)(\bar{z}_i - \bar{z}_j))^{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j} \\
 &\rightarrow \prod_{i < j} \left(\frac{1}{|\gamma z_i + \delta|^2 |\gamma z_j + \delta|^2} \right)^{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j} \prod_{i < j} |\xi_i - \xi_j|^{2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j}
 \end{aligned}$$

The first factor has the structure which we have already encountered in (9.206), and we rewrite it as:

$$\begin{aligned}
 \prod_{i < j} \left(\left| \frac{dw}{dz}(z_i) \right| \left| \frac{dw}{dz}(z_j) \right| \right)^{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j} &= \exp \left(2 \sum_{i < j} p_i \cdot p_j \log \left| \frac{dw}{dz}(z_i) \right| \right) \\
 &= \prod_j \left| \frac{dw}{dz}(z_j) \right|^{-p_j^2}
 \end{aligned}$$

(where we have used momentum conservation $\sum_j p_j = 0$). This result can be formalized as follows. Let us consider an operator:

$$U_{\mathbf{p}}(z, \bar{z}) =: e^{i\mathbf{p} \cdot x(z, \bar{z})} :$$

We have proved that its correlation functions are invariant under the transformation:

$$U_{\mathbf{p}}(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{dw}{dz} \right)^{p_2^2} \left(\frac{\overline{dw}}{\overline{dz}} \right)^{p_2^2} U_{\mathbf{p}}(w(z), \overline{w(z)})$$

with

$$w(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \gamma\beta = 1$$

We shall refer to such a situation by saying that the operator has anomalous dimension $\mathbf{p}^2$, and that we are dealing with a conformal quantum field theory.

How did it happen, that starting from the field $\mathbf{x}$ which has dimension zero we obtained by exponentiating it a field with nonzero dimension? The "leak" of dimensionality occurs through the ultraviolet cut-off which we excluded by taking the normal product : $\therefore$. Otherwise we would get coefficients containing ε^{-p^2} (where ε is the small distance cut-off) and the correlation functions are formally dimensionless, provided that we change the cut-off scale simultaneously. This scale transformation is not interesting. The physical rescaling does not change the cut-off. Generically, there could be no scale invariance at all in this case. But in many important cases, like the one we have discussed, it still exists although the transformation properties of the fields are renormalized.

Let us turn now to the first factor in (9.208). By construction it has invariance under the transformation (see (9.203))

$$\psi_{\Delta}(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{dw}{dz} \right)^{\Delta} \left(\frac{\overline{dw}}{\overline{dz}} \right)^{\Delta} \psi_{\Delta}(w(z), \overline{w(z)})$$

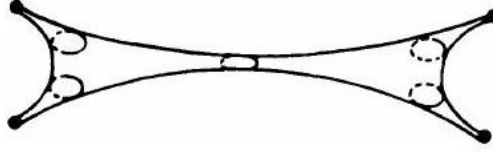
This conformal invariance, as we have already noted, is a remnant of the general covariance in our gauge. The anomalous dimension Δ in (9.207) is such that the vertex operator (9.208) has dimension $2(\Delta + p^2/2) = 2$. Therefore, the mass of the ground state of the string is determined by the anomalous dimension of the field $\psi_{\Delta}(z)$, the quantity being completely defined in terms of the Liouville field theory. Also, the integral (9.208) is invariant under $SL(2, C)$ transformations, and hence, in order to avoid integrating over the infinite volume of $SL(2, C)$ one has to factor this volume out of the integral. Practically, this consists of simply shifting three points ξ_1, ξ_2, ξ_3 to $0, 1, \infty$ by the use of $SL(2, C)$. Different choices of $SL(2, C)$ - "gauge fixing" would lead to apparently different but in fact coincident amplitudes $\mathcal{A}$. The matter is quite trivial, like fixing center of mass coordinates.

We shall now show an extremely important thing. Namely, the amplitude $\mathcal{A}$ as function of $s_{i_1, \dots, i_k} = (\mathbf{p}_{i_1} + \dots + \mathbf{p}_{i_k})^2$ has an infinite number of poles with factorized residues, by which we mean the following relation, satisfied by the set of amplitudes $\mathcal{A}_N(p_1, \dots, p_N)$:

$$\begin{aligned} {}^{i_2}_{i_k} Y^{i_N}_{i_{k+1}} &= \sum_r {}^{i_1}_{i_k} Y^{i_1}_{i_k} Y^{i_N}_{i_{k+1}} \\ &= \sum_r \frac{\mathcal{A}_k^{(r)}(p_{i_1}, \dots, p_{i_k}) \mathcal{A}_{N-k}^{(r)}(p_{i_{k+1}}, \dots, p_{i_N})}{(p_{i_1} + \dots + p_{i_k})^2 + m_r^2} \end{aligned}$$

Here, we have denoted by m_r^2 the mass of a resonance, among which the ground state with $m_0^2 = 2(\Delta - 1)$ must be present. The $\mathcal{A}_k^{(r)}$ are amplitudes involving k -ground state particles and one resonance. So we were slightly imprecise when talking about the set of $\{A_N\}$. In fact the factorization requirement must be imposed on the larger set of amplitudes, involving arbitrary number of excited particles. We have not given a formula like (9.208) for them yet, but this will be done in the course of the proof.

The factorization condition (9.217) is clearly necessary and obvious from the physical point of view. It reflects the fact that due to the short range of forces, separated interactions are independent. It is equally obvious from the geometrical point of view. A resonance is presented by a thin tube which is spanned in space-time by propagation of the closed string in the corresponding state. The amplitude is obtained from surfaces having topology of spheres with pinned points. In the kinematical region, described by (9.217) the relevant configurations of this sphere will be



thus representing a fusion of two (or more) closed strings into one and subsequent decay. This is just the pole diagram (9.217). The diagrams with branch cuts, which have several closed strings in the middle correspond to more complex topologies, spheres with handles. At the same time, algebraically, factorization is so terribly complicated that the proof of it must be either very simple or not at all. Fortunately, the first alternative is realized. We shall now show that the factorization

condition is equivalent to the operator product expansion of the underlying two dimensional field theory, and that there is a correspondence between 2 d -operators and resonances.

The operator product expansion is a fundamental property inherent in any reasonable field theory. It states that two local operators in the theory, placed close together, can be viewed as a set of local operators. "Close together" here means that we are considering some multi-point correlation function, including our pair of operators, as well as many others, and the distance between the pair is smaller than all the other distances. Roughly speaking, when viewed from a large distance, our two points coalesce into one. Formally, if the field theory possesses a set of local operators $\{O_n(\xi)\}$ the following relation holds:

$$O_n(\xi)O_m(0) \underset{\xi \rightarrow 0}{=} \sum_l C_{nm}^l(\xi)O_l(0)$$

which should be understood as a prescription to be inserted into any correlation function, say:

$$\begin{aligned} & \langle O_n(\xi)O_m(0)O_1(\xi_1) \dots O_N(\xi_N) \rangle \\ & \underset{\xi \rightarrow 0}{=} \sum_l C_{nm}^l(\xi) \langle O_l(0)O_1(\xi_1) \dots O_N(\xi_N) \rangle \end{aligned}$$

We shall also assume that it is possible to find a complete set of operators $\{O_n\}$, so that any quantum state can be generated by acting on the vacuum by their linear combination. This implies, that the relation (9.218), when the whole set $\{O_n\}$ is inserted, becomes an exact relation. Now, what can we say about the "structure functions", $C_{nm}^l(\xi)$? Suppose that we are dealing with conformal field theory, invariant under $SL(2, C)$ transformations. Then any operator O_n is characterized by its anomalous dimension Δ_n . This means that the correlation functions are invariant under the transformations:

$$O_n(\xi) \rightarrow \lambda^{\Delta_n} O_n(\lambda\xi)$$

In order that (9.218) be consistent with this, we have to require:

$$C_{nm}^l(\lambda\xi) = \lambda^{\Delta_l - \Delta_n - \Delta_m} C_{nm}^l(\xi)$$

For scalar operators that means simply:

$$C_{nm}^l(\xi) \sim |\xi|^{\Delta_l - \Delta_n - \Delta_m}$$

while in general some tensor structures appear. All this already looks similar to the factorization property, but a few more steps are needed to establish an exact correspondence. First of all, let us work out explicitly the case of operators

$$U_p(\xi) =: e^{ip \cdot x(\xi)} :$$

We have:

$$\begin{aligned} & : e^{ip_1 \cdot x(\xi)} : e^{ip_2 \cdot x(0)} : \\ & \approx |\xi|^{(p_1+p_2)^2 - p_1^2 - p_2^2} : e^{i(p_1+p_2) \cdot x(0)} : + \text{less singular terms} \end{aligned}$$

Here we have made use of the fact that the dimension of $U_p(\xi)$ is equal to $\mathbf{p}^2$. The formula (9.223) follows from the fact that operators in this case carry a conserved momentum p . This can be easily checked from the expression for the correlation function (9.209) by allowing the points ξ_1 and ξ_2 to coalesce, and comparing with the correlation function containing $U_{p_1+p_2}(\xi_2)$. This is a good exercise for a first acquaintance with operator products. Let us turn now to the scattering amplitude, and first consider the case $\mathcal{D} = 26$ when the Liouville field is absent. The main point is that singularities of the amplitude $\mathcal{A}$ as a function of $\mathbf{p}_j$ arise from the regions in ξ -space where some points, say ξ_1 and ξ_2 , coincide. In this case a pole singularity develops. Indeed, we have:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) &= \int \prod_j d^2 \xi_j \langle U_{p_1}(\xi_1) \dots U_{p_N}(\xi_N) \rangle \\ &= \int d^2 \eta \int d^2 \xi_2 \dots d^2 \xi_N \langle U_{p_1}(\xi_2 + \eta) U_{p_2}(\xi_2) \dots U_{p_N}(\xi_N) \rangle \\ &\approx \int_{\eta \rightarrow 0} d^2 \eta |\eta|^{((p_1+p_2)^2 - p_1^2 - p_2^2)} \\ &\quad \times \int d^2 \xi_2 \dots d^2 \xi_N \langle U_{p_1+p_2}(\xi_2) \dots U_{p_N}(\xi_N) \rangle \\ &= \left(\frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 - 2} \right) \mathcal{A}_{N-1}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_N) \\ &\quad + \text{terms, regular when } (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = 2 \end{aligned}$$

(other poles in $(p_1 + p_2)^2$ are also present and they will be considered below). We have used here the operator product expansion (9.223) and the fact that the anomalous dimension of $U_{p_j}(\xi)$ must be equal to 2 (to ensure projective invariance without the Liouville field), thus giving the mass of the ground state $m_0^2 = -p^2 = -2$ (the well known tachyon of the standard dual model). We see from (9.224) that two tachyons may coalesce into a single one and the amplitude for such a process satisfies the factorization condition. The derivation of (9.224) shows a simple mechanism which transforms the operator product expansion in the underlying two dimensional field theory (the theory on the world sheet of the string) into a $\mathcal{D}$ -dimensional factorization of poles. We have considered only the simplest example to demonstrate the idea and now it is necessary to go further.

Staying in $\mathcal{D} = 26$, we can look at the remaining poles of the amplitude. They will correspond to higher operators in the OPE. By the use of the exact version of (9.223):

$$\begin{aligned} & : e^{ip_1 \cdot x(\xi)} : e^{ip_2 \cdot x(\xi)} : \\ & = |\xi|^{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 - \mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}_2^2} : e^{ip_1 \cdot x(\xi) + ip_2 \cdot x(0)} : \end{aligned}$$

we find that the next term is given by

$$\begin{aligned} U_{p_1}(\xi) U_{p_2}(0) &\approx |\xi|^{(p_1+p_2)^2 - p_1^2 - p_2^2} \left\{ U_{p_1+p_2}(0) + : ip_1 \xi^a \partial_a x(0) e^{i(p_1+p_2) \cdot x(0)} : \right. \\ &\quad \left. + : \left(\frac{i}{2} p_{1,\mu} \xi^a \xi^b \partial_a \partial_b x_\mu - \frac{1}{2} p_{1,\mu} p_{1,v} \xi^a \xi^b \partial_a x_\mu \partial_b x_v \right) e^{i(p_1+p_2) \cdot x(0)} : + \dots \right\} \end{aligned}$$

Substituting this into (9.224) we arrive at the general rule, which can be stated as follows. The general operator, which appears in the OPE (9.225) has the form:

$$O_{m_1\mu_1\dots m_k\mu_k;1v_1\dots m_1v_1} =: \partial_z^{m_1} x_{\mu_1} \dots \partial_z^{m_k} x_{\mu_k} \partial_{\bar{z}}^{n_1} x_{v_1} \dots \partial_{\bar{z}}^{n_1} x_{v_1} e^{ip \cdot x'} :$$

It has dimensionality:

$$\Delta = p^2 + \sum_{j=1}^k m_j + \sum_{i=1}^1 n_i$$

The pole corresponding to this contribution in (9.224) occurs when:

$$\Delta = 2$$

or

$$m^2 = -p^2 = \sum_j m_j + \sum_i n_i - 2$$

A convenient notational trick is to introduce two sets of harmonic oscillators $\{a_{m,\mu}^+, \tilde{a}_{n,v}^+\}$ with the ordinary commutation rules $[a_{n,\mu}, a_{m,v}] = [\tilde{a}_{n,\mu}, \tilde{a}_{m,v}^+] = n\delta_{m,n}\delta_{\mu,v_2}$; $[a, \tilde{a}] = 0$ and associate with the operator (9.227) a vector in their Fock space:

$$|0, p\rangle \leftrightarrow e^{ipx} \\ O_{m_1\mu_1\dots m_k\mu_k, n_1v_1\dots n_1v_1} \leftrightarrow a_{m_1\mu_1}^+ \dots a_{m_k\mu_k}^+ \tilde{a}_{n_1v_1}^+ \dots \tilde{a}_{n_1v_l}^+ |0, p\rangle$$

We see, that with these notations at hand we can present m^2 as an eigenvalue of the operator:

$$m^2 = \sum_m (a_{m,\mu}^+ a_{m,\mu} + \tilde{a}_{m,v}^+ \tilde{a}_{m,v}) - 2$$

The states of these oscillators thus can be interpreted as vibrational excitations of the string. Sometimes this representation is very useful.

An important point is that not all of the operators (9.227) contribute to the amplitude. The residues of some of the corresponding poles vanish. For example, it is clear that operators odd under the change of orientation $z \leftrightarrow \bar{z}$ (such as $(\partial_z x_\mu \partial_{\bar{z}} x_v - \partial_{\bar{z}} x_\mu \partial_z x_v) e^{ip \cdot x}$) will not contribute, since the residue, being proportional to

$$\text{res } \mathcal{A}_N(\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_N) \\ \sim \int d^2 z \, d^2 z_3 \dots d^2 z_N \langle \mathbf{O}_{m_1\mu_2\dots n_1v_1\dots}^{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2n_1}(z, \bar{z}) U_{\mathbf{p}_3}(z_3, \bar{z}_3) \dots U_{\mathbf{p}_N}(\bar{z}_N, z_N) \rangle$$

would vanish since all $\{U_p\}$ are even under this transformation.

Also, the operators must have conformal spin zero i.e. under the rotation $z \rightarrow e^{i\alpha} z$ they have to be scalars for the same reason as above. The first excited state of the string thus corresponds to the operator

$$O_{\mu\nu} = (\partial_z x_\mu \partial_{\bar{z}} x_\nu + \partial_{\bar{z}} x_\nu \partial_z x_\mu) e^{ip \cdot x}$$

and has

$$m^2 = -2 + 1 + 1 = 0$$

We shall analyse its spin content later.

There is another reason for the cancellation of residues. Consider an operator:

$$\begin{aligned} ip_\mu O_{\mu\nu} &= ip_\mu (\partial_z x_\mu \partial_{\bar{z}} x_\nu + \partial_{\bar{z}} x_\mu \partial_z x_\nu) e^{ip \cdot x} \\ &= \partial_z (\partial_{\bar{z}} x_\nu e^{ip \cdot x}) + \partial_{\bar{z}} (\partial_z x_\nu e^{ip \cdot x}) \end{aligned}$$

(where we have used the fact, that $\partial_z \partial_{\bar{z}} x = 0$ since x is a free field. The same thing was implicitly used in (9.227)).

Owing to the fact that (9.234) is a total derivative its contribution to the residue (9.232) is equal to zero †, or in other words the amplitude for emission of the massless tensor state (9.233) is purely transverse. This is a very nice fact because otherwise in the Minkowski continuation of our theory we would inevitably have negative norm states, the time-like gravitons.

There are actually many more cancellations. To find them we have to exploit the conformal properties of the underlying two-dimensional theory.

14.9.9 9.9 The Energy-Momentum Tensor in Conformal Quantum Field Theory

There exists a remarkable mechanism which transforms the conformal Ward identities of the two-dimensional field theory of a string into certain transversality conditions, generalizing the decoupling of the states similar to (9.234). This mechanism will be important not only for $\mathcal{D} = 26$, but for all $\mathcal{D}$ and for that reason we shall investigate it in detail.

Let us begin with the derivation of the Ward identities in the case when only the free x -field is present ($\mathcal{D} = 26$). The energy-momentum tensor of such a field is given by:

$$T_{\alpha\beta}(\xi) = \partial_\alpha x \cdot \partial_\beta x - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\partial_\lambda x)^2$$

and due to the equations of motion it is conserved:

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\alpha} = 0$$

It is very helpful to use a complex notation and to introduce:

$$T(z, \bar{z}) = T_{11} - T_{22} + 2iT_{12} = \partial_z x \cdot \partial_z x$$

The conservation law now reads

$$\partial_{\bar{z}} T(z, \bar{z}) = 2\partial_z x \cdot \partial_z \partial_{\bar{z}} x = 0$$

implying that T is an analytic function of z . In the derivation of (9.238) we have used not only (9.236) but also the following important property of (9.235):

$$T_{\alpha\alpha} = 0$$

This property expresses conformal invariance of a theory in any number of dimensions. Indeed, generically, the energy momentum tensor determines the variation of the action S of any system under the change of variables:

$$\begin{aligned} \xi^\alpha &\rightarrow \xi^\alpha + \varepsilon^\alpha(\xi) \\ S &\rightarrow S + \delta S \\ \delta S &= \int T^{\alpha\beta}(\xi) (\partial_\alpha \varepsilon_\beta + \partial_\beta \varepsilon_\alpha) d^n \xi \end{aligned}$$

† Because integrals are analytic in $p_i \cdot p_j$ and there is always a region in the space of momenta p_j where all boundary terms vanish.

Hence, the tracelessness (9.239) implies that the action is not changed for such ε_α that

$$\partial_\alpha \varepsilon_\beta + \partial_\beta \varepsilon_\alpha \sim \delta_{\alpha\beta}$$

or

$$\partial_\alpha \varepsilon_\beta + \partial_\beta \varepsilon_\alpha - \frac{2}{n} \delta_{\alpha\beta} \partial_\lambda \varepsilon_\lambda = 0$$

(n is the dimensionality of the ξ -space).

These conditions for $n = 2$ are just the Cauchy-Riemann equations, satisfied by any analytic function. Thus we have an infinite dimensional conformal group in this case. At the same time, for $n > 2$ the group is finite, and consists of the ordinary translations and rotations plus dilations and inversions.

We see that the formula (9.238) is a condensed expression of conformal invariance of the theory. It is not just conservation of T since generically one would also have terms in (9.238) containing ∂_z derivatives. Their absence is crucial for further discussion.

Let us show that correlation functions involving the operator T can be determined explicitly by the Ward identities.

We shall give first their formal derivation, and then in order to get a feeling of how they arise, analyze the special use of free fields.

It is convenient to treat the variables z and $\bar{z}$ as independent and to concentrate on the variation of z . Suppose that we have a set of operators $\{O_n\}$ which transform as

$$O_n(z) \rightarrow \left(\frac{df}{dz} \right)^{\Delta_n} O_n(f(z))$$

or

$$\delta_\varepsilon O_n(z) = \varepsilon(z) \partial_z O_n(z) + \Delta_n \varepsilon'(z) O_n(z)$$

where we have passed to infinitesimal transformations, $z \rightarrow f(z) = z + \varepsilon(z)$. Under the same transformations the action acquires a variation (9.240) which can be rewritten as:

$$\delta_\varepsilon S = \int d^2 z T(z) \partial_{\bar{z}} \varepsilon$$

As is usual in field theory, the Ward identity arises when we change variables in the functional integral and require its value to be unchanged. It reads:

$$\begin{aligned} & \langle \delta_\varepsilon S O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^k \langle O_{n_1}(z_1) \dots \delta_\varepsilon O_{n_j}(z_j) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle \end{aligned}$$

where the left-hand side represents the variation of the factor e^{-S} in the Euclidean functional integral under the transformation (9.244) while the right-hand side is the variation of the operators O_n themselves.

Requiring that (9.245) holds for any ε and integrating by parts we obtain:

$$\begin{aligned} & \partial_z \langle T(z) O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle \\ &= \sum_j' \left\{ \delta(z - z_j) \frac{\partial}{\partial z_j} + \Delta_{n_j} \delta'(z - z_j) \right\} \\ & \quad \times \langle O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle \end{aligned}$$

(here δ is the two dimensional δ -function).

A structure like (9.246) is typical for all Ward identities we encounter in field theory. What is unusual is that equation (9.246) can be integrated uniquely. To do this, let us use the following simple relations:

$$\begin{aligned}\partial_z \partial_{\bar{z}} \log(|z - z'|^2) &= \partial_z \partial_{\bar{z}} [\log(z - z') + \log(\bar{z} - \bar{z}')] \\ &= \partial_{\bar{z}} \frac{1}{z - z'} = -\pi \delta(z - z')\end{aligned}$$

Therefore, changing without further notice, the normalization of T by π we get:

$$\begin{aligned}\langle T(z) O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle &= \sum_{j=1}^k \left\{ \frac{\Delta_{n_j}}{(z - z_j)^2} + \frac{1}{z - z_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right\} \\ &\times \langle O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle\end{aligned}$$

The reason why the correlation functions involving $T(z)$ are found explicitly lies in the fact that due to the tracelessness of $T_{\alpha\beta}$, the energy-momentum conservation law involves only $\partial_{\bar{z}}$ and not ∂_z . Speaking less technically, $T(z)$ generates some conformal transformation, and owing to invariance of the theory its result can be expressed in terms of variations of $\{O_{n_j}\}$. We shall also need Ward identities involving several $T(z)$. In order to find them we have to analyse how $T(z)$ is transformed under the conformal group. Since $T(z)$ is a second rank symmetric traceless tensor under $SL(2, C)$ we expect that its general transformation law respects these properties. Since the parameter of a general transformation is a vector field $\varepsilon(z)$ (remember, that we are using a complex notation) the most general variation of $T(z)$ has the form:

$$\delta_\varepsilon T(z) = \varepsilon(z) \partial_z T + 2(\partial_z \varepsilon) T + \frac{c}{12} \partial_z^3 \varepsilon$$

(since under $SL(2, C)$, $T(z)$ transforms as $(dz)^{-2}$ and $\varepsilon(z)$ as dz).

The constant c which appeared in (9.249) is a dynamical characteristic of the theory which plays an important role. For free fields we shall compute it in a moment, but first let us describe its general meaning.

Its appearance in (9.249) implies that under the conformal group $T(z)$ transforms not as a primary operator with the variation given by (9.243). Perhaps it is now time to say that the primary operators are not the only ones in our complete set. Indeed, together with some primary $O_n(z)$ we must have the derivative operator $\partial_z O_n$. Its transformation law is (we obtain this by differentiating (9.243)):

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon A_n &= \varepsilon \partial_z A_n + (\Delta_n + 1)(\partial_z \varepsilon) A_n \\ &\quad + \Delta_n (\partial_z^2 \varepsilon) O_n \\ A_n &\equiv \partial_z O_n\end{aligned}$$

It is clear that higher derivatives of O_n will contain higher derivatives of ε in their conformal variations. The prospects for the use of an operator algebra (9.218) with such an enormous variety of operators seem rather hopeless.

However, this is not so. We shall show that only the primary operators define the structure of the theory, while all others are obtained by simple rules. The energy-momentum tensor plays a crucial role in finding these rules and thus we go back to (9.249).

Using (9.244) and (9.245) we obtain:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int d^2u \partial_{\bar{u}} \varepsilon \langle T(u) T(z) \rangle &= \langle \delta_\varepsilon T(z) \rangle = \frac{c}{12} \partial_z^3 \varepsilon(z) \\ \partial_{\bar{z}} \langle T(z) T(u) \rangle &= \pi \frac{c}{12} \partial_z^3 \delta^{(2)}(z-u)\end{aligned}$$

or

$$\langle T(z) T(u) \rangle = -\frac{c}{12} \partial_z^3 \left(\frac{1}{z-u} \right) = \frac{c}{2} (z-u)^{-4}$$

We observe that if it were not for the c -term in (9.249) the two-point function of the energy momentum tensor would be zero, which is incompatible with a positive norm of the space of states. For the case of a free x -field when $T(z) = \frac{1}{2} (\partial_z x)^2$ elementary computation of the two point function shows that $c = \mathcal{D}$ (where $\mathcal{D}$ is the number of components of $\mathbf{x}$).

There is yet another geometrical interpretation of the constant c and its role in Ward identities. Let us multiply (9.248) by some meromorphic function $\varepsilon(z)$ and integrate around the contour C which surrounds all the points $\{z_j\}$ and inside which $\varepsilon(z)$ is analytic. Then the equation (9.248) takes the form:

$$\begin{aligned}\langle T_\varepsilon O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle &= \delta_\varepsilon \langle O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle \\ T_\varepsilon &= \oint_C dz \varepsilon(z) T(z) \\ \delta_\varepsilon O_{n_k}(z_k) &= \varepsilon(z_k) \partial_{z_k} O_{n_k}(z_k) + \Delta_{n_k} \varepsilon'(z_k) O_{n_k}(z_k)\end{aligned}$$

so that T_ε generates conformal transformation in the space of different correlation functions. Let us examine the commutator of two such transformations. What kind of algebra should we expect? From the geometrical point of view, conformal transformations are generated by the operators

$$\hat{\delta}_\varepsilon = \varepsilon(z) \frac{\partial}{\partial z}$$

which form a Lie algrabra, since

$$\begin{aligned}[\hat{\delta}_{\varepsilon_1}, \hat{\delta}_{\varepsilon_2}] &= \hat{\delta}_{[\varepsilon_1, \varepsilon_2]} \\ [\varepsilon_1, \varepsilon_2] &= \varepsilon_1 \varepsilon_2' - \varepsilon_1' \varepsilon_2\end{aligned}$$

So, one would think that if we consider a correlation function:

$$\langle T_{\varepsilon_1} T_{\varepsilon_2} O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle$$

where the contour C_1 surrounds all singularities of ε_2 and $\{z_j\}$ and subtract the same expression with 1 and 2 interchanged the correlation function:

$$\langle T_{[\varepsilon_1, \varepsilon_2]} O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle$$

will appear. This is not quite true because of the C -term. The correct formula can be derived from (9.249). We have, first of all:

$$[T_\varepsilon, T(z)] = \varepsilon \partial_z T + 2 (\partial_z \varepsilon) T + \frac{c}{12} \varepsilon'''(z)$$

The meaning of the commutator in (9.255) is, as explained above, given by

$$\begin{aligned} & \langle [T_\varepsilon, T(z)] O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle \\ & \stackrel{\text{det}}{=} \left(\oint_{C_1} du - \oint_{C_2} du \right) \varepsilon(u) \langle T(u) T(z) O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle \end{aligned}$$

where C_1 includes the point z which lies outside of C_2 . Also $\varepsilon(u)$ is analytic inside both contours and $\{z_j\}$ lie inside them. This definition of the commutator in Euclidean field theory will of course become equivalent to the one defined in the Hamiltonian formalism in Minkowski space. It is however independent of the choice of time axis. If we integrate (9.255) with some function ε_2 around the loop C_2 , we get

$$[T_{\varepsilon_1}, T_{\varepsilon_2}] = T_{[\varepsilon_1, \varepsilon_2]} + \frac{c}{24} \oint_C dz (\varepsilon_1''' \varepsilon_2 - \varepsilon_2''' \varepsilon_1)$$

where the contour C has to separate the points $\{z_j\}$ from the singularities of ε_1 and ε_2 .

The algebra (9.257) (called the Virasoro algebra) is an extension of (9.254). It is easy to check that the last term in (9.257) is the only possible functional compatible with the Jacobi identity.

We see that due to (9.249) we can easily compute correlation functions containing any number of T . For example:

$$\begin{aligned} & \langle T(z) T(u) O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle \\ & = \frac{c}{2} (z - u)^{-4} \langle O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle \\ & + \left\{ \frac{2}{(z - u)^2} + \frac{1}{z - u} \frac{\partial}{\partial u} + \sum_k \left(\frac{\Delta_k}{(z - z_k)^2} + \frac{1}{z - z_k} \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \right\} \\ & \times \langle T(u) O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle \end{aligned}$$

There are always several ways to derive formulas like (9.258) since for example one can start not from $T(z)$ but from $T(u)$ in deriving Ward identities. One can check that the condition that the resulting formula is independent of the order of derivation is just the Jacobi identity for the algebra (9.257). The Ward identities (9.258) give important information concerning the operator algebra (9.218). Namely, they must be such that after fusing together any two O_n in the left hand side, we obtain a result consistent with the corresponding fusion of two points in the right hand side (which depends on $\{z_j\}$ explicitly). In other words the operator algebra must be conformally invariant.

In order to classify possible operators let us consider the operator product of $T(z)$ and some primary operator $\psi(0)$ with dimension Δ . We have:

$$\begin{aligned} T(z + \zeta) \psi(z) &= \frac{\Delta}{\zeta^2} \psi(z) + \frac{1}{\zeta} \partial_z \psi(z) \\ &+ \psi_2(z) + \zeta \psi_3(z) + \dots \end{aligned}$$

The first two terms in this formula are obtained by an immediate check with equation (9.248) while the operators $\psi_k(z)$ with $k \geq 2$ must be determined by more careful analysis of the same equation. For example, the field $\psi_2(z)$ is defined through its correlation function with any others as follows. Let us write (9.248) in the form:

$$\begin{aligned}
 \langle T(z + \zeta) \psi(z) O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle \\
 = \left(\frac{\Delta}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} \right) \langle \psi(z) O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle \\
 + \sum_k \left(\frac{\Delta_{n_k}}{(z + \zeta - z_k)^2} + \frac{1}{z + \zeta - z_k} \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \\
 \times \langle \psi(z) O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle
 \end{aligned}$$

Taking $\zeta \rightarrow 0$ and comparing (9.260) and (9.259) we get:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_2(z) O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle \\
 = \left[\sum_k \left(\frac{\Delta_{n_k}}{(z - z_k)^2} + \frac{1}{z - z_k} \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \right] \\
 \times \langle \psi(z) O_{n_1}(z_1) \dots O_{n_k}(z_k) \rangle
 \end{aligned}$$

So, we see that there are an infinite number of fields $\psi_k(z)$ associated with the primary field $\psi(z)$, with uniquely defined correlation functions (for $k > 2$ we expand the r.h.s. to the corresponding power of ζ).

It is convenient to represent the fields $\psi_k(z)$ in the form:

$$\begin{aligned}
 \psi_k(z) &= T_{-k} \psi(z) \\
 T_{-k}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\zeta^{k-1}} T(z + \zeta)
 \end{aligned}$$

This notation tells us that the $\psi_k(z)$ do not exhaust all the secondary operators which arise from one primary field $\psi(z)$. This is because there are other Ward identities to be satisfied, containing more T , like (9.258). The whole conformal family of $\psi(z)$ is composed of the operators:

$$\psi_{k_1 \dots k_n; \bar{k}_1 \dots \bar{k}_n} = T_{-k_1} \dots T_{-k_n} \bar{T}_{-\bar{k}_1} \dots \bar{T}_{-\bar{k}_n} \psi(z, \bar{z})$$

(where $\bar{T}$ is the complex conjugate of T). Again, all correlation functions of these operators are expressible through that of $\psi(z)$. Moreover, if in an operator product of two primary operators we have some operator ψ then together with it will appear the whole family $\psi_{(k), [\bar{k}]}$, with coefficients calculable from the Ward identities. There exist simple algebraic prescriptions for doing this, but for our purposes they are not needed.

Generically, the field $\psi_{\{k\}, [\bar{k}]}$ transforms under conformal transformations in a complicated inhomogeneous fashion, involving lower secondary fields (recall (9.250) and notice that $\partial_z O_n = T_{-1} O_n$). However there are important special cases in which some secondary field $\psi_{\{k\}, [\bar{k}]}$ becomes a primary one. This happens if for any $n > 0$ $T_n \psi_{\{k\}, [\bar{k}]} = \bar{T}_n \psi_{\{k\}, [\bar{k}]} = 0$. These conditions can be verified using the Virasoro algebra in the form:

$$[T_n, T_m] = (n - m) T_{n+m} + \frac{c}{12} n (n^2 - 1) \delta_{n+m, 0}$$

(and the same for $\bar{T}$) that follows from (9.255), (9.262). In this case, owing to the homogeneity of the transformation law, we can eliminate this field from the operator algebra without spoiling conformal invariance (in these cases coefficients in the operator product expansion become undetermined). These cases of degeneracy will serve us in the next section to reduce the number of string states.

Let us give the simplest examples of this phenomenon. If we take an operator $T_{-1} \phi_\Delta$, where ϕ_Δ is some primary operator with dimension Δ , the above degeneracy condition takes the form:

$$\begin{aligned} T_1 T_{-1} \phi &= 2T_0 \phi = 2\Delta \phi = 0 \\ \Delta &= 0 \end{aligned}$$

In this case we say that the conformal family with $\Delta = 0$ is degenerate at the first level. A less trivial example is degeneracy at the second level. Consider an operator:

$$\chi = (aT_{-2} + bT_{-1}^2) \phi$$

and apply the degeneracy conditions:

$$T_1 \chi = T_2 \chi = 0$$

The conditions (9.267) are always sufficient because owing to the Virasoro algebra (9.264) any T_n can be obtained by combining T_1 and T_2 . Applying the first of these equations, and using

$$\begin{aligned} [T_1, T_{-2}] &= 3T_{-1} \\ [T_1, T_{-1}^2] &= 2(T_0 T_{-1} + T_{-1} T_0) \\ &= 2T_{-1}(2T_0 + 1) \end{aligned}$$

we get

$$T_1 \chi = (3a + 2(2\Delta + 1)b)T_{-1} \phi = 0$$

Or, in other words the degenerate operator must have the form:

$$\chi = \left(T_{-2} - \frac{3}{2(2\Delta + 1)} T_{-1}^2 \right) \phi$$

This form, which satisfies (9.268) for any Δ , is in fact just the projective invariant operator which can always be formed out of any primary field. The nontrivial condition, which implies covariance under the infinite conformal group is the second equation (9.267). Applying it to (9.266), and using the relations:

$$\begin{aligned} [T_2, T_{-2}] &= 4T_0 + \frac{c}{2} \\ [T_2, T_{-1}^2] &= [T_2, T_{-1}] T_{-1} + T_{-1} [T_2, T_{-1}] \\ &= 3(T_1 T_{-1} + T_{-1} T_1) \\ &= 6T_0 + 6T_{-1} T_1 \end{aligned}$$

we obtain, together with (9.268):

$$\begin{aligned} 3a + 2(2\Delta + 1)b &= 0 \\ \left(4\Delta + \frac{c}{2} \right) a + 6\Delta b &= 0 \end{aligned}$$

The condition of degeneracy is given by:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2(2\Delta + 1) \\ 4\Delta + c/2 & 6\Delta \end{vmatrix} &= 0 \\ 8\Delta^2 + (c - 5)\Delta + c/2 &= 0 \\ \Delta &= \frac{5 - c \pm \sqrt{(c - 25)(c - 1)}}{16} \end{aligned}$$

This result shows, that for a fixed value of the central charge c , we have an operator family degenerate at the second level, if and only if the dimension Δ of the original operator is given by (9.271). The natural question is what are the conditions for degeneracy at the N th level? The simple answer to this question is given by the so called Kac formula. The result is the following. There are a set of dimensionalities Δ_{nm} characterized by two integers n and m . They lead to degeneracy at the level $N = nm$, provided that:

$$\Delta_{nm} = \frac{c-1}{24} + \frac{1}{8}(n\alpha_+ + m\alpha_-)^2$$

$$\alpha_{\pm} = \left(\frac{1-c}{12}\right)^{1/2} \pm \left(\frac{25-c}{12}\right)^{1/2}$$

In the case $n = 1, m = 2$ the (9.272) is equivalent to (9.271). Degenerate conformal families are very important. The reason is that their operator content is in a sense minimal, since many operators can be set to zero. In string theory, as we shall see, this implies decoupling of unwanted ghost states, while in statistical physics of phase transitions all known systems choose to be "minimal" theories or combinations thereof.

Armed with these results, we are ready to discuss the "no-ghost" properties of critical strings. By "no-ghost" we mean positivity of the norm of string states. Actually it is guaranteed by our construction of Liouville field theory, when $\mathcal{D} \leq 26$. But explicit check at $\mathcal{D} = 26$ is very instructive.

14.9.10 9.10 Physical States of String Theory in the Critical Dimension

In Section 9.9 we presented a set of operators, composed out of the free field $x(z, \bar{z})$, which correspond to the particle states of the string. We also showed by explicit calculations, that some of these particles decouple. Now we shall start the general analysis of the spectrum. The first (and the most important) statement will be the decoupling of all secondary operators. In other words particles correspond not to possible operators, but to the possible conformal families.

To demonstrate this let us examine the following Ward identity:

$$\begin{aligned} & \int d^2 z_1 \dots d^2 z_N \langle T(z) U_{\mathbf{p}_1}(z_1) \dots U_{\mathbf{p}_N}(z_N) \rangle \\ &= \int \prod_j d^2 z_j \left[\sum_j \left(\frac{\mathbf{p}_j^2/2}{(z - z_j)^2} + \frac{1}{z - z_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right) \right] \\ & \quad \times \langle U_{\mathbf{p}_1}(z_1) \dots U_{\mathbf{p}_N}(z_N) \rangle \\ &= \int \prod_j d^2 z_j \sum_j \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\frac{1}{z - z_j} \langle U_{\mathbf{p}_1}(z_1) \dots U_{\mathbf{p}_N}(z_N) \rangle \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(where we have used the condition $\mathbf{p}_j^2 = 2$ which is needed for the conformal symmetry of the amplitudes). From this identity it follows that the operators which appear in the product $T(z)U_p(z')$ will decouple from the amplitude. In other words, secondary operators of the type $T_{-n}U_p(z)$ do not correspond to physical particles. By a similar argument, the same is true for the $T_{-n_1} \dots T_{-n_k} U_p$. If we use the analogy with oscillators (9.230) we can say that out of $\mathcal{D}$ chains of oscillators $\{a_{n,\mu}^+\}$ roughly $\mathcal{D} - 1$ correspond to physical particles and one chain decouples. If we are lucky this might imply decoupling of the negative norm states created by $\{a_{n,0}^+\}$ -at least the number of necessary decouplings is the same.

To see what really goes on we have to analyse several examples. To simplify notation we shall work with the case of "open strings" which is obtained by forgetting about the dependence on $\bar{z}$ and considering only z -dependent operators. The closed string case is obtained by simple "doubling" of the operator set with $\bar{z}$ dependent fields, since $\mathbf{x}(z, \bar{z}) = \mathbf{x}_L(z) + \mathbf{x}_R(\bar{z})$. Examples of such doubling will be given later.

Let us look at the vector ("photon") vertex, given by:

$$U_{p,\zeta} =: i\zeta^\mu \partial_z x_\mu e^{ip \cdot x} : \leftrightarrow \zeta^\mu(p) a_{1,\mu}^+ |0, \mathbf{p}\rangle$$

(here $\zeta_\mu(p)$ is the "photon" polarization). Let us first apply the condition that $U_{p,\zeta}$ must be a primary operator, or:

$$T_n U_{p,\zeta} = 0, \quad n > 0$$

In order to find this expression we must use the operator product:

$$\begin{aligned} T(z) U_{p,\zeta}(0) &= -\frac{1}{2} (\partial_z x)^2(z) :: i\zeta^\mu \partial_z x_\mu e^{ip \cdot x(0)} : \\ &= z^{-3} \zeta^\mu p_\mu : e^{ip \cdot x} : + \text{less singular terms} \end{aligned}$$

Recalling the definition of T_n we find:

$$\begin{aligned} T_1 U_{p,\zeta} &= \zeta^\mu p_\mu U_p \\ T_n U_{p,\zeta} &= 0, \quad n > 1 \end{aligned}$$

We see that the condition for $U_{p,\zeta}$ to be a primary operator is

$$p^\mu \zeta_\mu(p) = 0$$

An equivalent way to derive (9.278) is to use the oscillator representation:

$$\begin{aligned} ix_\mu(z) &= q_\mu + p_\mu \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{a_{n,\mu}}{n} z^{-n} + \frac{a_{n,\mu}^+}{n} z^n \right) \\ T(z) &= - : \frac{1}{2} (\partial_z x)^2 : = \sum_n T_n z^{-n-2} \\ T_n &= p^\mu a_{n,\mu} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,\mu}^+ a_{m+n,\mu} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}, \quad n > 0 \\ T_{-n} &= T_n^+ \\ T_0 &= \frac{1}{2} p^2 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m^+ a_m \end{aligned}$$

Applying T_1 to the state $\zeta^\mu(p) a_{1,\mu}^+ |0, \mathbf{p}\rangle$ we obtain (9.278). This is a useful demonstration of the complete equivalence of the operator product formalism with the harmonic oscillator one.

Returning to (9.278) let us notice that in order that $U_{p,\zeta}$ shall have dimension 1, we must have $\mathbf{p}^2 = 0$. In this case the number of coupled states will not be $\mathcal{D} - 1$ as follows from (9.278) but $\mathcal{D} - 2$. In order to show this, we notice that among the physical operators $i\zeta^\mu \partial_z x_\mu \exp(ipx(z))$ with $p^\mu \zeta_\mu(p) = 0$ there is one which is both physical and secondary. We have already shown that the family produced by $: e^{ipx} :$ with $\mathbf{p}^2 = 0$ is degenerate and:

$$T_{-1} : e^{ip \cdot x} :=: ip^\mu \partial_z x_\mu e^{ip \cdot x} :$$

is, according to (9.265), physical for $p^2 = 0$. The same thing is seen from the fact that $\zeta_\mu(p) = p_\mu$ satisfies:

$$p^\mu \zeta_\mu = p^2 = 0$$

This is a standard feature of the photon: its polarization on shell can be shifted by a gauge transformation:

$$\zeta_\mu(p) \rightarrow \zeta_\mu(p) + \lambda p_\mu$$

By the use of this transformation we can make $\zeta_0(p) = 0$ and then

$$p^\mu \zeta_\mu(p) = -p^i \zeta_i(p) = 0$$

Hence we find that the photon has $\mathcal{D} - 2$ possible polarizations. In our formalism this was the consequence of two facts. First, we had the condition for the vertex operator to transform properly under the conformal group: $T_n U_{p,\zeta} = 0, n > 0$. That has left $\mathcal{D} - 1$ possible states. Second, one of these states was seen to be the secondary operator generated by $U_p =: e^{ip \cdot x} :$ with $p^2 = 0$. As was shown at the beginning of this section all secondary operators decouple. Thus, we got $\mathcal{D} - 2$.

It is remarkable that a similar mechanism works at higher levels. Let us discuss the second one. The most general vertex will be given by:

$$\begin{aligned} U_p(s, \zeta) &=: \left(S_{\mu\nu} i \hat{\partial}_z x^\mu i \partial_z x^\nu + \zeta_\mu i \hat{\partial}_z^2 x^\mu \right) e^{ipx} : \\ &\leftrightarrow (S_{\mu\nu} a_{1,\mu}^+ a_{1,\nu}^+ + \zeta_\mu a_{2,\mu}^+) |0, p\rangle \\ &\quad p^2 = -2 \end{aligned}$$

Let us see what forms of $S_{\mu\nu}(p)$ and ζ_μ are left by the condition of conformal covariance:

$$T_n U_p(S, \zeta) = 0, \quad n > 0$$

It is easier to work out in the oscillator representation. Applying (9.279) we find:

$$\begin{aligned} T_1 (S_{\mu\nu} a_{1,\mu}^+ a_{1,\nu}^+ + \zeta_\mu a_{2,\mu}^+) |0, p\rangle \\ = 2(p_\mu S_{\mu\nu} + \zeta_\nu) a_{1,\nu}^+ |0, p\rangle = 0 \\ T_2 (S_{\mu\nu} a_{1,\mu}^+ a_{1,\nu}^+ + \zeta_\mu a_{2,\mu}^+) |0, p\rangle \\ = (2p_\mu \zeta_\mu + S_{\lambda\lambda}) |0, p\rangle = 0 \end{aligned}$$

So, the conditions for physical polarizations are:

$$\begin{aligned} p_\mu \zeta_\mu + \frac{1}{2} S_{\lambda\lambda} &= 0 \\ p_\mu S_{\mu\nu} + \zeta_\nu &= 0, \quad p^2 = -2 \end{aligned}$$

Again, among these physical states some are secondary. This implies that there is some second level gauge invariance in (9.287). To find it, let us use formulas (9.269) and (9.271) for the case $\Delta = -1$ (in this case the secondary operator will have $\Delta = 1$). We conclude that the states

$$|a\rangle = \left(T_{-2} + \frac{3}{2} T_{-1}^2 \right) |0, p\rangle, \quad p^2 = -2$$

and

$$|b\rangle = T_{-1}\lambda_\mu(p)a_{1,\mu}^+|0,\mathbf{p}\rangle, \quad p_\mu\lambda_\mu = 0$$

are physical if $c = \mathscr{D} = 26$ in (9.272). The state $|b\rangle$ corresponds to the following gauge transformation:

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &\rightarrow S_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(p_\alpha\lambda_\beta + p_\beta\lambda_\alpha) \\ \zeta_\alpha &\rightarrow \zeta_\alpha + \lambda_\alpha \end{aligned}$$

with $p_\alpha\lambda_\alpha = 0$. It is easy to see, that the conditions (9.287) are invariant under (9.289) provided that $p^2 = -2$. This first gauge invariance works for all $\mathscr{D}$. The second one, associated with the state $|a\rangle$ is true only for $\mathscr{D} = 26$. After some computations, one finds:

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &\rightarrow S_{\alpha\beta} + \varepsilon(\delta_{\alpha\beta} + 3p_\alpha p_\beta) \\ \zeta_\alpha &\rightarrow \zeta_\alpha + 5\varepsilon p_\alpha \end{aligned}$$

In both cases, gauge transformations create states of zero norm, just as was the case with photons (recall that the state $p_\mu a_{1,\mu}^+|0,p\rangle$ with $p^2 = 0$ is of zero norm). The reason for zero norm is quite simple. If any state $|f\rangle$ is physical:

$$T_n|f\rangle = 0, \quad \forall n > 0$$

and secondary:

$$|f\rangle = T_{-m}|g\rangle; \quad T_n(T_{-m}|g\rangle) = 0$$

then:

$$\langle f | f \rangle = \langle g | T_m T_{-m} | g \rangle = 0$$

The meaning of this result is that at each level we have a certain gauge transformation, which does not change the physics, but creates zero norm states. It is also clear, that existence of such an invariance implies a considerable reduction of the physical spectrum. Let us now count the number of states remaining. Consider the states with $p^2 = -m^2 = 2(1 - n)$. They are represented in the oscillator formalism as:

$$\begin{aligned} |f_n\rangle &= (\zeta_\mu a_{n,\mu}^+ + S_{\mu\nu} a_{n-1,\mu}^+ a_{1,\nu}^+ + \cdots) |0,p\rangle \\ p^2/2 &= 1 - n \end{aligned}$$

The total number of these states is given by the number of ways in which the integer n can be split into a sum of positive integers. Indeed, if it were not for the space-time indices μ , we would have the general state in the form:

$$\begin{aligned} |f\rangle &= a_{l_1}^+ \cdots a_{l_k}^+ |0,p\rangle \\ l_1 + \cdots + l_k &= n, \quad l_j > 0 \end{aligned}$$

The number of such states is given by:

$$N(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x^{n+1}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k}$$

To derive this, let us represent (9.293) as

$$|f\rangle = \dots (a_k^+)^{p_k} \dots (a_1^+)^{p_1} |0, p\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k = n$$

Then

$$\begin{aligned} N(n) &= \sum_{\{p_k\}} \delta_{n, \sum k p_k} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x^{n+1}} \sum_{\{p_k\}} \prod_k x^{k p_k} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x^{n+1}} \prod_k \left(\sum_{p_k} x^{k p_k} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x^{n+1}} \prod_k \frac{1}{1 - x^k} \end{aligned}$$

When we add $\mathcal{D}$ space-time dimensions it is clear, that the number of states $N_{\mathcal{D}}(n)$ at the n -th level is given by:

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_{\mathcal{D}}(n) x^n = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k} \right)^{\mathcal{D}}$$

Now, not all states (9.292) are physical. We have to apply the condition $T_n |f\rangle = 0$. This results in equations for $\zeta_\mu, S_{\mu\nu}$, etc. similar to (9.287). The number of such states will be generated by:

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k} \right)^{\mathcal{D}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} N_{\mathcal{D}}^{\text{phys}}(n) x^n$$

$$N_{\mathcal{D}}^{\text{phys}}(n) = N_{\mathcal{D}-1}(n)$$

because effectively the T_n -constraints remove one component of each oscillator. However, this is not the end of the story because among the physical states there are some of zero norm. Suppose first that $\mathcal{D} \neq 26$. The only set of zero norm states is produced by:

$$|f\rangle = T_{-1} (\lambda_\mu a_{n-1, \mu}^+ + \chi_{\mu\nu} a_{n-2, \mu}^+ a_{1, \nu}^+ + \dots) |0, p\rangle$$

$$p^2/2 = 1 - n$$

This state is physical, when T_{-1} acts on a physical state of zero dimension. Therefore, the number of physical states with nonzero norm $v_{\mathcal{D}}(n)$ is given by:

$$\begin{aligned} v_{\mathcal{D}}(n) &= N_{\mathcal{D}-1}(n) - N_{\mathcal{D}-1}(n-1) \\ v(x) &= \sum_n v_{\mathcal{D}}(n) x^n \\ &= (1-x) \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k} \right)^{\mathcal{D}-1} \end{aligned}$$

In the critical dimension $\mathcal{D} = 26$ many more states have zero norm. We have already observed this in the case of the second level. For the general case we have to use the Kac formula. Let us see when some conformal family with $c = \mathcal{D} = 26$ has a physical secondary operator at some level, with dimension one. Using (9.272) we obtain:

$$\begin{aligned}\Delta_{nm} + nm &= \frac{25}{24} + \frac{1}{8}(n\alpha_+ + m\alpha_-)^2 \\ &= \frac{25}{24} - \frac{1}{24}(3n - 2m)^2 = 1\end{aligned}$$

We see that degeneracy (or zero norm states) is possible provided that:

$$3n = 2m \pm 1$$

and the corresponding level is given by:

$$N = n \cdot m = \frac{n(3n \pm 1)}{2}$$

The previously found state with $N = 2$ has $n = 1, m = 2$. It is clear, that now, instead of (9.298) we will have:

$$v(x) = (1 - x - x^2 - \dots) \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k} \right)^{25}$$

However, we should not simply subtract all levels given by (9.301). That would lead to overcounting for the following reason. Among the zero norm states on the second level, which as we said have the form:

$$|f\rangle = \left(T_{-2} + \frac{3}{2}T_{-1}^2 \right) |\Delta = -1\rangle$$

there are some, for which the state $|\Delta = -1\rangle$ is itself secondary. These cases are again found from the Kac formula:

$$\begin{aligned}\Delta_{nm} + nm &= \frac{25}{24} - \frac{1}{24}(3n - 2m)^2 = -1 \\ 3n - 2m &= \pm 7\end{aligned}$$

which is satisfied, say, on the level 3, by $n = 3, m = 1$. Therefore, some of the states (9.303) will be of the form:

$$|f\rangle = \left(T_{-2} + \frac{3}{2}T_{-1}^2 \right) (T_{-3} + \dots) |\Delta = -4\rangle$$

This can be considered as a degenerate state at the level 5. So, this state should not be counted as we go to the level 5, setting $n = 2$ in (9.301). Another state which should not be counted is the following:

$$\begin{aligned}|f\rangle &= T_{-1}|\Delta = 0\rangle \\ |\Delta = 0\rangle &= \{T_{-4} + \dots\} |\Delta = -4\rangle\end{aligned}$$

because according to the Kac formula:

$$\Delta_{1,4} + 4 = \frac{25}{24} - \frac{1}{24}(3 - 8)^2 = 0$$

On the other hand, the Kac formula predicts only one secondary state at the level 5, and we have already counted two states. The conclusion is that these two states are in fact the same, and that we have counted it twice. Hence, to correct the situation, we must write instead of (9.302):

$$v(x) = (1 - x - x^2 + x^5 + \cdots) \left(\prod_k \frac{1}{1 - x^k} \right)^{25}$$

It is not hard to do the same combinatorics † at each level, using the Kac formula repeatedly. The result of this counting is:

$$v(x) = \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^{n(3n+1)/2} + x^{n(3n-1)/2}) \right\} \\ \times \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k} \right)^{25} = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k} \right)^{24}$$

Here we have used an identity due to Gauss for the first factor. This result is quite remarkable. It shows that among the 25 chains of oscillators one chain forms zero norm states and decouples. This implies that all the remaining oscillators have positive norms and there are no ghosts in our theory. The reason is roughly speaking that all negative norm components went to form zero norm states. Indeed, any zero norm state $|z\rangle$ can be represented as

$$|z\rangle = |n\rangle + |p\rangle$$

where

$$\langle n | n \rangle = -1, \quad \langle p | p \rangle = 1$$

Any physical state $|f\rangle$ has the property

$$\langle f | z \rangle = 0$$

which implies:

$$|f\rangle = |n\rangle + |\tilde{p}\rangle \\ \langle \tilde{p} | p \rangle = 1$$

But, since $|p\rangle$ and $|\tilde{p}\rangle$ lie in the positive norm Hilbert state, the Cauchy inequality implies:

$$\langle \tilde{p} | \tilde{p} \rangle > \langle \tilde{p} | p \rangle = 1$$

Hence:

$$\langle f | f \rangle = \langle \tilde{p} | \tilde{p} \rangle + \langle n | n \rangle > 0$$

When we have many negative norm states, it is sufficient for this "no-ghost" theorem that their number at each level should be equal to the number of zero norm states, which is the case, according to (9.308).

We have arrived at the conclusion, that for $\mathscr{D} = 26$ we have 24 chains of oscillators with positive norms. This result could have been expected, since in this case the Liouville field decouples, and the only physical fields are those of the coordinates $x_\mu(\xi)$ of the string. They would describe $\mathscr{D} = 26$ chains of oscillators, but owing to the general coordinate transformations $\xi \rightarrow f(\bar{\xi})$, involving two arbitrary functions, two chains are unphysical. This is just what we have seen by explicit computation. For $\mathscr{D} > 26$, the Liouville field will have the wrong sign of the kinetic energy, which has two interpretations. The first one is that large gradients of the

† Described in the Appendix to Ch. 9.10, p. 221.

φ -field become important, so that the surface loses its continuum limit. The second, more formal, interpretation, is that the wrong sign of the φ -propagator implies negative norm states.

This can be confirmed by examining the norms of physical states for $\mathcal{D} > 26$: one chain of oscillators will become ghosts.

The main result of our analysis is that for $\mathcal{D} = 26$ the simple Koba-Nielsen amplitude has only one flaw-a tachyon. In the next section we will show how this flaw is corrected in the case of fermionic strings with $\mathcal{D} = 10$. After that, we return to the noncritical strings and discuss many interesting possibilities which arise there.

14.9.11 Appendix to 9.10

Here we will briefly describe the combinatorics needed for the derivation of (9.308). Our task is to subtract the contribution of all zero-norm states from the partition function N^{ph} of physical states

$$N^{\text{ph}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} N^{\text{ph}}(n) z^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^{-25}$$

Here $N^{\text{ph}}(n)$ denotes the number of physical states (primary fields) at level n , and we put $\mathcal{D} = C = 26$. There are two cases when the physical state at a given level has zero norm:

$$N = n \cdot m, \quad \Delta_{n,m} + n \cdot m = \Delta_{n,-m} = 1$$

where $\Delta_{n,m} = (25 - (2n + 3m)^2) / 24$, as follows from (9.272) for $c = 26$. From (*) we get $(2n - 3m)^2 = 1$, or

$$N \in \Lambda_{\mu}^{(-)} \equiv \left\{ \frac{m(3m+1)}{2}, \quad m \in 2\mathbb{Z} + 1 \right\}$$

$$N = n \cdot m + k \cdot l, \quad \Delta_{n,m} + n \cdot m = \Delta_{k,l}, \quad \Delta_{k,l} + kl$$

From the second equality follows

$$\Delta_{n,m} = \Delta_{k,l} \quad \text{or} \quad k = n + 3q, l = -m - 2q, q \in \mathbb{Z}$$

The third relation gives $(2k - 3l)^2 = (2n + 3m + 12q)^2 = 1$, and we find

$$N = nm + kl = -3qm - 2qn - 6q^2 = -6q^2 + q(12q \pm 1) = q(6q \pm 1)$$

or

$$N \in \Lambda^{(+)} \equiv \left\{ \frac{p(3p+1)}{2}, \quad p \in 2\mathbb{Z} \setminus 0 \right\}$$

14.9.12 9.11 Fermi Particles

There exists a beautiful extension of the bosonic string, the Neveu-Schwarz-Ramond string (NSR) which represents a string analogue of Dirac particles. We will start this section by describing the path integral representation for these particles and then generalize it to the string case.

Fermions can be described in many different ways. One of them, from which we start, is to replace an ordinary path $x_{\mu} = x_{\mu}(t)$ by a super "surface". Namely to consider a function

$$\begin{aligned}\hat{x}_\mu &= \hat{x}_\mu(t, \theta) = x_\mu(t) + \theta \psi_\mu(t) \\ \theta^2 &= 0\end{aligned}$$

The superspace (t, θ) possesses the symmetry:

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon t &= \varepsilon \theta \\ \delta_\varepsilon \theta &= \varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 0; \quad \varepsilon \theta + \theta \varepsilon = 0\end{aligned}$$

The commutator of two such transformations is an ordinary shift in t :

$$\begin{aligned}[\delta_{\varepsilon_2} \delta_{\varepsilon_1} - \delta_{\varepsilon_1} \delta_{\varepsilon_2}] t &= \delta_{\varepsilon_2} (\varepsilon_1 \theta) - \delta_{\varepsilon_1} (\varepsilon_2 \theta) \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ [\delta_{\varepsilon_2}, \delta_{\varepsilon_1}] \theta &= 0\end{aligned}$$

We can define a covariant derivative $\mathcal{D}$ by:

$$\begin{aligned}\varepsilon \mathcal{D} &= \delta_\varepsilon \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta_\varepsilon t \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \mathcal{D} &= \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \frac{\partial}{\partial t} \\ \mathcal{D}^2 &= \frac{\partial}{\partial t}\end{aligned}$$

The supercovariant action is given by:

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \int dt d\theta \mathcal{D}^2 \hat{x}_\mu \mathcal{D} \hat{x}^\mu \\ &= \int dt \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \psi_\mu \dot{\psi}_\mu \right)\end{aligned}$$

We shall see in a moment that the fields ψ_μ will play the role of the γ -matrices in the usual approach. The action (9.317) is invariant under the supersymmetry:

$$\begin{aligned}\delta x_\mu &= \varepsilon \psi_\mu \\ \delta \psi_\mu &= \varepsilon \dot{x}_\mu\end{aligned}$$

The action (9.317) is only globally invariant, while the proper action should be invariant under general supercovariant transformations. This can be achieved by the introduction of the "einbein" field $e(t)$ (as we have done in the bosonic case) and its superpartner-the "gravitino" field $\chi(t)$. While $e(t)$ is coupled to the energy-momentum tensor, which in our case is $\frac{1}{2}\dot{x}^2$, the field $\chi(t)$ must be coupled to the supercurrent. It is clear from (3.318) that this symmetry is associated with the conserved current:

$$s(t) = \psi_\mu \dot{x}_\mu; \quad \dot{s} = 0$$

Therefore, we can expect that the covariant action will be:

$$S = \int \left\{ \frac{1}{2} \left(e^{-1} \dot{x}_\mu^2 - \psi_\mu \dot{\psi}_\mu \right) + \frac{1}{2e} \chi \psi_\mu \dot{x}_\mu \right\} dt$$

This is indeed the case. It is easy to check that (9.320) is invariant under:

$$\begin{aligned}
\delta x_\mu(t) &= \alpha(t) \psi_\mu(t) \\
\delta \psi_\mu(t) &= \alpha(t) \left(\frac{\dot{x}_\mu}{e(t)} + \frac{1}{2e} \chi \psi_\mu \right) \\
\delta e(t) &= \alpha(t) \chi(t) \\
\delta \chi(t) &= -2\dot{\alpha}(t)
\end{aligned}$$

We are almost ready to write a complete analogue of the bosonic functional integral. There is, however, a small problem to overcome. Namely, the "cosmological" term $\int e(t)dt$, which we added in the bosonic case, is not invariant under (9.321). Moreover, no local expression made of χ and e will be invariant. The "super-length", which is invariant, has the form:

$$L = \int_0^1 e(\tau) d\tau - \frac{1}{8} \int_0^1 d\tau_1 d\tau_2 \text{sign}(\tau_1 - \tau_2) \chi(\tau_1) \chi(\tau_2)$$

We can avoid the nonlocal form (9.322a) at the price of introducing an extra field ψ_5 with which (9.322a) can be replaced by

$$L = \int_0^1 e(\tau) d\tau - \int \psi_5 \dot{\psi}_5 d\tau + \int \psi_5 \chi d\tau$$

($\delta \psi_5 = -\alpha$)

Integrating out ψ_5 returns us to (9.322a).

Now, the functional integral for a supersymmetric path is $\dagger$

$$\begin{aligned}
Z = \int \mathcal{D}x_\mu \mathcal{D}\psi_\mu \mathcal{D}\chi \mathcal{D}e \mathcal{D}\psi_5 \exp \left\{ - \int_0^1 \left[\frac{\dot{x}^2}{e} - \psi_\mu \dot{\psi}_\mu - \psi_5 \dot{\psi}_5 \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{1}{e} (\chi \psi_\mu \dot{x}_\mu - m e \psi_5) + m^2 e \right] d\tau \right\}
\end{aligned}$$

For a free particle, which we are considering, this integral is easily computed, using the following gauge fixing:

$$\dot{e} = 0, \quad e = T, \quad \dot{\chi} = 0, \quad \chi = \theta$$

(where T and θ should be integrated over, since gauge freedom is not sufficient to eliminate them completely). For an open path from (x_μ, ψ_μ) to (x'_μ, ψ_μ) (the quantity ψ_μ must not change since it satisfies a first order differential equation in contrast with x_μ) we have in the momentum representation (changing $(1/T)\dot{x}_\mu \rightarrow ip_\mu$):

$$\begin{aligned}
G(p) &= \int_0^\infty dT e^{-m^2 T} \int d\theta e^{\theta(ip_\mu \psi_\mu - m\psi_s)} e^{-p^2 T} \\
&= \frac{1}{p^2 + m^2} (ip_\mu \psi_\mu + m\psi_s)
\end{aligned}$$

If we change $\psi_\mu \rightarrow \gamma_\mu$ and $\psi_5 \rightarrow \gamma_5$ we obtain the propagator for Dirac particles.

The formulas for closed loops, similar to (9.65), also can be written. We shall not give a detailed derivation here. The answer replacing

(9.65) is given by

$$F(q_1, \dots, q_N) = \int_0^\infty dT T^{-\mathcal{D}/2} e^{-m^2 T} \int_{0=\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N < T} d\tau_2 d\theta_2 \dots d\tau_N d\theta_N \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j \mathcal{D}(\hat{s}_{ij}) \right] \\ \mathcal{D}(s) = \frac{s(T-s)}{T}$$

where $\hat{s}_{ij}$ is the superinvariant distance:

$$\hat{s}_{ij} = |\tau_i - \tau_j| - \theta_i \theta_j \text{sign}(\tau_i - \tau_j)$$

One can easily check that, first, $\hat{s}_{ij}$ is invariant under (9.314) and, second, the representation (9.65a) is equivalent to taking the trace of Dirac matrices. Thus, (9.65a) gives us the supersymmetric extension of the Feynman-Schwinger parametrization appropriate for fermions. Notice also, that the exponent in (9.65a) is just the average of the product of vertex operators

$$V_{\mathbf{p}}(\tau, \theta) = e^{i\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}(\tau, \theta)} = e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} + \theta \psi)} \\ = [1 + i\theta(\mathbf{p} \cdot \Psi)] e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$$

Before we go to the case of strings, several more points are worth discussing.

First of all, the geometrical properties of the fermionic path are very different from those of the bosonic one. In particular, while in the bosonic case we have a Brownian path with its size R and length L connected by the diffusion law $R^2 \sim L$, in the Fermi case things are different, namely $R^2 \sim L^2$. To show this, let us recall our games with the Lagrange multiplier. In (9.12) we argued that in the action $\int \lambda(t) (\dot{x}^2/e - e) dt$ for a bosonic path we can replace $\lambda(t)$ by some constant because $\lambda(t)$ develops a constant vacuum expectation value. A crude argument for that was based on a fact that the effective action for λ contains a term:

$$W[\lambda(t)] = \frac{1}{a} \int_0^1 e(t) dt \log \lambda(t) - \int_0^1 \lambda(t) e(t) dt$$

where a is the lattice cut-off. Because of the first term we obtain $\langle \bar{\lambda} \rangle \sim 1/a$. For the supersymmetric action the situation is different. The first term in (9.328) coming from the zero-point energy of the x -field cancels with the contribution of the ψ -fields. As a result, we do not have a divergent contribution to $W[\lambda]$. Instead, the coefficient $1/a$ in the first term can be shown to get replaced by $1/L$. Because of this, for the fermionic path we have:

$$\overline{R^2} \sim \frac{1}{\langle \lambda \rangle} L \sim L^2$$

This result is responsible for the different critical behaviour of fermionic particles.

There is also another interesting form into which the action (9.320) can be recast. Namely, let us integrate out the χ -field using (9.322a) to find its propagator:

$$\langle \chi(\tau) \chi(\tau') \rangle = \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\tau - \tau')$$

Performing the χ integration, we obtain, instead of (9.322a):

† This form was found by Brink, Di Vecchia, How (1975) and anticipated by Bezezin and Mazinov (1974).

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}x \exp \left[- \int_0^T \left(\dot{x}_\mu^2 - \psi_\mu \dot{\psi}_\mu \right) dt + \frac{1}{4} \int_0^T (\psi_\mu \dot{x}_\mu) \cdot \psi_v \dot{x}_v dt \right]$$

The last factor has a remarkable interpretation. If we replace ψ_μ by γ_μ (which is the actual role of the ψ integral) we cast this factor into the form:

$$\phi[c] = \text{P exp} \frac{1}{8} \int_0^T \omega_{\mu\nu}[x(\tau)] [\gamma_\mu, \gamma_\nu] d\tau$$

where $\omega_{\mu\nu}[x(\tau)]$ is the rotation of the tangent vector to the trajectory:

$$\omega_{\mu\nu}[x(\tau)] = \frac{1}{2} (\dot{x}_\mu \ddot{x}_\nu - \ddot{x}_\mu \dot{x}_\nu), \quad (\dot{x}^2 = 1)$$

This gives us a new understanding of the meaning of path integrals for fermions. In particular, in two dimensions the factor (9.332) reduces to $(-1)^v$ where v is the total rotation of the tangent, known to be equal to the number of self-intersections of the path. Because of these oscillating factors, many complicated trajectories are suppressed, and this is the reason for (9.329).

To complete our understanding of fermions, let us discuss another representation, which combines Fermi and Bose particles together. That is, it is possible to have a functional integral which is supersymmetric not only in the "inner" space (θ, τ) but also in the "outer" space x_μ . The $\mathcal{D}$ -dimensional supersymmetry is described by the following transformations: if we define the superspace as the one described by x_μ and a $\mathcal{D}$ -dimensional spinor φ we have:

$$\begin{aligned} \delta x_\mu &= \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \varphi \\ \delta \varphi &= \varepsilon \end{aligned}$$

Now we can define a propagator in this superspace as an amplitude $\langle \tilde{x} \tilde{\varphi} | x \varphi \rangle$. It describes the propagation of a superfield $\phi(x, \varphi)$ which contains both Fermi and Bose fields in itself. Our aim now is to give an action invariant under (9.334). This is not hard. Consider the expression:

$$S = \int_0^T dt \frac{1}{2} (\dot{x}_\mu - \bar{\varphi} \gamma_\mu \dot{\varphi})^2$$

Invariance under (9.334) is obvious, so we can postulate that the functional integral over x and φ is just the required propagator. What is less obvious is how this new representation is connected with the previous ones, say (9.331). Details of this connection have never been worked out. I shall give here only the general idea. Let us begin from (9.332). It is easy to see that we have the following formula:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \text{P exp} \left(\frac{1}{a} \int_c \gamma_\mu(\tau) \dot{x}_\mu(\tau) d\tau \right) = e^{L/a} \phi[c]$$

This can be checked by use of the definition of the ordered product. Now we can replace the ordered product (modulo the divergent factor) by the functional integral:

$$\begin{aligned} & \text{P exp} \left\{ \frac{1}{a} \int \gamma_\mu(\tau) \dot{x}_\mu(\tau) d\tau \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\chi \exp \left[\int \left(\dot{\chi} \chi + \frac{1}{a} \chi \gamma_\mu \chi \dot{x}_\mu \right) d\tau \right] \\ &= \int \mathcal{D}\chi \exp \left[\int (\chi \gamma_\mu \chi \dot{x}_\mu + a \dot{\chi} \chi) d\tau \right] \end{aligned}$$

If we introduce the field φ by the relation $\chi = \sqrt{(d/dt)}\varphi$ we shall find that the spinor factor (9.335) in the limit $a \rightarrow 0$ can be considered as an amplitude for the propagation of the $\mathcal{D}$ -dimensional fermion trapped on the path:

$$\phi[c] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left(\int \varphi \gamma_\mu \dot{x}_\mu d\tau \right)$$

This is almost (9.335). Presumably the quartic term is needed for proper regularization. But how come that the supersymmetric expression (9.335), describing bosons and fermions together, is obtained from the purely fermionic path integral? The answer to this question is simple. When we treat the functional integral (9.337) we find that it describes a second quantized Dirac particle, living on the path. In order to reproduce fermionic results in (9.336) we implicitly assumed that the occupation number for this particle is equal to one. If we remove this constraint and integrate over all possible φ -fields, we add to this sector another one, with the occupation number zero. In this other case we have no particle on the path and thus describe a boson.

There are obvious gaps in our derivation, but I believe they can be filled without damage to the general ideas outlined above. This would be a theme for an interesting investigation.

14.9.13 9.12 Fermionic Strings

We shall now describe the string analogue of a Dirac particle. Just as in the latter case we had a field ψ_μ distributed on the trajectory, which eventually played the role of the Dirac matrices γ_μ , in the case of strings we have to consider a field $\psi_\mu(\xi)$ living on the world sheet, which should be a supersymmetric partner of the field $x_\mu(\xi)$. As before, it is convenient to start from the superspace, which now must have two fermionic directions. If we describe ξ -space by complex variables z and $\bar{z}$, each of them has its Fermi-partner θ and $\bar{\theta}$. The supersymmetry transformation is given by:

$$\begin{aligned} \delta z &= -\varepsilon\theta, & \delta \bar{z} &= -\bar{\varepsilon}\bar{\theta} \\ \delta \theta &= \varepsilon, & \delta \bar{\theta} &= \bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

We see that we have a direct product of one dimensional supergroups. The corresponding covariant derivatives take the form:

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \frac{\partial}{\partial z}, \quad \bar{\mathcal{D}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

The field $x_\mu(\xi)$ should be replaced by the superfield $\hat{x}_\mu(z, \bar{z}, \theta, \bar{\theta})$ which has the decomposition:

$$\hat{x}_\mu(z, \bar{z}, \theta, \bar{\theta}) = x_\mu(\xi) + \theta \psi_\mu + \bar{\theta} \bar{\psi}_\mu + \theta \bar{\theta} f_\mu$$

We see that now we have two types of fermi-fields ψ_μ and $\bar{\psi}_\mu$ (in Euclidean space $\bar{\psi}_\mu = \psi_\mu^*$ while in Minkowski space they are two real independent fields, just as happens to the coordinates z and $\bar{z}$ which in M -space become $\xi^0 \pm \xi^1$). These two fields form a spinor of the two dimensional space and a vector in the external space. We have also a new world sheet scalar f_μ . A supersymmetric action is easily formed out of this material:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int \bar{\mathcal{D}} x_\mu \mathcal{D} x_\mu d\theta d\bar{\theta} d^2\xi \\ &= \frac{1}{2} \int ((\partial x_\mu)^2 - \psi_\mu \partial_{\bar{z}} \psi_\mu - \bar{\psi}_\mu \partial_z \bar{\psi}_\mu + f_\mu^2) d^2\xi \end{aligned}$$

This action has the following conserved quantities, associated with its supersymmetry:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} + \theta T &= -\frac{1}{2} \mathcal{D} \hat{x} \mathcal{D}^2 \hat{x} \\
T &= -\frac{1}{2} (\partial_z x_\mu)^2 + \frac{1}{2} \psi_\mu \partial_z \psi_\mu \\
\bar{T} &= -\frac{1}{2} (\partial_{\bar{z}} x_\mu)^2 + \frac{1}{2} \bar{\psi}_\mu \partial_{\bar{z}} \bar{\psi}_\mu \\
\mathcal{J} &= -\frac{1}{2} \psi_\mu \partial_z x_\mu \\
\bar{\mathcal{J}} &= -\frac{1}{2} \bar{\psi}_\mu \partial_{\bar{z}} x_\mu \\
\partial_{\bar{z}} T &= \partial_z \bar{T} = \partial_{\bar{z}} \mathcal{J} = \partial_z \bar{\mathcal{J}} = 0
\end{aligned}$$

Here we have the energy momentum tensor $T \equiv T_{++}$ with conformal spin equal to two and the supercurrent $\mathcal{J} \equiv \mathcal{J}_+^L$ with spin 3/2 (since the fermion $\psi \equiv \psi_L$ has spin 1/2). It is to be remembered that by the "conformal spin" we mean the transformation law under $z \rightarrow e^{i\alpha} z$. If some quantity is multiplied by $e^{-is\alpha}$ we say that it has spin s . It is clear, that in order to achieve local supersymmetry, we have to introduce into (9.341) two gauge fields, one with spin 2 coupled to $T(\bar{T})$, which we call the "graviton", and another with spin 3/2, coupled to $\mathcal{J}(\bar{\mathcal{J}})$ which we call the "gravitino".

The action which has local supersymmetry can be found to be:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \int d^2 \xi g^{1/2} \left[g^{ab} \partial_a x \cdot \partial_b x + \psi \cdot e^{ai}(\xi) \sigma^i \partial_a \psi \right. \\
&\quad \left. + (\chi_a \sigma^b \sigma^a \psi_\mu) \left(\partial_b x_\mu - \frac{1}{4} (\chi_b \psi_\mu) \right) \right]
\end{aligned}$$

One would like to derive (9.343) directly from the superspace formalism. Unfortunately, this becomes rather clumsy. It is much easier to check that (9.343) has the desired covariance. In this formula we denoted by σ^i the usual Pauli matrices, $e^{ai}(\xi)$ is a "Zweibein" field connected with g_{ab} by $g_{ab} = e_a^i(\xi) e_b^j(\xi) \delta_{ij}$, χ_a is the gravitino field with vector index a and suppressed spinor index. In the limit of weak graviton and gravitino fields, the action (9.343) will go to (9.341) plus a graviton coupled to $T(\bar{T})$ and a gravitino to $\mathcal{J}(\bar{\mathcal{J}})$. The last term in (9.343) is a correction to the supercurrent produced by the χ -field. We have used a non-covariant derivative acting on ψ_μ in the second term since for Majorana spinors the spin connection gives zero contribution.

The symmetry of (9.343) apart from the usual general covariance is described by the transformations:

$$\begin{aligned}
\delta x_\mu(\xi) &= \varepsilon(\xi) \psi_\mu(\xi) \\
\delta \psi_\mu(\xi) &= \sigma^a \left[\partial_a x_\mu(\xi) - \frac{1}{2} (\chi_a \psi_\mu) \right] \varepsilon(\xi) \\
\delta \chi_a &= 2 \hat{\nabla}_a \varepsilon(\xi) \\
\delta g_{ab} &= \varepsilon (\sigma_a \chi_b + \sigma_b \chi_a)
\end{aligned}$$

with $\varepsilon(\xi)$ being a Majorana spinor.

Just as in the purely bosonic case, the theory is greatly simplified by the choice of the conformal gauge. This gauge is given by:

$$\begin{aligned}
g_{ab}(\xi) &= e^{\varphi(\xi)} \delta_{ab} \\
\chi_a(\xi) &= \sigma_a \chi(\xi)
\end{aligned}$$

Let us discuss whether it is possible to reach this gauge by the use of general supercovariance. First of all, we count the number of independent functions in the gauge (9.345) which gives

us a rough orientation of the situation. We have 3 components of g_{ab} and two spinors χ_a , or in other words 3 bosonic functions and 4 fermionic ones. We replace them by one bosonic φ and two fermionic χ . This is reasonable, since we have two extra bosonic functions, describing general covariant transformation from the gauge (9.345) to an arbitrary one, and two fermionic ones which enter in (9.344). All in all, the number of independent functions matches.

Now, we have to repeat the more detailed analysis, which we have already done in the bosonic case.

In order to decide on the accessibility of the gauge (9.345), let us consider a general variation of χ_a and examine whether we can write it as some variation of χ plus a supercovariant transformation. We have:

$$\begin{aligned}\delta\chi_a &= \sigma_a\delta\chi + 2\hat{\nabla}_a\varepsilon \\ &= \sigma_a\left(\delta\chi + \sigma^b\nabla_b\varepsilon\right) + 2\left(\hat{\nabla}_a\varepsilon - \frac{1}{2}\sigma_a\sigma^b\hat{\nabla}_b\varepsilon\right)\end{aligned}$$

The meaning of the last expression in the brackets is that it is "traceless" in the sense that being multiplied by σ^a it gives zero. All this is quite analogous to the bosonic case (9.113). Accessibility of the gauge depends on the possibility of solving the equation

$$(L_F\varepsilon) \equiv \hat{\nabla}_a\varepsilon - \frac{1}{2}\sigma_a\sigma^b\nabla_b\varepsilon = \varphi_a$$

where φ_a is an arbitrary spin 3/2 spinor with $\sigma^a\varphi_a = 0$. This is to be combined and compared with the bosonic part of this equation (9.113):

$$(L_B\omega) \equiv \nabla_a\omega_b + \nabla_b\omega_a - g_{ab}\nabla^c\omega_c = h_{ab}$$

with arbitrary traceless h_{ab} . As we shall show now, the ghost determinants are just those of the operators L_B and L_F . In the purely bosonic case we have already derived this result (remember that we found a $\det(L_B^+L_B)$ factor in the functional integral). It is almost obvious that for the fermionic case we have to add $\det^{-1}(L_F^+L_F)$. Here we shall derive this result by a different (from the bosonic case) method, which seems quite useful to know.

Let us take a super-metric (g, χ_a) in the superconformal gauge

$$\begin{aligned}g_{ab} &= \rho\delta_{ab} \\ \chi_{a,\alpha} &= (\sigma_a\chi)_\alpha\end{aligned}$$

(α is a spinor index) and consider the Faddeev-Popov equality:

$$1 = e^{-W(g,\chi_a)} \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}\varepsilon \delta(g - L_B\omega) \delta(\chi_a - L_F\varepsilon)$$

which serves as a definition of W . Inserting this into the functional integral for the partition function we get

$$Z = \int \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\chi \mathcal{D}\psi_\mu \mathcal{D}x_\mu e^{-W(\rho,x)} e^{-S(\rho,x,\psi_\mu,x_\mu)}$$

where we have omitted integration over the supercovariance group $\mathcal{D}\omega \mathcal{D}\varepsilon$. Now, it is convenient to introduce ghost fields explicitly by representing:

$$\begin{aligned}e^{-W(g,\chi_a)} &= \det L_B \det^{-1} L_F \\ &= \int (\mathcal{D}\omega \mathcal{D}h)^{(-1)} (\mathcal{D}\varepsilon \mathcal{D}f)^{(+)} \exp \{ - (h, L_B\omega) - (f, L_F\varepsilon) \}\end{aligned}$$

The signs (-) and (+) here indicate that we integrate over fields with reversed statistics: ω and h are fermions, while ε and f are bosons.

Now, our aim is to express the determinants entering in these formulas in terms of the fields χ and ρ from (9.349). In the bosonic case we have already performed this task. However, it will be convenient to repeat everything again, using a somewhat different method, in the present situation, in order to see the close connection between bosons and fermions.

First of all, let us rewrite the operators (9.348) and (9.347) in the conformal gauge. For (9.348) we have the standard formulas of Riemann geometry:

$$\begin{aligned}\nabla_a \omega_b &= \partial_a \omega_b - \Gamma_{ab}^c \omega_c \\ \Gamma_{ab}^c &= \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{db} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_a \varphi \delta_{bc} + \partial_b \varphi \delta_{ac} - \partial_c \varphi \delta_{ab}) \quad (\varphi = \log \rho)\end{aligned}$$

From this we derive:

$$\begin{aligned}\nabla_a \omega_b + \nabla_b \omega_a - g_{ab} \nabla^c \omega_c \\ &= \partial_a \omega_b + \partial_b \omega_a - \delta_{ab} \partial_c \omega_c \\ &\quad - (\partial_a \varphi \omega_b + \partial_b \varphi \omega_a) + \delta_{ab} \partial_c \varphi \omega_c \\ &= e^\varphi (\partial_a \tilde{\omega}_b + \partial_b \tilde{\omega}_a - \delta_{ab} \partial_c \tilde{\omega}_c) \\ \tilde{\omega}_a &= e^{-\varphi} \omega_a\end{aligned}$$

When computing the conjugate operator we need to know:

$$\begin{aligned}(L_B^+ h) &= \nabla^a h_{ab} \\ &= g^{ac} (\partial_c h_{ab} - \Gamma_{ca}^e h_{eb} - \Gamma_{cb}^e h_{ae}) \\ &= e^{-\varphi} (\partial_a h_{ab})\end{aligned}$$

With fermions a similar thing happens. According to general rules:

$$\nabla_a \varepsilon = \partial_a \varepsilon + \frac{1}{4} \Omega_a^{[bc]} [\sigma_b, \sigma_c] \varepsilon$$

where the connection $\Omega_a^{[bc]}$ is defined by:

$$\begin{aligned}\partial_a e_b^c + \Omega_a^{[cd]} e_b^d &= \Gamma_{ab}^f e_f^c \\ g_{ab} &= e_a^c e_b^c\end{aligned}$$

In the conformal gauge:

$$e_a^b = \rho^{1/2} \delta_{ab}$$

and we find:

$$\Omega_a^{[bc]} = -\frac{1}{4} (\partial_b \varphi \delta_{ac} - \partial_c \varphi \delta_{ab})$$

From this:

$$\nabla_a \varepsilon - \frac{1}{2} \sigma_a \sigma^b \nabla_b \varepsilon = e^{\varphi/2} [\partial_a (e^{-\varphi/2} \varepsilon) - \sigma_a \sigma^b \partial_b (e^{-\varphi/2} \varepsilon)]$$

For the conjugate spin 3/2 field f_a we have:

$$\nabla_a f_b = \partial_a f_b - \Gamma_{ab}^c f_c + \frac{1}{4} \Omega_a^{[pq]} [\sigma^p, \sigma^q] f_b$$

In the conformal gauge:

$$\nabla^a f_a = \rho^{-1} \partial_a f_a$$

This extensive use of general formulas was not actually needed. The results (9.354), (9.355), (9.359), (9.360) could have been foreseen from the following reasons. We can define the covariant derivative in the conformal gauge as follows. Suppose that we have a field $A(\xi^+, \xi^-)$ (where $\xi^\pm = \xi^1 \pm i\xi^2$) which transforms under analytic transformations

$$\xi^+ \rightarrow f^+(\xi^+), \quad \xi^- \rightarrow f^-(\xi^-)$$

as follows

$$A(\xi^+, \xi^-) = \left(\frac{df^+}{d\xi^+} \right)^{\bar{\Delta}} \left(\frac{df^-}{d\xi^-} \right)^{\Delta} \tilde{A}(f^+, f^-)$$

thus having conformal weight $(\Delta, \bar{\Delta})$. At the same time the metric $\rho(\xi^+, \xi^-)$ is assumed to be transformed as:

$$\rho(\xi^+, \xi^-) = \frac{df^+}{d\xi^+} \frac{df^-}{d\xi^-} \tilde{\rho}(f^+, f^-)$$

Let us try to define covariant derivatives of $\mathcal{A}$. This can be easily achieved:

$$\begin{aligned} \nabla_+ A &= (\partial_+ - \Delta(\partial_+ \varphi)) A \\ &= \rho^\Delta \partial_+ (\rho^{-\Delta} A) \end{aligned}$$

It is trivial to check that if the field A has the transformation law (9.361) with some $(\Delta, \bar{\Delta})$, then $\nabla_+ A$ has the transformation law with $(\Delta + 1, \bar{\Delta})$. Now, the results of the previous computations are becoming transparent. Indeed the field ω_a is a vector field (ω_+, ω_-) with the weights $(1, 0)$ and $(0, 1)$ correspondingly. Hence:

$$\nabla_+ \omega_+ = \rho \partial_+ (\rho^{-1} \omega_+)$$

which coincides with (9.354). The field h_{++} has weight $(2, 0)$, hence:

$$\nabla^a h_{a+} = \rho^{-1} \partial_- h_{++} \quad (\text{comp. (9.355)})$$

The spinor field $\varepsilon_\pm$ has the weights $(1/2, 0)$ and $(0, 1/2)$, while the gravitino field $f_+^L(f^R)$ has $(3/2, 0)$ and $(0, 3/2)$. That gives (9.359) and (9.360). Let us notice also, that the tracelessness of h_{ab} means that

$h_{+-} = 0$ and we have two components h_{++} and h_{--} only, while the condition $\sigma^a f_a = 0$ implies also that we have only two components f_+^L and f_-^R of the vector-spinor f_a^α , which correspond to spin $3/2$, while the spin $1/2$ component is removed. We must remember that all our computations of covariant derivatives have been done on the background where we have some metric ρ but no gravitino field χ . In the final results we shall be able to restore χ -dependence by the use of supersymmetry. It should be noted, however, that it is easy to work with χ present. All we have to do is to consider a superspace generalization of (9.361) and (9.362).

To put things together, we see that the ghost contribution to the functional integral is defined by the determinants, which arise from the following eigenvalue problems (recall (9.352)):

$$\begin{aligned} \rho \partial_+ (\rho^{-1} \omega_+) &= iE h_{++} \\ \partial^+ h_{++} &\equiv g^{+-} \partial_- h_{++} = \rho^{-1} \partial_- h_{++} = iE \omega_+ \end{aligned}$$

for bosons, and

$$\begin{aligned}\rho^{1/2}\partial_+(\rho^{-1/2}\varepsilon_+) &= iEf_+ \\ \partial^+f_+ &= \rho^{-1}\partial_-f_+ = iE\varepsilon_+\end{aligned}$$

for fermions. If we apply ∂_- to the first equations of each pair we get:

$$\begin{aligned}-\rho^{-2}\partial_-(\rho\partial_+\bar{u}) &= E^2\bar{u} \\ -\rho^{-3/2}\partial_-(\rho^{1/2}\partial_+\bar{v}) &= E^2\bar{v} \\ \bar{u}_{(0,-1)} &\equiv \rho^{-1}\omega_+, \quad \bar{v}_{(0,-1/2)} \equiv \rho^{-1/2}\varepsilon_+\end{aligned}$$

The general operator acting on tensors with conformal spin $(0, j)$ would be

$$\mathcal{L}_j = \rho^{j-1}\partial_-(\rho^{-j}\partial_+)$$

For $j = 0$ this is the scalar laplacian: for $j = -1/2$ and -1 these are ghost operators, which we have just now derived. We shall need one more value, $j = 1/2$, corresponding to Dirac fermions. Indeed, Dirac fermions transform as:

$$\psi_{\pm} \sim (\mathrm{d}\xi^{\pm})^{-1/2} \sim_{(0,1/2)}^{(1/2,0)}$$

and hence the Dirac eigenvalue problem is:

$$\begin{aligned}\rho^{-1/2}\partial_-\psi_+ &= iE\psi_- \\ \rho^{-1/2}\partial_+\psi_- &= iE\psi_+\end{aligned}$$

Of course the same equation could have been derived in a long way, starting from the standard Dirac equation with spinorial connection:

$$\sigma^a\nabla_a\psi = iE\psi$$

We have already described this way above in the case of the ghosts and will not repeat it.

Our task now is to compute the determinants. All of them must be local functions of ρ , since under naive manipulations the ρ dependence drops out from all expressions. Indeed the action for the field u in (9.366) and (9.367) which leads to the correct eigenvalue problem has the form:

$$\begin{aligned}S_j &= \int \rho^{-j}\partial_+\bar{u}\partial_-u \, \mathrm{d}^2\xi \\ N_j &= \int \rho^{1-j}\bar{u}u \, \mathrm{d}^2\xi\end{aligned}$$

(where N_j is the norm in the u -space). If we try to use perturbation theory, setting $\rho = 1 + \varphi$ we get:

$$\begin{aligned}W &= \overbrace{q}^{k+q} \\ &\sim j^2\varphi(q)\varphi(-q) \int \frac{\mathrm{d}^2kk_+(k+q)_-(k_-(k+q)_+)}{k^2(k+q)^2} \\ &= j^2\varphi(q)\varphi(-q) \int \mathrm{d}^2k\end{aligned}$$

Which is ill-defined. This means that we have failed to compute the effective action and demonstrated only that it does not have an imaginary part in q -space, being a local function of φ . The same is true to all orders in φ .

There are several ways out of this problem. One is to use PauliVillars regularization of all loops. This amounts to adding to the action S_j the regulating action $\tilde{S}_j$:

$$\tilde{S}_j = \int (\rho^{-j} \partial_+ \tilde{u} \partial_- \tilde{u} + M^2 \rho^{1-j} \tilde{u} \tilde{u}) d^2 \xi$$

where loops of $\tilde{u}$ -fields enter with negative signs, and cancel the divergences of S_j . The construction of the action $\tilde{S}_j$ ensures that the regularization preserves conformal symmetry. The φ -dependence can easily be extracted from the loop containing the $\tilde{u}$ -field, and then the general argument, based on conformal invariance, would lead us to the

Liouville action with fixed coupling (this is the only conformally invariant expression of the required dimensionality).

We shall choose here a different approach to the problem, which seems more meaningful. Let us generalize the expression for the ghost lagrangian (9.352) which, without external field, has the form:

$$S_{gh}^{(B)} = \int (h_{++} \partial_- \omega^+ + h_{--} \partial_+ \omega^-) d^2 \xi; \quad \omega^\pm = \rho^{-1} \omega_\mp$$

In this bosonic part, the fields ω and h have the following transformation law:

$$\begin{aligned} \omega^+ &\sim (-1, 0) & \omega^- &\sim (0, -1) \\ h_{++} &\sim (2, 0) & h_{--} &\sim (0, 2) \end{aligned}$$

In general we could consider the case:

$$S_j = \int (b^+ \partial_- a_+ + b^- \partial_+ a_-) d^2 \xi$$

with

$$\begin{aligned} a_+ &\sim (j, 0) & a_- &\sim (0, j) \\ b^+ &\sim (1-j, 0) & b^- &\sim (0, 1-j) \end{aligned}$$

Our tactics now will be to couple to (9.375) an external gravitational field not in the conformal gauge, in which the effective action is nonpropagating, but in the gauge in which we have only one component of the graviton, say g_{++} . As we have already seen, this leads to a finite expression containing g_{++} which can be generalized to a covariant expression.

First of all, we have to find an expression for the covariant derivative in this gauge. The metric has the form:

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\xi^+ d\xi^- + g_{++} (d\xi^+)^2 \\ &= d\xi^+ (d\xi^- + g_{++} d\xi^+) \end{aligned}$$

It is easy now to find the coupling of the g_{++} -field to the a and b -fields, or, in other words, the energy-momentum tensor of the (a, b) -system. The idea is to find the change of the action under the coordinate transformations:

$$\begin{aligned} \xi^+ &\rightarrow \xi^+ \\ \xi^- &\rightarrow f^-(\xi^+, \xi^-) \end{aligned}$$

The fields are transformed as:

$$a_-(\xi^+, \xi^-) \rightarrow \left(\frac{\partial f^-}{\partial \xi^-} \right)^j a_-(\xi^+, f^-(\xi^+, \xi^-))$$

$$b_-(\xi^+, \xi^-) \rightarrow \left(\frac{\partial f^-}{\partial \xi^-} \right)^{1-j} b_-(\xi^+, f^-(\xi^+, \xi^-))$$

The new action (or better to say the "minus" part of it) changes to

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \int d\xi^+ df^- \left(\frac{\partial f^-}{\partial \xi^-} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f^-}{\partial \xi^-} \right)^{1-j} b(\xi^+, f^-) \\ &\quad \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^+} \left(\frac{\partial f^-}{\partial \xi^-} \right)^j \cdot a(\xi^+, f^-(\xi^+, \xi^-)) \\ &= \int d\xi^+ df^- b(\xi^+ f^-) \frac{\partial}{\partial \xi^+} a(\xi^+, f^-) \\ &\quad + \int d\xi^+ df^- (ba)_j \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^+} \log \left(\frac{\partial f^-}{\partial \xi^-} \right) \\ &\quad + \int d\xi^+ df^- \left(b \frac{\partial}{\partial f^-} a \right) \partial_+ f^- \end{aligned}$$

Now let us take

$$f^- = \xi^- + \varepsilon_+ (\xi^+ \xi^-)$$

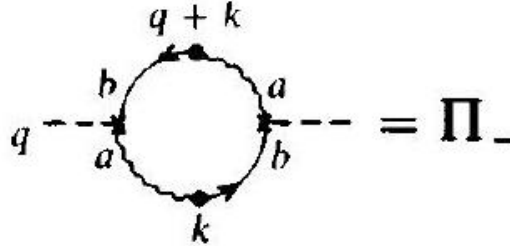
with infinitesimal ε_+ . We get:

$$\tilde{S} - S = \int ((b\partial_- a) - j\partial_-(ba)) \partial_+ \varepsilon_+$$

From here we can read off the energy-momentum tensor which couples to g_{++} :

$$T_{--} = (b\partial_- a) - j\partial_-(ba) = (1-j)b\partial_- a + ja\partial_- b$$

Now we can compute the second order response to the field g_{++} . It is described by the diagram:



$$S_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \int \Pi_{--}(q) g_{++}(q) g_{++}(-q) \frac{d^2 q}{(2\pi)^2}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{--,--}(q) &= -\frac{1}{16} \int \frac{d^2 k [j(k+q)_- + (1-j)k_-] [jk_- + (1-j)(k+q)_-]}{(k_+ + i\epsilon \text{sign } k_-) (k_+ + q_+ + i\epsilon \text{sign}(k+q)_-)} \\ &= -\frac{1+6j(j-1)}{24\pi} \frac{q_-^3}{16q_+} \end{aligned}$$

(we use here the correlations:

$$\left\langle a_-^{(j)}(q) b_-^{(1-j)}(-q) \right\rangle = (q_+ + i\epsilon \text{sign } q_-)^{-1}$$

The arguments, identical to those in section (9.6) now give the following result for the determinants:

$$\begin{aligned} & \log \det \left\| -\rho^{j-1} \hat{C}_- \left(\rho^{-j} \hat{C}_+ \right) \right\| \\ &= -\frac{1+6j(j-1)}{24\pi} \int \left(\frac{1}{2} \left(\hat{C}_a \varphi \right)^2 + \mu^2 e^\varphi \right) d^2 \xi \\ & \rho = e^\varphi \end{aligned}$$

This result is equivalent to the computation of the central charge for the Virasoro algebra of the energy-momentum tensor (9.381) which is just equal to:

$$c_j = \pm(1+6j(j-1)) \cdot 2$$

where $\pm$ refers to commuting or anticommuting fields (recall, that fermion loops must be supplied with a minus sign). Indeed, the central charge is just the expectation of two energy-momentum tensors $\langle T_- T_- \rangle$ which we have computed.

One more step is needed before we come to the physical answer. We have computed all determinants under the condition that the gravitino field $\chi = 0$. We must now restore dependence on it in $\det \mathcal{L}_j$. This can be done without any further computations, since there is only one supersymmetric extension of the Liouville action (9.384). In order to find it we can consider the superfield:

$$\phi = \varphi + \theta_+ \chi_+ + \theta_- \chi_- + \theta_+ \theta_- f$$

and the action:

$$\begin{aligned} S &= \int \left(\frac{1}{2} \mathcal{D}_+ \phi \mathcal{D}_- \phi + 2i\mu e^{\phi/2} \right) d\theta_- d\theta_+ d^2 \xi \\ \mathcal{D}_\pm &= \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} + \theta^\pm \frac{\partial}{\partial \xi^\pm} \end{aligned}$$

which is explicitly supersymmetric. Simple computation gives:

$$\begin{aligned} e^{\phi/2} &= e^{\varphi/2} e^{(\theta_+ \chi_+ + \theta_- \chi_- + \theta_+ \theta_- f)/2} \\ &= e^{\varphi/2} \left(1 + \frac{1}{2} \theta_+ \chi_+ + \frac{1}{2} \theta_- \chi_- + \frac{1}{2} \theta_+ \theta_- \left(f - \frac{1}{2} \chi_+ \chi_- \right) \right) \\ \int d^2 \theta d^2 \xi e^{\phi/2} &= \int d^2 \xi \frac{1}{2} e^{\varphi/2} \left(f - \frac{1}{2} \chi_+ \chi_- \right) \\ \int \frac{1}{2} \mathcal{D}_+ \phi \mathcal{D}_- \phi d^2 \theta d^2 \xi &= \int \left(\frac{1}{2} (\partial \varphi)^2 - \frac{1}{2} \chi_+ \partial_- \chi_+ \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \chi_- \partial_+ \chi_- + \frac{1}{2} f^2 \right) d^2 \xi \end{aligned}$$

Taking the two terms together and eliminating the f -field by taking the minimum of the action with respect to it we obtain:

$$S = \int \left\{ \frac{1}{2} (\partial \varphi)^2 + \frac{1}{2} \chi \phi \chi + \frac{1}{2} \mu e^{\varphi/2} \bar{\chi} \omega + \mu^2 e^\varphi \right\} d^2 \xi$$

This action should replace the Liouville one for the case when the χ -field is nonzero. It could have been obtained explicitly by coupling the gravitino to supercurrents and considering superconformal anomalies. As we see, this is not needed, since the superconformal extension of the bosonic part of the action is unique.

Now we are ready to write down the partition function for the superstring case. Let us find the value for the super-Liouville coupling constant, or, which is the same, the central charge c . We have:

$$\begin{array}{ll} (j=0) & c^{(x)} = \mathcal{D} \\ (j=\frac{1}{2}) & c^{(\psi)} = \mathcal{D}/2 \\ & c_{\text{tot}} = \frac{3}{2}\mathcal{D} - 15 = \frac{3}{2}(\mathcal{D} - 10) \end{array} \quad \begin{array}{ll} (j=-1) & c_{gh}^{(x)} = -26 \\ (j=-\frac{1}{2}) & c_{gh}^{(\psi)} = 11 \end{array}$$

(here the values of c for ψ and x are half those in (9.385) because (9.385) is written for a complex field). So, our final result for the effective action of a fermionic string, which we obtain by integrating out the x and ψ fields, is given by:

$$S = \frac{10 - \mathcal{D}}{32\pi} \int \left(\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}\bar{\chi} \not{\partial} \chi + \frac{1}{2}\mu e^{\varphi/2} \bar{\chi} \chi + \mu^2 e^{\varphi} \right) d^2\xi$$

As in the bosonic case, this action describes longitudinal motions of the string. In the critical dimension, $\mathcal{D}_{\text{cr}} = 10$, they are absent.

So far, we have been dealing with surfaces of spherical topology without external lines. As in the bosonic case, in order to obtain scattering amplitudes, one has to puncture the sphere, and in order to find corrections to the tree amplitude one has to sum over topologies. We shall start with the first task, which in the fermionic case has some unusual features.

14.9.14 9.13 Vertex Operators

In the case of the bosonic string we have punctured its world surface by introducing factors:

$$\begin{aligned} V(x) &= \int \delta(x - x(\xi)) g^{1/2} d^2\xi \\ V(p) &= \int d^2\xi V_p(\xi) \\ V_p(\xi) &= e^{ip \cdot x(\xi)} (g(\xi))^{1/2} \end{aligned}$$

into the functional integral. Our task now is to find a supersymmetric generalization of these formulas.

Let us begin with the properties of the x fields. The Green function for the supersymmetric laplacian $\overline{\mathcal{D}}\mathcal{D}$ is given by:

$$\begin{aligned} &\langle \hat{x}_\mu(\xi_1, \theta_1) \hat{x}_\nu(\xi_2, \theta_2) \rangle \\ &= -\frac{\delta_{\mu\nu}}{4\pi} \log(z_1 - z_2 - \theta_1\theta_2) (\bar{z}_1 - \bar{z}_2 - \bar{\theta}_1\bar{\theta}_2) \end{aligned}$$

An easy check of this formula is obtained by using the component representation: this formula is equivalent to:

$$\begin{aligned} \langle x_\mu(\xi_1) x_\nu(\xi_2) \rangle &= -\frac{\delta_{\mu\nu}}{4\pi} \log|z_1 - z_2|^2 \\ \langle \psi_{\mu L}(\xi_1) \psi_{\nu L}(\xi_2) \rangle &= -\frac{\delta_{\mu\nu}}{4\pi} \frac{1}{z_1 - z_2} \\ \langle \psi_{\mu R}(\xi_1) \psi_{\nu R}(\xi_2) \rangle &= -\frac{\delta_{\mu\nu}}{4\pi} \frac{1}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} \\ \langle f_\mu(\xi_1) f_\nu(\xi_2) \rangle &= \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

The reason why the particular combination $\hat{z}_{12} = z_1 - z_2 - \theta_1\theta_2$ has appeared in (9.393) is also simple: it is invariant under supersymmetry:

$$\begin{aligned}\delta\hat{z}_{12} &= \delta z_1 - \delta z_2 - \delta\theta_1\theta_2 + \delta\theta_2\theta_1 = 0 \\ (\delta z_1 &= -\varepsilon\theta_1, \delta z_2 = -\varepsilon\theta_2, \delta\theta_1 = \delta\theta_2 = \varepsilon)\end{aligned}$$

Let us now find the expression for the supersymmetric vertex operator, beginning with the simplest case of the critical dimension $D = 10$. In this case, according to the preceeding section we expect superconformal invariance of the theory, i.e. the fields φ and χ should not participate on the mass shell. The natural guess for $V(p)$ will be:

$$\begin{aligned}V(\mathbf{p}) &= \int d^2\xi d^2\theta : e^{i\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{x}}(\xi,\theta)} : \\ &= \int d^2\xi \int d^2\theta : e^{i\mathbf{p}\cdot x} \{1 - i\mathbf{p}\cdot\psi_L\theta \\ &\quad - i\mathbf{p}\cdot\psi_R\bar{\theta} - \bar{\theta}\theta[(\mathbf{p}\cdot\psi_L)(\mathbf{p}\cdot\psi_R) - i\mathbf{p}\cdot\mathbf{f}]\} : \end{aligned}$$

Setting $f = 0$ and integrating on θ we obtain:

$$V(\mathbf{p}) = \int d^2\xi : (p_\mu\psi_{\mu,L})(p_v\psi_{v,R}) e^{i\mathbf{p}\cdot x(\xi)} :$$

As we have noted in the bosonic case, the dimension of $: e^{i\mathbf{p}\cdot x} :$ is equal to $\mathbf{p}^2$. Since the free fermions, $\psi_{\mu,L}$ and $\psi_{\mu,R}$, have dimension $1/2$, we obtain the following mass shell condition:

$$\Delta = p^2 + 1 = 2, \quad p^2 = 1$$

So, the vertex (9.396) still describes a tachyon, but a "better" one than in the bosonic case (which has $p^2 = 2$). If we consider an open string, which amounts to taking only the "left" part of all fields and coordinates, we get:

$$\begin{aligned}V_{\text{open}}(p) &= \int dz : p_\mu\psi_\mu(z) e^{i\mathbf{p}\cdot x(z)} : \\ p^2 &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

We can be confident that the "old" bosonic tachyon will not appear in collisions of the new ones, because $: e^{i\mathbf{p}\cdot x} :$ is not supersymmetric. Still it is instructive to see this fact explicitly. Let us consider the operator product:

$$\begin{aligned}& : p_\mu\psi_\mu(z) e^{i\mathbf{p}\cdot x(z)} :: k_\mu\psi_\mu(0) e^{i\mathbf{k}\cdot x(0)} : \\ &= (\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}) z^{2p\cdot k-1} : e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{k})\cdot x(0)} : + \dots\end{aligned}$$

It seems at first that the bosonic tachyon has appeared, since we have obtained its vertex operator $: e^{i\cdot x} :$ on the r.h.s. of (9.399). However, its appearance is illusory. Indeed, the fusion of two tachyons of two fermionic strings (9.398) with $p^2 = 1/2$ would produce a bosonic tachyon with $p^2 = 1$, according to (9.399), if $p^2 = k^2 = 1/2$ and $(\mathbf{p} + \mathbf{k})^2 = 1$. That implies that $\mathbf{p}\cdot\mathbf{k} = 0$ and hence the residue of the corresponding pole in all amplitudes is zero. Hence, the true ground state of the open fermionic string has $p^2 = 1/2$.

It is possible in a consistent manner to eliminate even this tachyon. Let us distinguish vertex operators by their parity under $\psi_\mu \rightarrow -\psi_\mu$ (we are talking about open strings for simplicity). The tachyon state (9.398) is odd. The fusion of two tachyons will give even states. In order to find them we have to investigate the next terms in (9.399): the simplest one will be the supersymmetric extension of the operator $: i\partial_z x_\mu e^{i\mathbf{p}\cdot x} :$ of the bosonic string theory, which describes a massless vector state of the open string. This extension is easy to find by using superfields. Let us consider the expression:

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu(p) &= \int dz d\theta : i \mathcal{D} \hat{x}_\mu e^{ip \cdot x} : \\
&= \int dz d\theta : i (\psi_\mu + \theta \partial_z x_\mu) e^{ip \cdot x} (1 - ip \cdot \psi \theta) : \\
&= \int dz : (i \partial_z x_\mu + p_\nu \psi_\mu \psi_\nu) e^{ip \cdot x} :
\end{aligned}$$

This vertex operator describes a vector massless state again, since the dimensionality of the integrand is given by:

$$\Delta = p^2 + 1 = 1; p^2 = 0$$

By its construction, our vertex is supersymmetric. It is even under reflection $\psi_\mu \rightarrow -\psi_\mu$. Under fusion of two such particles the tachyon (9.398) cannot appear because it is odd, and the "bosonic" tachyon $: e^{ip \cdot x} :$ cannot appear since it is not supersymmetric. To be more precise, in the operator product of two operators (9.400), the operator $: e^{ip \cdot x} :$ does appear, but on mass shell the coefficient in front of it is equal to zero, just as happens in (9.399).

We come to the conclusion that the fermionic string when restricted to the sector even under ψ -reflection has no tachyons for $\mathcal{D} = 10$, and its ground state is the zero mass vector particle.

In the closed string case the vertex operator is given by a direct product of two Γ_μ from (9.400), one depending on z and the other on $\bar{z}$. It describes a massless tensor particle, which we discuss a little later.

Massless vectors or tensors can interact without producing ghosts (and we know that the ghosts are absent for $\mathcal{D} \leq 10$ either from (9.390) or from direct counting of states which we have done in the bosonic case), only if their effective action is gauge invariant, being of YangMills type for vectors and Einstein's for tensors. We shall postpone explicit computation of this effective action, and point out here only one manifestation of the gauge structure. In the operator product:

$$\Gamma_\mu(p, z) \Gamma_\nu(k, 0) \sim z^{2p \cdot k - 1} t_{\mu\nu\lambda}(p, k) \Gamma_\lambda(p + k, 0)$$

an explicit computation shows that the quantity $t_{\mu\nu\lambda}(p, k)$ coincides with the triple Yang-Mills vertex. This is an important observation, since we already know that structure constants in operator products are just the residues of the poles in scattering amplitudes. A little later we shall describe an efficient method for their computation.

Up to now, we have spoken of the fermionic string but, clearly, all particles obtained from the vertex operators (9.400) are bosons.

It is most important that apart from them, the spectrum of the theory contains fermions appearing as soliton excitations of the string. In terms of functional integrals, solitons appear owing to special boundary conditions applied on the fields. In our case, anomalous boundary conditions have the following meaning. We are dealing with the world sheet which is a sphere with omitted points, where the external particles are injected. On such a punctured sphere we are free to choose different spinor structures for the fields ψ_μ ; that is we can consider double-valued fields, which change sign when going round the injection point.

In order to understand why nontrivial spinor structures are related to space-time fermions, we have to take a step back and return to the case of particles. Let us recall, that we described spinors by the anticommuting fields ψ_μ with the action:

$$S = \int \psi_\mu \dot{\psi}_\mu d\tau$$

Why does this action describe a space-time spinor (while the variables ψ_μ are vectors)? To answer this question let us pass to the Hamiltonian formalism. Assuming that the dimensionality of space-time is even we can choose half of ψ_μ to be coordinates, while the other half are conjugate momenta. So, let us introduce complex fields:

$$\phi_a = \psi_a + i\psi_{a+\mathcal{D}/2} \quad a = 1, \dots, \mathcal{D}/2$$

Then the action takes the form:

$$S = \int \phi_a^+ \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t} \phi_a dt$$

This is the standard form describing $\mathcal{D}/2$ harmonic oscillators. The Hamiltonian in this case is equal to zero, while the states are formed by the "vacuum"

$$\phi_a |0\rangle = 0$$

together with the "excited" states:

$$|f\rangle = \phi_{a_1}^+ \cdots \phi_{a_n}^+ |0\rangle$$

Since our operators are anticommuting,

$$[\phi_a, \phi_b^+]_+ = \delta_{ab}, \quad \phi_a^2 = (\phi_a^+)^2 = 0$$

the number of independent states in (9.406) is $2^{\mathcal{D}/2}$ (each a can be either empty or occupied). All these states have zero energy and describe a single particle with $2^{\mathcal{D}/2}$ states. This is just the degeneracy of the spinor representation of the $O(\mathcal{D})$ group, and in fact, what we have done is just to construct such a representation. Of course, to complete the job, one has to construct the $O(\mathcal{D})$ generators out of ϕ_a , and show that the representation is nondegenerate. This is not hard, but we stop here, since our task was just to see the connection between ψ_μ and spinors.

Returning to the string case, let us look at the ψ_μ part of the string action on a cylinder:

$$S = \int \left(\psi_{\mu,L} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - i \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \psi_{\mu,L} + \psi_{\mu,R} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + i \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \psi_{\mu,R} \right) d\tau d\sigma$$

Two spinor structures correspond to ψ_μ being periodic or anti-periodic as we go around the cylinder. In the periodic case (which is called the Ramond sector) ψ_μ has a σ -independent component, so that the action (9.408) is reduced (for each $\psi_{\mu,L}$ and $\psi_{\mu,R}$) to (9.403). We see that as we integrate over the periodic case, the ground state of the string is a spacetime spinor. In the antiperiodic case we still have the states (9.406), but now the Hamiltonian is nonzero (due to $i\psi \cdot \partial_\sigma \psi$) and these states are not degenerate. Actually, in this case the ground state is bosonic (in the space-time sense).

Now we have to return to our punctured sphere and the operator algebra. This is achieved by a conformal transformation which makes an annulus out of the cylinder. Then, the limit of an infinitely long cylinder will correspond to the limit, when the internal circle of the annulus shrinks to a point while the external one goes to infinity. That is, we shall get a sphere with an omitted point. Our task is to find what happens to different spinor structures under this transformation.

In order to solve this problem we notice that the conformal map we are talking about is just

$$w = \log z = \tau + i\sigma$$

$$\psi_{\mu L}(z) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{1/2} \psi_{\mu L}(w(z))$$

$$\psi_{\mu R}(\bar{z}) = \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{1/2} \psi_{\mu R}(\overline{w(z)})$$

(here z belongs to the punctured sphere and w to the cylinder; we have recalled that the conformal spin of ψ_μ is $1/2$).

The square root in (9.409) is rather important. It implies that ψ_μ periodic on the cylinder (Ramond sector) becomes antiperiodic as we go to the z -plane. Vice versa, fields ψ_μ which were antiperiodic on the cylinder (Neveu-Schwarz sector) transform into fields, which are univalued in the z -plane.

So, we arrive at the following rule. When we integrate over fields which are univalued in the whole z -plane, we describe bosonic states of the string which comprise what is called the Neveu-Schwarz sector. If we permit ψ_μ -fields, which change sign after going round the injection point, then we have injected a space-time fermion.

How do we perform efficiently the functional integrals for non-trivial spinor structures? In the case of point singularities which we are discussing, the answer to this question is through the introduction of the so-called spin operators.

Since we know that the ground state in the Ramond sector is a spacetime spinor, we expect that it corresponds to an operator $S_a(z, \bar{z})$, where $a = 1, \dots, \mathcal{D}/2$ is the spinor index. An operator product with $\psi_\mu(z)$ must be given by:

$$\psi_\mu(z) S_a(0) = (2z)^{-1/2} (\gamma_\mu)_{ab} S_b(0) + \dots$$

The factor $z^{-1/2}$ reflects the non-trivial spinor structure at $z = 0$ induced by $S_a(0)$ and the coefficients $(\gamma_\mu)_{ab}$ are just $\mathcal{D}$ -dimensional γ -matrices. The fermionic state $|a\rangle$ of the string (a being a spinor index) is given by:

$$|a\rangle = S_a(0)|0\rangle$$

These spin operators have a very transparent physical meaning. Let us recall that free Majorana fermions in two dimensions are equivalent to the two dimensional Ising model, in the sense that their partition functions are equal. A NRS-string can be imagined as a bosonic one, each piece of which carries a $\mathcal{D}$ -dimensional spin operator. Now, by a Jordan-Wigner transformation this system is transformed into the usual Majorana fermions on the world surface. On the other hand, since each piece of the string carries spin $1/2$, we can have two sectors, depending on whether we have an even or an odd number of spins. These are the Neveu-Schwarz and Ramond sectors respectively.

The spin operator, which interchanges these two sectors, can be expressed by Jordan-Wigner transformations through the fermionic field ψ_μ . This representation, involving exponents of bilinears of ψ_μ is rather clumsy, but fortunately is not needed since we shall show how to compute S_a -correlations directly.

Consider first one fermionic field ψ and let us compute the correlation function:

$$\mathcal{K} = \langle \psi(z_1) \psi(z_2) S(x) S(y) \rangle$$

(This is precisely the case of the Ising model.)

It appears that the analytic properties of $\mathcal{K}$ are sufficient for its determination.

We know from (9.410) that it is an analytic function of z_1 and z_2 , which has square root branch points at $z_{1,2} = x, y$. Also because of the operator product relation

$$\psi(z_1)\psi(z_2) \simeq z_{12}^{-1}I + \dots$$

it must have a simple pole as $z_1 \rightarrow z_2$. Hence, we can write:

$$\mathcal{K} = \frac{P(z_1, z_2, x, y)}{(z_1 - z_2) \{(z_1 - x)(z_1 - y)(z_2 - x)(z_2 - y)\}^{1/2}}$$

where P must be a polynomial in z_1 and z_2 . This polynomial must be arranged so that the residue at the pole $z_1 = z_2$ is independent of z_1 (because of the unit operator in (9.413)). Hence:

$$P(z_1, z_1, x, y) = Q(x, y)(z_1 - x)(z_1 - y)$$

Also, because of

$$S(x)S(y) \simeq |x - y|^{-4\Delta}I + \dots$$

we have the requirement:

$$P(z_1, z_2, x, y) = (z_1 - x)(z_2 - x)$$

The only possible form for the correlation function is therefore:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \frac{(z_1 - x)(z_2 - y) + (z_1 - y)(z_2 - x)}{(z_1 - z_2) \{(z_1 - x)(z_1 - y)(z_2 - x)(z_2 - y)\}^{1/2}} \frac{1}{|x - y|^{4\Delta}}$$

Now we are ready to find Δ .

The idea is the following. We first use the operator product

$$\psi(z_1)\psi(z_2) \underset{z_{12} \rightarrow 0}{\simeq} z_{12}^{-1}I + fz_{12}T(z_2) + \dots$$

where the constant f can be expressed through the dimensionality of ψ , i.e. $1/2$. To find f we can substitute (9.418) into:

$$\begin{aligned} & \langle \psi(z)\psi(0)\psi(u)\psi(v) \rangle \\ &= \frac{1}{z} \frac{1}{u-v} + \frac{1}{z-u} \frac{1}{v} - \frac{1}{z-v} \frac{1}{u} \\ &\approx \frac{1}{z \rightarrow 0} \frac{1}{u-v} + z \frac{u-v}{(uv)^2} + O(z^2) \end{aligned}$$

The first term is the contribution of the unit operator while the second one comes from the energy-momentum tensor. The conformal Ward identity fixes the normalization of T :

$$\langle T(0)\psi(u)\psi(v) \rangle = \frac{1}{2} \frac{u-v}{u^2v^2} \frac{1}{2}$$

We see that in (9.418) $f = 2$. Of course, this could have been foreseen, because we are dealing with free fermions for which

$$T(z) = -\frac{1}{2}\psi\hat{\partial}_z\psi$$

and there is nothing more in our derivation than checking this fact. But, in general, the method of operator products is applicable far beyond free field situations.

The second step in finding Δ is to substitute (9.418) into $\langle \psi\psi SS \rangle$. Expanding (9.417) in z_{12} we obtain:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{z_{12} \rightarrow 0} \frac{1}{z_{12} |x-y|^{4\Delta}} + \frac{z_{12}}{8} \frac{(x-y)^2}{(z_2-x)^2 (z_2-y)^2} \frac{1}{|x-y|^{4\Delta}}$$

The first term here again comes from the unit operator, while the second is the energy-momentum contribution. Combining (9.418) and (9.402) we get:

$$\langle T(z) S(x) S(y) \rangle = \frac{1}{16} \frac{(x-y)^2}{(z-x)^2 (z-y)^2} \frac{1}{|x-y|^{4\Delta}}$$

This is compatible with the conformal Ward identity (which, in particular, says that the residue of the second order pole at $z \rightarrow x$ is equal to Δ) provided that we chose $\Delta = 1/16$. We see that conformal algebra indeed determines the dimensionality of the spin operator, as well as its correlation functions.

There is an important representation for (9.412). Take its $y \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$ limit, which can be achieved by a projective transformation. We obtain:

$$\langle S(\infty) | \psi(z_1) \psi(z_2) | S(0) \rangle = \frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2}{(z_1 z_2)^{1/2}} \frac{1}{z_1 - z_2}$$

This formula has an interesting interpretation. Namely, since we have introduced spins at 0 and ∞ the fields $\psi(z)$ have become double valued in the z -plane with a cut from 0 to ∞ . We can expect that they have the following mode expansion:

$$\psi(z) = \frac{1}{z^{1/2}} \left(\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n z^{-n} + b_n^+ z^n) \right)$$

and proper anticommutations of ψ requires

$$\begin{aligned} \{\psi_0 \psi_0\} &= 2\psi_0^2 = 1 \\ \{b_n, b_m^+\} &= \delta_{nm} \end{aligned}$$

Let us now compute the correlation function:

$$\langle \psi(z_1) \psi(z_2) \rangle = \frac{1}{(z_1 z_2)^{1/2}} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^n \right\} = \frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2}{(z_1 z_2)^{1/2}} \frac{1}{z_1 - z_2}$$

which is just what we got from (9.412). In the case when spin operators and the cut are absent, the mode expansion would be

$$\psi(z) = z^{-1/2} \left[\sum_{n=1/2}^{\infty} (b_n z^{-n} + b_n^+ z^n) \right]$$

and

$$\langle \psi(z_1) \psi(z_2) \rangle = \frac{1}{(z_1 z_2)^{1/2}} \sum_{n=1/2}^{\infty} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^n = \frac{1}{z_1 - z_2}$$

as it should be.

We see that the role of spin operators is to shift us from half-integer modes in (9.428) to integer ones in (9.425). Moreover, the dimensionality of the spin operator, $\Delta = 1/16$ has a

natural interpretation as the change of zero-point energies in the presence of the spin. Indeed, the following relation is true:

$$\begin{aligned}\Delta &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n - \sum_{n=1/2}^{\infty} n \right) \\ &= \frac{1}{24} + \frac{1}{48} = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

where we have used the following formula for the regularized sums:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (n-j) - \sum_{n=0}^{\infty} n &= -\frac{1}{2} j(j+1) \\ \sum_n \omega_n &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_n \omega_n e^{-\epsilon \omega_n}\end{aligned}$$

In the $\mathcal{D}$ dimensional case the only difference which we encounter is that we now have the dimensionality of the spin:

$$\Delta = \mathcal{D}/16$$

since all ψ_μ change their zero-point fluctuations, and also instead of (9.425) we have:

$$\psi_\mu = z^{-1/2} \left\{ \frac{\gamma_\mu}{2^{1/2}} + \gamma_{Q+1} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n z^{-n} + b_n^+ z^n) \right\}$$

where γ_μ and $\gamma_{\mathcal{D}+1}$ are the usual Dirac matrices.

Using these formulas it is easy to compute correlation functions, involving two spin operators. Of course the mode expansion method is inadequate when more spins are involved. In these cases methods based on operator algebra have to be used. It is not hard to construct any correlator of spins.

Let us recapitulate. We have started with the supersymmetric (on the world sheet) action containing x_μ and ψ_μ fields. Loosely speaking we had γ -matrices (ψ_μ) distributed on the world sheet. We have shown, that there exist, apart from the ordinary, bosonic sector of such a string, another, "soliton" sector described by antiperiodic boundary conditions for ψ_μ at the injection points. As a result, each injection point where the "soliton" is concentrated can be described by a spin operator, which is a spinor in space time. This implies that the string has spinorial excitations, apart from the bosonic ones.

In principle it is possible to describe this string not by the ψ_μ fields, but by the spin fields S_a on the world sheet. In the case of particles this corresponds to transition from the action (9.317) to (9.335). Unfortunately, since the S_a have anomalous dimension $\mathcal{D}/16$ they are far from free fields, and no practically useful description has yet been found. I am sure it exists, however. The situation is somewhat easier for $\mathcal{D} = 10$, since then the light-cone gauge is possible and the effective dimensionality of the spin becomes $(\mathcal{D} - 2)/16 = 1/2$. In this case, as can be expected, the spin fields are free and the fermionic string can be described by the noncovariant Green-Schwarz action.

In the covariant formalism we have to construct the vertex operator for emission of a space-time fermion. It must be something like

$$V_{p,a} \sim S_a(\xi) e^{ip \cdot x(\xi)}$$

where a is a spinor index. However, (9.433) is not good by itself, since it does not have the required dimension 1 for the vertex. The reason is that, while S_a has changed the spinor

structure for the ψ -fields, it is necessary to do the same job for the gravitino and ghost fields, which enter into the functional integral. There are formal constructions for completing this task, but an appealing derivation from first principles is still lacking. Still we can compute, if we like, amplitudes containing two fermions. For this we use bosonic emission vertices

$$V_{p\mu} =: (i\partial_z x_\mu + p_\nu \psi_\mu \psi_\nu) e^{ip \cdot x} :$$

and presume that ψ_μ has the mode decomposition (9.432). This just means that we have spin operators at 0 and ∞ and examine the scattering of bosons (in arbitrary number) by one fermion. For several fermions one has either to use the algebraic construction for the fermionic vertex alluded to above or to pass to the light-cone gauge. Hopefully, the situation will improve soon.

So in the critical dimension ($\mathcal{D} = 10$) the fermionic string has the following properties. Its ground state is massless (being vector for the open string case and tensor for the closed one) and supersymmetric in the space-time sense, because the number of states in the Ramond sector is equal to that in the Neveu-Schwarz sector.

This point must be clarified, since certain projections in both sectors are needed to reach this conclusion. We have already mentioned them in passing, but now we will discuss their meaning.

When we worked in the bosonic sector, without spin operators, we considered only vertices which contain an even number of ψ_μ , or in other words, we projected onto the sector even under $\psi_\mu \rightarrow -\psi_\mu$. This projection eliminated the tachyon with its vertex $:(p_s z_s) e^{ip \cdot x}$; also it is clearly self-consistent. But what is its true origin?

Let us discuss first, how to make this projection in terms of functional integrals. If we are interested in the partition function:

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H_{\text{NS}}} = Z^F \cdot Z^B = \int \mathcal{D}\psi \exp \left(- \int \psi \cdot \partial \psi d\sigma d\tau \right) \cdot Z^B$$

(where H_{NS} is the Neveu-Schwarz hamiltonian), then the integral in (9.434) must be formulated on a torus, with time periodicity β and space periodicity 2π . The usual boundary conditions will be antiperiodic in both directions; we have already explained that space antiperiodicity implies consideration of NS-excitations, while the time antiperiodicity is the standard thing needed for the description of the partition functions of fermions. We can write symbolically:

$$Z^{(F)} = \text{diagram of a torus with antiperiodic boundary conditions in both directions, indicated by minus signs on the top and right edges.}$$

Let us consider now the projection. It is easy to check that taking periodic fermions in the time direction amounts to computing $\text{Tr}(-1)^F \exp(-\beta H)$, where F is the fermion number. Hence, the projection onto even F will be achieved if we take:

$$Z = \text{diagram of a torus with periodic boundary conditions in time (plus sign on top) and antiperiodic in space (minus sign on right)} + \text{diagram of a torus with antiperiodic boundary conditions in time (minus sign on top) and periodic in space (plus sign on right)}.$$

Adding the Ramond sector, we arrive at the simple rule. In order to describe the projected NSR model we have to sum over all possible spin structures. This gives the supersymmetric string theory. Presumably, for higher genus surfaces the prescription must be the same.

We do not have a good derivation of this fact. However, some explanation can be given. Let us show that only under the above prescription is it possible to treat the system in terms of spin operators. For that matter, take an Ising model on a surface with high genus. We know that usually this model can be replaced by free fermions. Is this still true? In fermionization of Ising spins a crucial role is played by Kramers-Wannier duality (see the next chapter). Fermionic lines are essentially the boundaries of drops containing reversed spins. However, if the surface is homologically nontrivial, there are closed paths which do not form boundaries of anything. We must ensure that fermionic trajectories corresponding to these paths do not contribute. The way to achieve this is just to sum over spin structures, since then each homologically nontrivial path will be cancelled by one of the opposite spin structure.

We conclude, that the global introduction of spin operators requires summation over spin structures. Space-time supersymmetry must also be explainable along the same lines, but it is not at the moment clear how to do it.

14.10 Attempt at a Synthesis

What is the use of string theories? What is their connection with the physical problems described in the other chapters? There is no final answer to these questions. In this chapter I shall describe reasons to believe that string theories are important and perhaps present the master-key to the most fundamental problems.

Three kinds of questions will be in the centre of our attention. We begin with the project of grand unification on the string basis, then describe the 3-D Ising model and conclude with 4-D chromodynamics.

14.10.1 10.1 Long Wave Oscillations of Strings in Critical Dimensions

We have seen in the previous chapter that string theories in critical dimension contain massless spin 2 particles in their spectrum (and their superpartners for superstrings). Since the only consistent interaction for these particles is the gravitational one, these string theories must contain within themselves a theory of gravity. While in the low energy limit this theory will necessarily be Einstein-like, for high energies it will have good regular behaviour because strings are extended objects.

The basic idea of unified theories is to presume that all our lowenergy world arises from massless string excitations which include super-gravitons, gauge fields and matter fields. All massive modes of strings are presumed to be very heavy (of the order of the Planck mass), and therefore unobservable.

Let us explain how this idea can be implemented.

First of all, why and when do we have massless excitations in the string theory? To find the partial answer to this question, let us recall that an ordinary string has the action

$$S = \int g^{1/2} g^{ab} \partial_a x \partial_b x \, d^2 \xi$$

which was obtained from the Nambu action

$$\begin{aligned} S &= \int (\det \partial_a \cdot x \partial_b x)^{1/2} \, d^2 \xi \\ &= \int \{g^{1/2} + \lambda^{ab} (\partial_a x \cdot \partial_b x - g_{ab})\} \, d^2 \xi \end{aligned}$$

by presuming condensation of the Lagrange multiplier, λ^{ab} :

$$\langle \lambda^{ab} \rangle = \text{const. } g^{1/2} g^{ab}$$

Therefore, in the phase described by (10.3) we have to interpret g_{ab} in (10.1) as an induced metric $\partial_a x \cdot \partial_b x$.

Let us consider a scale transformation in space-time: $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$. It is equivalent to a Weyl transformation on the world sheet:

$$g_{ab}(\xi) \rightarrow \lambda^2 g_{ab}(\xi)$$

We have shown in the previous chapter that if the dimension $\mathcal{D}$ is critical ($\mathcal{D} = 26$ for the bosonic case and $\mathcal{D} = 10$ for the fermionic one) then the Liouville mode decouples and the theory is Weyl invariant.

The only way to ensure scale invariance in space-time is to have a massless dilaton in the string spectrum. It is indeed there. Perhaps, along the same lines one can explain the graviton as well.

With all these massless modes at hand, one has to be able to compute their effective action in the low energy approximation. In principle, since we know the rules for computing the S -matrix through the averages of vertex operators it is straightforward to go to the low energy limit in these formulas. However, this direct way is very cumbersome and not very illuminating. There exists an interesting alternative which we describe now.

Let us consider the string theory in a curved background:

$$S = \frac{1}{2} \int \gamma_{\mu\nu}(x(\xi)) g^{1/2} g^{ab}(\xi) \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu d^2 \xi$$

where $\gamma_{\mu\nu}(x)$ is some fixed metric tensor of the $\mathcal{D}$ -dimensional space. We are going to show, that the conditions for conformal invariance of the action (10.5) give equations for the $\gamma_{\mu\nu}$ (and some other fields) which coincide precisely with the ones obtained from the S -matrix. Therefore, the problem of the low energy limit reduces to the computation of the β -functions for (10.5) treated as a nonlinear σ -model.

Let us assume first, that the world sheet is flat, $g_{ab} = \delta_{ab}$. Then, the action

$$S = \frac{1}{2} \int \gamma_{\mu\nu}(x(\xi)) \delta^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu d^2 \xi$$

is renormalizable in the following sense. Suppose, that we integrate over fast components of the x -field, with wave vectors lying between Λ and $\bar{\Lambda}$. As we will show now, the result will again be an action of the form (10.6) but with a renormalized metric tensor $\tilde{\gamma}_{\mu\nu}(\mathbf{x})$. So, the set of all possible $\gamma_{\mu\nu}(x)$ plays the role of the coupling constants in more ordinary theories. In particular the nonlinear σ -models, considered in the beginning of the book, correspond to the special case when $\gamma_{\mu\nu}(x)$ are taken to have constant curvature (this constraint is reproduced under renormalization). The coupling constants which we have introduced before are nothing but the values of these constant curvatures.

The computation begins, as usual, with the decomposition into fast y and slow x_0 parts of the field:

$$\mathbf{x}(\xi) = \mathbf{x}_0(\xi) + \mathbf{y}(\xi)$$

Substituting (10.7) into (10.6) we obtain:

$$S(x) = S(x_0) + S_{\text{II}}(x_0, y)$$

where $S_{\text{II}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$ is quadratic in $\mathbf{y}$. Linear terms in $\mathbf{y}$ are absent, because they are of the form:

$$S_I(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = \int \mathbf{y} \frac{\delta S}{\delta \mathbf{x}_0} d^2 \xi$$

and while $\delta S / \delta x_0$ contains wave vectors $\leq \tilde{\Lambda}$, wave vectors of y lie in the range from Λ to Λ . Hence, with our accuracy, the integral (10.9) is zero.

As far as S_{II} is concerned it has the form:

$$S_{II} = \int \left\{ \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu}(x_0(\xi)) \partial y^\mu \partial y^\nu + \partial_\alpha \gamma_{\mu\nu}(x_0) \partial_a x_0^\mu y^\alpha \partial_a y^\nu + \frac{1}{4} \partial_\alpha \partial_\beta \gamma_{\mu\nu}(x_0) \partial_a x_0^\mu \partial_a x_0^\nu y^\alpha y^\beta \right\} d^2 \xi$$

In principle it is not hard to compute logarithmic corrections directly from (10.10). However, since the expected answer must be covariant in x -space, it is appropriate to recast (10.10) into an explicitly covariant form. Again, there is a "brute force" way of doing it, but it is more reasonable to perform the computations by using a slightly advanced notation.

Let us notice first that if

$$(A, B) = \int d^2 \xi \gamma_{\mu\nu}(x(\xi)) A^\mu(x(\xi)) B^\nu(x(\xi))$$

then its variation under $x(\xi) \rightarrow x(\xi) + y(\xi)$ is given by:

$$\delta(A, B) = (\nabla_y A, B) + (A, \nabla_y B)$$

where we have introduced a covariant derivative in the y -direction:

$$(\nabla_y A)^\mu = y^\lambda \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu A^\rho \right)$$

Using these relations, we compute first the first variation, S_I of the action S :

$$S_I = (v_a, \nabla_y v_a) \\ v_a^\mu = \partial_a x^\mu$$

Owing to the symmetry of $\Gamma_{\lambda\rho}^\mu$ (absence of torsion) we have:

$$(\nabla_y v_a)^\mu = (\nabla_a y)^\mu = \partial_a y^\mu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \partial_a x^\lambda y^\rho$$

Varying once more, we find:

$$S_{II} = \delta(v_a, \nabla_a y) \\ = (\nabla_a y, \nabla_a y) + (v_a, \nabla_y \nabla_a y) \\ = (\nabla_a y, \nabla_a y) + (v_a, [\nabla_y, \nabla_a] y)$$

(where we have set to zero the $\nabla_a v_a$ term, which is the classical equation of motion). The commutator of two covariant derivatives is the curvature tensor R :

$$(v_a, [\nabla_y, \nabla_a] y) = (v_a, R(y, v_a) y) \\ = \int R_{[\alpha\lambda][\beta\sigma]} y^\alpha \partial_a x^\lambda y^\beta \partial_a x^\sigma d^2 \xi$$

So, going back to the usual notation, we have transformed (10.10) into the form:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{II}} &= \int \frac{1}{2} (\gamma_{\mu\nu}(x_0(\xi))) \nabla_a y^\mu \nabla_b y^\nu \\
 &\quad + R_{\alpha\mu\beta\nu}(x_0(\xi)) y^\alpha y^\beta \partial_a x_0^\mu \partial_b x_0^\nu g^{ab} g^{1/2} d^2\xi \\
 \nabla_a y^\mu &= \partial_a y^\mu + (\omega_a)^\mu_\nu y^\nu \\
 (\omega_a)^\mu_\nu &= \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \partial_a x_0^\lambda
 \end{aligned}$$

(where we have reintroduced the omitted metric tensor of the world sheet).

Notice, that in the case when $\gamma_{\mu\nu}$ describes a sphere, (10.17) is precisely (2.40) derived for the n -field.

It is straightforward now to compute the cut-off dependence of the one loop partition function.

First of all, the logarithmic correction to the effective action arise from the second term in (10.17):

$$\begin{aligned}
 S_{\text{eff}}^{(1)} &= \int \frac{1}{2} R_{\alpha\mu\beta\nu}(x_0(\xi)) \partial_a x_0^\mu \partial_b x_0^\nu g^{1/2} g^{ab} \langle y^\alpha y^\beta \rangle d^2\xi \\
 &= \int \frac{1}{2} R_{\mu\nu}(x_0(\xi)) \partial_a x_0^\mu \partial_b x_0^\nu g^{1/2} g^{ab} d^2\xi \int_{\tilde{\kappa}}^\Lambda \frac{d^2k}{(2\pi)^2 k^2}
 \end{aligned}$$

As a result, we have renormalization of $\gamma_{\mu\nu}(x)$ in the form:

$$\delta\gamma_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\Lambda}{\lambda} R_{\mu\nu}[\gamma]$$

If the world sheet were flat, there would have been no other one loop divergences. Counter-terms dependent on ω_a do not arise, since they can appear only through

$$\phi_{ab}^2 = (\partial_a \omega_b - \partial_b \omega_a + [\omega_a, \omega_b])^2$$

which is a dimension 4 operator.

However, in the case of a curved world sheet there is another type of counter-term which must be taken into account (as noticed by Fradkin and Tseytlin). It is clear, that we have a dimension 2 object composed of the external field g_{ab} -the curvature of the world sheet, $R(\xi)$. So we can expect counter terms, which do not depend on the derivatives of x , but have the form:

$$\tilde{S} = \int \phi(x(\xi)) R(\xi) g^{1/2} d^2\xi$$

This kind of the logarithmic divergence already appears in flat space, $\gamma_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, since the determinant of the Laplacian contains the term:

$$\text{Tr} \log \Delta \sim \log \Delta \int R g^{1/2} d^2\xi$$

When we switch on $\gamma_{\mu\nu}$ the coefficient in (10.21) gets modified. This modification begins at the two loop order, for which we have to expand the action (10.17) further. To give an idea of what happens, let us look at the term (one of many) which appears in the expansion:

$$S_{\text{IV}} \sim \int g^{1/2} g^{ab} R_{\alpha\mu\beta\nu}(x_0(\xi)) y^\alpha y^\beta \partial_a y^\mu \partial_b y^\nu d^2\xi$$

Averaging this term in y and using the formulas:

$$\begin{aligned}\langle y^\alpha y^\beta \rangle &= \gamma^{\alpha\beta}(x_0(\xi)) \left(\frac{1}{2\pi} \log \Lambda + \text{finite part} \right) \\ \langle \partial_a y^\alpha \partial_a y^\beta \rangle &= \gamma^{\alpha\beta}(x_0(\xi)) [k_1 \Lambda^2 + k_2 e^{-\varphi} \partial^2 \varphi(\xi)] \\ (g_{ab} &= e^\varphi \delta_{ab})\end{aligned}$$

we obtain a logarithmically divergent contribution to the effective action:

$$W \sim \log \Lambda \int R(x_0(\xi)) (g(\xi))^{1/2} d^2 \xi$$

Quadratic divergence renormalizes the cosmological constant and does not concern the massless sector.

As a result of these computations one has to add to (10.19) a renormalization equation for the ϕ -field, since we have shown that this term is needed for the overall renormalizability. We have in the lowest order ($\mathcal{D} = 26$):

$$\begin{aligned}\delta \gamma_{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{\Lambda}{\lambda} (R_{\mu\nu}[\gamma] + c \nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \\ \delta \phi &= (c_1 R(x) + c_2 (\nabla_a \phi(x))^2 \\ &\quad + c_3 \nabla^2 \phi(x)) \log \frac{\Lambda}{\lambda}\end{aligned}$$

The origin of the ϕ -dependent terms is simple: as we expand (10.20) in y , we get:

$$\begin{aligned}S_{\text{II}} &= \int \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi(x_0(\xi))) R(\xi) y^\alpha y^\beta g^{1/2} d^2 \xi \\ &\quad + \int (\nabla_\alpha \phi(x_0(\xi))) R(\xi) y^\alpha(\xi) g^{1/2} d^2 \xi\end{aligned}$$

Using (10.23) and taking the second term in the second order we get the structure (10.25).

It is not hard to compute all the coefficients, after which one obtains the renormalization group equations:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{\mu\nu} &\equiv \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial \log \Lambda} = -\frac{1}{2\pi} R_{\mu\nu}(x) - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \\ \dot{\phi} &= (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{4\pi} \nabla^2 \phi - \frac{1}{16\pi^2} R(x)\end{aligned}$$

These equations can be written in the form:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{\mu\nu} &= 8\pi e^{8\pi\phi} \frac{\delta \Gamma}{\delta \gamma_{\mu\nu}} \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{8\pi} e^{8\pi\phi} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi} \\ \Gamma &= \int e^{-8\pi\phi} \left[\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \phi - (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{16\pi^2} R(\gamma) \right] \gamma^{1/2} d^{26} x\end{aligned}$$

A remarkable fact which we are now going to discuss is that this effective action Γ is just the one which could be obtained by taking the low energy limit of the string S -matrix. Moreover, if we proceed to higher terms in the β -functions they would correspond to the higher terms of the low energy expansion.

In order to clarify this amazing connection between the properties of the world sheet of the string and the space-time into which it is embedded, let us consider this problem in a slightly different context.

Let us suppose that we have a string, on the world sheet of which "lives" some conformal field theory. Let us assume also, that in the set of all operators of this conformal field theory there are operators $\{u_n(\xi)\}$ with dimension two. If the resulting theory has zero total central charge (after summing contributions from the coordinate of the string, the ghosts and the extra conformal theory), the vertex operators of the form

$$v_p^{(n)} = u_n(\xi) e^{ip \cdot x(\xi)}$$

describe scalar massless particles. We are going to demonstrate that the effective action for these particles is related to the β -functions.

Let us look at the perturbed lagrangian:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \sum_n \lambda_n u_n(\xi)$$

The operators u_n are supposed to satisfy the operator product expansion:

$$u_n(\xi) u_m(0) = \frac{\delta_{nm}}{|\xi|^4} I + \frac{1}{|\xi|^2} f_{nml} u_l(0) + \text{less singular terms}$$

(where f_{nml} are the symmetric structure constants of the operator algebra which define the normalization of the three-point functions:

$$\langle u_n(\xi_1) u_m(\xi_2) u_l(\xi_3) \rangle = \frac{f_{nml}}{|\xi_1 - \xi_2|^2 |\xi_2 - \xi_3|^2 |\xi_3 - \xi_1|^2})$$

Now, let us examine the perturbation theory for the partition function:

$$Z = \left\langle \exp \int \sum_n \lambda_n u_n(\xi) d^2 \xi \right\rangle$$

When we expand this expression in λ we get different products of u -operators, integrated over ξ -space. These integrals are divergent because of the singularities in the operator product (10.31). Therefore, we have to introduce a cut-off. The renormalization groups tells us how we should change λ_n under a given change of the cut-off, so that Z remains unchanged.

In order to find these conditions, we shall first of all discard all quadratic divergences, coming from the first term in (10.31). Formal justification of this lies in the fact that these divergences are absent if we use a dimensional regularization scheme. The real reason is that they are purely short-distance effect, contributing to Z but not to any connected Green function. On the contrary, logarithmic divergences, coming from the second term in (10.31) are physically important and we are now going to analyse them. Let us take the N th term in the expansion for Z :

$$Z^{(N)} = \int d^2 \xi_1 \dots d^2 \xi_N \langle u_{n_1}(\xi_1) \dots u_{n_N}(\xi_N) \rangle \lambda_{n_1} \dots \lambda_{n_N}$$

As, say, $\xi_1 \rightarrow \xi_2$ this integral becomes divergent. Using (10.31) we find:

$$\begin{aligned} Z^{(N)} &\simeq \int_{n_1 n_2 m} \lambda_{n_1} \lambda_{n_2} \dots \lambda_{n_N} 2\pi \log \left(\frac{1}{a} \right) \\ &\times \int d^2 \xi_2 \dots d^2 \xi_N \langle u_m(\xi_2) u_{n_3}(\xi_3) \dots u_{n_N}(\xi_N) \rangle \\ &+ \text{finite terms} \end{aligned}$$

where a is an ultraviolet cut-off. We derive from (10.35) that the change in $a : a \rightarrow \tilde{a}$ can be compensated by a change of λ_n if we choose:

$$\lambda_n \rightarrow \tilde{\lambda}_n = \lambda_n + f_{nml} \lambda_m \lambda_l 2\pi \log \left(\frac{\tilde{a}}{a} \right)$$

In other words we have computed (approximately), how λ_n must depend on a so as to keep Za -independent. The answer is contained in the Gell-Mann-Low equation:

$$\frac{d\lambda_n}{d(2\pi \log(1/a))} \equiv \beta_n(\lambda) = -f_{nml} \lambda_m \lambda_l + O(\lambda^3)$$

We see from this formula that the β -function can be expressed in terms of the structure constants of the operator algebra. In higher orders in λ we would need structure constants of operator products involving several u -operators.

Now let us return to the string theory. Scattering amplitudes in the critical dimensionality are constructed out of simple vertex operators. If a typical string resonance is described by the vertex operator $V_p(\xi)$, where $\mathbf{p}$ is the momentum, then on mass shell this operator has dimension 2 and the scattering amplitude is given by:

$$\mathcal{A}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \int d^2\xi_1 \dots d^2\xi_N \langle V_{\mathbf{p}_1}(\xi_1) \dots V_{\mathbf{p}_N}(\xi_N) \rangle$$

This is almost the same expression as (10.34). The main difference is that the short distance singularities governed by the operator product expansion reveal themselves in the form of poles of $\mathcal{A}$ instead of logarithmic divergences. The residues of these poles are precisely the same structure constants which determine the β -functions. Let us consider the effective action for these massless particles, $\Gamma(\phi_1, \dots, \phi_n)$, where $\{\phi_k\}$ are the fields corresponding to them. We presume that $\{\phi_k\}$ are space-time independent, so that the particles carry zero momentum. The expansion of Γ in ϕ starts with the cubic term (since the quadratic mass terms are equal to zero):

$$\begin{aligned} -\Gamma(\{\phi\}) &\simeq \phi_n \phi_m \phi_l \left\langle V_0^{(n)}(0) V_0^{(m)}(1) V_0^{(l)}(\infty) \right\rangle + \dots \\ &= f_{nml} \phi_n \phi_m \phi_l + O(\phi^4) \end{aligned}$$

We have recalled in the derivation of this formula what was always implicitly assumed in the Koba-Nielsen integrals, that three integrations out of N are consumed by factoring out the $SL(2, C)$ group. So the three point function does not have any integration at all.

We see from this formula that to this order the β -function is connected with the effective action: †

$$\beta_n(\phi) = \frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_n}$$

and, therefore, the condition for stability $\partial \Gamma / \partial \phi_n = 0$ coincides with the condition of conformal invariance $\beta_n(\phi) = 0$.

What happens in the next order? The effective action has the form:

$$\begin{aligned} -\Gamma(\{\phi\}) &= f_{nml} \phi_n \phi_m \phi_l \\ &+ \phi_n \phi_m \phi_l \phi_k \left\{ \text{f.p.} \int d^2\xi \langle u_n(0) u_m(1) u_l(\infty) u_k(\xi) \rangle \right\} + O(\phi^5) \end{aligned}$$

where the symbol f.p. means the finite part of the logarithmically divergent integral. Why have we taken it? The reason is that the four point function contains a pole term (which looks like a logarithmic divergence in (10.40)) and a contact term produced by the exchange

† Further conclusions arose in discussions with A. Zamolodchikov and partially use his results.

of massive states. In the effective action the pole term must be omitted by definition (and generated back when solving the equations of motion). Thus we have (10.40), and analogous formulas to all orders in ϕ .

In the fourth order it is easy to check that the conditions for conformal invariance $\beta_n = 0$ again coincide with the equations of motion $\partial\Gamma/\partial\phi_n = 0$. It seems very likely that this is true to all orders. Indeed, the β -function is defined as the coefficient before the first power of the logarithm in the expansion of the renormalized ϕ_n . As we have seen from the previous discussion, renormalization in the order N is obtained by replacing the N operators $u(\xi)$ in Z in (10.34) by a single one, using the operator algebra:

$$u_{n_1}(\xi_1) \dots u_{n_N}(0) \underset{\xi_k \rightarrow 0}{\approx} C_{n_1 \dots n_N}^m(\xi_1, \dots, \xi_{N-1}) u_m(0)$$

The renormalization of ϕ^m is given by:

$$\delta\phi^m = \int d^2\xi_1 \dots d^2\xi_{N-1} C_{n_1 \dots n_N}^m(\xi_1, \dots, \xi_{N-1}) \phi^{n_1} \dots \phi^{n_N}$$

This integral contains multiple logarithmic divergences, appearing because the fusion of any two ξ_a and ξ_b creates a factor $|\xi_{ab}|^{-2}$. If we subtract all these terms, then the only divergence comes from the overall scale integration. This is by definition the β -function. (In dimensional regularization we have to separate the first order pole from (10.42).)

Now, let us compare this expression with $\partial\Gamma/\partial\phi^m$:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\Gamma}{\partial\phi^m} = \sum \phi^{n_1} \dots \phi^{n_N} \text{f.p.} \int |R|^4 \langle u_m(R) u_{n_1}(1) u_{n_2}(0) \\ \times u_{n_3}(\xi_3) \dots u_{n_N}(\xi_N) \rangle d^2\xi_3 \dots d^2\xi_N \Big|_{R \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

In this integral we can at first consider all $|\xi_j| \ll R$. Then we can apply the operator product expansion (10.41) and get:

$$\begin{aligned} \int \langle u_m(R) u_{n_1}(1) u_{n_2}(0) \dots u_{n_N}(\xi_N) \rangle d^2\xi_3 \dots d^2\xi_N \\ \simeq \int C_{n_1 \dots n_N}^l(1, 0, \xi_3, \dots, \xi_N) d^2\xi_3 \dots d^2\xi_N \langle u_m(R) u_l(0) \rangle_{\text{eff}} \end{aligned}$$

The finite part of the first factor in this formula is precisely equal to the coefficient of the first power of the logarithm in (10.42), i.e. to the β function. The second factor would be proportional to δ_{ml} if it had not been for the contributions of $\xi_j \sim R$ in (10.44). These contributions lead to

$$\langle u_m(R) u_l(0) \rangle_{\text{eff}} = \frac{1}{|R|^4} \left\{ g_{ml}(\phi) + A_{ml}(\phi) \log \frac{|R|}{a} + \dots \right\}$$

Separating the finite part we obtain the desired relation:

$$\frac{\partial\Gamma(\phi)}{\partial\phi^m} = g_{ml}(\phi) \beta^l(\phi)$$

from which it follows that the equations of motion are equivalent to the condition of conformal invariance. We have not given a complete proof of these formulas (for the reason that it has not been completed) but it seems not too difficult to obtain this proof along the lines sketched above.

The meaning of these results is quite transparent. They imply that if the conformal field theory, which lives on the world sheet is unstable under perturbations, then the string theory

is unstable under condensation of the fields corresponding to these perturbations. If the two-dimensional theory tends to a fixed point, defined by $\beta^n(\phi) = 0$, then the original string theory will tend (after condensation of the fields) to a new string theory, with a spectrum defined by the dimensionalities of the operators at the fixed point. Stability in the sense of the renormalization group turns out to be stability in the sense of the mass spectrum. In particular, the mass matrix given by the second derivatives of Γ , according to (10.46) coincides with the matrix of anomalous dimensions, given by derivatives of β , as it should be.

The only question which we have not settled yet is the central charge of the resulting theory.

To investigate this problem let us introduce $S(\xi)$ the trace of the energy-momentum tensor, and consider the pair correlation function in momentum space, $\langle S(k)S(-k) \rangle$. This defines the reaction of the system to a weak external gravitational field in the conformal gauge. In the purely conformal theory this reaction is given by the Liouville action, while in a renormalizable field theory we have:

$$\langle S(k)S(-k) \rangle = C(\phi^1(k), \dots, \phi^n(k)) k^2 \equiv C(k)k^2$$

where we have introduced running (along the renormalization group trajectories) coupling constants. On the other hand, since a change of the cut-off is coupled to $S(\xi)$ and owing to renormalizability it can be compensated by a change of couplings, we have the well-known identity:

$$S(\xi) = \sum_m \frac{\partial \phi^m}{\partial \log \Lambda} u_m = \sum_m 2\pi \beta^m(\phi) u_m$$

If we recall that:

$$\begin{aligned} \langle u_m(0)u_n(R) \rangle &= \frac{g_{mn}(\phi)}{|R|^4} + \dots \\ \langle u_m(k)u_n(-k) \rangle &= g_{mn}(\phi) \frac{1}{2\pi} \left(\log \frac{|k|}{\Lambda} \right) k^2 + \dots \end{aligned}$$

we find that the term proportional to the first power of the logarithm in $C(k)$ is given by:

$$C(k^2) \simeq C - g_{mn}(\phi) \beta^m(\phi) \beta^n(\phi) 2\pi \log \frac{\Lambda}{|k|}$$

On the other hand, from (10.47):

$$\begin{aligned} C(k^2) &= C(\phi^1(k) \dots \phi^n(k)) \\ &\simeq C\left(\phi^1 - 2\pi \beta^1(\phi) \log \frac{\Lambda}{|k|}, \dots\right) \\ &\simeq C(\phi) - \beta^j \frac{\partial C}{\partial \phi^j} 2\pi \log \frac{\Lambda}{|k|} \end{aligned}$$

Therefore, we get:

$$\beta^n \left(\frac{\partial C}{\partial \phi^n} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \phi^n} \right) = 0$$

From this equation it follows, that along the renormalization group trajectory we have:

$$C(k^2) = c + \Gamma(\phi^1(k) \dots \phi^N(k))$$

We see from this formula, that if the perturbation drives the system to a new fixed point, the central charge $C(k^2)$ tends to some new constant value. Incidentally, since the system

relaxes towards smaller value of the effective action Γ , this new central charge must be smaller than the original one (Zamolodchikov theorem).

The situation is rather amusing. Suppose that we start from a string theory in the critical dimension. Let us assume also, that there are massless modes which tend to condense, leading us to a new string theory. We see, that generically this new theory will have a noncritical central charge. The implication is that the Liouville field, originally absent, must somehow appear. The only exception to this rule is the case when all β -functions are identically zero.

By the way, what goes wrong if we consider formally the dual amplitudes for noncritical central charge without the Liouville mode? The answer to this question is that nothing will be wrong at the tree level (provided that C is less than critical-there will be ghosts otherwise). However, as we consider unitarity corrections to the amplitudes, or higher topologies, then we encounter unphysical singularities in momentum space.

So, we have traced the connection between the β -functions and the effective actions for the massless modes of the strings. Applying this conclusion to the case of the σ -model with the metric $\gamma_{\mu\nu}(x)$ and the dilaton $\phi(x)$, we see that the low energy expansion of the S -matrix elements can be obtained by the loop expansion of the β -functions. Moreover, we see that the central charge is given by:

$$C_{\text{tot}} = \mathcal{D} - 26 + \Gamma(\gamma_{\mu\nu}(x), \phi(x))$$

$$S = \int \Gamma(\gamma_{\mu\nu}(x), \phi(x)) (\det \gamma)^{1/2} d^{\mathcal{D}}x$$

(here S is the action which generates the S -matrix) and, according to previous formulas, the fields which minimize S have the property:

$$\Gamma(\gamma_{\mu}^{\text{cl}}(x), \phi^{\text{cl}}(x)) = \text{const.} \leq 0$$

Let us explain now the qualitative origin of these results. We have considered a string in the external fields and then minimized its effective action. This seems to be a bizzare procedure. The true meaning of it is the following. The string contains interacting massless modes. Let us suppose that they tend to form nonzero condensates. Then the picture of the random world-surface can be viewed as something like a sphere on which branching polymers, consisting of the propagators of these massless modes, grow. What we have really done, has been to prescribe some amplitude for each plant and to define it self-consistently. We can say that the string is floating in its own condensate.

In principle there are corrections to the effective action, coming from higher topologies of the world sheet. Their structure has at this time not yet been investigated.

14.10.2 10.2 Possible Applications of Critical Strings

A unique property of the critical strings is that they describe gravitons. Let us discuss possible ways to utilize this fact. First of all, the bosonic strings, which we discussed in the previous section, are not totally consistent, since they contain tachyons. This flaw is absent in the case of fermionic strings, provided that we sum over spin structures on the world sheet (meaning, as we showed in the previous chapter, that we include space-time fermions into the spectrum).

According to the ideas of Sherk and Schwarz, such $\mathcal{D} = 10$ Fermistrings can describe our world; provided that we compactify somehow 6 out of the 10 dimensions.

In this section we shall briefly describe the picture of the world which arises in this way.

We begin from the $\mathcal{D} = 10$ NSR string. As we know, it does not contain a tachyon and its ground states are massless. These ground states contain gravitons, dilatons, antisymmetric tensor fields, and their super-partners (constructed out of spin operators). The conjecture to

be made is that the gravitons condense in such a way that the vacuum expectation value of $\gamma_{\mu\nu}(x)$ has the form:

$$\begin{aligned}\langle\gamma_{mn}(x)\rangle &= \delta_{mn}, \quad m, n = 1, \dots, 4 \\ \langle\gamma_{\mu\nu}(x)\rangle &= G_{\mu\nu}(x^5, \dots, x^{10}), \quad \mu, \nu = 5, \dots, 10\end{aligned}$$

where the $G_{\mu\nu}$ are to be determined by dynamics. Geometrically speaking this formula means that the $\mathcal{D} = 10$ space has the structure $M^4 \times K^6$ where M^4 is Euclidean space and K^6 is some curved and presumably compact manifold. At the moment we do not know what was the reason for this condensation, and, in particular, what or who has fixed $\mathcal{D} = 4$ for our space. But, provided that it has happened, we can easily derive consistency conditions on $G_{\mu\nu}$.

Let us change notation slightly, and write $x^m, m = 5, \dots, 10$ as $y^m, m = 1, \dots, 6$ presuming that now $\mu, \nu = 1, \dots, 4$. The string action takes the form:

$$\begin{aligned}S = \int g^{1/2} [g^{ab} (\partial_a x^\mu \partial_b x^\mu + G_{mn}(y) \partial_a y^m \partial_b y^n) \\ + \epsilon^{ab} B_{mn}(y) \partial_a y^m \partial_b y^n] d^2\xi + \text{fermionic part}\end{aligned}$$

In this formula we have added the antisymmetric tensor field B_{mn} , which we have forgotten before. It is one of the massless modes of the string. In principle, it should have been taken into account in the β function considerations. However, due to parity considerations, the B modes can be omitted from the theory at the tree level, so we did not really make a mistake. In another version of the string theory they can be included. It is easy to realize, that these two options correspond to our decision, whether or not to include into consideration nonorientable surfaces. Their inclusion projects out the B -modes, since they couple through the tensor ϵ_{ab} which is not defined in the nonorientable case.

The first question to pose is under what conditions does the above action include $\mathcal{D} = 4$ gravity, among other things. As we have seen, these conditions can be obtained by requiring the theory to be conformally invariant with total central charge being zero.

First of all, this implies that the σ -model, associated with the y -space must be conformally invariant, that is its β -function must be zero. This gives us equations for the metric of the compact space K , and the B -field in this space. When the typical size of K is larger than the string parameter M^{-1} , we can use the low energy expansion, which essentially gives the Einstein equations for $G_{mn}(y)$.

If we insist on starting with the $\mathcal{D} = 10$ superstring, then in order to preserve the central charge intact, the effective action must stay unchanged along the renormalization group trajectory, or, in other words, there must be a sequence of $G_{mn}(y)$ which connect flat y -space with the desired space K , such that the β -function is zero for all these $G_{mn}(y)$. To prove the necessity of this condition, it suffices to notice that according to (10.52):

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial(2\pi\log\Lambda)} = -\beta^n(\varphi) \frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi^n} = -g_{nm}(\varphi) \beta^n \beta^m \leq 0$$

Hence if $\beta^n \neq 0$ along the trajectory, but reaches a fixed point, the central charge at this fixed point will be smaller than the original one (Zamolodchikov's theorem).

This condition would be impossible to satisfy without supersymmetry, since the arguments of the Chapter 2 show that any compact

bosonic σ -model in the strong coupling limit must have a finite correlation length. When superpartners are included, the question becomes more complicated and the answer is not known in general. There are arguments to the extent that if K is Ricci-flat and has Kähler structure, then the supersymmetric σ -model has zero β -function perturbatively. If so, then we have an exact solution of the string equations in the tree approximation, and are in a position

to start string perturbation theory. If it is not so, then one can either hope that string loop corrections will correct the effective action in such a way that K eventually will be a minimum, or we have to look for some other solutions.

At this point it is worth noticing, that the effect of the compactified dimensions is described by a conformal field theory on the world sheet, such that the total central charge is zero. In principle it is not necessary to insist that this field theory is just a σ -model of the six dimensional manifold. Any superconformal field theory will do, provided that it has the correct central charge, no world sheet supersymmetry breaking and stability (by stability we mean the absence of operators with dimensions less than two, so it is just stability in the sense of the renormalization group). Whether we should call these extra fields, living on the world sheet, "extra dimensions" is actually a matter of convention.

The properties, which we have listed are sufficient for having consistent four-dimensional gravity with some matter fields, including fermions. One has to impose further conditions, that some of these fermions are chiral, and also that there should be Yang-Mills fields in the theory.

One way of getting Yang-Mills fields is to exploit an old idea of Kaluza and Klein and to presume that K has some symmetry group acting on it, represented by Killing deformations κ^m which do not change the metric tensor G_{mn} . The vectors $\kappa^m(y)$ satisfy the equation:

$$\nabla_m \kappa_n^{(A)} + \nabla_n \kappa_m^{(A)} = 0$$

(where A labels the generators of the symmetry group).

In the Kaluza-Klein approach, the vector fields were essentially the mixed components (m, μ) of the metric tensor. In the string context this corresponds to the vertex operator for the Yang-Mills particle:

$$\Gamma_{p\mu}^{(A)} = \int d^2\xi g^{1/2} g^{ab} \partial_a x_\mu \partial_b y^m K_m^A(y(\xi)) + \text{fermionic part}$$

One can show, that due to the Killing condition, this vertex describes massless vectors.

There are two problems in implementing this idea to the real world. First, the minimal symmetry group must be $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ in order to include known interactions. Such a group can act only on manifolds of sufficiently large dimension. Namely, we must have one dimension for $U(1)$ two dimensions for $SU(2)$ (which can act on the two-dimensional sphere S^2) and four dimensions for $SU(3)$ (which acts naturally on $\mathbb{CP}^2$). Adding four space-time dimensions we get the minimal number of dimensions equal to eleven (the number obtained by Witten) which is larger than the critical dimension of the fermionic string.

A possible way out of this problem would be to find a σ -model which has a β -function with an isolated zero. In this case, as we have seen, the resulting central charge is less than the number of y -dimensions. Hence it is conceivably possible to begin with $\mathcal{D} > 10$ (perhaps $\mathcal{D} = 11$ is the best) and to descend to $\mathcal{D} = 4$ from there. One example of isolated zeroes is given by the Wess-Zumino σ -model, which has a nonzero B_{mn} -background. In this case it is hard to preserve $\mathcal{D} = 4$ supersymmetry, however. Other examples are σ -models with a θ -term at $\theta = \pi$, but they are poorly investigated at the moment.

The second problem in the Kaluza-Klein approach is that it is rather hard to get chiral fermions (observed in nature), roughly because the field $G_{mn}(y)$, having even charge parity, does not distinguish opposite chiralities. Perhaps B_{mn} will help here as well, but no concrete solution has yet been found.

Another approach to the question of vector mesons and chiral fermions rests on the heterotic version of the fermionic string (developed by Gross, Martinec, Harvey, Rohm) which we shall briefly describe now. The major idea of the construction is to have world sheet supersymmetry acting only among left-moving particles. The lagrangian with such a property has the form:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2}g^{1/2}g^{ab}\partial_a x_\mu\partial_b x_\mu + \psi_{\mu+}\partial_-\psi_{\mu+} \\ & + \chi - \psi_{u+}\partial_+x_u + \tilde{\mathcal{L}}_-\end{aligned}$$

Here $\psi_{\mu+}$ are the left-moving superpartners of x_μ , and χ_- the right moving gravitino; the term $\tilde{\mathcal{L}}_-$ we shall discuss in a moment. The difference between the heterotic and the NSR Lagrangian is that in the latter case we have $\psi_{\mu-}$ -fields as well and χ_+ , so that it is CP-symmetric.

The main property of the heterotic Lagrangian is CP-asymmetry on the world sheet. It can be formally obtained from the NSR-string by setting $\chi_+ = \psi_{\mu-} = 0$.

Now, repeating the analysis of the previous chapter we would find that generally speaking this theory is anomalous. When we take $g_{ab} \simeq \delta_{ab} + h_{ab}$, we find that in general the effective action for h_{ab} is of the form:

$$W \simeq c_+ \frac{K_+^3}{K_-} h_{--}^2 + c_- \frac{K_-^3}{K_+} h_{++}^2 + \text{possible local terms}$$

where c_+ and c_- are the central charges of the left and right parts of the theory. We have seen in Chapter 9 that for $c_+ = c_-$ the local term can be arranged so that W is gauge invariant. For $c_+ \neq c_-$ this is not possible any more. Hence, if we want to maintain general covariance we have to equalize c_+ and c_- .

To do this we recall that we have ghosts with $c_+ = -15$ (for the supersymmetric part of the theory) and $c_- = -26$ for the ordinary part. Therefore:

$$\begin{aligned}c_+^{\text{tot}} &= \frac{3}{2}\mathcal{D} - 15 + \tilde{c}_+ \\ c_-^{\text{tot}} &= \mathcal{D} - 26 + \tilde{c}_-\end{aligned}$$

We conclude that $\tilde{\mathcal{L}}_-$ must describe a left-supersymmetric field theory on the world sheet with $\tilde{c}_- - \tilde{c}_+ = \mathcal{D}/2 + 11$. The critical dimension is given by $\mathcal{D}_{\text{cr}} = \frac{3}{2}(10 - \mathcal{D})$. The simplest choice would be to take $\mathcal{D} = 10, \tilde{c}_+ = 0, \tilde{c}_- = 16$ by adding 32 right moving fermions on the world sheet. Then:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sum_{A=1}^{32} \chi^A \partial_+ \chi^A$$

Vector fields appear naturally through the vector vertex:

$$\Gamma_{p\mu}^{[AB]} = (i\partial_+ x_\mu + p_v \psi_\mu + \psi_{v+}) \chi_-^A \chi_-^B e^{ip \cdot x}$$

Right currents $\chi_-^A \chi_-^B$ form the current algebra for the $SO(32)$ group. We can in principle reduce this symmetry by choosing different spinor structures for different A , in which case it will be impossible to form conserved charges by integrating currents over the string. However, possible choices are strongly limited by an important condition of invariance under "large" diffeomorphisms or, which is the same, under the modular group.

Let us describe these large diffeomorphisms and show that lack of invariance under their action on the world sheet would manifest itself as gauge and gravitational anomalies in the space-time. Conversely, the condition of modular invariance is equivalent to the condition of cancellation of the above anomalies.

In the case of the torus, we saw that a conformal gauge can be chosen, provided that we represent this torus as a parallelogram, defined by vectors $\omega_1 = (1, 0)$ and $\omega_2 = (\text{Re } \tau, \text{Im } \tau)$ where τ is a complex parameter. Integration over all metrics was reduced to integration over the Liouville field (absent in critical dimension and the integral $\int d^2\tau$. All integrands as functions

of τ must be invariant under a specific discrete group which we describe now. Therefore, to avoid repetitions one has to integrate only over the fundamental region in τ -space.

Let us take a torus and cut it along a circle, making a cylinder out of it. Then twist one of the boundaries of this cylinder through the angle 2π and glue it back, obtaining a torus again. Clearly, this is a diffeomorphism of the torus which is not homotopic to the identity. For example a large circle of the torus will wind once around it after such a diffeomorphism.

When we describe the torus by the parallelogram (ω_1, ω_2) , the effect of the two possible operations described above is the change:

$$\begin{aligned}(\omega_1, \omega_2) &\rightarrow (\omega_1, \omega_1 + \omega_2) \\ (\omega_1, \omega_2) &\rightarrow (\omega_1 + \omega_2, \omega_2)\end{aligned}$$

The first transformation is simply the shift $\tau \rightarrow \tau + 1$. To find the effect of the second one we have to return the parallelogram to its original position. That will give us another transformation $\tau \rightarrow 1 + 1/\tau$. These two transformations generate the modular group. We can also describe this group as

$$\tilde{\omega}_i = A_{ik}\omega_k \quad i, k = 1, 2$$

where A_{ik} is a matrix with integer elements and with $|\det A| = 1$. Therefore, our group is $SL(2, \mathbb{Z})$. Similar considerations for arbitrary topology lead to the symplectic groups with integer coefficients, but we shall not need it here.

Our point will be to show that the lack of modular invariance on the world sheet must lead to space-time anomalies.

The main idea is that we have to check the nonpropagation of the spurious states on the torus. In the massless sectors, as we have seen, these spurious states are just the longitudinal vectors and gravitons. Hence, the absence of gauge and gravitational anomalies is equivalent to the above-mentioned nonpropagation.

At the tree level we have checked this property by showing that owing to the Ward identity $\langle T(z) \rangle$ on the world sheet is zero.

In the case of the torus, Ward identities are more tricky and here modular invariance comes into play.

Let us derive Ward identities for the case of the torus. Let us recall, that if we make an infinitesimal coordinate transformation $\epsilon(z, \bar{z})$, then the action change by the amount:

$$\delta S = \int T(z) \partial_{\bar{z}} \epsilon(z, \bar{z}) d^2 z$$

while the fields transform as:

$$\delta \phi = \left(\epsilon(z, \bar{z}) \frac{\partial}{\partial z} + \Delta(\partial_z \epsilon) \right) \phi$$

If we choose ϵ to be a solution of:

$$\partial_{\bar{z}} \epsilon = \delta^{(2)}(z - w)$$

we obtain the desired Ward identity. The main difference from the previous formulas is that ϵ is not strictly periodic and thus changes the fundamental region. Namely, the solution of the above equation is given by the Weierstrass ζ function:

$$\epsilon(z) = \zeta(z - w); \quad \zeta(z) = \sum_{\omega \in L} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$$

where L is a lattice formed by (ω_1, ω_2) . It is well known that:

$$\zeta(z + \omega_\alpha) = \zeta(z) + \eta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2$$

and that the constants η_α satisfy the relation:

$$\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = 2/\pi i$$

It is easy to check, using these relations, that the above conformal transformation induces a constant change of $\tau = \omega_2/\omega_1$. The corresponding Ward identity is given by:

$$\begin{aligned} \langle T(z) \phi(z_1) \cdots \phi(z_N) \rangle \\ = \frac{\partial}{\partial \tau} \langle \phi(z_1) \cdots \phi(z_N) \rangle \\ + \left\{ \sum_k \left(-\Delta \zeta'(z - z_k) + \zeta(z - z_k) \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \right\} \langle \phi(z_1) \cdots \phi(z_N) \rangle \end{aligned}$$

It should be stressed, that in this formula the averages are understood without dividing them by the partition function, which itself depends on τ .

The role of modular invariance is evident by now. When we check the decoupling of the longitudinal states we have to integrate the Ward identity on z_j and on τ , restricting the τ integral to the fundamental region. If the partition function violates modular invariance the term $\partial/\partial\tau$ will give a nonzero contribution, coming from the boundaries. Thus a modular anomaly on the world sheet will manifest itself as a gauge and gravitational anomaly in space-time.

The conclusion is that in heterotic string theories one has to check modular invariance, which severely limits the possibilities. On the other hand, in ordinary closed strings modular invariance is automatic, since non-chiral determinants can be regularized in a manifestly covariant way. Such theories, even when they contain chiral fermions in spacetime, are safe from anomalies.

Let us summarize. We see that we now have a consistent description of quantum gravity and supergravity, and we have many options for including chiral fermions and other particles into the scheme. This approach explains the enigma of generations, the strange copying which started with the muon. The number of copies now is determined by the number of zero modes of the generalized Dirac operators, which in turn is fixed by the topology of the background manifold. Actually it is hard to obtain a small enough number in this approach.

At the same time, we cannot explain at the moment why compactification took place, and most importantly, why the dimensionality of our world is equal to four. Until these problems are solved, we cannot be quite sure that we are on the right track. Still, there are many favourable signs.

14.10.3 10.3 The Three-Dimensional Ising Model

It is well known that most of the phase transitions of the second kind occurring in Nature are equivalent, as far as critical behaviour is concerned, to the three dimensional Ising model. After Onsager's remarkable success with the two dimensional version of this model, many people have tried to find its solution in 3d (private communication). No such solution has been found and we have a strong feeling now that the model is not exactly solvable. At the same time, the total solution is not actually needed, because only the critical behaviour of this theory presents a universal interest. By this we mean that the

critical properties of the Ising model (such as the singularity in the specific heat) are shared by many statistical systems in Nature. However if we are far from the phase transition point no lessons for other systems can be extracted.

In the present section we shall try to argue that in the continuum limit (i.e. in the vicinity of the phase transition point) the three-dimensional Ising model can be reduced to an exactly solvable system—the supersymmetric string. This result should allow in principle the determination of the critical behaviour, but it is still an unsolved problem.

In order to explain our ideas we have to recall the situation in the 2d Ising model, solved by Onsager. There are two kinds of basic variables in this model. First are spin variables σ_x (or order parameters) taking the values ± 1 . Second, there exist disorder variables, μ_x first introduced by Kadanoff and Ceva which are defined as the endpoints of dislocation lines. These two sets of variables are dual to each other in the same way as electric and magnetic charges. It is remarkable that although equations of motion for σ_x and μ_x separately are complicated, the product variable $\psi = \sigma\mu$ satisfies a linear equation. Moreover, in the continuum limit (near the phase transition point) this linear equation is reduced to the two-dimensional Euclidean Dirac equation, implying that the ψ -variable describes a fermionic excitation. So, we can say that the two-dimensional Ising model is equivalent to a system of relativistic, noninteracting Fermi particles.

Let us turn now to the three-dimensional case. The basic difference here is connected with the nature of the disorder variables. The dislocation lines (surrounding the regions of the reversed spins) of the two-dimensional model are now replaced by dislocation surfaces. The boundary of these surfaces is now the argument on which the μ variable depends. So, instead of variables $\mu(x)$ of the 2d model we have now the contour variable $\mu(C)$ (here C is a closed loop). Again, in order to obtain simple equations, we have to form the product of $\mu(C)$ and $\Pi_i \sigma(x_i)$ where x_i are the points adjacent to the loop C . If we draw small normals to the loop C , connecting it with the points $\{x_i\}$, we obtain a string with pseudospins living on it, an object which resembles barbed wire. These "barbed wire" variables satisfy a linear equation in the loop space. The meaning of this equation is that each small piece of the barbed wire propagates exactly as an Ising fermion of the two dimensional model, if we consider the plane, orthogonal to the piece under consideration. Just as a Fermi particle propagator can be represented by a sum over all possible paths with a certain fermionic structure on them, described in Section 10.3.1, the solution of the loop equation is found to be equal to a sum over surfaces with extra fermionic structure. This is described in Section 10.3.2.

The strategy which follows will be to find a continuous string model, such that the string moves piecewise as a free Dirac fermion. The natural candidate is the Neveu-Schwarz-Ramond string.

14.10.4 10.3.1 The Dirac Equation in the Two-Dimensional Ising Model

The two-dimensional Ising model is described by the partition function:

$$Z = \sum_{\{\sigma_x\}} e^{-\beta \mathcal{E}[\sigma_x]}$$

$$\mathcal{E}[\sigma_x] = - \sum_{x, \delta} \sigma_x \sigma_{x+\delta}$$

Here β is the inverse temperature, the points $\{x\}$ belong to the two dimensional rectangular lattice, $\sigma_x = \pm 1$, and $\{\delta\}$ are the two possible unit lattice vectors. Important physical

† Some of the results of this section have been obtained in collaboration with V. Dotsenko (1978).

information is condensed in the correlation functions

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \langle \sigma(x_1) \cdots \sigma(x_N) \rangle$$

defined in the obvious way. It is possible to obtain a Schwinger-Dyson chain of equations for $G_N(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$. However, this way of proceeding would obscure the exact solvability of the model. The appropriate way is to introduce the so-called disorder variables. They are defined as follows. Consider a point $\mathbf{x}_*$ of the dual lattice (formed by the centres of the faces of the original lattice) and draw some path P on the dual lattice, leading from x_* to infinity. Change the sign of β on all bonds intersected by the path. Define the distorted partition function, $\tilde{Z}(x_*, P)$. Then, the disorder variable $\mu(x_*)$ (defined through its Green functions) is given by:

$$\langle \mu(x_*) \rangle = \frac{\tilde{Z}(x_*, P)}{Z}$$

Analogously one defines

$$\langle \mu(x_{1*}) \mu(x_{2*}) \cdots \mu(x_{N*}) \rangle$$

Now, a simple argument shows that (10.57) does not depend on the paths leading from infinity to $\mathbf{x}_{K*}$, but only on $\mathbf{x}_{K*}$ themselves. To show this, consider a closed path which surrounds some two-dimensional region, (a "drop") and change the sign of the coupling on all the bonds

intersected by the path. Consider the modified partition function $Z(P)$. It is obvious now that $Z(P) = Z$, since to any given configuration contributing to $Z(P)$ corresponds a configuration of the same energy contributing to Z . The latter configuration is obtained from the former one by reversing all the spins lying inside the drop. From this relation it follows that two different choices of the path in (10.56) and (10.57) give the same result. Let us notice parenthetically that such a simple definition of the disorder variable holds true for a lattice with simple topology (such that each closed loop bounds a drop). Otherwise there are different variables, classified by the first homology group.

In order to obtain linear equations let us consider the variable ψ which is formed by the product of the order parameter σ_x and the adjacent disorder variable. At each point of the original lattice x , we have four adjacent points of the dual lattice $x_*^{(a)} = x + e_a$ where the four vectors $\mathbf{e}_a$ have length $1/\sqrt{2}$ and are directed along the diagonals of the original lattice. Let us consider the four component object:

$$\psi_a(x) = \sigma(x) \mu(x + e_a), \quad a = 1, 2, 3, 4$$

The "tail" necessary for the definition of μ is supposed to go horizontally from $x + e_a$ to the left infinity. Now, we have a simple identity:

$$\langle \psi_1(x) \rangle = \left\langle \sigma(x) \prod_{n=0}^{\infty} \exp \{ -2\beta (\sigma_{x-n\delta_1} \sigma_{x-n\delta_1+\delta_2}) \} \right\rangle$$

In the derivation of equation (10.59) all we have used was the definition of μ (the product $\prod_{n=0}^{\infty}$ represents the change from β to $-\beta$ along the intersected bonds), the fact that $\sigma_x^2 = 1$ and last but not least the possibility to turn the tail of $\mu(x_*)$ if it does not intersect a spin variable. Proceeding in the same fashion we get:

$$\begin{aligned} \langle \psi_a(x) \rangle &= \cosh(2\beta) \langle \psi_{a+1}(x) \rangle \\ &\quad - \sinh(2\beta) \langle \psi_{a+2}(x + \delta_{a+1}) \rangle \end{aligned}$$

Here $a = 1, 2, 3, 4$. It is clear that $\langle \psi_{a+4} \rangle$ and $\langle \psi_a \rangle$ are essentially the same object but they are not identical. Namely $\langle \psi_{a+4} \rangle$ is obtained by 2π rotation of the arrow e_a . However, we must remember the horizontal tail attached to the end of the arrow. In the process of the rotation it intersects once the point $\mathbf{x}$, where the spin $\sigma_{\mathbf{x}}$ is placed. As a result the object ψ changes its sign (recall that we proved tail independence for a pure μ correlator, but if there are σ present and the tail crosses σ the correlator changes sign). We conclude that the equation (10.60) must be augmented by the condition:

$$\psi_{a+4}(x) = -\psi_a(x)$$

The phase transition point is determined from (10.60) by looking for an x -independent solution; substituting:

$$\psi_a \sim e^{\pm i\pi a/4}$$

in order to guarantee (10.61) we obtain from (10.60)

$$\sinh(2\beta_c) = 1, \cosh(2\beta_c) = \sqrt{2}$$

The other possible solution

$$\psi_a \sim e^{\pm 3i\pi a/4}$$

would lead to unphysical β_c . The two dependences (10.62) and (10.64) correspond to the spin 1/2 and spin 3/2 parts of the wave function. Near the point (10.63) the mode with spin 1/2 becomes soft and the mode 3/2 remains hard. The equation (10.60) is invariant under $\pi/2$ -rotations with simultaneous rotation of the spin index a :

$$\psi_a(x) \rightarrow \psi_{a+1}(\Gamma x)$$

(Γ is $\pi/2$ rotation).

We may expect therefore that in the continuum limit, when only spin 1/2 propagates, we shall obtain the Dirac equation. This is indeed the case as is seen by expanding

$$\begin{aligned} \psi_a(\mathbf{x}) = & u_+(\mathbf{x})e^{i\pi(a+1/2)/4} + u_-(\mathbf{x})e^{-i\pi(a+1/2)/4} \\ & + v_+(\mathbf{x})e^{3i\pi(a+1/2)/4} + v_-(\mathbf{x})e^{-3i\pi(a+1/2)/4} \end{aligned}$$

Substituting (10.66) into (10.60) and neglecting the v -terms, we obtain (using the identity $u_+(x) = \frac{1}{4} \sum_a e^{-\pi i(a+1/2)/4} \psi_a$):

$$\begin{aligned} (\partial_1 + i\partial_2) u_+ &= i m u_- \\ (\partial_1 - i\partial_2) u_- &= i m u_+ \\ m &\sim \frac{\beta - \beta_c}{\beta_c} \end{aligned}$$

Equation (10.67) is precisely the two-dimensional Dirac equation with the spinor $u(x)$ transforming under rotations:

$$u(x) \rightarrow e^{i\varphi/2} u(\Gamma(\varphi)x)$$

($\Gamma(\varphi)$ is a rotation with the angle φ .) The formula (10.68) is the continuum analogue of (10.65). Up to now we have dealt with the single field average $\langle \psi_a(x) \rangle$. If we have to consider more complicated Green functions:

$$F_{a_1, \dots, a_l}(x_1, \dots, x_l) = \langle \psi_{a_1}(x_1) \dots \psi_{a_l}(x_l) \rangle$$

we find that with respect to each argument they satisfy the same equation (10.60) with the condition (10.61) but on the right hand side of this equation we shall have contact terms as usual. These terms reduce to the standard δ -functions in the continuum limit. Let us demonstrate finally how to find the critical singularity in the specific heat. We have for the average energy density:

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= -2 \langle \sigma_x \sigma_{x+\delta_1} \rangle \\ &= -2 \langle \psi_1(x) \psi_2(x + \delta_1) \rangle \\ &= \langle u(x) \bar{u}(x) \rangle \\ &= \text{Tr} \int_{|p| \ll 1} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{m + i\hat{p}} \\ &= 2m \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2 (p^2 + m^2)} \sim m \log \frac{1}{m}\end{aligned}$$

where we have used the standard Dirac propagator. For the specific heat we get:

$$C \sim -\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \sim -\log \left| \frac{\beta - \beta_c}{\beta_c} \right|$$

which is Onsager's famous result.

14.10.5 10.3.2 The Three-Dimensional Case. The Loop Equation

The three-dimensional Ising model is defined again by equation (10.54) only now x belongs to the three-dimensional cubic lattice. The order variable $\sigma(x)$ is defined as before. A slight modification is needed for the μ -variables since now the "drops" with reversed spins are three dimensional and their boundaries are formed by two-dimensional surfaces. Let us introduce the dual lattice which is formed by the centres of the cubes of the original one. Consider a closed loop C on the dual lattice and form an arbitrary surface S_C (on this lattice) bounded by this loop. Define the distorted partition function $\tilde{Z}(C, S_c)$ by changing the signs of all couplings on the original links intersected by S_C . Then $\mu(C)$ is defined by:

$$\langle \mu(C) \rangle = \frac{\tilde{Z}(C, S_c)}{Z}$$

The definition (10.71) is a straightforward generalization of (10.56). Here again it appears that $\langle \mu(C) \rangle$ does not depend on the choice of the surface S_c , because a closed surface of dislocation does not change Z (it is possible to reverse spins in the drop, bounded by S). Therefore we can form loop Green functions like:

$$\langle \mu(C_1) \dots \mu(C_N) \rangle$$

If also $\sigma(x)$ are present then these functions are defined up to a sign which is physically irrelevant.

As in the 2d case, we shall obtain simple equations not for $\langle \mu(C) \rangle$ or $\langle \sigma(x) \rangle$ but for certain mixed objects which will be called "fermionic string" or "barbed wire".

Let us supply the middle of each link(s) of C with one of the vectors e_{a_s} ($a_s = 1, 2, 3, 4$) which lie in the plane orthogonal to the link under consideration. Let us consider the following object:

$$\Psi_{a_1, \dots, a_L}(C_L) = \mu(C_L) \prod_{s=1}^L \sigma(x_s + e_{a_s})$$

Here L is the length of the loop C and x_s is the middle of the link s . In order to obtain an equation most closely resembling equations (10.67) it is convenient to notice that the average $\langle \Psi_{a_1 \dots a_L}(C_L) \rangle$ can be computed in two ways: first with the definition of the average by (10.54) and μ given above, but also the dual way of computation is possible. By that we mean that we can define a dual Ising model by introducing variables $\mu_{x,\alpha} = \pm 1$ attached to the links of the dual lattice and considering the partition function:

$$Z = \sum_{\mu_{x,\sigma}} \exp \left(\tilde{\beta} \sum_P \mu(\partial P) \right)$$

Here we have denoted by P plaquettes of the dual lattice and by $\mu(\partial P)$ the product of $\mu_{x,\alpha}$ around the plaquette. The dual temperature $\tilde{\beta}$ is given by:

$$e^{-2\tilde{\beta}} = \tanh \beta$$

Kramers-Wannier duality ensures that the partition functions (10.74) and (10.54) are the same. The average of $\sigma(x)$ variables (which are disorder variables with respect to (10.74)) is defined as follows. Attach an infinite path to the point x and change the sign of $\tilde{\beta}$ on all plaquettes intersected by the path. Then:

$$\langle \sigma(x) \rangle = \frac{\tilde{Z}(x, P_x)}{Z}$$

After short meditation one concludes that (10.75), just as (10.56), does not depend on the choice of the path P_x . Indeed, let us consider a short closed path intersecting a bunch of four plaquettes having one common link. Changing the sign of the spin μ on this link we get a new configuration which is equivalent to the one in the model without the path. Therefore for this small closed path the modified partition function coincides with the old one. Since any large path can be composed from small ones, we conclude that a closed loop of dislocations does not change the system.

We are in a position now to obtain the desired equation for $\Psi_{a_1, \dots, a_2}(C)$. Let us use the identities

$$\begin{aligned} e^{-2\tilde{\beta}\mu(\partial P)} &= \cosh(2\tilde{\beta}) - \sinh(2\tilde{\beta})\mu(\partial P) \\ \mu^2(\partial P) &= 1 \end{aligned}$$

and imagine a tail S attached to $\sigma(x_s + e_{a_s})$, which gives a contribution:

$$\sigma(x_s + e_{a_s}) \sim \prod_s e^{-2\tilde{\beta}\mu(\partial P)}$$

(where the product goes along all the plaquettes intersected by the tail S). Using (10.77) (which is analogous to 10.59) we obtain:

$$\begin{aligned} \Psi_{a_1, \dots, a_2}(C) &= \cosh(2\beta) \Psi_{a_1, \dots, a_s+1, a_s+1, \dots, a_L}(C) \\ &\quad - \sinh(2\beta) \Psi_{a_1, \dots, a_s, a'_s, a_s+2, a'_s+3, a_s+1, \dots, a_L}(C + \Pi_{a_s}) \end{aligned}$$

Here the loop $C + \Pi_{a_s}$ is obtained from the original loop by removing the link s and attaching instead the letter Π oriented in the direction a_s . The loop $C + \Pi_{a_s}$ has length equal to $L + 2$, and on the two extra links we place indices a'_s and $a'_s + 3$, so that the corresponding σ are both placed in middle of the plaquette Π . Since $\sigma^2 = 1$ this does not affect our relations.

We observe now a remarkable analogy between equation (10.78) and equation (10.60). Indeed (10.78) implies that if we concentrate on some link s then it propagates in the plane

orthogonal to itself exactly as a particle excitation in the two-dimensional Ising model. That does not mean of course that the 3d Ising string can be considered as a collection of noninteracting 2 d Ising particles. The difference is that in the process of development the string does not break (as a consequence of gauge invariance) and hence when some link moves it creates extra portions of string, necessary for continuity. But this continuity is the only source of interaction. Such a system will be called a free string.

Let us now summarize our conclusions. We have proved that the $2d$ Ising model is equivalent to the problem of free particle propagation. This particle carries internal index a , or, more geometrically, an arrow e_a , which will be finally identified with spin. In the process of propagation of the particle the spin rotates due to spin-orbit interaction, but the total angular momentum is conserved. The classical vector e_a on the lattice does not correspond to any definite value of the spin but, according to (10.66) and (10.67) only the spin $1/2$ part of the wave function has long range correlations in the critical region. It is not surprising therefore that as a result we obtained the Dirac equation.

Turning now to the 3d case we discovered that the Ising model is described by the propagation of a closed string with internal degrees of freedom distributed on the links. These degrees of freedom are precisely the same as in the previous case, so we can say that we have a spin density distributed along the string. Our major result was the conclusion that the string moves piecewise as a 2 d -Ising particle, and there is only implicit interaction following from continuity.

The most difficult problem now is to find a continuum limit for the equation (10.78). In the 2d case such a problem was solved trivially, by solving first the lattice equation (10.60) and taking the limit $\beta \rightarrow \beta_{cr}$.

Unfortunately the equation (10.78) on the lattice is completely hopeless. The best thing we can do is to guess on physical grounds what kind of system it describes in the critical region. We shall do this by looking at things the other way around. Namely we discuss a continuum string model, which behave piecewise as a free Dirac particle, and has a very good chance to describe the critical region of equation (10.78).

Let us consider the NSR-string, the wave functional of which is annihilated by the supercurrent and energy momentum tensor. The supercurrent condition can be presented as:

$$\psi_{\mu}^{(\pm)} (\dot{x}_{\mu} \pm x'_{\mu}) |\phi\rangle = 0$$

If we replace $\dot{x}_{\mu}$ by $(1/i)(\delta/\delta x_{\mu})$ and introduce:

$$\gamma_{\mu}^{(1,2)} = \psi_{\mu}^{(+)} \pm \psi_{\mu}^{(-)}$$

we obtain an equation:

$$\left(\frac{1}{i} \gamma_{\mu}^{(1)}(s) \frac{\delta \phi}{\delta x_{\mu}(s)} + \gamma_{\mu}^{(2)}(s) \frac{dx_{\mu}}{ds} \right) \phi = 0$$

where

$$\{\gamma_{\mu}^{(a)}(s), \gamma_{\nu}^{(b)}(s')\} = 2\delta^{ab}\delta_{\mu\nu}\delta(s-s')$$

Now, if we consider a very short piece of the string for which $|dx/ds|\Delta s = \epsilon$, then we can replace $\Delta s (\delta\phi/\delta x_{\mu}(s))$ by an ordinary derivative:

$$\Delta s \frac{\delta \phi}{\delta x_{\mu}(s)} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x_{\mu}}$$

and $\gamma_{\mu}^{(1)}(s)$ by an ordinary γ -matrix. The term

$$\gamma_\mu^{(2)}(s) \frac{dx_\mu}{ds} \Delta s$$

anticommutes with

$$\gamma_\mu^{(1)} \frac{\delta}{\delta x_\mu(s)}$$

and in the "short string" limit can be replaced by $M\gamma_s$ with some M . As a result, the above equation becomes an ordinary Dirac equation

$$\left(\frac{1}{i} \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\gamma_5 \right) \phi = 0$$

The same conclusion could have been reached by the mode expansion in the Ramond sector and by noticing that in the short string limit only zero modes are relevant (since other eigenvalues tend to infinity). We conclude, that the NSR string moves piecewise as a collection of Dirac particles connected only by continuity. This is the same picture which we derived for the 3D Ising model. So, perhaps these two strings coincide.

Needless to say, we have not proved it. But the intuitive arguments given above make very tempting the problem of finding the critical exponents of the NSR string, and comparing them with Ising ones.

This problem has not been solved yet. In the next section we shall describe a general approach to it, together with a preliminary classification of strings.

14.10.6 10.4 Extrinsic Geometry of Strings

In this section we shall discuss critical exponents of strings—a subject intimately connected with their extrinsic geometry. Again, this problem is not solved and we can only show an approach to it, and describe several options, which we have in string theory.

The most interesting critical exponent is defined as follows. We start from the Nambu-Goto action (or its fermionic extension):

$$\mu_0 A(S) = \mu_0 \int g^{1/2} d^2\xi$$

$$g_{ab} = \partial_a x \cdot \partial_b x$$

and try to choose the bare surface tension μ_0 in such a way that the physical surface tension μ can be defined by:

$$G(C) = \sum_{S_C} \exp \left(-\mu_0 \int g^{1/2} d^2\xi \right) \underset{C \rightarrow \infty}{\approx} \exp (-\mu A_{\min}(C))$$

(here C is a boundary loop and $A_{\min}(C)$ is an area of the minimal surface bounded by this loop). The quantity $\mu(\mu_0)$ is by definition the physical surface tension. At the critical value of $\mu_0, \mu_{0\text{ cr}}$ we expect that:

$$\mu \sim (\mu_0 - \mu_{0\text{ cr}})^\alpha$$

where α is the critical exponent to be determined. One can relate many interesting quantities to this exponent.

What determines α ? The answer is different for bosonic and fermionic strings. Let us begin with the former. We have to ask ourselves at first, whether the Nambu term in the action, which is a kind of a cosmological term is the only relevant one in the continuum limit. One

would expect that the Einstein term can be important as well, since the Newton constant is dimensionless in two dimensions. It is commonly known, however, that in this case the Einstein term is just the Euler character of the manifold which is presumed to be fixed. Nevertheless, for string theory a dimensionless term in the action does exist. It is formed out of the extrinsic curvature of the surface and is defined as follows. Let us introduce the second fundamental form K_{ab}^i given by the equation:

$$\begin{aligned}\partial_a \partial_b x &= \Gamma_{ab}^c \partial_c x + K_{ab}^i n_i \\ (n_i \cdot n_j) &= \delta_{ij}; (n_i \cdot \partial_a x) = 0 \\ i &= 1, \dots, \mathcal{D} - 2\end{aligned}$$

(here Γ_{ab}^c is the usual Christoffel symbol, n_i normal vectors). Then the intrinsic curvature R is connected with K by

$$R = (K_a^{ia})^2 - K_b^{ia} K_a^{ib}$$

and is indeed a total divergence. However the separate terms in (10.84) are not. Therefore we can write the following generalization of the Nambu-Goto action:

$$S = \mu_0 \int \xi g^{1/2} d^2 + \frac{1}{\alpha_0} \int K_b^{ia} K_a^{ib} g^{1/2} d^2 \xi$$

It is easy to check that the second term is the only possible one (up to total divergences) invariant under scale transformation $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$.

Adding this new term to the action is not a caprice. Its influence in the infrared region determines the phase structure in the string theory. So, if we want to compute the critical behaviour of random surfaces and their geometrical and physical characteristics, it is absolutely necessary to include this term in the action.

Our first goal will be to investigate the relevance of extrinsic curvature in the continuum limit. Let us notice, that (10.85) can be rewritten in other forms (modulo total divergences):

$$\begin{aligned}& \int K_b^{ia} K_a^{ib} g^{1/2} d^2 \xi \\ &= \int g^{1/2} g^{ab} \partial_a t_{\mu\nu} \partial_b t_{\mu\nu} d^2 \xi \\ &= \int g^{1/2} (\Delta(g)x)^2 d^2 \xi \\ &= \int g^{1/2} g^{ab} (\nabla_a n_i) \cdot (\nabla_b n_i) d^2 \xi\end{aligned}$$

Here:

$$\begin{aligned}\Delta(g)x &= -\frac{g^{-1/2}}{g} \partial_a g^{1/2} g^{ab} \partial_b x \\ t_{\mu\nu} &= \frac{g^{-1/2}}{g} \epsilon^{ab} \partial_a x_\mu \partial_b x_\nu \\ \nabla_a n_i &= \partial_a n_i + \mathcal{A}_a^{ik} n_k = -K_a^{ib} \partial_b x\end{aligned}$$

The last form is especially interesting. It shows that we are dealing with a Grassman σ -model, associated with the surface. The order parameter lies in the homogeneous space

$$G_{2,\mathcal{D}} = \frac{SO(\mathcal{D})}{SO(2) \otimes SO(\mathcal{D} - 2)}$$

This is not an ordinary σ -model, because not every field in $G_{2,\mathcal{D}}$ forms tangent planes to some surface. A certain integrability condition must be satisfied. Still, the analogy with the σ -model will be quite useful. Namely, it permits one to compute the β -function for the coupling α which determines its scale dependence. We shall not describe this calculation here, but rather discuss its result and implications.

One finds for the momentum dependence of $\alpha(p)$:

$$\alpha(p) = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\mathcal{D}}{2} \cdot \frac{\alpha_0}{2\pi} \cdot \log \frac{\Lambda}{p}}$$

This formula makes clear, first of all, that our Grassmanian σ -model is not an ordinary one. In the latter case the coefficient before the logarithm would be $D - 2$ (recall the n -field) instead of $D/2$. This difference comes from the integrability constraint on the Grassman fields—they have to form tangent planes to some surface.

Of course, the behaviour described by (10.88) is true only until $\alpha(p)$ becomes large. What happens then? There are several possibilities. First of all, if the β -function has no zeros, then $\alpha(p)$ continues to increase as we go to the infrared region. That means that the term $(1/\alpha) \int K^2 g^{1/2} d^2\xi$ becomes irrelevant, since $\alpha \rightarrow \infty$. To describe the same thing in a different language, let us introduce the Lagrange multiplier:

$$S = \frac{1}{\alpha} \int K^2 g^{1/2} d^2\xi + \int (\lambda^{ab} (\partial_a x \cdot \partial_b x - g_{ab}) + \mu_0 g^{1/2}) d^2\xi$$

We have seen in the previous chapters that asymptotic freedom in the σ -models leads to the condensation of the Lagrange multiplier, or, which is the same, to creation of mass for the n -fields. In our case this means the following. The effective action for λ^{ab} develops a minimum so that

$$\langle \lambda^{ab} \rangle = \bar{\lambda} g^{1/2} g^{ab}$$

where dependence of g_{ab} is fixed by general covariance, while the value of $\bar{\lambda}$ is just the position of the logarithmic pole in (10.88) (since $\bar{\lambda}$ represents an infrared cut-off):

$$\bar{\lambda} \sim \Lambda e^{-4\pi/9\alpha_0}$$

If we do not have a special fine tuning, then $\alpha_0 \sim 1$ and $\bar{\lambda} \sim \Lambda$, so in the continuum limit we have the effective action

$$S = \bar{\lambda} \int (g^{1/2} g^{ab} \partial_a x \cdot \partial_b x + \mu_0 g^{1/2}) d^2\xi$$

which we discussed in the previous chapters.

We see that in this case the critical exponent $\alpha = 0$, because the change of μ_0 does not have any influence on $\bar{\lambda}$. An attempt to make a small surface tension in this case will be ruined by the violent infrared fluctuations described by (10.91). From the geometrical point of view, the Lagrange multiplier $\bar{\lambda}$ plays the role of the inverse correlation length for the normals of the surface. In the regime described this correlation length is of the order of the cut-off. The surface is terribly creased. Perhaps the bosonic tachyon is related to this creasing.

For QCD and for Ising models, creased strings with nonvanishing surface tension are unacceptable. How can this undesirable property be avoided?

It is clear, that in the purely bosonic case we have to find a version of the theory with the β -function having a zero at some point α_* . If we succeed, then a generic α_0 will be attracted to α_* , the correlation length will be infinite (without a Nambu term in the action) and we will have a scale invariant theory with anomalous dimensions, one of which will determine the critical exponent. The creasing will be avoided in this case.

In four-dimensions there is a good candidate for all that. In this case we have a specific θ -term which can be added to the action. At $\theta = \pi$ there are reasons to expect a scale-invariant theory. The term we are talking about is the algebraic number of self-intersections, $\nu(S)$ for our two-dimensional surface S , immersed into four-dimensional space. Analytically, it is given by:

$$v(S) = \frac{1}{4\pi} \int d^2\xi g^{1/2} g^{ab} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_a t_{\mu\nu} \partial_b t_{\lambda\rho}$$

The partition function is given by:

$$Z = \sum_{(S)} e^{-\mu_0 A(S)} (-1)^{v(S)}$$

Perhaps, this string lies in the same universality class as the string of large N QCD. This is a problem for the future.

In the case of Fermi strings dependence on extrinsic geometry comes from the fermionic contributions on the world sheet which are perhaps more relevant than the K^2 term. If so, the calculation of critical exponents will be easier in this case. This is also a problem for the future.

15 Other Gauge Fields

(I'll combine it with the theory before)

15.1 Special models in Electromagnetism by Tong

(пока такая структура, потом мб расширю ее)

1.1

15.1.1 Magnetic Monopoles (???)

1.1.1

Dirac Quantisation

1.1.2

A Patchwork of Gauge Fields

1.1.3

Monopoles and Angular Momentum

1.2

15.1.2 The Theta Term (???)

(потом досмотрю)

1.2.1

The Topological Insulator

1.2.2

A Mirage Monopole

1.2.3

The Witten Effect

1.2.4

Why θ is Periodic

1.2.5

Parity, Time-Reversal and $\theta = \pi$

15.2 Yang–Mills Theory

обобщаем теорию на многие поля.

15.2.1 Construction of Non-Abelian Gauge Fields by Stepanyants

Поля Янга-Миллса представляют собой некоторое обобщение калибровочного поля A_μ , с которым мы встречались при изучении электродинамики. В Части 2.1 было постулировано требование инвариантности действия относительно локальных калибровочных преобразований. Исходя из него были построены ковариантная производная и лагранжиан взаимодействия поля A_μ с комплексным скалярным полем ϕ .

Обобщим данный подход на случай, когда имеется n комплексных скалярных полей ϕ_i . Удобно записывать их в виде столбца

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}; \quad \phi^* = (\phi^*)^T = (\phi_1^* \quad \phi_2^* \quad \dots \quad \phi_n^*)$$

Наиболее естественное выражение для функции Лагранжа в матричных обозначениях записывается в виде

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi)$$

и является инвариантным относительно глобальных калибровочных преобразований

$$\phi \rightarrow \omega \phi; \quad \phi^\dagger \rightarrow \phi^\dagger \omega^\dagger, \quad \text{если} \quad \omega^\dagger = \omega^{-1}.$$

В данном случае $\omega \neq \omega(x)$ представляет собой некоторую матрицу размера $n \times n$, одинаковую во всех точках пространства. Условие $\omega^\dagger = \omega^{-1}$ означает, что матрица ω является унитарной, т.е. принадлежит группе $U(n)$. (Основные сведения о группах Ли и соответствующих им алгебрах Ли приводятся в Приложении. В этой части мы будем часто использовать описанные в нем результаты.) Далее, для простоты, будем предполагать, что $\det \omega = 1$, т.е. $\omega \in SU(n)$. Общий случай будет проанализирован в следующей части.

Однако лагранжиан (4.2) не является инвариантным относительно локальных преобразований

$$\phi \rightarrow \omega(x)\phi; \quad \phi^\dagger \rightarrow \phi^\dagger \omega^\dagger(x).$$

Погытаемся добиться локальной калибровочной инвариантности с помощью замены обычных производных на ковариантные. Будем считать, что

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + A_\mu \phi.$$

где A_μ - некоторая матрица размера $n \times n$. По аналогии с электродинамикой предположим, что при локальных калибровочных преобразованиях

$$\mathcal{D}_\mu \phi \rightarrow \omega \mathcal{D}_\mu \phi; \quad \mathcal{D}_\mu \phi^+ \rightarrow \mathcal{D}_\mu \phi^+ \omega^{-1},$$

где, как обычно, используется обозначение $\mathcal{D}_\mu \phi^+ \equiv (\mathcal{D}_\mu \phi)^+$. Очевидно, что в этом случае лагранжиан

$$\mathcal{L}_\phi = \mathcal{D}_\mu \phi^+ \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^+ \phi)$$

будет инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований.

В Задаче 1 показано, что для выполнения условия (4.6) необходимо, чтобы

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \omega A_\mu \omega'^1 + \omega \partial_\mu \omega^{-1}$$

Если матрица ω является элементом некоторой группы Ли G , которую мы будем предполагать компактной, то, как было показано в Приложении А.2, величина $\omega \partial_\mu \omega^{-1}$ принадлежит соответствующей алгебре Ли $\mathcal{A}$. Например, в случае если $\omega \in SU(n)$ это означает, что $\omega \partial_\mu \omega^{-1}$ является бесследовой антиэрмитовой матрицей. Поэтому естественно предположить, что A_μ также является элементом алгебры Ли $\mathcal{A}$. Правильность этого предположения подтверждается тем, что если $A_\mu \in \mathcal{A}$, то и $\omega A_\mu \omega^{-1} \in \mathcal{A}$ (см. Приложение А.2). Таким образом, если $A_\mu \in \mathcal{A}$, то и $A'_\mu \in \mathcal{A}$.

Поскольку алгебра Ли представляет собой некоторое линейное пространство, то любой ее элемент может быть разложен по базису из генераторов t_a как

$$A_\mu = ie A_\mu^a t_a,$$

где множитель e введен для удобства дальнейших обозначений. Поскольку калибровочная группа является компактной, то (см. Приложение А.2) генераторы t_a являются эрмитовыми, а для нормировки генераторов фундаментального представления t_n можно использовать условие

$$\text{tr}(t_a t_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}.$$

Благодаря этому условию можно не делать различия между верхними и нижними индексами, нумерующими генераторы. В дальнейшем мы всегда будем это предполагать.

Поля A_μ^a (или же матричное поле A_μ) называются полями Янга-Миллса или калибровочными полями.

Как и в случае электродинамики, для A_μ необходимо построить тензор поля и функцию Лагранжа. При этом важно, чтобы полученный лагранжиан был инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований (4.8).

Заметим, что абелево выражение для тензора поля (1.7) в неабелевом случае не может быть использовано, поскольку закон его преобразования достаточно сложен. Значительно более удобной оказывается величина

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

Построенный таким образом тензор поля удовлетворяет тождеству Бьянки (проверено в Задаче 2)

$$\mathcal{D}_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} + i A_\mu, \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

и (Задача 3) при локальных калибровочных преобразованиях меняется по закону

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \omega F_{\mu\nu} \omega'^1.$$

Тензор поля (4.11) с очевидностью принадлежит алгебре Ли $\mathcal{A}$ и может быть разложен по генераторам как

$$F_{\mu\nu} = ieF_{\mu\nu}^a l_a,$$

где (Задача 4)

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - ef_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c.$$

Если для нормировки генераторов используется условие (4.10), то можно считать, что индексы, соответствующие калибровочной группе, поднимаются и опускаются с помощью символа Кронекера, благодаря чему никакой разницы между верхними и нижними индексами нет. Функция Лагранжа для свободного поля Янга-Миллса строится из тензора поля $F_{\mu\nu}$ как

$$\mathcal{L}_{\text{GM}} = \frac{1}{2e^2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2$$

и, с очевидностью, является калибровочно инвариантной (Задача 3). Поэтому лагранжиан, описывающий взаимодействие поля Янга-Миллса со скалярным полем, окончательно запишется в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ям}} + \mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2e^2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}_\mu \phi^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi).$$

Как показано в Задаче 5, при варьировании лагранжиана (4.17) получаются уравнения движения

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu^2 \phi + V'(\phi^\dagger \phi) \phi &= 0 \\ \mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu &= -e^2 t_a (\phi^\dagger t_a \mathcal{D}^\nu \phi - \mathcal{D}^\nu \phi^\dagger t_a \phi). \end{aligned}$$

Из последнего уравнения автоматически следует (Задача 5) уравнение непрерывности

$$\mathcal{D}_\mu j^\mu = 0.$$

Существенное отличие (4.18), (4.19) и (4.20) от соответствующих абелевых уравнений (2.14), (2.15) и (2.16) заключается в том, что в уравнениях Максвелла и в уравнении непрерывности обычные производные заменяются на ковариантные.

В заключение этой части мы отметим, что лагранжиан (4.17) является инвариантным (Задача 6) относительно преобразований C, P и T (по отдельности), которые действуют следующим образом:

$$\begin{aligned} P : \phi(t, \mathbf{x}) &\rightarrow \phi(t, -\mathbf{x}); & A^\mu(t, \mathbf{x}) &\rightarrow \Lambda_\nu^\mu A^\nu(t, -\mathbf{x}) \\ T : \phi(t, \mathbf{x}) &\rightarrow \phi^*(-t, \mathbf{x}); & A^\mu(t, \mathbf{x}) &\rightarrow \Lambda_\nu^\mu (A^\nu(t, -\mathbf{x}))^* \\ C : \phi(t, \mathbf{x}) &\rightarrow \phi^*(t, \mathbf{x}); & A^\mu(t, \mathbf{x}) &\rightarrow (A^\mu(t, \mathbf{x}))^* \end{aligned}$$

При этом комплексное сопряжение действует на матрицу, которая является элементом алгебры Ли калибровочной группы. Поскольку в случае электродинамики элементом алгебры Ли калибровочной группы $U(1)$ является величина $-ieA_\mu$, то приведенные выше равенства для поля A_μ сводятся к преобразованиям (3.156) и (3.157). Задачи 1. Найти закон преобразования калибровочного поля A_μ , если известно, что ковариантная производная $\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + A_\mu \phi$ преобразуется по закону $\mathcal{D}_\mu \phi \rightarrow \omega(x) \mathcal{D}_\mu \phi$. Из закона преобразования ковариантной производной получаем, что

$$(\mathcal{D}_\mu \phi)' = \partial_\mu(\omega \phi) + A'_\mu \omega \phi = \omega (\partial_\mu \phi + A_\mu \phi)$$

и, следовательно,

$$\partial_\mu \omega \phi + A'_\mu \omega \phi = \omega A_\mu \phi.$$

Это равенство может быть переписано в виде

$$A'_\mu \omega \phi = \omega A_\mu \omega^{-1} \omega \phi - \partial_\mu \omega \omega^{-1} \omega \phi.$$

Используя тождество $0 = \partial_\mu (\omega \omega^{-1}) = \partial_\mu \omega \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}$, окончательно получаем, что

$$A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}.$$

2. Доказать, что тензор поля $F_{\mu\nu}$ удовлетворяет тождеству Бьянки $\mathcal{D}_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu F_{\alpha\beta} + [A_\mu, F_{\alpha\beta}]) = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu (\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) + \\ &\quad + [A_\mu, \partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta]) = \\ &= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu A_\alpha A_\beta + A_\alpha \partial_\mu A_\beta + A_\mu \partial_\alpha A_\beta - \partial_\alpha A_\beta A_\mu) = 0 \end{aligned}$$

где были использованы полная антисимметрия ε -символа, возможность переименования индексов суммирования, а также равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} [A_\mu, A_\alpha A_\beta] &= \\ &= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} ([A_\mu, A_\alpha] A_\beta + A_\alpha [A_\mu, A_\beta]) = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} : A_\alpha, [A_\mu, A_\beta] = \\ &= -\frac{1}{3} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} ([A_\mu, [A_\alpha, A_\beta]] + [A_\alpha, [A_\beta, A_\mu]] + [A_\beta, [A_\mu, A_\alpha]]) = 0 \end{aligned}$$

которое справедливо в силу тождества Якоби. 3. Найти закон преобразования тензора поля $F_{\mu\nu}$ при локальных калибровочных преобразованиях. Подставляя (4.8) в выражение для тензора поля, получаем, что

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - (\mu \leftrightarrow \nu) \rightarrow \partial_\mu (\omega A_\nu \omega^{-1} + \omega \partial_\nu \omega^{-1}) - \\ &\quad + (\omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}) (\omega A_\nu \omega^{-1} + \omega \partial_\nu \omega^{-1}) - (\mu \leftrightarrow \nu) = \partial_\mu \omega A_\nu \omega^{-1} + \\ &\quad + \omega \partial_\mu A_\nu \omega^{-1} + \omega A_\nu \partial_\mu \omega^{-1} + \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \partial_\nu \omega^{-1} + \omega A_\mu A_\nu \omega^{-1} + \\ &\quad + \omega A_\mu \partial_\nu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1} \omega A_\nu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1} \omega \partial_\nu \omega^{-1} - (\mu \leftrightarrow \nu) \end{aligned}$$

При этом слагаемые, симметричные по индексам μ и ν , с очевидностью сокращаются. Принимая во внимание тождество $\partial_\mu \omega \omega^{-1} = -\omega \partial_\mu \omega^{-1}$, после несложных преобразований находим, что

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \omega (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \omega^{-1} - (\mu \leftrightarrow \nu) = \omega F_{\mu\nu} \omega^{-1}.$$

Функция Лагранжа для свободного поля Янга-Миллса является калибровочно инвариантной, поскольку

$$\text{tr } F_{\mu\nu}^2 \rightarrow \text{tr } (\omega F_{\mu\nu}^2 \omega^{-1}) = \text{tr } F_{\mu\nu}^2$$

в силу инвариантности следа относительно циклических перестановок. 4. Найти выражение для компонент тензора поля $F_{\mu\nu}^a$. Поскольку $[t_b, t_c] := if_{bc}^a t_a$, то

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= ie F_{\mu\nu}^{aa} t_a = \partial_\mu (ie A_\nu^a t_a) - \partial_\nu (ie A_\mu^a t_a) + [ie A_\mu^b t_b, ie A_\nu^c t_c] = \\ &= ie (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - ef_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c) t_a, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - ef_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c.$$

5. Получить уравнения движения для лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2e^2} \text{tr } F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}_\mu \phi^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi).$$

Уравнение движения для скалярного поля получается абсолютно аналогично абелевому случаю, рассмотренному в Задаче 3 Части 2.1. Поэтому мы построим только уравнение движения для калибровочного поля A_μ^a . Как и ранее,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu^a)} = -F^{a\mu\nu}.$$

Поскольку в неабелевом случае $F_{\alpha\beta}^b = \partial_\alpha A_\beta^b - \partial_\beta A_\alpha^b - ef_{mn}^b A_\alpha^m A_\beta^n$, то тензор поля явно зависит от калибровочного 110.1я и. следовательно.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^a} = & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}^b} \frac{\partial F_{\alpha\beta}^b}{\partial A_\nu^a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\mathcal{D}_\alpha \phi)} \frac{\partial (\mathcal{D}_\alpha \phi)}{\partial A_\nu^a} + \frac{\partial (\mathcal{D}_\alpha \phi^-)}{\partial A_\nu^a} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\mathcal{D}_\alpha \phi^\dagger)} = \\ & - e F_{\nu,\beta}^b f_{acb} A^{c,3} \dots ie \mathcal{D}_\nu \phi^i t_a \phi - ie \phi \phi_a \mathcal{D}_\nu \phi \end{aligned}$$

Поэтому, с учетом полной антисимметрии структурных констант f^{abc} , уравнения Лагранжа записываются как

$$0 = \partial_\mu F_{\mu\nu}^a - ef_{bc}^a A_\mu^b F_{\mu\nu}^c - j_\nu^a,$$

где

$$j_\nu^a \equiv ie (\phi^\dagger t^a \mathcal{D}_\nu \phi - \mathcal{D}_\nu \phi^\dagger t^a \phi).$$

Умножая уравнение (4.36) на $ie t_a$, принимая во внимание коммутационные соотношения между генераторами, окончательно (в матричных обозначениях) мы получаем, что

$$\mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + [A_\mu, F^{\mu\nu}] = j^\nu,$$

где $j_\nu \equiv ie j_\nu^a t_a$. Умножая (4.38) на $\mathcal{D}_\nu$, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\nu j^\nu &= \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu (\partial_\mu F^{\mu\nu} + [A_\mu, F^{\mu\nu}]) + [A_\nu, \partial_\mu F^{\mu\nu} + A_\mu, F^{\mu\nu}] := \\ &= [\partial_\nu A_\mu, F^{\mu\nu}] - \frac{1}{n} [[A_\mu, A_\nu], F^{\mu\nu}] = -\frac{1}{n} [F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}] = 0, \end{aligned}$$

где было использовано тождество Якоби

$$\begin{aligned} 0 &= [A_\nu, [A_\mu, F^{\mu\nu}]] - [A_\mu, [F^{\mu\nu}, A_\nu]] + \left[F^{\mu\nu}, [A_\nu, A_\mu] \right] = \\ &= 2 \left[A_\nu, [A_\mu, F^{\mu\nu}] \right] + [[A_\mu, A_\nu], F^{\mu\nu}] : \end{aligned}$$

Как и в абелевом случае, справедливость уравнения (4.39) может быть проверена явно, исходя из уравнений движения для скалярного поля. 6. Доказать инвариантность лагранжиана (4.17) относительно преобразований C, P и T .

Инвариантность относительно P преобразований очевидна, поскольку при таких преобразованиях все величины меняются по тензорному закону. При C -преобразованиях

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + A_\mu \phi \rightarrow (\mathcal{D}_\mu \phi)^* = (\mathcal{D}_\mu \phi^*)^T; \quad F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}^*.$$

Поэтому

$$\mathcal{L} \rightarrow \frac{1}{2e^2} (\text{tr } F_{\mu\nu}^2)^* + (\mathcal{D}_\mu \phi)^T (\mathcal{D}_\mu \phi^*)^T - V(\phi^T \phi^*) .$$

Учитывая, что величины $F_{\mu\nu}^a$ являются вещественными, $(\text{tr } (t_a t_b))^* = \delta_{ab}/2$, а также проводя транспонирование двух последних слагаемых, получаем, что

$$\mathcal{L} \rightarrow -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \mathcal{D}_\mu \phi^i \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi \cdot \phi) = \mathcal{L}.$$

Инвариантность действия относительно T -преобразований доказывается полностью аналогично.

15.2.2 Non-Abelian Gauge Theories by Stepanyants

Теория

В предыдущей части на примере простейшей модели были построены неабелевы калибровочные поля. Теперь необходимо более четко описать основные свойства полей Янга-Миллса и привести более общую функцию Лагранжа, описывающую взаимодействие калибровочного поля с материальными.

Выберем в качестве калибровочной группы некоторую компактную группу Ли G . Тогда (см. Приложение А.2) алгебра Ли $\mathcal{A}$, соответствующая группе G , может быть представлена в виде прямого произведения некоторого числа простых алгебр и алгебр $u(1)$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_n.$$

Будем для простоты предполагать, что группа G также является прямым произведением некоторого числа простых компактных групп и групп $U(1)$:

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n.$$

Для того чтобы понять, как должна быть устроена функция Лагранжа в этом случае, рассмотрим скалярное поле, лежащее в пространстве некоторого представления калибровочной группы G . Генераторы G в этом представлении представляют собой совокупность генераторов T_r каждой из групп G_k :

$$T^a = \{T_{G_1}^a, T_{G_2}^a, \dots, T_{G_n}^a\}$$

(Напомним, что мы предполагаем справедливость равенства (4.10), благодаря чему можно считать, что верхние и нижние индексы не различаются.) Как обычно, представим ковариантную производную в виде суммы обычной производной и некоторого элемента алгебры Ли $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + A_\mu \phi = \partial_\mu \phi + \sum_{k=1}^n A_{\mu G_k} \phi,$$

где $A_\mu \equiv \sum_{k=1}^n A_{\mu G_k}$, а каждое из полей $A_{\mu G_k}$ является элементом алгебры Ли $\mathcal{A}_k$ и раскладывается по генераторам T_{G_k} . В Задаче 1 показано, что при калибровочных преобразованиях с параметром

$$\omega = \omega_{G_1} \omega_{G_2} \dots \omega_{G_n}$$

ковариантная производная (4.47) меняется по закону $\mathcal{D}_\mu \phi \rightarrow \omega \mathcal{D}_\mu \phi$, если

$$A_{\mu G_k} \rightarrow \omega_{G_k} A_{\mu G_k} \omega_{G_k}^{-1} + \omega_{G_k} \partial_\mu \omega_{G_k}^{-1}.$$

(Параметры ω_{G_k} являются унитарными в силу компактности калибровочной группы G , см. Приложение А.1.)

Таким образом, каждое из полей $A_{\mu G_k}$ нетривиальным образом меняется только под действием преобразований из группы G_k и является инвариантным относительно преобразований из всех остальных групп $G_i, i \neq k$. Отсюда следует, что в случае, если алгебра Ли не является простой, величина $\text{tr}(F_{\mu\nu}^2)$ не будет единственным калибровочно инвариантным объектом, который может быть построен из полей $A_{\mu G_k}$. Действительно, рассмотрим тензоры

$$F_{\mu\nu G_k} = \partial_\mu A_{\nu G_k} - \partial_\nu A_{\mu G_k} + [A_{\mu G_k}, A_{\nu G_k}].$$

4.1. Поля Янга-Миллса 153 Достаточно очевидно, что при калибровочных преобразованиях с параметром (4.48) они преобразуются по закону

$$F_{\mu\nu G_k} \rightarrow \omega_{G_k} F_{\mu\nu} \omega_{G_k}^{-1}$$

и, следовательно, n величин $\text{tr}(F_{\mu\nu G_k}^2)$ являются калибровочно инвариантными. Поэтому функция Лагранжа может быть представлена в виде линейной комбинации этих инвариантов с произвольными коэффициентами:

$$\mathcal{L}_{\text{ям}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2e_{G_k}^2} \text{tr}(F_{\mu\nu G_k})^2.$$

Поля $A_{\mu_{i_k}}$ при этом удобно разложить по генераторам группы G_k следующим образом:

$$A_{\mu_{G_k}} = ie_{G_k} A_{\mu_{G_k}}^a t_{G_k}^a.$$

Действительно, тогда лагранжиан полей Янга-Миллса, соответствующих калибровочной группе G , может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_? = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (F_{\mu\nu G_k}^a)^2,$$

так что коэффициенты перед всеми слагаемыми окажутся такими же, как и в случае электродинамики.

Таким образом, в случае, если калибровочная группа представляет собой прямое произведение компактных простых групп и группы $U(1)$, в теории будут существовать несколько различных констант связи e_{G_k} , число которых равно числу сомножителей в прямом произведении. Это существенно отличается от рассмотренного в предыдущей части случая простой группы $SU(n)$, для которой могла существовать только одна константа связи.

Перейдем теперь к построению функции Лагранжа для калибровочной теории, которая состоит из лагранжиана поля Янга-Миллса и лагранжианов полей материи, взаимодействующих с калибровочным полем. Например, в случае скалярного поля калибровочно инвариантный лагранжиан записывается в виде

$$\mathcal{L}_\phi = \mathcal{D}_\mu \phi^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi)$$

При этом скалярные поля, в принципе, могут принадлежать пространству произвольного (причем не обязательно неприводимого) представления калибровочной группы. Поэтому в ковариантной производной (4.47) поля $A_{\mu_{G_k}}$ должны раскладываться по генераторам группы G_k в соответствующем представлении, которые мы обозначили через $T_{G_k}^a$. Таким образом, в общем случае ковариантная производная записывается в виде

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + \sum_{k=1}^n A_{\mu_{G_k}} \phi = \partial_\mu \phi + \sum_{k=1}^n ie_{G_k} \Lambda_{\mu_{G_k}}^a T_{G_k}^a \phi.$$

Заметим, что в случае, когда поле ϕ лежит в пространстве присоединенного представления калибровочной группы, иногда бывает более удобно использовать другую форму записи ковариантной производной. В Задаче 2 показано, что ковариантная производная поля в присоединенном представлении (см. Приложение А.4) может быть эквивалентно записана в виде

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + [A_\mu, \phi],$$

если положить $A_\mu = ieA_\mu^a t_a$ и $\phi = ie\phi^a t_a$. В Задаче 3 показано, что для ковариантной производной справедливо правило Лейбница

$$\mathcal{D}_\mu (\phi_1 \phi_2) = (\mathcal{D}_\mu \phi_1) \phi_2 + \phi_1 \mathcal{D}_\mu \phi_2$$

и формула интегрирования по частям

$$\int d^4x \phi_1^- \mathcal{D}_\mu \phi_2 = \oint dS_\mu \phi_1^+ \phi_2 - \int d^4x \mathcal{D}_\mu \phi_1^+ \phi_2,$$

а в Задаче 4 доказано тождество

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \phi = \sum_{k=1}^n F_{\mu\nu G_k} \phi,$$

где $F_{\mu\nu G_k} = ie_{G_k} F_{\mu\nu} T_{G_k}^a$. В частности, для случая простой группы Ли или группы $U(1)$

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \phi = F_{\mu\nu} \phi.$$

Для того чтобы построить взаимодействие поля Янга-Миллса со спинорным полем, необходимо рассмотреть столбец, каждым элементом которого является некоторый спинор. При этом γ -матрицы действуют только на спинорные индексы каждого элемента этого столбца, в то время как матрицы и генераторы калибровочной группы действуют только на элементы столбца, а на спинорные индексы не действуют вообще. Например, в случае калибровочной группы $SU(2)$, элемент которой может быть записан как

$$\omega = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad \text{где } |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

совместное действие ω и γ -матриц на спинор может быть представлено в виде

$$\gamma^\mu \omega \psi = \left(\begin{array}{c|c} a \cdot \gamma^\mu & b \cdot \gamma^\mu \\ \hline -b^* \cdot \gamma^\mu & a^* \cdot \gamma^\mu \end{array} \right) \begin{pmatrix} (\psi_1)_1 \\ (\psi_1)_2 \\ (\psi_1)_3 \\ (\psi_1)_4 \\ \hline (\psi_2)_1 \\ (\psi_2)_2 \\ (\psi_2)_3 \\ (\psi_2)_4 \end{pmatrix}.$$

Ковариантная производная спинорного поля определяется так же, как и в случае скалярного поля:

$$\mathcal{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \sum_{k=1}^n A_{\mu G_k} \dot{\psi}.$$

Поскольку наличие спинорных индексов никак не влияет на закон калибровочного преобразования, то в случае, если $\psi \rightarrow \omega \psi$, ковариантная производная с очевидностью меняется по закону

$$\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow \omega \mathcal{D}_\mu \psi$$

Поэтому калибровочно инвариантная функция Лагранжа будет записываться в виде

$$\mathcal{L}_\psi = i\bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m_\psi \bar{\psi} \psi.$$

Окончательно, функция Лагранжа для поля Янга-Миллса, взаимодействующего со скалярным и спинорным полем, с компактной калибровочной группой $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$, где G_i - простые группы или группы $U(1)$, может быть записана в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{gM}} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\psi = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2e_{G_k}^2} \text{tr} (F_{\mu\nu}^2) + \\ + \mathcal{D}_\mu \phi^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^\dagger, \phi) + i\bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m_\psi \bar{\psi} \psi$$

где $V(\phi^\dagger, \phi)$ - некоторая калибровочно инвариантная функция, а ковариантные производные скалярного и спинорного полей определяются формулами (4.47) и (4.64). Лагранжиан (4.67) является инвариантным относительно локальных калибровочных преобразований

$$\phi \rightarrow \omega \phi; \quad \psi \rightarrow \omega \psi; \\ A_{\mu G_k} \rightarrow \omega_{G_k} A_{\mu G_k} \omega_{G_k}^{-1} + \omega_{G_k} \partial_\mu \omega_{G_k}^{-1}$$

с параметром $\omega(x) = \omega_{G_1} \omega_{G_2} \dots \omega_{G_n}$. В Задаче 5 показано, что для модели (4.67) имеют место n (по числу сомножителей в группе G) законов сохранения

$$\mathcal{D}_\mu j_{G_k}^\mu = \partial_\mu j_{G_k}^\mu + [A_{\mu G_k}, j_{G_k}^\mu] = 0,$$

где токи $j_{\mu G_k}$ определяются соотношениями

$$j_{\mu G_k} = ie j_{\mu G_k}^a t_{G_k}^a; \\ j_{\mu G_k}^a = ie (\phi^\dagger T_{G_k}^a \mathcal{D}_\mu \phi - \mathcal{D}_\mu \phi^\dagger T_{G_k}^a \phi) + e \bar{\psi} \gamma_\mu T_{G_k}^a \psi$$

Задачи 1. Доказать, что при локальных калибровочных преобразованиях с параметром $\omega = \omega_{G_1} \omega_{G_2} \dots \omega_{G_n}$, принадлежащим группе $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$, калибровочные поля преобразуются по закону

$$A_{\mu G_k} \rightarrow \omega_{G_k} A_{\mu G_k} \omega_{G_k}^{-1} + \omega_{G_k} \partial_\mu \omega_{G_k}^{-1}.$$

В предыдущей части было получено, что, если при калибровочных преобразованиях

$$\mathcal{D}_\mu \phi = (\partial_\mu + A_\mu) \phi \rightarrow \omega \mathcal{D}_\mu \phi.$$

то поле A_μ должно меняться по закону $A_\mu \rightarrow \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}$. Поэтому для правильного закона преобразования ковариантной производной необходимо, чтобы

$$\sum_{k=1}^n A_{\mu G_k} \rightarrow \omega \left(\sum_{k=1}^n A_{\mu G_k} \right) \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}.$$

Поскольку $\omega = \omega_{G_1} \omega_{G_2} \dots \omega_{G_n}$, в то время как все матрицы ω_{G_k} коммутируют между собой, то

$$\omega \partial_\mu \omega^{-1} = \sum_{k=1}^n \omega_{G_k} \partial_\mu \omega_{G_k}^{-1}; \\ \omega A_{\mu G_k} \omega^{-1} = \omega_{G_k} A_{\mu G_k} \omega_{G_k}^{-1},$$

где было учтено, что поле $A_{\mu c_k}$ по построению коммутирует со всеми матрицами ω_{G_l} при $k \neq l$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^n A_{\mu G_k} \rightarrow \sum_{k=1}^n (\omega_{G_k} A_{\mu G_k} \omega_{G_k}^{-1} + \omega_{G_k} \partial_\mu \omega_{G_k}^{-1})$$

При этом поскольку $A_{\mu G_k}$ и $\omega_{G_k} A_{\mu G_k} \omega_{G_k}^{-1} + \omega_{G_k} \partial_\mu \omega_{G_k}^{-1}$ раскладываются только по генераторам $t_{G_k}^a$, то в силу линейной независимости генераторов

$$A_{\mu i_k} \rightarrow \omega_{G_k} A_{\mu G_k} \omega_{G_k}^{-1} + \omega_{G_k} \partial_\mu \omega_{G_k}^{-1},$$

что и требовалось доказать. 2. Доказать, что ковариантная производная поля $\phi = ie\phi^a t_a$, лежащего в пространстве Иррисоединенного представления калибровочной группы, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \phi &= \partial_\mu \phi + [A_\mu, \phi] \\ \text{если } A_\mu &\equiv ie A_\mu^n t_a \end{aligned}$$

Ковариантная производная поля $\dot{\phi}$, лежащего в некотором представлении группы G , определяется как

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + A_\mu \phi,$$

где $A_\mu = ie A_\mu^a T_a$, а ϕ - столбец с элементами ϕ^a . В случае, если ϕ находится в присоединенном представлении, оно может быть также записано в виде разложения по генераторам как $\phi = ie\phi^a t_a$, тогда как (см. Приложение А.4) генераторы калибровочной группы в присоединенном представлении имеют вид $(T_a)_c^b = if_{ac}^b$. Поэтому

$$(\mathcal{D}_\mu \phi)^b = \partial_\mu \phi^b + ie A_\mu^a (T_a)_c^b \phi^c = \partial_\mu \phi^b - ef_{ac}^b \phi^c A_\mu^a$$

Умножая это равенство на iet_b и учитывая, что $[t_a, t_c] = if_{ac}^b t_b$ в силу Компактности рассматриваемой группы, мы получаем, что

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ie^2 f_{ac}^b t^b A_\mu^a \phi^c = \partial_\mu \phi - e^2 [t_a, t_c : A_\mu^a \phi^c.$$

Если же теперь по определению положить $A_\mu = ie A_\mu^a t^a$, то последнее выражение может быть записано в виде

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + [A_\mu, \phi].$$

Несложно проверить, что эта формула будет справедлива также и в случае, если поле в присоединенном представлении и калибровочное поле раскладываются по генераторам любого другого представления:

$$\phi = ie\phi^a T_a; \quad A_\mu = ie A_\mu^a I'_a$$

3. Доказать, что для ковариантной производной справедливы правило Лейбница и формула интегрирования по частям. Рассмотрим тензорное произведение $\phi_{1i}\phi_{2j}$ и вычислим его ковариантную производную:

$$\mathcal{D}_\mu (\phi_{1i}\phi_{2j})_{i,j} = \partial_\mu (\phi_{1i}\phi_{2j}) + (\Lambda_\mu)_{ij}^{kl} \phi_{1k}\phi_{2l}.$$

В Приложении А.4 показано, что при действии на прямое произведение представлений $R_1 \times R_2$ генераторы калибровочной группы записываются в виде

$$(T_a)_{ij}^{kl} = \delta_i^k (T_{2a})_j^l + \delta_j^l (T_{1a})_i^k,$$

где T_{1a} - генераторы в представлении R_1 , а T_{2a} - в представлении R_2 . Поэтому калибровочное поле можно записать в виде

$$(A_\mu)_{ij}^{kl} = \delta_i^k (A_\mu)_j^l + \delta_j^l (A_\mu)_i^k.$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu (\phi_{1i}\phi_{2j})_{i,j} &= (\partial_\mu \phi_{1i}) \phi_{2j} + \phi_{1i} \partial_\mu \phi_{2j} = \\ &+ (\Lambda_\mu)_i^k \phi_{1k} \phi_{2j} + \phi_{1i} (A_\mu)_j^l \phi_{2l} = (\mathcal{D}_\mu \phi_1)_i \phi_{2j} + \phi_{1i} (\mathcal{D}_\mu \phi_2)_j \end{aligned}$$

Для того, чтобы доказать формулу интегрирования по частям, заметим, что

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu (\phi_1^+ \phi_2) &= (\mathcal{D}_\mu \dot{\phi}_1^+) \phi_2 - \phi_1' \mathcal{D}_\mu \phi_2 = \\ &= (\partial_\mu \phi_1^+ - \phi_1^+ A_\mu) \phi_2 + \phi_1^- (\partial_\mu \phi_2 + A_\mu \phi_2) = \partial_\mu (\phi_1^+ \phi_2)\end{aligned}$$

поскольку $\mathcal{D}_\mu \phi^+ = \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ A_\mu$ в силу эрмитовости генераторов компактной группы. Таким образом, имеет место тождество

$$\partial_\mu (\phi_1^* \phi_2) = (\mathcal{D}_\mu \phi_1^+) \phi_2 + \phi_1^- \mathcal{D}_\mu \phi_2.$$

Интегрируя его по d^4x и используя теорему Гаусса, окончательно получаем,

$$\int d^4x \phi_1^+ \mathcal{D}_\mu \phi_2 = \oint dS_\mu \phi_1^- \dot{\phi}_2 - \int d^4x \mathcal{D}_\mu \phi_1^- \phi_2.$$

4. Доказать, что ковариантные производные (4.47) удовлетворяют тождеству

$$\left[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu j \phi = \sum_{k=1}^n F_{\mu\nu G_k} \phi. \right.$$

С использованием определения ковариантной производной рассматриваемый коммутатор может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \phi &= (\partial_\mu + A_\mu) (\partial_\nu + A_\nu) \phi - (\mu \leftrightarrow \nu) = \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \phi + (\partial_\mu A_\nu) \phi + A_\nu \partial_\mu \phi + A_\mu \partial_\nu \phi - A_\mu A_\nu \phi - (\mu \leftrightarrow \nu) = \\ &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]) \phi\end{aligned}$$

(Напомним, что для краткости мы используем обозначение $A_\mu = \sum_{k=1}^n A_{\mu c_k}$.) Принимая во внимание, что генераторы $T_{f_k}^a$ и $T_{c_l}^a$ коммутируют при $k \neq l$, мы заключаем, что

$$\begin{aligned}\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] &= \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\partial_\mu A_{\nu G_k} - \partial_\nu A_{\mu G_k} + [A_{\mu G_k}, A_{\nu G_k}] \right) = \sum_{k=1}^n F_{\mu\nu G_k},\end{aligned}$$

где $F_{\mu\nu} G_k = ie_{G_k} F_{\mu\nu}^a T_{G_k}^{a_k}$. Требуемое утверждение следует из формул (4.91) и (4.92). 5. Найти ковариантно сохраняющиеся токи в модели, описываемой лагранжианом (4.67).

Воспользуемся методом Нетер. Для этого рассмотрим локальные преобразования

$$\dot{\phi} \rightarrow \omega \phi; \quad \psi \rightarrow \omega \psi; \quad A_{\mu C_k} \rightarrow A_{\mu G_k},$$

где параметр ω зависит от координат. Поскольку преобразования (4.93) для полей $A_{\mu G_k}$ отличаются от преобразований (4.68), то действие рассматриваемой модели не будет инвариантным относительно (4.93). Действительно, если $\omega = \exp(\alpha)$, то с точностью до членов первого порядка малости по α

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu \phi &\rightarrow (\partial_\mu + A_\mu) \omega \phi \approx (1 + \alpha) \mathcal{D}_\mu \phi + \mathcal{D}_\mu \alpha \phi \\ \mathcal{D}_\mu \phi^- &\rightarrow \partial_\mu (\phi^- \omega^{-1}) - \phi^1 \omega^{-1} A_\mu \approx \mathcal{D}_\mu \phi^- (1 - \alpha) - \phi^+ \mathcal{D}_\mu \alpha \\ \mathcal{D}_\mu \psi &\rightarrow (\partial_\mu + A_\mu) \omega \psi \approx (1 + \alpha) \mathcal{D}_\mu \psi + \mathcal{D}_\mu \alpha \psi,\end{aligned}$$

где $\mathcal{D}_\mu \alpha = \partial_\mu \alpha + [A_\mu, \alpha]$, поскольку α с очевидностью находится в присоединенном представлении калибровочной группы. С использованием формул (4.94) несложно проверить, что) вариация действия оказывается равной

$$\delta S = \int d^4x \left(\mathcal{D}^\mu \phi^\dagger \mathcal{D}_\mu \alpha \phi - \phi^\dagger \mathcal{D}^\mu \alpha \mathcal{D}_\mu \phi + i \bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \alpha \psi \right).$$

С учетом условия нормировки генераторов фундаментаального представления $\text{tr}(t_a t_b) = \delta_{ab}/2$, формула (4.95) может быть переписана в виде

$$\delta S = -\frac{2}{e^2} \text{tr} \int d^4x \mathcal{D}_\mu \alpha j^\mu = \frac{2}{e^2} \text{tr} \int d^4x \alpha \mathcal{D}_\mu j^\mu,$$

где $\alpha = ie\alpha^a t_a$, а ток j^μ определяется равенствами

$$\begin{aligned} j_\mu &= ie j_\mu^a t^a; \\ j_\mu^a &= ie \left(\phi^\dagger T^a \mathcal{D}_\mu \phi - \mathcal{D}_\mu \phi^\dagger T^a \phi \right) + e \bar{\psi} \gamma_\mu T^a \psi. \end{aligned}$$

Поскольку в случае, если поля удовлетворяют уравнениям движения, $\delta S = 0$, то, в силу произвольности α , из формулы (4.96) следует, что

$$\mathcal{D}_\mu j^\mu = \partial_\mu j^\mu + [A_\mu, j^\mu] = 0.$$

Выделяя в этом равенстве член, соответствующие генераторам $T_{G_k}^a$, окончательно получаем n законов сохранения

$$\mathcal{D}_\mu j_{G_k}^\mu = \partial_\mu j_{G_k}^\mu + [A_{\mu G_k}, j_{G_k}^\mu] = 0.$$

где

$$\begin{aligned} j_{\mu G_k} &= ie j_{\mu G_k}^a t_{G_k}^a; \\ j_{\mu G_k}^a &= ie \left(\phi^\dagger T_{G_k}^a \mathcal{D}_\mu \phi - \mathcal{D}_\mu \phi^\dagger T_{G_k}^a \phi \right) - e \bar{\psi} \gamma_\mu T_{G_k}^a \psi. \end{aligned}$$

15.2.3 Theory of Strong Interactions

Теория

Теория Янга-Миллса позволяет описать динамику сильных взаимодействий элементарных частиц.

В соответствии с современными представлениями мезоны и барионы не являются элементарными частицами [2], а состоят из кварков. При этом мезоны состоят из кварка и антикварка, а барионы - из трех кварков. Кварки описываются дираковскими фермионами ψ_a , которые имеют дополнительный индекс a , пробегающий значения от 1 до 3. Этот индекс часто называется цветом [3]: $a = 1$ соответствует красному кварку, $a = 2$ - зеленому и $a = 3$ - синему. (Конечно, это условные названия, которые нельзя понимать буквально.) По-видимому, в природе существует 6 кварков. 3 кварка u, c, t называются верхними, а еще 3 кварка d, s, b - нижними. (Смысл этих названий будет понятен далее при изучении Стандартной модели сильных и электрослабых взаимодействий.) Верхние кварки имеют электрический заряд $q = 2e/3$,

15.3 Yang-Mills Theory by Tong

(I'll add it if I be working with it)

15.3.1 Introducing Yang-Mills

26 2.1.1 The Action 29 2.1.2 Gauge Symmetry 31 2.1.3 Wilson Lines and Wilson Loops 33
2.2

15.3.2 The Theta Term

38 2.2.1 Canonical Quantisation of Yang-Mills 40 2.2.2 The Wavefunction and the Chern-Simons Functional 42 2.2.3 Analogies From Quantum Mechanics 47
2.3

15.3.3 Instantons (!!!!)

2.3.1 The Self-Dual Yang-Mills Equations 52
2.3.2 Tunnelling: Another Quantum Mechanics Analogy 56
2.3.3 Instanton Contributions to the Path Integral 58
2.4

15.3.4 The Flow to Strong Coupling

61
2.4.1 Anti-Screening and Paramagnetism 65
2.4.2 Computing the Beta Function 67
2.5

15.3.5 Electric Probes

74
2.5.1 Coulomb vs Confining 74
2.5.2 An Analogy: Flux Lines in a Superconductor 78
2.5.3 Wilson Loops Revisited 85

2.6

15.3.6 Magnetic Probes

88
2.6.1 't Hooft Lines 89
2.6.2 $SU(N)$ vs $SU(N)/\mathbb{Z}_N$ 92
2.6.3 What is the Gauge Group of the Standard Model? 97
2.7

15.3.7 Dynamical Matter

99 2.7.1 The Beta Function Revisited 100 2.7.2 The Infra-Red Phases of QCD-like Theories
102 2.7.3 The Higgs vs Confining Phase 105

15.3.8 't Hooft-Polyakov Monopoles

109 2.8.1 Monopole Solutions 112 2.8.2 The Witten Effect Again 114 2.9 Further Reading
115

15.4 Anomalies by Tong

(I'll add it if I be working with it)

15.4.1 The Chiral Anomaly: Building Some Intuition

121 3.1.1 Massless Fermions in Two Dimensions 122 3.1.2 Massless Fermions in Four Di-
mensions 126

15.4.2 Deriving the Chiral Anomaly

3.2.1 Noether's Theorem and Ward Identities 129 3.2.2 The Anomaly lies in the Measure
133 3.2.3 Triangle Diagrams 140 3.2.4 Chiral Anomalies and Gravity 148

15.4.3 Fermi Zero Modes

149 3.3.1 The Atiyah-Singer Index Theorem 149 3.3.2 Instantons Revisited 151 3.3.3 The
Theta Term Revisited 153 3.3.4 Topological Insulators Revisited 155

15.4.4 Gauge Anomalies

157 3.4.1 Abelian Chiral Gauge Theories 158 3.4.2 Non-Abelian Gauge Anomalies 161 3.4.3
The SU(2) Anomaly 165 3.4.4 Anomaly Cancellation in the Standard Model 170
3.5

15.4.5 't Hooft Anomalies

174

15.4.6 Anomalies in Discrete Symmetries

177 3.6.1 An Anomaly in Quantum Mechanics 178 3.6.2 Generalised Symmetries 184 3.6.3
Discrete Gauge Symmetries 188 3.6.4 Gauging a ZN One-Form Symmetry 192 3.6.5 A 't Hooft
Anomaly in Time Reversal 196 3.7 Further Reading 197

15.5 Lattice Gauge Theory by Tong

(I'll add it if I be working with it)

4.1

15.5.1 Scalar Fields on the Lattice

202

15.5.2 Gauge Fields on the Lattice

204 4.2.1 The Wilson Action 204 4.2.2 The Haar Measure 208 4.2.3 The Strong Coupling Expansion 213

15.5.3 Fermions on the Lattice

218 4.3.1 Fermions in Two Dimensions 218 4.3.2 Fermions in Four Dimensions 222 4.3.3 The Nielsen-Ninomiya Theorem 224 4.3.4 Approaches to Lattice QCD 227

15.5.4 Towards Chiral Fermions on the Lattice

232 4.4.1 Domain Wall Fermions 233 4.4.2 Anomaly Inflow 235 4.4.3 The Ginsparg-Wilson Relation 238 4.4.4 Other Approaches 240

15.6 Chiral Symmetry Breaking by Tong

(I'll add it if I be working with it)

5.1

15.6.1 The Quark Condensate

244 5.1.1 Symmetry Breaking 246 5.2 The Chiral Lagrangian 248 5.2.1 Pion Scattering 249 5.2.2 Currents 251 5.2.3 Adding Masses 252 5.3

15.6.2 Miraculously, Baryons

253 5.3.1 The Skyrme Model 255 5.3.2 Skyrmions 257 5.4

15.6.3 QCD

258 5.4.1 Mesons 260 5.4.2 Baryons 263 5.4.3 Electromagnetism, the Weak Force, and Pion Decay 264 5.5

15.6.4 The Wess-Zumino-Witten Term

268 5.5.1 An Analogy: A Magnetic Monopole 269 5.5.2 A Five-Dimensional Action 271 5.5.3 Baryons as Bosons or Fermions 274 5.6

15.6.5 't Hooft Anomaly Matching

276 5.6.1 Confinement Implies Chiral Symmetry Breaking 277 5.6.2 Massless Baryons when $N_f = 2$? 282 5.6.3 The Vafa-Witten-Weingarten Theorems 284 5.6.4 Chiral Gauge Theories Revisited 293 5.7 Further Reading 297

15.7 Large N by Tong

(I'll add it if I be working with it)

6.1 A Quantum Mechanics Warm-Up: The Hydrogen Atom 301

6.2

15.7.1 Large N Yang-Mills

303 6.2.1 The Topology of Feynman Diagrams 303 6.2.2 A Stringy Expansion of Yang-Mills
309 6.2.3 The Large N Limit is Classical 311 6.2.4 Glueball Scattering and Decay 313 6.2.5
Theta Dependence Revisited 316
6.3

15.7.2 Large N QCD

318 6.3.1 Mesons 320 6.3.2 Baryons 322
6.4

15.7.3 The Chiral Lagrangian Revisited

326 6.4.1 Including the η' 6.4.2 Rediscovering the Anomaly 328 6.4.3 The Witten-Veneziano
Formula 330

16 Interacting and Other Special Fields

(пока есть что есть, мб раскидаю раздел.)

16.1 Fields of Fundamental Interactions

(ФЭЧ буду заниматься - пропищу, пока не до них)

16.1.1 Yukawa Interaction

очень популярное, обсудим, когда оно нужно, когда нет?
(пока даже в теории не прописано, так что не до задач)

16.1.2 Interaction of Scalar and Spinor Fields by Buchbinder

Лагранжиан взаимодействия

Рассмотрим построение лагранжиана взаимодействия скалярного и спинорного полей.
Будем предполагать, что этот лагранжиан не содержит производных и включает
безразмерную константу связи.

Пусть

(????)

Поскольку $[\varphi] = 1$ и $[\psi] = 3/2$, получаем $[h] = 0$.

В результате простейший Лагранжиан взаимодействия скалярного и спинорного полей
имеет вид так называемого Юкавского взаимодействия

$$\mathcal{L}_{int} = -h\varphi\bar{\psi}\psi,$$

где h - так называемая константа юкавской связи.

В итоге лагранжиан взаимодействующих скалярного и спинорного полей записывается как

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m_1^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m_2 \bar{\psi} \psi - h \varphi \bar{\psi} \psi$$

Здесь m_1, m_2 - массы, относящиеся к скалярному и спинорному полям

Заметим, что лагранжиан (49) содержит две безразмерные константы связи λ и h .

В принципе, к (49) можно добавить ещё одно выражение, описывающее взаимодействие и содержащее только безразмерную

16.1.3 Interaction of Scalar, Spinor and Vector Fields (??)

(стр 34 бухбиндер)

рассмотрим модель комплексного скалярного поля с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi - V(\varphi^* \varphi)$$

(и тут конечно не мало теории...)

6 страниц теории, пока не до нее

16.2 Introduction to the Standard Model

Обсудим подробно первые темы стандартной модели.

(потом)

16.2.1 Salam–Weinberg Model in a Nutshell

(см Райдер)

5) Рассматривается единая модель слабого и электромагнитного взаимодействия Салама-Вайнберга.

В этой модели имеет место СНС калибровочной симметрии $SU \times U(1)$

суть модели Салама-Вайнберга

забыл

СНС в модели Салама-Вайнберга

см Райдер, я хз

16.2.2 Weak Interaction

(some basics about it)

Слабое взаимодействие в двух словах (?)

(? я хз, что тут написано, это вообще не усвоено)

$$\sigma_{total} = G_F^2 E^2 \frac{G_F^2 s}{\pi}$$

из теории рассеяния у нас есть ограничения на сечение рассеяния, с ростом энергии оно должно падать.

$$\sigma_l < \frac{4\pi(2l+1)}{s}$$

при малых энергиях эта модель работает
 предел унитарности
 модель Ферми применима к энергиям менее 10^3 ГэВ

$$L_{int} = -g_w(J_\alpha W_\alpha + J_\alpha^+ W_\alpha^+)$$

$$J_\alpha = \bar{\varphi}_{(L)} \gamma_\alpha \varphi_{(L)}$$

амплитуда берется из правил Фейнмана из диаграммы (где входят электрон и нейтрино, выходят они же, а посередине - W бозон)

$$T = 1(2\pi)^4 g_w^2 J_\alpha \frac{g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M_W^2}}{k^2 - M_w^2} J_\beta^+$$

Если $|k| \ll M_W^2$, то формула упростится:

$$T = 1(2\pi)^4 g_w^2 J_\alpha \frac{g_{\alpha\beta}}{-M_w^2} J_\beta^+$$

получили формулу

$$\frac{g_w^2}{M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$$

кстати,

$$\alpha_{ked} = \frac{1}{137} = \frac{e^2}{4\pi}$$

если $g_w \approx e$, то $M_W \approx 10^2 - 10^3$ ГэВ.

спасение унитарности - ввести калибровочные взаимодействия
 оказывается, унитарная перенормируемая модель КТП то теория Янга-Миллса.

Но это и не доказано.

потому что мы хотели такую теорию для любых энергий.

а при больших энергиях КЭД содержит проблему под названиями полюса Ландау.

а хорошая теория - квантовая хромодинамика, при больших энергиях все становится хорошо.

группа симметрии для описания электрослабых взаимодействий в стандартной модели.
 группа

$$U(1) \times SU(2)$$

$$\approx O(2)$$

калибровочные взаимодействия делаются за счет группы $U(1)$

Теперь у нас вместо заряда и спина есть гиперзаряд и изоспин.

$SU(2)$ - преобразование спина - изоспин.

для описания бета распада нужны две частицы.

а у нас группы дают 1, 3, 8 частиц.

тогда зачем нам еще третье слабое взаимодействие?

(у вайнберга по этому поводу есть рассуждение)

поэтому третий W бозон просто не был обнаружен.

и большинство теорий, с которыми мы работаем, не требуют унитарности, зато у них есть область применимости.

мы сделаем так, чтобы бесконечности друг друга сокращали.

решение это механизм Хиггса.
(Браута-Энглера-Хиггса)

16.2.3 Other Fields in Particle Physics and QFT

нарушение глобальной $O(4)$ симметрии

Spontaneous breaking of the global $O(4)$ symmetry in the Higgs sector provides in $\mathcal{L}$ массовый член для фермионов и член Юкавского взаимодействия фермионов и бозона Хиггса:

$$\mathcal{L}_Y = -\frac{V+H}{\sqrt{2}} [y_d \bar{d}d + y_u \bar{u}u + y_l \bar{l}l + y_\nu \bar{\nu}\nu]$$

$$m_f = \frac{y_f}{\sqrt{2}} V$$

в лагранжиане стандартной модели масса фермионов равна нулю.

а дальше они трутся о вакуум и появляется наведенная масса.

массовый член фермионов нарушал структуру.

а у бозонов - нарушал калибровочную симметрию.

N.B.1.

$y_t \approx 0.99 \gg y_e \approx 3 \cdot 10^{-6} \gg y_\nu(?)_a$ N.B.2.

Coupling of the Higgs boson to a fermion is proportional to m_f

Юкваский лагранжиан обобщается на три поколения.

Quarks can mix and Yukawa interactions are not necessarily diagonal neither in the basis of weak interaction eigenstates,

nor in the basis of the strong ones.

In the eigenstate basis of a given interaction for the case of three generations, the Yukawa coupling constants are 3×3 matrices:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = - \sum_{j,k=1}^3 \left\{ (\bar{u}_{jL} \bar{d}_{jL}) \left[\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} y_{jk}^{(d)} d_{kR} + \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} y_{jk}^{(u)} u_{kR} \right] \right. \\ \left. + (\bar{\nu}_{jL} \bar{l}_{jL}) \left[\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} y_{jk}^{(l)} l_{kR} + \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} y_{jk}^{(\nu)} \nu_{kR} \right] \right\} + h.c. \end{aligned}$$

where indexes j and k mark generation numbers.

N.B.1.

Charged lepton mixing is formally allowed, but not (yet) observed

N.B.2.

PMNS mixing matrix for neutrinos can be embedded in the SM

вводят лептонное квантовое число, но их вводят постфактум, видя, что электрон и мюоном не смешивается,

для нейтрино

современная модель обобщается на нейтрино.

и она не диагональная, не единичная.

стандартная модель построена.

и вот есть сектора, сектора сильного взаимодействия, сектора хиггса.

например хиггс имеет калибровочные взаимодействия по группе $SU(2)$

с точки зрения квантовой физике если есть объекты, которые в высших порядках теории возмущений, они будут взаимодействовать друг с другом.

существует миф, что стандартная модель только для электрослабых взаимодействий.

покажем, что сильные взаимодействия не вписываются в нее.

покажем, что это нет ак, что если выкинуть сильное взаимодействие, то она будет выдавать неправду.

рассмотрим такую модель:

аксиальная аномалия

There are vector and axial-vector currents in the SM,

$$J_\mu^A = \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$$

Unbroken symmetry (via the Noether theorem) leads to conservation of currents: $\partial_\mu J_\mu = 0$.

For massive fermions $\partial_\mu J_\mu^A = 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi$

массы фермионов равна нулю.

и рассмотрим диаграмму фейнмана (где треугольник с фермионами в вершинах).

But loop corrections give

$$\partial_\mu J_\mu^A = 2im\bar{\Psi}\gamma_5\psi + \frac{\alpha}{2\pi}F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

That is known as axial or chiral or triangular anomaly (или аномалия Адлера-Белла-Джаккера) So at the quantum level the classical symmetry is lost

это важная аномалия.

если теория инвариантна относительно переходов из левого в правый, то теория кирально инвариантна.

и из-за этой аномалии стандартная модель становится без унитарности, то есть вероятность может быть больше единичной, становится неперенормируемой.

и таким образом, теория перестает претендовать на понятие фундаментальной,

и такая триангуляционная аномалия все ломает.

и оказывается, что в стандартной модели все аномалии сокращаются.

можно подсоединять не векторные токи, а другие любые токи, так как все равно мы проверяем дивергенцию.

и было доказано, что аномалии возникают только из одной петли.

на одной петле разбираются следующим образом:

на одной петле цепляются всевозможные бозоны стандартной модели. и аномальные вклады сокращаются, если цеплять к вершинам всевозможные фермионы.

и если соотношение было бы другое, то заряды бы не сократились.

сокращение аксиальной аномалии в Стандартной модели

(потом разберу, пока полностью хз)

But in the SM the axial anomalies apparently cancel out:

1) (WWW) and (WBB) - automatically since left leptons and quarks are doublets у электрических зарядов есть произвол.

и происходит сокращение:

2) (BWW) - since $Q_e + 2Q_u + Q_d = 0$

это загадка, почему все сокращается.

3) (BBB) - since $Q_e = -1, Q_\nu = 0, Q_u = \frac{2}{3}, Q_d = -\frac{1}{3}$

4) (Bgg) - automatically (g = gluon)

5) (B gr gr) - the same as "3)" (gr = graviton) Here B and W are the primary $U(1)$ and $SU(2)_L$ gauge bosons N.B.0.

Anomalies cancel out in the complete SM: $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)$ N.B.1.

Anomalies cancel out in each generation separately N.B.2.

Point "2)" means that the hydrogen atom is neutral

полюса Ландау в двух словах

(это в ктп, на в теории поля будет)

16.3 Other Properties of Established Field Models**16.3.1 Similarity between Gluons and Gravitons**

(there are articles about it, so I'll discuss also it here)

Обсудим не часто востребованные конструкции полей.

16.4 Proposals of Generalizations of Electrodynamics: Basics

Обсудим как строятся различные обобщения электродинамики.

16.4.1 Simplest Generalizations of Electrodynamics

(пока тут пишу, буду заниматься - сделаю отдельным разделом)

Теории с нелокальным внешним источником (???)

(Если взять нелокальный внешний источник? Можно ли получить релятивистски-инвариантную теорию поля? Если можно, то каким образом? пока не смотрел)

О теориях с магнитными зарядами

(пока хз, что это такое)

(белоусов даже предлагает её решать (1.4.3), потом мб посмотрю)

Модифицировать первую пару уравнений Максвелла, включив в нее плотность магнитных зарядов (магнитных монополей) ρ_m и плотность тока магнитных монополей $\mathbf{j}_m$ таким образом, чтобы для них выполнялось уравнение непрерывности. Решить задачу 1.4.2 для модифицированных уравнений.

высшие мультипольные моменты как симметрии (???)

а что если в качестве симметрий будут не только заряды но и высшие мультипольные моменты в теореме Нетер

(это очень современно, есть работы 2020 года на это и до сих пор некоторые теории даже не квантованы).

Последний вопрос вообще приводит к нетривиальной топологической квантовой теории поля в физике твердого тела (типа фракционных возбуждений и т.п.). Володя это в свое время (в прошлом году) исследовал.

а будут ли теории с сохраняющимися высшими мультиполями релятивистскими (это прям совсем очевидно и даже ничего не нужно знать, чтобы ответить)?

Электродинамика как $SU(2)$ теория

(Киселев упоминал, плохо запомнил, потом посмотрю. вроде тут токи у нас через нерелятивистские спиноры выражаются.)

Электродинамика как $SO(3)$ теория

(Киселев упоминал, плохо запомнил, потом посмотрю.)

16.4.2 Born–Infeld Theory (???)

(тут сигнатура странная и нумерация индексов несовременная, нужно это не забывать!)
(пока все еще не тот уровень, чтобы доработать, есть темы, которые важнее, а сделаны гораздо менее качественно.)

Суть

Как догадаться до построения такой теории?

(очень важно, не знаю.)

О способах обхода того, что мешает догадаться до этой теории

Введение от Борна и Инфельда

The relation of matter and the electromagnetic field can be interpreted from two opposite standpoints:—

The first which may be called the Unitarian standpoint. assumes only one physical entity, the electromagnetic field. The particles of matter are considered as singularities of the field and mass is a derived notion to be expressed by field energy (electromagnetic mass). The second or dualistic standpoint takes field and particle as two essentially different agencies. The particles are the sources of the field, are acted on by the field but are not a part of the field; their characteristic property is inertia measured by a specific constant, the mass. At the present time nearly all physicists have adopted the dualistic view, which is supported by three facts.

1. The failure of any attempt to develop a Unitarian theory.— Such attempts have been made with two essentially different tendencies:

(a) The theories started by Heaviside, Searle and J. J. Thomson, and completed by Abraham, Lorentz, and others, make geometrical assumptions about the “shape” and kinematic behaviour of the electron and distribution of charge density (rigid electron of Abraham, contracting electron of Lorentz); they break down because they are compelled to introduce cohesive forces of non-electromagnetic origin;

(b) the theory of Mie formally avoids this difficulty by a generalization of Maxwell’s equations making them non-linear; this attempt breaks down because Mie’s field equations have the unacceptable property, that their solutions depend on the absolute value of the potentials.

2. The result of relativity theory, that the observed dependence of mass on velocity is in no way characteristic of electromagnetic mass, but can be derived from the transformation law.

3. Last, but not least, the great success of quantum mechanics which in its present form is essentially based on the dualistic view.

It started from the consideration of oscillators and particles moving in a Coulomb field; the methods developed in these cases have then been applied even to the electromagnetic field, the Fourier coefficients of which behave like harmonic oscillators.

But there are indications that this quantum electrodynamics meets considerable difficulties and is quite insufficient to explain several facts. The difficulties are chiefly connected with the fact that the self-energy of a point charge is infinite,

The facts unexplained concern the existence of elementary particles, the construction of the nuclei, the conversion of these particles into other particles or into photons, etc.

In all these cases there is sufficient evidence that the present theory (formulated by Dirac’s wave equation) holds as long as the wave-lengths (of the Maxwell or of the de Broglie waves) are long compared with the “radius of the electron” e^2/mc^2 , but breaks down for a field containing shorter waves. The non-appearance of Planck’s constant in this expression for the radius indicates that in the first place the electromagnetic laws are to be modified; the qu

an tu m laws m ay th e n be adapted to the new field equations. Considerations of th is so rt to g eth er w ith th e conviction of th e great philosophical superiority of th e U nitarian idea have led to th e recent attem pt to co n stru ct a new electrodynam ics, based on tw o ra th e r different lines of thought: a new th eo ry of th e electrom agnetic field an d a new m ethod of quantum mechanical treatment.

I t seems desirable to keep these tw o lines separate in th e fu rth er development. The purpose of th is pap er is to give a deeper foundation of th e new field equations on classical lines, w ith o u t touching th e question of the quantum th eo ry.

(далее не выгружал, потому что нужно будет - буду читать. пока вряд ли это нужно.)

Вариация действия и ключевые преобразования этой теории

To obtain the laws of nature we use a variational principle of least action. Let the form

$$\delta \int \mathcal{L} d\tau = 0, \quad (d\tau = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4)$$

We postulate: the action integral has to be an invariant. We have to find the form of $\mathcal{L}$ satisfying this condition. i. We consider a covariant tensor field a_{kl} ; we do not assume any symmetry property of a_{kl} . The question is to define $\mathcal{L}$ to be such a function of a_{kl} that (2.2) is invariant. The well-known answer is that $\mathcal{L}$ must have the form +

$$\mathcal{L} = \sqrt{|a_{kl}|}; \quad (|a_{kl}| = \text{determinant of } a_{kl})$$

If the field is determined by several tensors of the second order, $\mathcal{L}$ can be any homogeneous function of the determinants of the covariant tensors of the order $\frac{1}{2}$.

Each arbitrary tensor a_{kl} can be split up into a symmetrical and anti-symmetrical part:

$$a_{kl} = g_{kl} + f_{kl}; \quad g_{kl} = g_{lk}; \quad f_{kl} = -f_{lk}.$$

The simplest simultaneous description of the metrical and electromagnetic field is the introduction of one arbitrary (unsymmetrical) tensor a_{kl} ; we identify its symmetrical part g_{kl} with the metrical field, its antisymmetrical part with the electromagnetic field.

We have then three expressions which multiplied by $d\tau$ are invariant

$$\sqrt{-|a_{kl}|} = \sqrt{-|g_{kl} + f_{kl}|}; \quad \sqrt{-|g_{kl}|}; \quad \sqrt{|f_{kl}|}$$

where the minus sign is added in order to get real values of the square roots; for (2.1) shows that $|\delta_{k2}| = -1$, therefore always $|g_{k2}| < 0$. The simplest assumption for $\mathcal{L}$ is any linear function of (2.5):

$$\mathcal{B} = \sqrt{-|g_{kl} + f_{kl}|} + A\sqrt{-|g_{kl}|} + B\sqrt{|f_{kl}|}$$

But the last term can be omitted. For if f_{kl} is the rotation of a potential vector, as we shall assume, its space-time integral can be changed into a surface integral and has no influence on the variational equation of the field. † Therefore we can take

$$B = 0$$

We need another condition for the determination of A. Its choice is obvious. In the limiting case of the cartesian co-ordinate system and of small values of f_{nl} , $\mathcal{L}$ has to give the classical expression

$$L = \frac{1}{4} f_{kl} f^{kl}.$$

We now leave the general coordinate system which has guided us to the expression (2.6) for $\mathcal{L}$ and calculate $\mathcal{L}$ in cartesian co-ordinates. Then we have with $g_{kl} = \delta_{kl}$ (see (2.1))

$$\begin{aligned} -|\delta_{kl} + f_{kl}| &= - \begin{vmatrix} -1 & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & -1 & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & -1 & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 1 \end{vmatrix} = 1 + (f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2 - f_{14}^2 - f_{24}^2 - f_{34}^2) \\ &= 1 + (f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2 - f_{14}^2 - f_{24}^2 - f_{34}^2) - |f_{kl}|. \end{aligned}$$

For small values of f_{kl} the last determinant can be neglected and (2.6) becomes equal to (2.8) only if we have therefore the result:-

$$A = -1$$

The action function of the electromagnetic field is in general co-ordinates

$$\mathcal{L} = \sqrt{-|g_{kl} + f_{kl}|} - \sqrt{-|g_{kl}|}$$

and in cartesian co-ordinates

$$L = \sqrt{1 + F - G^2} - 1$$

where

$$\begin{aligned} F &= f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2 - f_{14}^2 - f_{24}^2 - f_{34}^2 \\ G &= f_{23}f_{14} + f_{31}f_{24} + f_{12}f_{34}. \end{aligned}$$

Let us go back to the expression for $\mathcal{L}$ in a general co-ordinate system. We denote as usual

$$|g_{\Sigma i}| = g$$

and we develop the determinant $|g_{kl} + f_{kl}|$ into a power series in f_{kl} . We have then

$$|g_{kl} + f_{kl}| = g + \Phi(g_{kl}, f_{kl}) + |f_{kl}|.$$

The transformation properties of $|g_{kl} + f_{kl}|$, g , $|f_{kl}|$ and therefore also of $\Phi(g_{kl}, f_{kl})$ are the same. They transform in the same way as g . If we write

$$g + \Phi + |f_{kl}| = g \left(1 + \frac{\Phi}{g} + \frac{|f_{kl}|}{g} \right)$$

we see, that all expressions in the bracket on the right side of (2.14) are invariant. We have calculated their value in a geodetic co-ordinate system and have found:

$$\frac{\Phi}{g} = \frac{1}{2} f_{kl} f^{kl} = \mathbf{F} = \frac{1}{2} f_{kr} f_{ln} g^{ll} g^{sr}.$$

Φ/g is an invariant. We have therefore in an arbitrary co-ordinate system:

$$\begin{aligned} |g_{kl} + f_{kl}| &= g (1 + \mathbf{F} - G^2) \\ \mathcal{L} &= \sqrt{-g} \left(\sqrt{1 + \mathbf{F} - G^2} - 1 \right) \\ \mathbf{F} &= \frac{1}{2} f_{kl} f^{kl}, \quad G^2 = \frac{|f_{kl}|}{-g} = \frac{(f_{23}f_{14} + f_{31}f_{24} + f_{12}f_{34})^2}{-g}. \end{aligned}$$

Both $\mathbf{F}$ and G are invariant. We shall bring G into such a form, that its invariance will be evident. For this purpose let us define an antisymmetrical tensor j^{milm} for any pair of indices, that is

$$j^{i a l m} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-g}} & \text{if } sklm \text{ is an even permutation of } 1, 2, 3, 4 \\ \frac{-1}{2\sqrt{-g}} & \text{if } sklm \text{ is an odd permutation of } 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{in any other case} \end{cases}.$$

We can write now G in the following form:

$$G = \frac{1}{4} j^{\text{sk}/m} f_{\text{sk}} f_{lm*}$$

From the last equation we can deduce the tensor character of j^{alm} . We can also write G in the form

$$G = \frac{1}{4} f_{\text{sk}} f^{*sk},$$

where f^{*sk} is the dual tensor defined by

$$f^{*sk} = j^{\text{altm}} f_{lm},$$

that is

$$\begin{aligned} f^{*23} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} f_{14}, & f^{*31} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} f_{24}, & f^{*12} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} f_{34} \\ f^{*14} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} f_{23}, & f^{*24} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} f_{31}, & f^{*34} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} f_{12} \end{aligned},$$

or also

$$\begin{aligned} f_{23}^* &= -\sqrt{-g} f^{14}, & f_{31}^* &= -\sqrt{-g} f^{21}, & f_{12}^* &= -\sqrt{-g} f^{34} \\ f_{14}^* &= -\sqrt{-g} f^{23}, & f_{24}^* &= -\sqrt{-g} f^{31}, & f_{*3}^* &= -\sqrt{-g} f^{12} \end{aligned}$$

because

$$f^*_{sk} = j_{sklm} f^{lm}; \quad j_{sklm} = g j^{jklm} = g_{as} g_{bk} g_{cl} g_{dm} j^{abcd}$$

We shall need later the following formulae:

$$\begin{aligned} f^{*kl} f^*_{kl} &= -f^{kl} f_{kl} \\ j^{lsab} f_{ks} f_{ab} &= f^{*ls} f_{ks} = G \delta_k^2 \\ f^{***is} &= -f^{ls}. \end{aligned}$$

(2.24) – (2.26) follow from the definition of f^*_{kl} , f^{*kl} and G given above. The function $\mathcal{L}$ represented by (2.15) is the simplest Lagrangian satisfying the principle of general invariance. But it differs from that considered in I by the term G^2 . This is of the fourth order in the f_{kl} and can, therefore, be neglected except in the immediate neighbourhood of singularities (i.e., electrons, see §6). But the Lagrangian used in I can also be expressed in a general covariant form; for G^2 is a determinant, namely, $|f_{kl}|$, therefore

$$\int \left(\sqrt{-|g_{kl} + f_{kl}| + |f_{kl}|} - \sqrt{-|g_{kl}|} \right) d\tau$$

is also invariant; in cartesian co-ordinates it has exactly the form

$$\int (\sqrt{1 + F} - 1) d\tau$$

Which of these action principles is the right one can only be decided by their consequences. We take the expression given by (2.15) and can then easily

return to the other (2.27) or (2.28) by putting $G = 0$. In any case the solution of the statical problem is identical for both action functions because one has $G = 0$ in this special case. §3. Action Principle, Field Equation and Conservation Lavo. We write (2.15) in the general form

$$\mathcal{C} = \sqrt{-g} L = \sqrt{-g} L(g_{kl}, F, G)$$

We shall see that all considerations hold if L is an invariant function of these arguments. As usual we assume the existence of a potential vector ϕ_k , so that

$$f_{sl} = \frac{\partial \phi_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial x^l}.$$

Then we have the identity

$$\frac{\partial f_{lm}}{\partial x^k} + \frac{\partial f_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial f_{kl}}{\partial x^m} = 0$$

which can with the help of (2.20) be written:

$$\frac{\partial \sqrt{-g} f^{*kl}}{\partial x^l} = 0$$

We introduce a second kind of antisymmetrical field tensor p_{kl} , which has to f_{kl} a relation similar to that which, in Maxwell's theory of macroscopic bodies, the dielectric displacement and magnetic induction have to the field strengths:

$$\sqrt{-g} p^{kl} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{kl}} = \sqrt{-g} \left(2 \frac{\partial L}{\partial F} f^{kl} + \frac{\partial L}{\partial G} f^{*kl} \right) = \frac{(f^{kl} - G f^{*kl}) \sqrt{-g}}{\sqrt{1 + F - G^2}}$$

The variation principle (2.2) gives the Eulerian equations

$$\frac{\partial \sqrt{-g} p^{kl}}{\partial x^l} = 0$$

The equation (3.2) (or (3.2A)) and (3.4) are the complete set of field equations. We prove the validity of the conservation law as in Maxwell's theory. Assuming a geodetic co-ordinate system, we multiply (3.2) by p^{lm} :

$$p^{lm} \left(\frac{\partial f_{lm}}{\partial x^k} + \frac{\partial f_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial f_{kl}}{\partial x^m} \right) = 0$$

In the second and third term we can take p^{lm} under the differentiation symbol because of (3.4); in the first term we use the definition (3.3) of p^{lm} :

$$2 \frac{\partial}{\partial x^k} (p^{lm} f_{mk}) + \frac{\partial L}{\partial f_{lm}} \frac{\partial f_{lm}}{\partial x^k} = 0$$

or

$$-2 \frac{\partial}{\partial x^l} (p^{ml} f_{ml}) + 2 \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0$$

If we introduce the tensor

$$T_k^l = L \delta_k^l - p^{ml} f_{mk}$$

where

$$\delta_k^l = \begin{cases} 1 & \text{if } k = l \\ 0 & \text{if } k \neq l \end{cases}$$

we have

$$\frac{\partial T_k^l}{\partial x^l} = 0$$

In an arbitrary co-ordinate system we have

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^l} T_k^l - \frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{ab} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^k} = 0$$

or, with the usual notation of covariant differentiation

$$T_{k|l}^l = 0$$

It follows from (3.3) and (2.25) that we can write also T_k^l in the form

$$T_k^l = L \delta_k^l - \frac{f^{ml} f_{mk} - G^2 \delta_k^l}{\sqrt{1 + F - G^2}}$$

Lagrangian and Hamiltonian.

$\mathcal{L}$ can be considered as a function of g^{kl} and f_{kl} . We shall show that $\frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{kl}}$ is the energy-impulse tensor. We find

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{kl}} &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{kl} \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial g^{kl}} &= g^{sr} f_{ks} f_{lr} \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial g^{kl}} &= \frac{1}{2} \mathbf{G} g_{kl}.\end{aligned}$$

(далее не выгружал, потому что ну есть такое, я особо с этим не соприкасался, подтяну гамильтонову теорию поля - мб пропишу, пока нет смысла в этом.)

Field Equations in Space-vector Form (!!!!)

We now introduce the conventional units instead of the natural units. We denote by $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, the space-vectors which characterize the electromagnetic field in the conventional units. We have in a cartesian co-ordinate system:

$$\left. \begin{aligned}(x^1, x^2, x^3, x^4) &\rightarrow (x, y, z, ct) \\ (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) &\rightarrow (\mathbf{A}, \phi) \\ (f_{23}, f_{31}, f_{12}) &\rightarrow \mathbf{B} \\ (f_{14}, f_{24}, f_{34}) &\rightarrow \mathbf{E} \\ (p_{23}, p_{31}, p_{12}) &\rightarrow \mathbf{H} \\ (p_{14}, p_{24}, p_{34}) &\rightarrow \mathbf{D}\end{aligned} \right\}$$

The quotient of the field strength expressed in the conventional units divided by the field strength in the natural units may be denoted by b . This constant of a dimension of a field strength may be called the absolute field; later we shall determine the value of b , which turns out to be very great, i.e., of the order of magnitude 10^{16} e.s.u. We have

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \sqrt{1 + \mathbf{F} - \mathbf{G}^2} - 1, \\ \mathbf{F} &= \frac{1}{b^2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2); \quad \mathbf{G} = \frac{1}{b^2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})\end{aligned}$$

$$\mathbf{H} = b^2 \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{G}\mathbf{E}}{\sqrt{1 + \mathbf{F} - \mathbf{G}^2}}$$

$$\mathbf{D} = b^2 \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E} - \mathbf{G}\mathbf{B}}{\sqrt{1 + \mathbf{F} - \mathbf{G}^2}}$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi$$

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0; \quad \text{div } \mathbf{D} = 0.$$

Our field equations (3.2_B) and (3.4A) are formally identical with Maxwell's equations for a substance which has a dielectric constance and a susceptibility, being certain functions of the field strength, b u t w ithout a spatial distribution of charge and current.

Статическое поле Борна-Инфельда и модифицированный закон Кулона (!!!)

We consider (in the cartesian co-ordinate system) the electrostatic case where $\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$ and all other field components are independent of t . Then the field equations reduce to:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0\end{aligned}$$

To solve this equation for the case of central symmetry. Then (6.2) is imply

$$\frac{d}{dr} (r^2 D_r) = 0$$

nd (6.3) has the solution

$$D_r = e/r^2.$$

n this case the field $\mathbf{D}$ is exactly the same as in Maxwell's theory: the sources f $\mathbf{D}$ are point charges given by the surface integral

$$4\pi e = \int D_r d\sigma$$

The equation (6.1) gives

$$\mathbf{E}_r = -\frac{d\phi}{dr} = -\phi'(r)$$

nd from (3.3A)

$$D_r = \frac{E_r}{\sqrt{1 - \frac{1}{b^2} E_r^2}} = -\frac{\phi'(r)}{\sqrt{1 - \frac{1}{b^2} \phi'^2}}$$

The combination of (6.4) and (6.7) gives a differential equation for $\phi(r)$ of the first order, with the solution

$$\phi(r) = \frac{e}{r_0} f\left(\frac{r}{r_0}\right); f(x) = \int_x^\infty \frac{dy}{\sqrt{1+y^4}}; r_0 = \sqrt{\frac{e}{b}}.$$

This is the elementary potential of a point charge e , which has to replace Coulomb's law; the latter is an approximation for $x \geq 1$, as is seen immediately, but the new potential is finite everywhere. With help of the substitution $x = \tan \frac{1}{2}\beta$ one obtains

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{\bar{\beta}(x)}^\pi \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta}} = f(0) - \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \bar{\beta}\right),$$

where

$$\bar{\beta} = 2 \arctan x,$$

and $F(k, \beta)$ is the Jacobian elliptic integral of the first kind for $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{1}{4}\pi$ (tabulated in many books) †

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \bar{\beta}\right) = \int_0^{\bar{\beta}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta}}$$

For $x = 0$ one has

$$f(0) = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\pi\right) = 1,8541$$

The potential has its maximum in the centre and its value is

$$\phi(0) = 1,8541e/r_0.$$

The function $f(x)$ is plotted in fig. 1. It has very similar properties to the function $\operatorname{arccot} x$. For example, one has

$$\bar{\beta}(1/x) = 2 \arctan 1/x = 2 \left(\frac{1}{2}\pi - \arctan x \right) = \pi - \bar{\beta}(x);$$

on the other hand

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \bar{\beta}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pi - \bar{\beta}\right) = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pi\right)$$

Therefore one has

$$f(x) + f(1/x) = f(0).$$

It is sufficient, therefore, to calculate $f(x)$ from $x = 0$ to $x = 1$ or from $\beta = 0$ to $\beta = \frac{1}{4}\pi$.

One sees, that the D field is infinite for $r = 0$; $\mathbf{E}$ and ϕ , however, are always finite. One has

$$D_r = e/r^2, \\ E_r = \frac{e}{r_o^2 \sqrt{1 + (r/r_o)^4}}.$$

The components E_x, E_y, E_z are finite at the centre, but have there a discontinuity.

О других темах теории Борна-Инфельда

(там еще в статье много интересного, потом мб напишу. и не только в статье, много всего про это известно, так что обо всем писать подробно тут нет смысла, лишь укажу.)

О том, где в этой теории источник (???)

(спрошу у кого-то. там как будто без источника уже ЭД и получается. или его не сложно добавить как обычное локальное взаимодействие??? проверю потом еще раз.)

О том, как догадаться до этой теории

(вот это большой вопрос для меня! я так-то и хз. мб Борн уже написал про это...)

О математических методах для этой теории (??!!!)

(пока тут укажу, что там про матрицы нужно знать?? как не ошибиться в этой математике??? пока у меня эти методы слишком слабые, так что поработаю над ними потом.)

О том, насколько живая эта теория (???)

(?? пользуются ли ей сейча??? что про неё думают спустя время?? почему я про неё не слышал ничего??)

Об экспериментальных проверках теории (???)

(?? какие вообще опыты можно поставить и какие ставились?)

О дальнейших обобщениях этой теории

(википедия говорит, что на Д-браны обобщение есть, мб в этом что-то есть)

О применениях этой теории (???)

(?? когда эта теория может быть нужна?? пока не знаю, это плохо.)

16.4.3 Electrodynamics of Bialynicki-Birula (??)

(в одной из статей есть рассуждения про теорию Б-И)

Conformal and duality-invariant non-linear electrodynamics of Bialynicki-Birula

Теория по Dmitri P. Sorokin

As is well known and not hard to see from (4.1), in the infinite tension limit $T \rightarrow \infty$ (which is equivalent to the weak electromagnetic field limit), the Born-Infeld Lagrangian density reduces to that of Maxwell's electrodynamics (2.1). A much less known limiting theory is the one appearing in the strong field limit of Born-Infeld theory [26, 27], which is equivalent to take $T \rightarrow 0$. A reason why this limit is less known is that it cannot be taken in the Lagrangian formulation. Indeed, in this limit the Born-Infeld Lagrangian density becomes a purely imaginary total derivative

$$\mathcal{L}_{BI}|_{T \rightarrow 0} = \frac{i}{4} \left| F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right|,$$

hence the corresponding action vanishes (modulo an un-physical imaginary boundary Chern-Simons term).

To take the strong field limit it is necessary to pass (via the Legendre transform) to the Hamiltonian formulation of the Born-Infeld theory as was noticed by Bialynicki-Birula in 1983[26, 27]. The Born-Infeld Hamiltonian density is

$$\mathcal{H}_{BI}(\mathbf{D}, \mathbf{B}) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} - \mathcal{L}_{BI}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = \sqrt{T^2 + T(\mathbf{D}^2 + \mathbf{B}^2)} + |\mathbf{D} \times \mathbf{B}|^2 - T$$

where $\mathbf{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{E}}$ is the electric displacement vector field playing the role of the canonical momentum conjugate to the three-vector gauge potential $\mathbf{A}$.

Now the tensionless (strong field) limit $T \rightarrow 0$ can be taken and one gets the Hamiltonian density first obtained by Bialynicki-Birula in 1983

$$\mathcal{H}_{BB} = |\mathbf{D} \times \mathbf{B}|$$

As Bialynicki-Birula discussed in detail in [27], the theory described by this Hamiltonian is rather remarkable. It is invariant under $SL(2, R)$ -duality (rather than $SO(2)$), which can be immediately seen from the invariance of the Hamiltonian density (4.3) under the $SL(2, R)$ transformations of $\mathbf{B}^I = (\mathbf{D}, \mathbf{B})$ ($\mathbf{B}'^I = L^I_J \mathbf{B}^J$, $\det L^I_J = 1$, $I, J = 1, 2$). It is conformal and possesses infinite number of conserved currents with the associated tensorial conserved charges

$$Q^{i_1 i_2 \dots i_k} = \int dx^3 \mathcal{H}_{BB} n^{i_1} n^{i_2} \dots n^{i_k}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{D} \times \mathbf{B}|}$$

which indicates that this theory can be integrable. As is seen from the form of its Hamiltonian, the Bialynicki-Birula theory does not include Maxwell's electrodynamics as a whole. It can be shown that this theory describes all possible configurations of the so-called null electromagnetic fields whose scalar and pseudo-scalar Lorentz invariants (3.4) vanish

$$S = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) = 0, \quad P = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$$

The Bialynicki-Birula theory can be associated with an infra-red limit of a D3-brane [54] and has its counterparts in higher space-time dimensions [37]. For instance, in $D = 6$ it is a strong-field limit [37, 55] of the non-linear Born-Infeld-like theory for a chiral 2-form gauge field [56, 57], while in $D = 10$ the theory whose strong field limit is the BB-like chiral 4-form electrodynamics is still unknown [37].

A natural question arises whether there are other conformal and duality invariant models of electrodynamics in addition to the Maxwell and Bialynicki-Birula theory? The answer is yes, there is but only one more non-linear electrodynamics with these symmetry properties called ModMax [24].

16.4.4 ModMax electrodynamics

Теория по Dmitri P. Sorokin

The Lagrangian density of ModMax has the following form [24, 58].

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{ModMax}} &= -\frac{\cosh \gamma}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\sinh \gamma}{4} \sqrt{(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2} \\ &= \frac{\cosh \gamma}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{\sinh \gamma}{2} \sqrt{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2}\end{aligned}$$

where γ is the dimensionless coupling constant. The conditions of causality and unitarity require this constant be non-negative $\gamma \geq 0$. These values of γ also ensure that the Lagrangian density is a convex function of the electric field E^i [24] and that its energy-momentum tensor satisfies the weak, strong and dominant energy conditions [59]. Note that Maxwell's electrodynamics is not a weak field limit of ModMax because of conformal invariance, but is recovered when the ModMax coupling constant tends to zero $\gamma \rightarrow 0$.

Since ModMax is conformal, its energy-momentum tensor is traceless and proportional to that of Maxwell's theory

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu} &= \left(F_{\rho}^{\mu} F^{\nu\rho} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} (F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda}) \right) \mathcal{L}_S \\ \mathcal{L}_S &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} = \left(\cosh \gamma - \sinh \gamma \frac{F_{\sigma\nu} F^{\sigma\nu}}{\sqrt{(FF)^2 + (F\tilde{F})^2}} \right) \\ T_{\mu}^{\mu} &= 0\end{aligned}$$

16.4.5 Heisenberg-Euler-Kockel theory (???)

(нужно будет - погуглю, все равно отдельно изучать эти теории нужно.)

16.4.6 Chern-Simons Theory

(укажу про неё все основы, мб увеличу до подраздела)
(тонг и др про это писали)

Суть

$$W(\mathbf{A}) = \frac{1}{8\pi^2} \int d^3x \epsilon^{ijk} \text{tr} \left(F_{ij} A_k + \frac{2i}{3} A_i A_j A_k \right)$$

This is known as the Chern-Simons functional. It has a number of be

Как догадаться до построения такой теории

О способах обхода того, что мешает догадаться до этой теории

Введение в аксиомы и Черна-Саймонса от Киселева

(вроде неплохо написано, да?)

В случае свободного поля, когда $j^\mu \equiv 0$, калибровочная инвариантность действия имеет место, если только лагранжиан зависит от калибровочно инвариантного тензора напряженности, а требование скаляра для $\mathcal{L}$ означает, что он зависит только от инвариантов поля $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$.

В состав тензора напряженности входит производная по времени в компоненте $F_{0\alpha} = \partial_0\mathcal{A}_\alpha - \partial_\alpha\mathcal{A}_0$, а это значит, что, во-первых, скалярный потенциал $\mathcal{A}_0$ не эволюционирует, так как производная скалярного потенциала по времени $\partial_0\mathcal{A}_0$ не входит в число компонент тензора напряженности, т.е. он не является динамической величиной в отличие от компонент векторного потенциала $\mathcal{A}$, а во-вторых, по принципу причинности в классической теории уравнения поля могут включать в себя производные по времени полевых переменных не выше второго порядка.

(кст, это нужно лучше написать.)

И наконец, центральный физический аргумент: мы потребуем, чтобы уравнения для свободных полей удовлетворяли принципу суперпозиции, так что линейная оболочка независимых решений для свободных полей также будет решением уравнений движения, а система независимых решений будет образовывать базис всех решений для свободного поля.

Физическое обоснование принципа суперпозиции вполне естественно: решения для свободного поля действительно являются свободными и никак не влияют друг на друга. В основе принципа суперпозиции свободных полей лежит гипотеза об асимптотически свободных состояниях: существуют условия и область параметров теории, в которых взаимодействия полей можно пренебречь, так что уравнения движения становятся линейными по полям. В случае электродинамики эта важная гипотеза становится элементарной: уравнения Максвелл по факту имеют широкую область эмпирической применимости, а они линейны по 4-вектору потенциалов даже при наличии внешних источников.

Из принципа причинности и требования суперпозиции решений для свободных полей следует, что лагранжиан свободного поля - это квадратичный инвариант поля, а в действие свободного поля производные первого порядка могут входить лишь квадратично:

$$\mathcal{L} = a_I F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + a_{II} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$$

Однако второй инвариант является псевдоскаляром, который меняет знак при зеркальной инверсии пространства, и следовательно, зависимость действия от этого релятивистского инварианта приводила бы к нарушению инвариантности взаимодействий поля относительно пространственной четности, чего не наблюдается.

(?? хочется конкретно написать формулу, какая бы следовала из такого лагранжиана, которая не будет выполняться??? пока не так глубоко понимаю.)

Таким образом, лагранжиан электромагнитного поля зависит только от первого инварианта. Коэффициент пропорциональности a_I в (5.1) определяет используемые единицы измерения поля и зарядов. Этот коэффициент отрицателен, поскольку инвариант включает в себя квадратичные слагаемые скорости изменения поля

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \partial_t \mathcal{A}_\alpha \partial_t \mathcal{A}^\alpha + \dots = -\frac{1}{c^2} (\partial_t \mathcal{A}_E)^2 + \dots$$

так что слагаемому с кинетической энергией нужно сменить знак, чтобы давать положительный вклад в общую энергию.

В гауссовой системе единиц действие свободного поля запишется в виде

$$S_{\text{field}} = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

При обсуждении вкладов в действие свободного электромагнитного поля (5.1) мы ответили на 2 из 3-х основных научных вопросов: «Что?» и «Как?». Осталось обратиться к 3-ему вопросу: «почему?».

Почему Природа устроила так, что вклад псевдоскалярного инварианта в действие свободного электромагнитного поля тождественно равен нулю?

О механизме Печчеи-Квинн

(окей, дальше я не смотрел, какая-то отдельная жесть ниже идет, вообще не до этого.)

Научный ответ на этот вопрос - механизм Печчеи-Квинн (Peccei-Quinn).

Прежде всего, параметр a_{II} в (5.1) рассматривается как константа, так что вклад в лагранжиан такого же вида по замечанию Печчеи и Квинн может возникнуть динамически в квантовой теории поля за счет флуктуаций в вакууме. Но тогда наблюдаемая величина a_{II} будет определяться как сумма исходного параметра и вклада от квантовых флуктуаций. Если считать, что эта сумма сохраняет более общую новую симметрию относительно непрерывных однопараметрических преобразований в виде поворотов, скажем, левого базиса 3-мерного евклидова пространства относительно правого базиса, а не только относительно замены правого на левое и обратно, то суммарное значение параметра a_{II} должно обращаться в нуль. Эта группа преобразований называется аксиальной и обозначается $U_A(1)$.

В механизме Печчеи-Квинн угол поворота не зависит от координат и времени, т.е. симметрия является глобальной. Как мы уже понимаем, нарушение глобальной $U_A(1)$ симметрии за счет квантовой аномалии означает, что дивергенция аксиального тока не равна нулю. В механизме Печчеи-Квинн эта дивергенция равна константе, которая компенсирует исходное значение a_{II} .

Интересно пойти еще дальше и спросить: Что произойдет, если параметр a_{II} рассматривать как динамическое поле? Это означает, что в системе единиц Хевисайда вводят

$$a_{II} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^2}{32\pi^2} \frac{a(x)}{f_a}$$

где e - электрический заряд электрона, $a(x)$ - псевдоскалярное поле, которое носит имя «аксион» (Френк Вильчек и Стивен Вайнберг), а f_a - постоянная аксиона, которая имеет размерность поля⁴. Понятие динамического поля означает, что у аксиона есть свой кинетический член в действии и свой потенциальный вклад. Рассматриваемый же нами член в лагранжиане отвечает взаимодействию аксиона с электромагнитным полем, так как все эти поля становятся зависящими друг от друга, раз они вместе входят в этот член локального действия⁵. Тогда решение проблемы видится таким образом: после учета всех вкладов в потенциал у аксиона возникает независящее от координат и времени решение уравнений движения, и это решение отвечает минимуму потенциала. Если этот минимум достигается при $a(x) = 0$, то в теории не возникает вклада с явным нарушением зеркальной инверсии пространства. Таким образом, глобальное значение параметра a_{II} задается динамически возникающим потенциалом самодействия аксиона.

Другой аспект этой проблемы также весьма интересен. Дело в том, что второй инвариант в (5.1) можно записать в виде 4-дивергенции тока j_A^μ ,

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}(\partial_\mu\mathcal{A}_{\nu'} - \partial_{\mu'}\mathcal{A}_\nu)F_{\mu'\nu'} = 2\partial_\mu\left\{\mathcal{A}_\nu\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}F_{\mu'\nu'}\right\} \Rightarrow j_A^\mu = \epsilon^{\mu\nu\mu'\nu'}\mathcal{A}_\nu F_{\mu'\nu'}$$

где мы учли фактор 2, который возникает за счет равного вклада двух членов антисимметричного тензора напряженностей, а также 1-ую пару уравнений Максвелла - нулевую свертку набла с дуальным тензором напряженности: $\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = 0$. Значит, вклад второго инварианта по теореме Гаусса сводится к интегралу по границе 4-объема,

$$S_{II} = a_{II} \int_{V_4} d^4x F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = a_{II} \int_{V_4} d^4x \partial_\mu j_A^\mu = a_{II} \oint_{\partial V_4} d^3\Sigma_\mu j_A^\mu$$

Но отсюда из принципа наименьшего действия следует, что при вариации действия по полям с фиксированными значениями полей на границе ∂V_4 граничные члены не дадут вклад в уравнения движения! Однако граничные члены все же могут играть существенную роль: решения уравнений зависят и от граничных условий тоже. При этом важно теперь подчеркнуть, что действие S_{II} в его исходном виде явно калибровочно инвариантно, а ток j_A^μ явно меняется при калибровочных преобразованиях. Но 4дивергенция этого тока, конечно, калибровочно инвариантна по построению. Это значит, что и поток этого тока через 3-мерную поверхность с 4-нормалью вдоль $d^3\Sigma_\mu$ - это калибровочно инвариантная величина. Этот поток известен как действие Черна-Саймонса, которое интенсивно исследуется в научной литературе в случае калибровочных теорий с неабелевой группой непрерывной симметрии. Такие симметрии вполне аналогичны калибровочной симметрии для электромагнитного поля, а формальное отличие состоит в том, что само калибровочное поле не просто 4-вектор, а еще и матрица, которую можно разложить по базису эрмитово самосопряженных матриц. Такие теории возникают в случае, когда сами токи, порождающие калибровочные поля, меняют типы частиц, которые вступают во взаимодействия. В случае электродинамики мы полагаем, что заряженный ток отвечает движению частиц фиксированной масти, как говорится, без изменения этой масти.

Неабелевы теории полагают, что группа локальной калибровочной симметрии $g(x)$, которую мы вводили в разделе 7.4 на стр. 71 при рассмотрении длинной производной со связностью, включает в себя линейные преобразования разных физических величин друг в друга, а значит, если такие преобразования определяются посредством введения n независимых вещественных параметров $f_a(x)$, а $g(x)$ действует в линейном пространстве физических величин, которое имеет размерность K , то калибровочное поле представляет собой матрицу $K \times K$, и в простейшем случае n эрмитово самосопряженных матриц t^a образуют замкнутый базис подобных матриц $K \times K$.

$$\mathcal{A}_\mu = \sum_{a=1}^n \mathcal{A}_\mu^a t^a, \quad [t^a, t^b] = if^{abc}t^c$$

В противном случае многократное действие длинной производной на физические величины порождало бы новые независимые поля связности. Кроме того, обычно вводят нормировку матриц

$$\text{tr}\{t^a t^b\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\delta^{ab}$$

и условие, которое устраняет абелевы вклады, для которых можно определить параметры преобразований так, чтобы $t^a \sim \mathbb{1}$, а значит необходимо потребовать, чтобы для неабелевых преобразований было бы $\text{tr} t^a = 0$.

В формализме дифференциальных форм (см. раздел 2.7), который очень эффективен при рассмотрении действия Черна-Саймонса, в частности, вводят 1-форму связности A ,

$$dx^\mu \text{ ie } A_\mu \stackrel{\text{def}}{=} A$$

так что 1-форма калибровочной производной -

$$\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} dx^\mu \partial_\mu + A = d + A$$

В математической физике обычно переопределяют связность, так что $\text{ie } \mathcal{A}_\mu \mapsto A_\mu$, т.е. переходят к антиэрмитовым матрицам связности A_μ , чего мы также будем придерживаться в этом параграфе. Тогда длинная производная $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + A_\mu$, а $\mathcal{D} = dx^\mu \mathcal{D}_\mu$. Тогда 2-форма напряженности поля F ,

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D} \wedge A = dA + A \wedge A.$$

В явном виде

$$dA = dx_1^\mu \partial_\mu \wedge A_\nu dx_2^\nu = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx_1^\mu \wedge dx_2^\nu,$$

а

$$A \wedge A = [A_\mu, A_\nu] dx_1^\mu \wedge dx_2^\nu,$$

где коммутатор векторных связностей вычисляется как обычный коммутатор матриц. Отсюда сразу также видно, что замкнутая теория получается, если только коммутатор выражается через тот же набор матриц, что определяют и разложение связности по матричному базису. В итоге, термин неабелева теория означает, что коммутатор отличен от нуля, а тензор напряженности становится нелинейным по калибровочному полю,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

Вклад коммутатора в тензор напряженности называют самодействием калибровочных полей. Этот термин становится более понятен, если восстановить прежние единицы измерения калибровочного поля с явным указанием заряда, так что квадратичный по полям вклад включает в себя дополнительный фактор заряда e , а, стало быть, самодействие происходит с тем же зарядом, что и взаимодействие поля с сохраняющимся током j^μ . Теперь рассмотрим 4-форму ⁶

$$F \wedge F = \frac{4!}{2!2!} F_{\mu\nu} F_{\mu'\nu'} dx_1^\mu \wedge dx_2^\nu \wedge dx_3^{\mu'} \wedge dx_4^{\nu'} = \frac{4!}{2!2!} F_{\mu\nu} F_{\mu'\nu'} \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\mu'\nu'} d^4V = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} d^4V,$$

и, стало быть, мы получаем вклад произведения тензора напряженности поля на дуальный тензор напряженностей. Из определения тензора напряженности в виде коммутатора длинных производных

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = F_{\mu\nu}$$

и из группового преобразования длинной производной

$$\mathcal{D}_\mu (\mathcal{A}^g) = g \mathcal{D}_\mu (\mathcal{A}) g^{-1}$$

следует, что 2-форма напряженности также преобразуется групповым образом

$$F (\mathcal{A}^g) = g F (\mathcal{A}) g^{-1}.$$

Поэтому групповым инвариантом в неабелевой теории будет след

$$\text{tr}\{F \wedge F\}.$$

Приведем этот член к виду полной производной. Разложим произведение в сумму,

$$F \wedge F = (dA + A \wedge A) \wedge (dA + A \wedge A) = dA \wedge dA + 2dA \wedge A \wedge A + A \wedge A \wedge A \wedge A.$$

Первый член в (5.11) сводится к полной производной в силу нильпотентности внешнего дифференцирования, $d^2 = 0$,

$$d(A \wedge dA) = dA \wedge dA - A \wedge d^2 A = dA \wedge dA,$$

и в этой формуле легко узнать рассмотренный нами выше случай абелевой группы калибровочной симметрии, в которой нет других членов с самодействием калибровочного поля.

Второй член в (5.11) также легко преобразовать, имея ввиду правило дифференцирования Лейбница,

$$dA \wedge A \wedge A = \frac{1}{3}d(A \wedge A \wedge A).$$

Вклад коммутатора в тензор напряженности называют самодействием калибровочных полей. Этот термин становится более понятен, если восстановить прежние единицы измерения калибровочного поля с явным указанием заряда, так что квадратичный по полям вклад включает в себя дополнительный фактор заряда e , а, стало быть, самодействие происходит с тем же зарядом, что и взаимодействие поля с сохраняющимся током j^μ . Теперь рассмотрим 4-форму ⁶

$$F \wedge F = \frac{4!}{2!2!} F_{\mu\nu} F_{\mu'\nu'} dx_1^\mu \wedge dx_2^\nu \wedge dx_3^{\mu'} \wedge dx_4^{\nu'} = \frac{4!}{2!2!} F_{\mu\nu} F_{\mu'\nu'} \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\mu'\nu'} d^4 V = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} d^4 V,$$

и, стало быть, мы получаем вклад произведения тензора напряженности поля на дуальный тензор напряженностей. Из определения тензора напряженности в виде коммутатора длинных производных

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = F_{\mu\nu}$$

и из группового преобразования длинной производной

$$\mathcal{D}_\mu(\mathcal{A}^g) = g \mathcal{D}_\mu(\mathcal{A}) g^{-1}$$

следует, что 2-форма напряженности также преобразуется групповым образом

$$F(\mathcal{A}^g) = g F(\mathcal{A}) g^{-1}.$$

Поэтому групповым инвариантом в неабелевой теории будет след

$$\text{tr}\{F \wedge F\}.$$

Приведем этот член к виду полной производной. Разложим произведение в сумму,

$$F \wedge F = (dA + A \wedge A) \wedge (dA + A \wedge A) = dA \wedge dA + 2dA \wedge A \wedge A + A \wedge A \wedge A \wedge A.$$

Первый член в (5.11) сводится к полной производной в силу нильпотентности внешнего дифференцирования, $d^2 = 0$,

$$d(A \wedge dA) = dA \wedge dA - A \wedge d^2 A = dA \wedge dA,$$

и в этой формуле легко узнать рассмотренный нами выше случай абелевой группы калибровочной симметрии, в которой нет других членов с самодействием калибровочного поля.

Второй член в (5.11) также легко преобразовать, имея ввиду правило дифференцирования Лейбница,

$$dA \wedge A \wedge A = \frac{1}{3}d(A \wedge A \wedge A).$$

но в этом равенстве просто произошла смена названий немых индексов, так что одно и то же число равно самому себе с противоположным знаком, и следовательно, след третьего вклада в (5.11) просто равен нулю ⁷. В итоге,

$$\text{tr}\{F \wedge F\} = \text{tr}\left\{d\left(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right)\right\}$$

и по теореме Стокса получим

$$\int_{V_4} \text{tr}\{F \wedge F\} = \oint_{V_3=\partial V_4} \text{tr}\left\{A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right\}$$

Как видим, найти действие Черна–Саймонса (5.14) в этом формализме в случае неабелевой теории оказалось довольно просто.

Для полноты картины заметим, что дуальная напряженность поля $\tilde{F}_{\mu\nu}$ может быть введена как звездочка Ходжа для 2-формы F ,

$$*F = \frac{1}{2!}\epsilon_{\mu\nu\mu'\nu'}F^{\mu'\nu'}dx_1^\mu \wedge dx_2^\nu = \tilde{F}$$

и в полной аналогии с рассмотрением $F \wedge F$ в (5.9) мы заключаем, что

$$*F \wedge F = \frac{1}{2}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}d^4V = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^4V$$

Эта запись часто используется в научной литературе для введения действия калибровочного поля в формализме дифференциальных форм,

$$S_{\text{field}} = -\frac{1}{e^2} \int \text{tr}\{*F \wedge F\},$$

где мы также учли переход от эрмитовых матриц в связности к антиэрмитовым согласно (5.4) и (5.5).

Действие Черна–Саймонса, записанное в терминах дифференциальных форм, обладает свойством топологической инвариантности, понятие о которой выходит за рамки данного изложения. Более того, эти свойства действия указывают на то, что учет нелинейных решений приводит к периодической форме потенциала аксиона.

Поиски аксиона ведутся экспериментально как путем прямой регистрации его в процессах с элементарными частицами, так и косвенно, по влиянию аксиона, например, на законы эволюции наблюдаемой Вселенной. Эти поиски устанавливают границы допустимых значений массы аксиона и константы f_a . В астрофизике обычно указывают ограничения на константу связи аксиона с электромагнитным полем, $f_a \gtrsim 10^{10}$ ГэВ. Это говорит о том, что физика аксиона скорее всего обусловлена эффектами, которые возникают на масштабах сверхвысоких энергий, а значит, и сам аксион - это окно в исследовании законов природы при столь высоких энергиях.

Философская суть

(какие вообще из этой теории можно сделать выводы???)

16.4.7 Higher-Rank Tensor Fields

(по Степаньянцу потом пропишу)

16.4.8 Fields in String Theory (??)

важная связка в теории поля

(пока не занимался)

16.4.9 Fields in Curved Space-time

(структура из Степаньянца. раздел пока мелкий, потому что не уверен, что нужно особо много про него писать тут. Может потом увеличу, а мб и просто в отдельной записи и начну это писать, потому что слишком специфическая тема.)

смысл общековариантной инвариантности

(??????)

примеры полей с конформной связью

Теория поля в искривленном пространстве

.

.

собственно то, что мне нужно

(из Степаньянца структура)

заготовки для полей в искривленном пространстве

алгоритм перехода в искривленное пространство в рамках минимальной связи с гравитацией

Минимально необходимое взаимодействие поля с гравитацией называется минимальной связью с гравитацией и делается следующим образом:

1. Заменяется $\eta_{\mu\nu}$ на метрику пространства-времени $g_{\mu\nu}$.
2. Заменяются обычные производные ковариантными производными, например $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$.

Поскольку ковариантные производные скалярной функции равны обычным производным, то для скалярного поля $\partial_\mu \phi = \nabla_\mu \phi$. Здесь

$$\nabla_\mu f^\nu = \partial_\mu f^\nu + \Gamma_{\beta\mu}^\nu f^\beta \quad (1)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (2)$$

3. Заменить $d^3x dt$ на $d^4x \sqrt{-g}$, то есть элемент объема Минковского на ковариантный элемент объема.

Например, для скалярного поля, действие из $S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]$ становится:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(\phi) \right]$$

Неминимальные связи с гравитацией, например, конформная связь, обычно выражаются дополнительными членами в действии.

Эти дополнительные члены связывают поля с тензором кривизны $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ и нарушают сильный принцип эквивалентности («все локальные эффекты гравитации эквивалентны ускоренным системам координат в плоском пространстве-времени»).

конформная связь

Скалярное поле с конформной связью, описывается действием

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(\phi) - \frac{\xi}{2} R \phi^2 \right]$$

где R - скаляр кривизны Риччи, а ξ - постоянный параметр, выбранный как $\xi = 1/6$.

Новый член описывает «массу», которая зависит от кривизны пространства-времени.

При $\xi = 1/6$ теория обладает дополнительной симметрией, а действие инвариантно относительно конформных преобразований метрики,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}$$

где конформный множитель $\Omega^2(x)$ является произвольной ненулевой функцией координат. Некоторые важные пространства, используемые в космологии, например пространство Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW), являются конформно-плоскими. Пространство-время является конформно-плоским, если в некоторых координатах его метрика имеет вид $g_{\mu\nu} = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu}$, где $\eta_{\mu\nu}$ - плоская метрика Минковского, а $\Omega^2(x) \neq 0$ - некоторая функция.

уравнения движения в искривленном пространстве

уравнения движения в искривленном пространстве получаются варьированием по полю ϕ ,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta})_{,\alpha} + \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} + \xi R \phi \right) \sqrt{-g} = 0$$

Это уравнение можно переписать в явно ковариантном виде с помощью оператора Лапласа-Бельтрами $\Delta_{LB} = \nabla_\alpha \nabla^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta})$:

$$\Delta_{LB} \phi + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} + \xi R \phi = 0$$

Если пространство плоское, $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, $\xi = 0$ и $V = m^2 \phi^2$, то получаем уравнение Клейна-Гордона-Фока

$$(\partial_\alpha \partial^\alpha + m^2) \phi = 0$$

Тетрадный формализм

мотивация

(?)

Редьков вот с ходу его и использует.

вкратце формализм

основная теория

примеры применений

Спиноры в искривленном пространстве

(пока хз, зачем это)

Теория

Обзор применений

Бесконечно малые общесоординатные преобразования

(пока хз, зачем это)

Теория

Обзор применений

Другое определение тензора энергии-импульса

(пока хз, зачем это)

Теория

Обзор применений

6.7.

Конформная инвариантность

(пока хз, зачем это)

Теория

Обзор применений

6.8.

Конформная группа

6.8.1.

(пока хз, зачем это)

Теория

Обзор применений

Масштабная инвариантность

(пока хз, зачем это)

Теория

Обзор применений

Специальные конформные преобразования

(пока хз, зачем это)

Теория

Обзор применений

16.4.10 Random Fields

(у Фельдбругге в статьях такие есть конструкции, так что добавлю их)

Суть (?)

Теория (?)

О применениях (?)

Part V

Electrodynamics of Fields

Обсудим основы классической электродинамики, типичные явления и приложения.

17 Fundamentals of Electrodynamics

Обсудим то, что лежит в основе электродинамики.

17.1 Construction of Classical Electrodynamics

17.1.1 Basic Experiments for Construction of Classical Electrodynamics

(here, there will be a general physics ideas that some simple experiments give us Maxwell equations)

17.1.2 Axiomatic Approach to Electrodynamics (????)

(пока просто знаю, что такие есть, потом проверю по статье, см список литературы)

Аксиомы

Electrodynamics relies on conservation laws and symmetry principles, also known from elementary particle physics. These symmetries are incorporated in the gauge theory and related action principle. Nevertheless, the variational principle is not the unique way to formally derive the electromagnetic theory. In the classical framework, we review the axiomatic approach developed by Friedrich W. Hehl and collaborators [3–6] that use specific physical postulates and mathematical methods, namely, the calculus of differential forms but also integration theory, the Poincaré lemma and the Stokes theorem in the context of tensor analysis in 3-d space. There are two related ways of deriving Maxwell’s theory with these tools: the first is based on integration theory and the second on the exterior calculus of differential forms. These approaches make clearer the geometrical significance of the fundamental electromagnetic quantities and their relations. Both methods rely on four basic physical principles or postulates. In the language of forms, the first three axioms enable to express electrodynamics in a pre-metric way. We will also present the 4-dimensional formalism using forms in which the most general field equations are completely pre-metric, coordinate-free and covariant. The 3-dimensional representation is based on a foliation of the spacetime manifold, requiring a certain choice for a (3+1) splitting in spatial hypersurfaces and an orthogonal time direction. The starting point for a formal derivation of Maxwell’s theory comes in the form of the following four main axioms (postulates):

- Axiom 1: Charge conservation;
- Axiom 2: Magnetic flux conservation;
- Axiom 3: Lorentz force;
- Axiom 4: Linear constitutive (spacetime) relations.

These axioms allow us to obtain the principal aspects of the theory (here the ordering of the axioms of magnetic flux conservation and Lorentz force is interchanged, with respect to the one used by Hehl et al.). Charge conservation alone is the foundation for the inhomogeneous equations, the Gauss and Maxwell-Ampère laws. The homogeneous equations are derivable

from magnetic flux conservation and the Lorentz force. The fourth axiom brings in the metric of spacetime, exposing clearly that there is an intimate connection between electromagnetism and spacetime geometry already at the foundational basis of classical electrodynamics. Two additional axioms which we will not consider in the present work, related to the energy-momentum distribution of the electromagnetic field [7], are required for a macroscopic description of electromagnetism (in matter). These are the following:

- Axiom 5: Specification of the energy-momentum distribution of the electromagnetic field by means of the energy-momentum tensor (From this the energy density and the energy flux density, i.e., the Poynting vector, are obtained);
- Axiom 6: Splitting of the total electric charge and currents in a bound or material component which is conserved and a free or external component.

Do one need axiomatic approach to electrodynamics?

I think, no.

(However, it is a good topic for a discussion here.)

Об обозначениях для этого раздела

Throughout this work, indices with Greek letters represent spacetime indices ranging from 0 to 3, while Latin indices are spatial from 1 to 3. Unless stated otherwise, repeated indices imply Einstein's summation convention and we will be adopting a $(+ -)$ signature for the spacetime metric

Вывод УМ из аксиом (???)

(раскину потом, мб в математические дополнения перенесу многое)

An important link between integration theory and geometrical considerations follows from the fact that integration is required to yield invariant quantities under arbitrary coordinate transformations. In 3 -dimensional space there are three basic geometrical possibilities for integration, i.e., along lines, 2-surfaces and volumes. Taking into consideration the way in which line, surface and volume elements transform under general coordinate transformations, it is possible to find the correct or natural line, surface and volume integrands which transform in a complementary way in order to give (geometrically) invariant results. One concludes that:

- Covectors (1-forms) α_i are natural line integrands;
- Vector densities β^j are natural surface integrands;
- Scalar densities ϱ are natural volume integrands.

These quantities transform under arbitrary changes of coordinates $x^i \rightarrow x^{j'}$ according to

$$\alpha_{k'} = \alpha_i \partial_{k'} x^i, \quad \beta^{j'} = |J|^{-1} \beta^i \partial_i x^{j'}, \quad \varrho' = |J|^{-1} \varrho,$$

where $J = \det [\partial x^{k'} / \partial x^j]$ is the Jacobian of the coordinate transformation and $|J| = \sqrt{|g^{3d}|}$, where g^{3d} is the determinant of the 3 -dimensional metric. Note that if one considers the Jacobian J in the above expressions instead of its modulus, the scalar and vector densities can change sign under reflections. In this case they are sometimes designated by pseudo-tensor densities.

The Poincare lemma states under which conditions certain mathematical objects can be expressed in terms of derivatives of other objects (potentials). Consider the natural integrands $\alpha_i, \beta^j, \varrho$ of line, surface and volume integrals respectively. Let us assume that they are defined in open connected regions of 3 -dimensional space. Then:

1. If α_i is curl free, it can be written as the gradient of a scalar function f ,

$$\epsilon^{ijk} \partial_j \alpha_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k = \partial_k f.$$

2. If β^j is divergence free, it can be written as the curl of the integrand α_i of a line integral,

$$\partial_i \beta^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta^i = \epsilon^{ijk} \partial_j \alpha_k.$$

3. The integrand ϱ of a volume integral (scalar density) can be written as the divergence of an integrand β^i of a surface integral (vector density),

$$\varrho = \partial_i \beta^i.$$

In the expressions above, ϵ^{ijk} corresponds to the completely antisymmetric Levi-Civita (pseudo) tensor. We are now ready to proceed with the physical postulates underlying the electromagnetic theory.

Charge conservation and Maxwell's inhomogeneous equations: With these mathematical methods it follows that charge densities as natural volume integrands are scalar densities ϱ and current densities as natural surface integrands are vector densities j^k and the postulate of charge conservation

$$\partial_t \varrho + \partial_i j^i = 0$$

allows us to define the electric and magnetic excitations as natural surface and line elements respectively, obeying the inhomogeneous Maxwell equations. In fact, using the Poincaré lemma it follows that

$$\varrho = \partial_i D^i$$

where D^i is a vector density, and therefore related to surfaces, thus deriving the Gauss law. On the other hand, substituting the above expression on charge conservation and using the Poincaré lemma we deduce

$$\partial_i (\partial_t D^i + j^i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t D^i + j^i = \epsilon^{ijk} \partial_j H_k$$

where H_k is a line integrand and the Maxwell-Ampère law is thus derived.

It should be clear that we have obtained the inhomogeneous equations and the electric and magnetic excitations from charge conservation and the Poincaré lemma without introducing the concept of force. Notice that since charge conservation is valid in microscopic physics, the same is true for the inhomogeneous equations and for the excitations, contrary to what is commonly stated in the literature.

It should be said that the notations used above for the gradient, divergence and curl were used symbolically. For the $(3+1)$ splitting of general (pseudo) Riemannian spacetime, all spatial derivatives must be replaced by covariant derivatives and a fully 4-dimensional (covariant) approach can be obtained from Eqs. (2.5)(2.7) replacing all derivatives (spatial and temporal) by covariant ones.

Magnetic flux conservation, Lorentz force and Maxwell's homogeneous equations: There is some analogy between vortex lines in hydrodynamics and magnetic flux lines. Helmholtz' works on hydrodynamics enabled to conclude that vortex lines are conserved. Vortex lines that pierce a 2-surface can be integrated over to originate a scalar called circulation. Circulation in a perfect fluid is constant provided the loop enclosing the surface moves along with the fluid. Analogously, there is good experimental evidence that magnetic flux is conserved. In fact, it seems that at the microscopic level magnetic flux occurs in quanta and the corresponding magnetic flux unit is called flux quantum or fluxon. One fluxon carries $\Phi_0 = h/2e \approx 2,7 \times 10^{-15}$ Wb, where e is the elementary charge and h is Planck's constant [17]. Single quantized magnetic flux lines have been observed in the interior of type II superconductors when exposed they can be counted. We therefore assume that magnetic flux, defined as

$$\Phi_{\text{mag}} \equiv \iint B^i da_i$$

is conserved, where the magnetic field B^i is a natural surface integrand and therefore, a vector density. The corresponding continuity equation (analogous to charge conservation)

$$\partial_t \Phi_{\text{mag}} + \oint j_i^\Phi dx^i = 0$$

allows us to define the magnetic flux current density j_i^Φ as a natural line integrand (covector). Applying Stokes' theorem

$$\oint j_i^\Phi dx^i = \iint \epsilon^{ijk} \partial_j j_k^\Phi da_i$$

locally we get,

$$\partial_t B^i + \epsilon^{ijk} \partial_j j_k^\Phi = 0$$

On the other hand, force is integrated through lines to yield work, therefore force is a natural line integrand, i.e., a covector f_i . The Lorentz force postulate

$$f_i = q (E_i + \epsilon_{ijk} u^j B^k),$$

implies that the electric field is also a line integrand, i.e., a covector E_k . Now, since j_k^Φ and the electric field have the same physical dimensions (in S.I. units, flux/(timexlength) correspond to V/m) and geometrical properties, it is plausible to make the identification $j_k^\Phi = E_k$ (in accordance to the Lenz rule) and recover the Faraday law, which expresses magnetic flux conservation

$$\partial_t B^i + \epsilon^{ijk} \partial_j E_k = 0$$

Taking the divergence of this expression (remembering that the divergence of a curl is zero), we obtain

$$\partial_i (\partial_t B^i) = 0,$$

and taking into account the Poincaré lemma, we can define the magnetic charge scalar density $\varrho_{\text{mag}} \equiv \partial_i B^i$, and therefore conclude that

$$\partial_t \varrho_{\text{mag}} = 0$$

which rigorously states that the magnetic charge must be static in accordance to magnetic flux conservation. Now, since ϱ_{mag} is a scalar density, under a general coordinate transformation $\{x, t\} \rightarrow \{x', t'\}$, it transforms according to $\varrho'_{\text{mag}} = |J^{-1}| \varrho_{\text{mag}}$. Therefore, in general, $\partial_{t'} \varrho'_{\text{mag}} \neq 0$ and so we set it to zero, i.e.,

$$\varrho_{\text{mag}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_i B^i = 0,$$

which expresses the Gauss law for magnetism and the absence of magnetic monopoles. In other words, magnetic flux conservation is incompatible with magnetic monopoles.

We conclude that the electric field E and magnetic excitation H are both related to lines while the magnetic field B and electric excitation D are both related to surfaces, i.e., - Electric field: 1-form (covector); line integrand, E_i ; - Magnetic field: vector density; surface integrand, B^j ; - Electric excitation: vector density; surface integrand, D^j ; - Magnetic excitation: 1-form (covector); line inte-

Constitutive relations: Maxwell's equations constitute 8 equations)6 of which are dynamical) with 12 unknown quantities. In order to solve these equations we need to postulate a form for the so-called constitutive relations, $D = D(E, B)$ and $H = H(E, B)$, between the excitations and the electric and magnetic fields. With these relations, Maxwell's equations reveal two independent electromagnetic degrees of freedom. The solutions to these equations and all the

associated electromagnetic phenomena depend crucially on our assumption regarding the nature of the constitutive relations.

In order to relate the electromagnetic fields and their excitations there are two points to consider. One is geometrical and the other is physical. First, the physical consideration has to do with the dimensions involved and it is at this level that the electric permittivity and magnetic permeability tensors are introduced, characterizing the material medium or empty space. These so-called electromagnetic properties of vacuum are usually assumed to be homogeneous and isotropic, represented by diagonal matrices with equal constant diagonal components. This assumption is not necessarily the unique choice and one could argue that the permittivity and permeability tensors reflect electromagnetic properties of spacetime (or of electro-vacuum) and should reflect the spacetime symmetries. We will come back to this point.

In second place, geometrically, the constitutive relations imply that one needs to relate 1-forms (co-vectors) to vector densities (which can be mapped to 2-forms). It follows that the spacetime metric enables to realize the required link. In fact, $g^{ij}\sqrt{|g|}$ transforms like a density and maps a covector (1-form) to a vector density.

With these considerations, we will assume local, linear, homogeneous and isotropic constitutive relations in vacuum without mixing electric and magnetic properties, through the following expressions

$$\begin{aligned} D^j &= \varepsilon_0 \sqrt{|h|} h^{ij} E_i, & E_i &= \frac{1}{\varepsilon_0 \sqrt{|h|}} D^j h_{ij} \\ B^j &= \frac{\mu_0}{\sqrt{|h|}} h^{ij} H_i, & H_i &= \frac{\sqrt{|h|}}{\mu_0} B^j h_{ij} \end{aligned}$$

where h_{ij} is the 3-dimensional metric induced on the 3 dimensional hypersurfaces.

The postulates of charge conservation, magnetic flux conservation, Lorentz force and constitutive relations can be clearly expressed using forms leading to the same fundamental geometrical and physical conclusions. In this formalism, charge density ρ is a 3-form, current density $\mathbf{j}$ a 2-form, electric fields $\mathbf{E}$ are 1-forms (related to lines), magnetic fields $\mathbf{B}$ are 2-forms (related to surfaces), the electric excitation $\mathbf{D}$ is a 2-form and the magnetic excitation $\mathbf{H}$ is a 1-form.

Considering a $(3+1)$ foliation of spacetime, the electromagnetic quantities are defined on the 3-dimensional hypersurfaces. For a given foliation, the set of Maxwell's equations

$$\begin{aligned} d\mathbf{D} &= \rho, & d\mathbf{H} &= \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D} \\ d\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0, & d\mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

are fully general pre-metric, covariant equations, coming directly from charge conservation, magnetic flux conservation and the Lorentz force. As previously mentioned, to solve this set of equations one requires the (spacetime) constitutive relations relating the electric and magnetic fields to the excitations. Assuming linear, homogeneous and isotropic constitutive relations, without mixing electric and magnetic properties, these relations, in the language of forms are achieved via the Hodge star operator in 3-dimensional space which maps k -forms to $(d-k)$ forms (where d is the dimension of the manifold under consideration), and are given by

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \star \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mu_0^{-1} \star \mathbf{B},$$

which introduces the spacetime metric

$$\begin{aligned} D_{jk} &= \varepsilon_0 \sqrt{|h|} \epsilon_{ijk} h^{im} E_m, \\ E_i &= \frac{1}{2\varepsilon_0 \sqrt{|h|}} \epsilon_{ijk} D_{mn} g^{mj} g^{nk}, \end{aligned}$$

$$B_{jk} = \frac{\mu_0}{\sqrt{|h|}} \epsilon_{ijk} h^{im} H_m$$

$$H_i = \frac{\sqrt{|h|}}{2\mu_0} \epsilon_{ijk} B_{mn} g^{mj} g^{nk}$$

With this choice, the electric and magnetic excitations are odd forms which expresses their behaviour under spatial reflections [4]. We will come back to these important relations in the 4-dimensional formalism and in the final section of this work since, as previously mentioned, they reveal a fundamental connection between electromagnetic fields, the electromagnetic properties of vacuum and the metric and conformal (causal) structure of spacetime.

The 3 -dimensional formalism presented here using integration theory and linear forms is completely selfcompatible, revealing in a clear way the geometrical meanings implicit to the electromagnetic quantities and their relations. In particular, we can map the electromagnetic 2 -forms to the associated vector densities according to

$$D^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} D_{bc}, \quad D_{ab} = \epsilon_{abc} D^c$$

$$B^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} B_{bc}, \quad B_{ab} = \epsilon_{abc} B^c$$

With the introduction of the constitutive relations, the axiomatic approach to classical electrodynamics is completed.

4-dimensional formalism using differential forms

Charge conservation and the inhomogeneous equations: In the 4-dimensional formalism, charge conservation can be expressed by saying that the total (net) flux of electric charge through any closed 3 -surface is zero. In order to integrate along a 3 -surface we then require a 3 -form electric charge current density $\mathbf{J}$, which is related to the usual 4-current vector j^λ via the Hodge star product of the corresponding 1-form $\mathbf{j} = j_\alpha \mathbf{dx}^\alpha$

$$\mathbf{J} = \star \mathbf{j}, \quad \mathbf{J} = \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} j^\lambda \sqrt{-g} \mathbf{dx}^\alpha \wedge \mathbf{dx}^\beta \wedge \mathbf{dx}^\gamma, \quad (2.28)$$

therefore

$$j_{123} = j^0 \sqrt{-g} = \rho c \sqrt{-g}, \quad j_{230} = j^1 \sqrt{-g}$$

$$j_{301} = j^2 \sqrt{-g}, \quad j_{012} = j^3 \sqrt{-g}$$

and $j^\lambda \equiv \sqrt{-g} j^\lambda$ is a vector density. We can then write

$$\oint_{3d} \mathbf{J} = \int_{4d} d\mathbf{J} = 0$$

where we have applied the fundamental theorem of the exterior calculus of forms, namely, the Stokes theorem. The second equality is valid for any compact 4dimensional volume enclosed by the 3 -surface. Therefore we arrive at $d\mathbf{J} = 0$, which expresses charge conservation locally. Now, since $\mathbf{J}$ is a 3 -form and $dd = 0$, it can be expressed by the exterior differential of a 2 -form

$$d\mathbf{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{G} = \mathbf{J}.$$

Therefore, in the language of forms, it is clear that charge conservation is at the foundation of Maxwell's inhomogeneous equations which in this formalism are fully general, coordinate-free, pre-metric and covariant equations. In component form we have

$$\nabla_{[\alpha} G_{\beta\gamma]} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} J^\lambda,$$

where ∇_α represents the covariant derivation defined on the spacetime manifold endowed with affine and metric structure. Therefore, with the following definitions

$$G_{0i} \equiv -H_i, \quad G_{ij} \equiv \epsilon_{ijk} D^k c = D_{ij} c,$$

the most general expressions for the Gauss and MaxwellAmpère laws in component form are

$$\nabla_i D^i = \varrho, \quad \nabla_0 D^k c + \epsilon^{ijk} \nabla_i H_j = j^k,$$

where $\varrho \equiv \sqrt{-g}\rho$ and ρ is the charge density. Indeed, assuming the validity of a local foliation of spacetime, the electromagnetic excitation 2-form can be written in terms of its spatial and temporal parts establishing a link with the 3-dimensional formalism previously discussed

$$\mathbf{G} = \mathbf{H} \wedge dx^0 + \mathbf{D}c$$

Magnetic flux conservation and the homogeneous equations: Magnetic flux conservation can be expressed by

$$\oint_{\text{surface}} \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \int_{\text{volume}} d\mathbf{F} = 0$$

where $\mathbf{F}$ is the Faraday 2-form, obeying the homogeneous equations

$$d\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = d\mathbf{A}$$

and $\mathbf{A}$ is the electromagnetic potential 1-form. The magnetic flux conservation is at the foundation of the homogeneous equations which also naturally follow as a Bianchi identity, resulting from the derivation of the potential twice. Using the spacetime foliation we can write

$$\mathbf{F} = dx^0 \wedge \mathbf{E} \frac{1}{c} - \mathbf{B}.$$

Homogeneous and isotropic constitutive relations: In this formalism the linear, local, homogeneous and isotropic constitutive relations can be expressed through the Hodge star operator

$$\mathbf{G} = \mu_0^{-1} \star \mathbf{F}.$$

With this assumption or postulate the inhomogeneous equations can then be written by

$$d(\star \mathbf{F}) = \mu_0 \mathbf{J}$$

or in terms of the potential by

$$d \star d\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

In component form the above constitutive relations are

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2\mu_0} \sqrt{-g} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\gamma} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} F_{\alpha\beta}.$$

The factor $\sqrt{-g} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\gamma} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma}$ is conformally invariant. Therefore, one arrives at

$$\begin{aligned} D^j &= \sqrt{-g} \left[\varepsilon_0 E_k (g^{0j} g^{k0} - g^{kj} g^{00}) - c^{-1} \mu_0^{-1} \frac{1}{2} B_{mn} (g^{mj} g^{n0} - g^{m0} g^{nj}) \right] \\ H_k &= \sqrt{-g} \mu_0^{-1} \left[\frac{1}{2} B_{ij} \epsilon_{krs} g^{ir} g^{js} - c^{-1} E_j \epsilon_{krs} g^{0r} g^{js} \right] \end{aligned}$$

It is clear that assuming linear constitutive relations of the form (2.38), we are not excluding a mixing between electric and magnetic quantities, in contrast to the expressions in Eq. (2.21).

In fact, according to the expressions above, this mixing will occur whenever the metric has off-diagonal elements involving the time-space components. Notice that, in general $-g = g_{00}h$ and for the $(3+1)$ splitting of space+time we recover the constitutive relations in Eqs. (2.17) and (2.18). For a diagonal metric, we have

$$D^j = -\sqrt{-g}\varepsilon_0 E_j g^{jj} g^{00}$$

$$H_k = \sqrt{-g}\mu_0^{-1} B^k g_{kk}$$

where no contraction (summation rule) is assumed on the above expressions and we have used the fact that $\epsilon_{krs}\epsilon^{rsf} = 2\delta_k^f$

In Minkowski spacetime we get the familiar relations in vacuum, which assume homogeneity and isotropy. Action principle: Maxwell's equations for the fields E and B can be derived from the following 4-form

$$\mathbf{S} = \int \mathbf{F} \wedge \mathbf{G} + \int \mathbf{J} \wedge \mathbf{A}$$

assuming a specific set of constitutive relations between $\mathbf{G} = (\mathbf{H}, \mathbf{D})$ and $\mathbf{F} = (\mathbf{E}, \mathbf{B})$. For the homogeneous and isotropic linear constitutive relations in Eq. (2.38) we get the usual free field action of electromagnetism,

$$\mathbf{S}_{free} = \frac{1}{\mu_0} \int \mathbf{F} \wedge \star \mathbf{F}$$

normally presented in relation to the gauge approach. It is clear that the constitutive relations (which imply the metric structure of spacetime) and the form of these relations are implicit in the usual (gauge approach) inhomogeneous equations.

Обсуждение аксиом электродинамики

(почему они именно такие? и все общие соображения тут приведу.)

О том, почему E не вектор? (?!)

(тут доказательство и обсуждение)

О том, почему B не вектор? (!!!!)

(тут четкое доказательство и обсуждение)

17.1.3 Units in Electrodynamics

(тут много вопросов, I'll write basic statements, подробнее - в записи по ЭД.)

17.1.4 Consequences of the constant speed of light on Electrodynamics

(this is the deep understanding of ED)

17.1.5 Definition of Parameters of Electrodynamics

(тут вторая часть статьи, очень скоро добавлю её!)

17.1.6 Action and Lagrangian of the electromagnetic field and particles in it

(тут про то, почему оно такое и то сё)

Действие и Лагранжиан частицы в электромагнитном поле

(?? пока просто окей, такой член и все, не понял, почему??)

Для построения электродинамики, в действие добавляется член, который отвечает за взаимодействие материи с полем, вида:

$$S_{int} = -\frac{e}{c} \int_a^b A_i dx^i$$

(????? нет пока док-ва.)

Локальное взаимодействие релятивистской частицы с полем A^μ выражается членом в действии:

$$S_{int} = -\frac{e}{c} \int d\tau u^\mu A_\mu(x)$$

(????? ниже объяснение Киселева, которое я не понял)

Действительно, согласно принципу относительности действие взаимодействия частицы с полем должно быть скаляром в пространстве Минковского и функция Лагранжа - это скаляр, инвариантный относительно трансляций, так что скалярное произведение поля на координаты траектории исключается, и в простейшем случае остается только скалярное произведение векторного поля на 4-скорость частицы.

Здесь коэффициент e/c связан с определением единиц измерения поля (???).

Три пространственные компоненты 4-вектора A^i образуют трехмерный вектор $\mathbf{A}$, называемый векторным потенциалом поля. Временную же компоненту называют скалярным потенциалом; обозначим ее как $A^0 = \varphi$. Таким образом,

$$A^i = (\varphi, \mathbf{A})$$

Поэтому интеграл действия можно написать в виде

$$S = \int_a^b \left(-mc ds + \frac{e}{c} \mathbf{A} d\mathbf{r} - e\varphi dt \right)$$

или, вводя скорость частицы $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ и переходя к интегрированию по времени,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi \right) dt$$

Подынтегральное выражение есть функция Лагранжа для заряда в электромагнитном поле:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi$$

Это выражение отличается от функции Лагранжа свободной частицы членами $\frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi$, которые описывают взаимодействие заряда с полем.

Для малых скоростей, т.е. в классической механике, релятивистская функция Лагранжа переходит в

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi.$$

Импульс частицы в ЭМ поле

Обобщенный импульс $\mathbf{P}$ есть

$$\mathbf{P} = \partial L / \partial \mathbf{v} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

Здесь мы обозначили посредством $\mathbf{p}$ обычный импульс частицы, который мы и будем называть просто импульсом.

(тут добавления укажу про это, объясню, почему именно так. можно еще подумать про смысл результата.)

Об удобстве множителя $(1/c)$ в члене лагранжиана (??)

(потом пропишу, какое тут удобство, пока не совсем вижу)

Перед лагранжианом знак минус, который введен для максимума действия.

(подробно про это потом напишу, типичная особенность лагранжиана. с формулой потом напишу, что конкретно он дает.)

А вот в разных фантастических гостах в КТП это не так (укажу строчку потом про них)

Электродинамика в гамильтоновом формализме

Из функции Лагранжа по $\mathcal{H} = \mathbf{v} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L$ получаем функцию Гамильтона: $\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi$, и далее нужно выразить её через обобщенный импульс $\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$.
(?? как догадаться о том, что ниже??)

Соотношение между $\mathcal{H} - e\varphi$ и $\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$ такое же, как между $\mathcal{H}$ и $\mathbf{p}$ в отсутствие поля, т. е.

$$\left(\frac{\mathcal{H} - e\varphi}{c} \right)^2 = m^2 c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2$$

отсюда:

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\varphi.$$

(напишу выше четче, уже проделывал.)

Для малых скоростей, $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$, так что по определению

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в электромагнитном поле

Уравнение Гамильтона-Якоби получается заменой в функции Гамильтона обобщенного импульса $\mathbf{P}$ на $\partial S / \partial \mathbf{r}$, а самого $\mathcal{H}$ - на $-\partial S / \partial t$. Таким образом, получим из:

$$\left(\text{grad } S - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi \right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

(?? не использовал и не зашарил полностью еще.)

Другой член взаимодействия может быть?

(хз, пока не встречал.)

Локальное взаимодействие с спинорным полем (???)

задумался, пока хз, как это сделать.

О других возможных действиях электродинамики или обобщений электродинамики (??)

(укажу, что там есть разные модификации электродинамики, и нпр теория Борна-Инфельда - вообще жуть.)

17.1.7 More general linear constitutive relations**Theory**

The Maxwell equations together with the spacetime relations, constitute the foundations of classical electrodynamics. These laws, in the classical domain, are assumed to be of universal validity. Only if vacuum polarization effects of quantum electrodynamics are taken into account or hypothetical non-local terms should emerge from huge accelerations, axiom 4 can pick up corrections yielding a nonlinear law (Heisenberg-Euler electrodynamics [18]) or a nonlocal law (Volterra-Mashhoon electrodynamics [19]), respectively.

In this sense, the Maxwell equations are more general than the constitutive spacetime relations, however, the latter are not completely untouchable. We may consider them as constitutive relations for spacetime itself, as discussed below. As previously mentioned, the constitutive relations in vacuum not only introduce the spacetime metric but also the vacuum electromagnetic properties via the electric permittivity and magnetic permeability tensors. The assumption of homogeneous and isotropic relations is based on the assumption that these vacuum electromagnetic properties are homogeneous and isotropic. Can we drop these assumptions? It is clear that if only homogeneity is abandoned, then the velocity of light in vacuum can in principle vary with the spacetime point without losing local Lorentz invariance. Even more generally, the principle of (local) conformal invariance, which guarantees the invariance of the casual structure of spacetime (locally), does not require homogeneity or isotropy for the speed of light in vacuum. As previously said, one argument in favour of letting go of the assumption of homogeneity and isotropy for the electromagnetic properties of vacuum is that these quantities could characterize the "electro-vacuum" which can be intimately related to spacetime geometry and therefore to its symmetry properties.

In this sense, it seems more natural to assume that the symmetry properties of the tensors ε_{ij} and μ_{km} in vacuum follow the spacetime isometries. This reasoning could come from a self-compatible interpretation of the coupled Einstein-Maxwell equations. Electromagnetic fields affect spacetime geometry and this geometry affects the propagation of the fields. In fact, in the spirit of general relativity, the metric is not a priori given, it depends on the local energy-momentum content of physical fields. Therefore, spacetime symmetries are also not a priori given, they must be considered locally for each physical scenario. Why should the properties of vacuum, such as the electric permittivity and magnetic permeability be a priori given, in particular, why should these be homogeneous and isotropic for axially or spherically symmetric spacetime? For example, in spherical symmetric cases like the Schwarzschild solution, according to the interpretation here proposed, the speed of light in vacuum could have a dependence with the radial coordinate and this result could be tested experimentally.

A very simple expression for the linear constitutive relations (in vacuum) assuming a local $(3+1)$ foliation can be given by

$$D^i = \sqrt{|h|} (\varepsilon_0)^{ij} E_j, \quad H_i = \sqrt{|h|} (\mu_0^{-1})_{ij} B^j$$

With these expressions we are assuming locality, linearity and a non-mixing between electric and magnetic components but without forcing the assumptions of homogeneity and isotropy. These relations will affect the inhomogeneous equations (2.33). In particular, for physical conditions where the spacetime metric has spherical symmetry, according to the interpretation here suggested, the permittivity and permeability tensors follow the spacetime isometries and therefore become diagonal with equal components (isotropy) but with a radial dependence on position (inhomogeneity and spherical symmetry). i.e., $(\varepsilon_0)^j_k = \varepsilon_0(r) \delta^j_k$, $(\mu_0)^j_k = \mu_0(r) \delta^j_k$. When metric is not spherical, i.e., $(\varepsilon_0)^j_k = \varepsilon_0(r) \delta^j_k$, $(\mu_0)^j_k = \mu_0(r) \delta^j_k$. When $(\varepsilon_0)^j_k = \varepsilon_0 \delta^j_k$ and $(\mu_0)^j_k = \mu_0 \delta^j_k$ we recover the homogeneous and isotropic relations.

Following the approach of Hehl and Obukhov [6, 17], the most general expression for linear (local) relations in the 4-dimensional formalism is the following

$$G_{\mu\nu} = \chi_{\mu\nu}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \chi_{\mu\nu}^{[\alpha\beta]} F_{\alpha\beta},$$

where the tensor $\chi_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ is antisymmetric in the lower indices and has, in general, 36 independent components. This tensor can be decomposed into its irreducible components where the principal part is related to the relations in Eq. (2.41). The constitutive equations in matter are more complicated (see [17, 20, 21]) and it would be appropriate to derive them, using an averaging procedure, from a microscopic model of matter. For instance, this lies within the subject of solid state or plasma relations for a general linear magnetoelectric medium [5]

$$\begin{aligned} D^i &= (\varepsilon^{ij} - \epsilon^{ijk} n_k) E_j + (\gamma_j^i + \tilde{s}_j^i) B^j + (\alpha - s) \delta_j^i B^j \\ H_i &= (\mu_{ij}^{-1} - \epsilon_{ijk} m^k) B^j + (-\gamma_i^j + \tilde{s}_i^j) E_j + (\alpha + s) \delta_i^j E_j \end{aligned}$$

where the matrices ε_{ij} and μ_{ij}^{-1} are symmetric and have 6 independent components each. They correspond to the permittivity and impermeability tensors (reciprocal permeability tensor). The magnetoelectric cross-term γ_{ij} , which is trace-free ($\gamma_j^j = 0$), has 8 independent components. It is related to the Fresnel-Fizeau effects [22]. The 4-dimensional pseudo-scalar α , called axion, corresponds to the perfect electromagnetic conductor of Lindell and Sihvola [23], a Tellegen type structure [24]. Until now, we considered a total of $6 + 6 + 8 + 1 = 21$ independent components. We can have 15 more components related to dissipation (which cannot be derived from a Lagrangian). The $3 + 3$ components of n_k and m_k (electric and magnetic Faraday effects), 8 components from the matrix $\tilde{s}_{ij}$ (optical activity), which is traceless and 1 component from the 3-dimensional scalar s (spatially isotropic optical activity).

We end up with a general linear medium with $20 + 1 + 15 = 36$ independent components. Notice that we didn't include the $\sqrt{-g}$ factor in the permittivity and permeability terms which is one in Minkowski spacetime, but it should be present in the general Riemannian case. These constitutive relations can also be applied to vacuum with linear electromagnetic properties. This topic requires further investigation since these relations might be viewed as relations for spacetime itself which would imply a deep connection between physical properties of (classical) vacuum and spacetime (suggesting or reinforcing the idea of spacetime physicalism, i.e., spacetime with well defined physical ontology).

From a variational point of view the equations for the permittivity and permeability tensors in Eq. (2.48) or for the tensor $\chi_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ in Eq. (2.49), could in principle be obtained from an appropriate action corresponding to a tensor-vector electromagnetic theory, as long as dissipation effects are disregarded.

(потом будет много параграфов с введение в то, что в статьях, на которые тут идут отсылки.)

17.1.8 Intuitive understanding of the electromagnetic field and illustrations (!?)

(??? тут важные вопросы, типа как зная ур Максвелла представить линии эл и м поля? как представить, куда они будут сдвигаться при изменении геометрий??? все про воображение эм поля. пока не тот уровень, раздел только для профессионалов!)

17.2 Maxwell's Equation: General Properties

17.2.1 Derivation of the equations of electrodynamics

Соберем все известные мне выводы уравнений электродинамики.

Вывод уравнений электродинамики, рассматривая её как калибровочную $U(1)$ группу

(потом пропишу тут)

Вывод уравнений электродинамики из вариации действия

(потом пропишу тут)

Вывод уравнений динамики частиц в ЭМ поле

Уравнения движения частиц в ЭМ поле имеют вид

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu$$

и получаются из уравнений Эйлера-Лагранжа для электромагнитного поля.

Действительно, посчитаем

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -\frac{e}{c} u^\nu \partial_\mu \mathcal{A}_\nu$$

и также так как $\frac{\partial L}{\partial u^\mu} = -m u_\mu - \frac{e}{c} \mathcal{A}_\mu(x(\tau))$, то

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = -m \frac{du_\mu}{d\tau} - \frac{e}{c} \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} = -\frac{dp_\mu}{d\tau} - \frac{e}{c} u^\nu \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$$

Поэтому уравнения движения Эйлера-Лагранжа имеют вид:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) u^\nu$$

(??) В трехмерную форму можно перейти, записав в компонентах, $d\tau = dt/\gamma$, $u^\mu = \gamma(c, \mathbf{v})$:

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{e}{c} F_{0\alpha} v^\alpha \Rightarrow \frac{dE}{dt} = e\mathcal{E} \cdot \mathbf{v}$$

т.е. работу силы Лоренца.

Аналогично находим действие силы Лоренца

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{e}{c} \{F_{\alpha 0} c + F_{\alpha\beta} v^\beta\} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{H},$$

где мы учли смену знака при поднимании пространственного индекса у вектора импульса и антисимметричность тензора напряженности поля.

17.2.2 Properties of Maxwell's equations

Тензор электромагнитного поля это риманова кривизна

Simply, field strength tensor of a non-Abelian Yang-Mills reads as follows:

$$F_{\mu\nu} \equiv [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]$$

where $\mathcal{D}_\mu$ is the covariant derivative with respect to the potential one-form, $A_\mu \equiv A_\mu^i T_i$, and T 's are the generators of the Lie group in subject, while in gravity the Riemann curvature tensor reads as:

$$R_{\mu\nu} \equiv [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$$

where ∇_μ is the covariant derivative with respect to the connection, $\omega_\mu \equiv \omega_\mu^{ab} \Lambda_a^b$, and Λ is the generator of the group associated with the principle bundle (the group is the general linear group, $GL(\mathbb{R}^m)$ in the affine case). By the way here, $R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu}{}^{ab} \Lambda_a^b$ is the Riemann tensor (not to be confused with Ricci tensor). As a matter of fact, torsion tensor is also the same thing but for the soldering form:

$$T_{\mu\nu} \equiv [D_\mu, D_\nu]$$

where D_μ is the covariant derivative with respect to the tetrad (vielbein, soldering) field, $\theta_\mu \equiv \theta_\mu^a P_a$, and P is the generator of translation (i.e. four-momentum). As you can see, they are just the same thing, i.e. the commutator of the covariant derivative, except the fact that they are living with different group. But the same mathematical object.

О задаче Коши

(достаточно ли начальных данных? вот говорят, что нет, так что калибруем.)

17.2.3 Solution of Maxwell's equations in general form

(тут всё решение через пропагаторы, которое самое такое базовое)

Суть

(тут основные формулы приведу. этот почти параграф в 1й части тоже. пока не до этого, помню формулы.)

Is it really needed?

(most likely no, but it is a good discussion)

Сравнение пропагаторов

(то, что Киселев рассказывал, потом скопирую, пока не до этого)

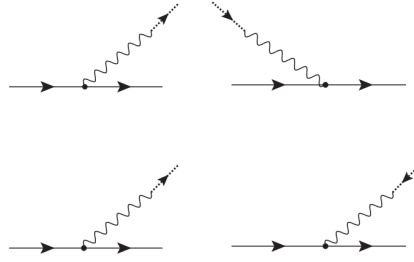


Figure 3: Распространение положительно- и отрицательно-частотных волн (исходящая и входящая волнистые линии) от источника (сплошная линия) вперед и обратно по времени (стрелки на линии источника) при граничных условиях Фейнмана (сверху) и при запаздывающих граничных условиях (снизу).

О случаях применения решения через пропагаторы

(у Киселева спрашивал, говорит, в КЭД нужно. укажу конкретно, как это можно использовать.)

Решение через переход к уравнению эйконала (?)

(четко потом пропишу, как это сделать. мб это и просто.)

17.2.4 Conservation laws in electrodynamics

Обсудим подробно законы сохранения в электродинамике.

17.2.5 Maxwell's equations in differential forms

(this should be written really well!!!)

Вывод уравнений

(знаком с ним, потом приведу)

Приравниванием дифференциала этой формы и приравняем его к нулю, находятся уравнения Максвелла, действительно:

$$\begin{aligned}
 dF = & \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dt + \frac{\partial E_x}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dt + \frac{\partial E_y}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dt + \frac{\partial E_y}{\partial z} dz \wedge dy \wedge dt + \\
 & + \frac{\partial E_z}{\partial x} dx \wedge dz \wedge dt + \frac{\partial E_z}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dt + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial H_x}{\partial t} dt \wedge dy \wedge dz + \\
 & + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial H_y}{\partial t} dt \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial H_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial H_z}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy \equiv 0.
 \end{aligned}$$

Тут коэффициенты при $dx \wedge dy \wedge dz$ дают одно уравнение Максвелла, утверждающее отсутствие магнитных зарядов:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = \text{div } \mathcal{H} = 0$$

Коэффициенты же при $dx \wedge dy \wedge dt$ дадут закон Фарадея:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

О случаях применений

(как Киселев говорил, используется этот вид в различных обобщениях электродинамики.)

Переход в координатный вид

(это четко пропишу, потому что это хочется больше всего, перейти в координаты и увидеть нормально, как выглядят уравнения.)

17.2.6 Maxwell's equations in a covariant form

Обсудим подробно уравнения Максвелла в ковариантном виде.

Первая пара

Первая пара уравнений Максвелла имеет ковариантный вид в пространстве Минковского

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

(другие формы тут приведу его)

Действительно, найдем 4-дивергенцию дуального тензора напряженности

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\mu'\nu'} \partial_\mu (\partial_{\mu'} \mathcal{A}_{\nu'} - \partial_{\nu'} \mathcal{A}_{\mu'}) \equiv 0$$

как свертка антисимметричного тензора (Леви-Чивита) с симметричным, к примеру, $\partial_\mu \partial_{\mu'}$. По компонентам: при $\nu \mapsto 0$

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha 0} = \nabla \cdot \mathcal{H} = 0, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathcal{H} = 0$$

при $\nu \mapsto \alpha$

$$\partial_0 \tilde{F}^{0\alpha} + \partial_\beta \tilde{F}^{\beta\alpha} = \frac{1}{c} \partial_t (-\mathcal{H}^\alpha) + \epsilon_{\beta\alpha\gamma} \nabla_\beta \mathcal{E}^\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

Значит, первая пара уравнений Максвелла имеет ковариантный вид в пространстве Минковского

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

О разных видах первой пары

(виды есть разные, так и не зашарил еще, как они соотносятся друг с другом)

Вторая пара

Вторая пара уравнения Максвелла имеет ковариантный вид

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Действительно, аналогично, 4-дивергенция тензора напряженности - это некоторый 4-вектор

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = K^\nu$$

Найдем компоненты K^ν .

(???)

Так при $\nu \mapsto 0$, помня, какой имеют вид компоненты дуального тензора, имеем

$$\partial_\alpha F^{\alpha 0} = \operatorname{div} \mathcal{E},$$

а по уравнениям Максвелла в трехмерной форме это выражение равно $4\pi\rho$, поэтому $K^0 = 4\pi\rho$.

Таким же образом,

$$\partial_\mu F^{\mu\alpha} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}^\alpha}{\partial t} + (\operatorname{rot} \mathcal{H})^\alpha,$$

так что из (2.19) выводим, что $\mathbf{K} = 4\pi\mathbf{j}/c$. Значит,

$$K^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

где 4-вектор плотности тока

$$j^\mu = (\rho c, \rho \mathbf{v})$$

В итоге, вторая пара уравнения Максвелла принимает ковариантный вид

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

О токах магнитных зарядов

Заметим, что 4-дивергенция дуального тензора напряженностей могла бы по аналогии определять плотность тока магнитных зарядов - псевдовектор $\tilde{j}^\nu$, который в электродинамике Максвелла равен нулю (4.12).

(потом разовью эту мысль)

Вывод закона сохранения заряда из уравнения Максвелла

Кроме того, вычисление дивергенции левой части $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$ дает свертку симметричного тензора с антисимметричным тензором напряженности, т.е. тождественный нуль

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv 0$$

откуда приходим к закону сохранения заряда

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

О преимуществе ковариантного вида над трехмерным

Раскроем это преимущество.

(??? пока хз)

17.2.7 Features of real applications of Maxwell's equations

(буду применять - пропишу, чисто дело опыта, пока не тот уровень)

Проверка, возможно ли данное электромагнитное поле

Допустим, что кто-то сказал, что существует некоторая нетривиальная конфигурация поля. Как с помощью уравнений Максвелла можно проверить, возможна она или нет?

(пока такое не знаю, как сделать, потом пропишу.)

17.2.8 Maxwell's equations in matter

(из киселева, потом буду разбирать.)

Приведем уравнения электродинамики в электрически нейтральном веществе.

Будем считать вещество изотропную и однородную субстанцию, т.е. как среду, в которой нет выделенных направлений или точек. Такое усреднение предполагает, что измерение полей производится в областях пространства, где накладываются микроскопические поля статистически большого числа микроэлементов, а не с точностью до элементов вещества (атомов, молекул).

Можно считать, что ориентация этих элементов и их микрополей хаотически усредняется, оставляя в суперпозиции только изотропные и однородные характеристики. Однако при введении в систему внешних зарядов, токов или полей, такая изотропность нарушается за счет возникновения наведенных токов и ориентации микроэлементов вещества. Измеряемые суммарные электрические и магнитные поля, сглаженные усреднением по микроструктуре вещества, обозначают $\langle \mathcal{E} \rangle = \mathcal{E}$ и $\langle \mathcal{H} \rangle = \mathcal{B}$ и называют соответственно электрическим полем и магнитной индукцией.

Электрическая поляризация

При наложении внешнего электрического поля микроэлементы вещества меняют свою ориентацию, так что, вообще говоря, возникает наведенный электрический дипольный момент, значение которого не зависит от выбора начала отсчета в нейтральном веществе,

$$\mathbf{d} = \int d^3r \rho_{\text{med.}} \mathbf{r} = \int d^3r \mathcal{P}$$

где мы ввели плотность микрозарядов в среде $\rho_{\text{med.}}$ и плотность электрических диполей $\mathcal{P}$. Тогда, поскольку $\partial_\alpha r^\beta = \delta_\alpha^\beta$,

$$\int d^3r \mathcal{P} = \int d^3r (\mathcal{P} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \int d^3r \nabla_\alpha (\mathcal{P}^\alpha \mathbf{r}) - \int d^3r \mathbf{r} (\nabla \cdot \mathcal{P})$$

откуда с учетом теоремы Гаусса

$$\int d^3r \mathcal{P} = \int_{\partial V} ds_\alpha (\mathcal{P}^\alpha \mathbf{r}) - \int d^3r \mathbf{r} \operatorname{div} \mathcal{P}$$

Поскольку мы можем вынести границу интегрирования в область, где нет никакого вещества, а значит, и плотность электрических диполей обращается в нуль, а кроме того, и область пространства, заполненная веществом может быть произвольна, заключаем, что интеграл по границе дает нулевой вклад, а сравнение полученного выражения для дипольного момента с исходным позволяет нам найти связь плотности зарядов в среде с электрической поляризацией

$$\rho_{\text{med.}} = -\operatorname{div} \mathcal{P}$$

Тогда уравнение для усредненного электрического поля при наличии плотности внешних зарядов ρ

$$\operatorname{div} \langle \mathcal{E} \rangle = 4\pi (\rho + \rho_{\text{med.}})$$

при подстановке (Д.26) сведется к виду

$$\operatorname{div} \{ \mathcal{E} + 4\pi \mathcal{P} \} = 4\pi \rho, \quad \operatorname{div} \mathcal{D} = 4\pi \rho,$$

где $\mathcal{D} = \mathcal{E} + 4\pi \mathcal{P}$ - вектор электрической индукции. Отсюда в точности с рассуждениями о введении тока смещения в случае уравнений в вакууме теперь в среде заключаем, что ток смещения принимает вид

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{dis.}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}$$

где в явном виде мы показали вклад за счет электрической поляризации среды.

Намагничивание

Наведенные токи в среде $\mathbf{j}_{\text{med.}} = \rho_{\text{med.}} \mathbf{v}$ создают магнитный момент ⁸

$$\boldsymbol{\mu} = \int d^3r \frac{1}{2c} \mathbf{r} \times \mathbf{j}_{\text{med.}} = \int d^3r \mathcal{M}$$

где намагниченность $\mathcal{M}$ имеет смысл плотности магнитных диполей в среде с наведенными токами.

далее,

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{M}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\mathcal{M} \cdot \nabla) \mathbf{r} \} = -\frac{1}{2} (\mathcal{M} \times \nabla) \times \mathbf{r}$$

Теперь при интегрировании так же, как и в случае электрической поляризации, дифференцирование можно перенести с радиус-вектора на намагниченность, поскольку поверхностный интеграл, возникающий в теореме Гаусса, обратится в нуль за счет нулевой намагниченности вне среды. Тогда с учетом смены знака при переносе дифференцирования и при перестановке порядка векторов в векторном произведении, найдем

$$\int d^3r \mathcal{M} = \int d^3r \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \text{rot } \mathcal{M}$$

так что сравнение с определением магнитного дипольного момента дает

$$\frac{1}{c} \mathbf{j}_{\text{med.}} = \text{rot } \mathcal{M}$$

В итоге, уравнение Максвелла для усредненных полей с внешними токами $\mathbf{j}$ с учетом тока смещения

$$\text{rot} \langle \mathcal{H} \rangle = \frac{4\pi}{c} \{ \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{med.}} \} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$$

примет вид

$$\text{rot} \{ \mathcal{B} - 4\pi \mathcal{M} \} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$$

где $\mathcal{H} = \mathcal{B} - 4\pi \mathcal{M}$ - вектор магнитного поля.

Вид уравнений Максвелла в веществе

Уравнения Максвелла без источников переписываются в терминах усредненных полей элементарно, так что, в итоге, находим

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathcal{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, & \text{rot } \mathcal{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \\ \text{div } \mathcal{B} &= 0, & \text{div } \mathcal{D} &= 4\pi \rho \end{aligned}$$

Первая пара уравнений по-прежнему может быть получена как тождество для дуального тензора напряженностей

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathcal{A}_\beta - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha,$$

для векторного поля потенциалов $\mathcal{A}_\mu$ со стандартной связью для усредненных полей

$$\mathcal{E}^\alpha = F_{0\alpha}, \quad F_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{B}^\gamma$$

Вторая пара может быть записана в виде

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \{j^\nu + j_{\text{med.}}^\nu + \tilde{j}_{\text{dis.}}^\nu\}$$

где для микротоков $j_{\text{med.}}^0 = -c \operatorname{div} \mathcal{P}$, $j_{\text{med.}} = c \operatorname{rot} \mathcal{M}$, а 4-ток смещения за счет поляризации в среде

$$\tilde{j}_{\text{dis.}}^0 = 0, \quad \tilde{\mathbf{j}}_{\text{dis.}} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}$$

Действие электродинамики в веществе

Значит, вариацию действия, из которого получены эти уравнения, так же как и в вакууме можно записать в виде

$$\delta S = -\frac{1}{8\pi c} \int d^4x F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \int d^4x \{j^\nu + j_{\text{med.}}^\nu + \tilde{j}_{\text{dis.}}^\nu\} \delta \mathcal{A}_\nu.$$

Здесь важно отметить, что поляризация и намагниченность среды сами зависят от внешних полей, так что они не являются независимыми переменными вариации, как это имеет место в случае внешних токов, и мы пишем именно вариацию, для которой уже само выражение фиксировано из известных нам уравнений движения. Заметим, что несмотря на явно ковариантный вид записи действия, оно таковым не является, поскольку 4-вектор тока смещения за счет поляризации среды имеет вид (Д.31) только в выделенной системе отсчета, а именно,

в системе покоя среды. В евклидовой форме записи

$$\delta S = - \int \frac{d^4x}{4\pi c} \{\mathcal{B} \cdot \delta \mathcal{B} - \mathcal{E} \cdot \delta \mathcal{E}\} - \int \frac{d^4x}{c} \left\{ -\delta \mathcal{A}_0 \operatorname{div} \mathcal{P} - \delta \mathcal{A} \left(\operatorname{rot} \mathcal{M} + \frac{\partial}{c \partial t} \mathcal{P} \right) \right\} - \int \frac{d^4x}{c^2} j^\nu \delta \mathcal{A}_\nu$$

Поскольку при вариации действия граничные условия считаются фиксированными, можно провести интегрирование по частям в членах с поляризацией и намагничиванием, так что

$$\delta S = \frac{1}{4\pi c} \int d^4x \{\mathcal{E} \cdot \delta \mathcal{E} - \mathcal{B} \cdot \delta \mathcal{B}\} - \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ \mathcal{P} \delta \left(\operatorname{grad} \mathcal{A}_0 + \frac{\partial}{c \partial t} \mathcal{A} \right) - \mathcal{M} \delta \operatorname{rot} \mathcal{A} \right\} - \frac{1}{c^2} \int d^4x j^\nu \delta \mathcal{A}_\nu$$

Так как $\operatorname{rot} \mathcal{A} = \mathcal{B}$, а $\mathcal{E} = -\nabla \mathcal{A}_0 - \frac{1}{c} \partial \mathcal{A} / \partial t$, находим

$$\delta S = \frac{1}{4\pi c} \int d^4x \{\mathcal{D} \cdot \delta \mathcal{E} - \mathcal{H} \cdot \delta \mathcal{B}\} - \frac{1}{c^2} \int d^4x j^\nu \delta \mathcal{A}_\nu$$

Интегрирование по полю можно легко провести, учитывая однородность и изотропность среды без поля, откуда следует, что поляризация и намагниченность просто пропорциональны векторам электрического поля и магнитной индукции, так что

$$\delta(\mathcal{D} \cdot \mathcal{E}) = 2\mathcal{D} \cdot \delta \mathcal{E}, \quad \delta(\mathcal{H} \cdot \mathcal{B}) = 2\mathcal{H} \cdot \delta \mathcal{B}$$

и окончательно

$$S = \frac{1}{8\pi c} \int d^4x \{\mathcal{D} \cdot \mathcal{E} - \mathcal{H} \cdot \mathcal{B}\} - \frac{1}{c^2} \int d^4x j^\nu \mathcal{A}_\nu$$

Сила Лоренца определяется вкладом последнего члена в этом действии, т.е. 4-потенциалом $\mathcal{A}_\nu$, а значит,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{B}, \quad \frac{dE}{dt} = e(\mathcal{E} \cdot \mathbf{v})$$

В представлении волнового вектора

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \mathcal{E} + 4\pi\mathcal{P} = \epsilon\mathcal{E}, & \mathcal{P} &= \alpha\mathcal{E} \\ \mathcal{B} &= \mathcal{H} + 4\pi\mathcal{M} = \mu\mathcal{H}, & \mathcal{M} &= \beta\mathcal{H},\end{aligned}$$

где α - коэффициент электрической поляризации, β - коэффициент магнитной поляризации, а ϵ и μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Магнитная проницаемость μ для однородных изотропных веществ мало отличается от единицы, поскольку орбитальные и спиновые магнитные моменты (фактор Ланде) микрочастиц в веществе подавлены малым отношением скорости движения микрочастиц к скорости света (нерелятивистское движение), а эффекты наведенной поляризации и намагниченности обычно отвечают второму порядку малости по гамильтониану взаимодействия типа магнитный момент-поле. Поэтому в дальнейшем мы будем полагать $\mu = 1$. Связь электрического поля с индукцией в координатном пространстве переписывается в виде

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{E}(t) + \int_0^{+\infty} f(\tau)\mathcal{E}(t-\tau)d\tau$$

где $f(\tau)$ называется функцией влияния, поскольку она описывает, как электрическое поле влияет на среду, а именно, в среде возникает отклик в виде поляризации, но он (см. границы интегрирования) зависит только от поля, приложенного к среде в прошлом. Легко сравнить Фурье-образ функции влияния с диэлектрической проницаемостью в этом случае, так что

$$f(\omega) = \epsilon(\omega) - 1.$$

Свободная волна в среде

В отсутствие внешних токов и зарядов исследуем свободную гармоническую волну в среде. Для этого перейдем к представлению волнового вектора. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathcal{D} &= 0 & \Rightarrow & \quad \epsilon i\mathbf{k} \cdot \mathcal{E} = 0 \\ \operatorname{div} \mathcal{B} &= 0 & \Rightarrow & \quad \mu i\mathbf{k} \cdot \mathcal{H} = 0\end{aligned}$$

т.е. электрическое и магнитное поля ортогональны волновому вектору. Далее,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathcal{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \Rightarrow i\mathbf{k} \times \mathcal{E} = i\frac{\omega}{c} \mu \mathcal{H} \\ \operatorname{rot} \mathcal{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \Rightarrow i\mathbf{k} \times \mathcal{H} = -i\frac{\omega}{c} \epsilon \mathcal{E}\end{aligned}$$

Из (Д.35) можно, к примеру, выразить магнитное поле через электрическое:

$$\mathcal{H} = \frac{c}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathcal{E}$$

и подставить его в (Д.36)

$$\frac{c}{\omega\mu} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathcal{E}) = -\frac{\omega}{c} \epsilon \mathcal{E},$$

пользуясь тем, что электрическое поле поперечно $\mathbf{k} \cdot \mathcal{E} = 0$ и, следовательно,

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathcal{E}) = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathcal{E}) - \mathbf{k}^2 \mathcal{E} = -\mathbf{k}^2 \mathcal{E}$$

В итоге, получим волновое уравнение для электрического поля:

$$\left[\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu - \mathbf{k}^2 \right] \mathcal{E} = 0$$

Поэтому $\mathcal{E} \neq 0$, если только

$$\left[\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu - k^2 \right] = 0$$

что и представляет собой уравнение массовой поверхности для электромагнитной волны в среде. Таким образом, волновой вектор

$$\mathbf{k} = \left(\frac{2\pi}{\lambda} + i\frac{1}{\delta} \right) \mathbf{n} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} \mathbf{n}$$

Поскольку мы будем рассматривать только ситуацию с единичной магнитной проницаемостью $\mu = 1$, мнимая добавка возникает за счет диэлектрической проницаемости ϵ :

$$\sqrt{\epsilon} = n + i\kappa,$$

где n - показатель преломления⁹, κ - коэффициент затухания. Действительно, выделяя вещественную часть волнового вектора в согласии с данным сейчас определением, находим, что

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} n \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{c}{n} T,$$

где $T = 2\pi/\omega$ - период колебаний, так что скорость света в среде

$$c_n = \frac{c}{n}$$

что как раз и отвечает определению показателя преломления света. Для мнимой же части находим

$$\delta = \frac{c}{\kappa \omega}, \quad \kappa \omega \geq 0$$

которая должна быть положительна, так как при движении волны вдоль волнового вектора возникает фактор

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Big|_{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = r} = e^{irn\omega/c} e^{-r/\delta}$$

и δ - длина затухания волны. Таким образом, если в среде есть диссипация, что отвечает наличию мнимой части у диэлектрической проницаемости, то электромагнитная волна затухает. Причем в силу принципа причинности, длина затухания должна быть положительной. Подчеркнем, что наличие длины затухания не обязательно означает наличие поглощения и диссипации: электромагнитная волна в определенном интервале частот просто может не проникать в среду, а отражаться от нее, точнее волна может проникать в такую среду только на расстояния порядка длины затухания (см. пример с ионосферой ниже). Рассмотрим конкретный пример квазиупругих диполей в следующем разделе.

Квазиупругие диполи

Уравнение движения квазиупругих диполей под воздействием внешнего электромагнитного поля и его решение были рассмотрены где-то выше.

Наведенный дипольный момент равен

$$\mathbf{d} = e\mathbf{r}(\omega) = \frac{e^2}{m} \mathcal{E}_0(\omega) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

домножая который на плотность (концентрацию) диполей N , получаем поляризацию единицы объема среды квазиупругих диполей

$$\mathcal{P} = \frac{Ne^2}{m} \mathcal{E}_0(\omega) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = \alpha \mathcal{E}$$

откуда находим диэлектрическую проницаемость

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\alpha = 1 + 4\pi \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}.$$

Запишем его в виде:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega),$$

домножив и разделив на комплексно сопряженный член. Здесь

$$\begin{aligned}\epsilon'(\omega) &= 1 + 4\pi \frac{Ne^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \\ \epsilon''(\omega) &= 4\pi \frac{Ne^2}{m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}\end{aligned}$$

Поскольку диэлектрическая проницаемость, по определению, есть коэффициент между вещественным электрическим полем и индукцией, она тоже должна удовлетворять условию вещественности:

$$\epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega)$$

откуда

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon'(-\omega), \quad \epsilon''(\omega) = -\epsilon''(-\omega)$$

т.е. $\epsilon'(\omega)$ - четная функция, а $\epsilon''(\omega)$ - нечетная, причем для последней выполняется условие $\omega\epsilon''(\omega) \geq 0$. Показатель преломления и коэффициент затухания, показанные на рисунках, имеют характерные особенности.

(тут потом вставляю графики пока что всё равно ведь не въезжаю в них)

На этих рисунках параметр

$$\gamma = 0.2\omega_0$$

Кроме того, мы определяем

$$\Omega^2 \equiv 4\pi \frac{Ne^2}{m}$$

и полагаем на рисунке $\Omega = \omega_0$. И у показателя преломления, и у коэффициента поглощения имеется ярко выраженная область резонанса вблизи ω_0 .

Если изобразить закон дисперсии, т.е. зависимость частоты ω от волнового вектора $k = \omega n(\omega)/c$, то мы увидим, что вдали от резонансной частоты имеются области нормальной дисперсии, где групповая скорость $v_{\text{гр.}}/c = d\omega/d(kc)$ меньше единицы, в то время как возле резонанса находится область аномальной дисперсии. Возле резонанса коэффициент поглощения существенно отличен от нуля и поле экспоненциально быстро затухает в направлении волнового вектора, т.е. не распространяется. В резонансе $\omega \approx \omega_0$ диэлектрическая проницаемость сводится к выражению

$$\epsilon \approx 1 + i \frac{\Omega^2}{\gamma\omega}$$

При больших же частотах асимптотическое поведение показателя преломления определяется реальной частью диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon'(\omega) \approx 1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2, \quad \omega \rightarrow \infty$$

Типичные примеры диэлектрической проницаемости

Диэлектрическая проницаемость ионосферы

Для пояснения поведения диэлектрической проницаемости, рассмотрим ионосферу. Нейтральный газ свободных заряженных ионов $\gamma = \omega_0 = 0$. Тогда

$$\epsilon_{\text{free}}(\omega) = \epsilon'(\omega) = 1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2, \quad \epsilon''(\omega) = 0,$$

так что при $\omega > \Omega$, поглощение равно нулю, и

$$n = \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}$$

При $\omega < \Omega$, показатель преломления равен нулю, и

$$\kappa = \sqrt{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 - 1}$$

В ионосфере закон дисперсии $k^2 c^2 = \omega^2 \epsilon$ принимает вид

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \Omega^2$$

что отвечает связи для частицы с массой, так что при частоте меньше пороговой частица - фотон в среде - не может распространяться и колебания поля экспоненциально затухают с расстоянием вглубь от границы ионосферы.

(?? какие следствия?)

Диэлектрическая проницаемость металла

В металле $\omega_0 = 0, \gamma \gg \omega$. Формально

$$\epsilon(\omega) = 1 + i \frac{\Omega^2}{\gamma \omega} = 1 + 4\pi i \frac{\sigma}{\omega}$$

Физический смысл коэффициента

$$\sigma = \frac{\Omega^2}{4\pi\gamma}$$

легко понять из получающегося в данном приближении уравнения движения зарядов:

$$\begin{aligned} \gamma \dot{\mathbf{r}} &= \frac{e}{m} \mathcal{E} \Rightarrow j = Ne \mathbf{v} = \frac{Ne^2}{m\gamma} \mathcal{E} \Rightarrow \\ j &= \sigma \mathcal{E} \end{aligned}$$

так что σ - проводимость металла, коэффициент между током в металле и приложенным электрическим полем.

Обычно полагают, что проводимость в металлах много больше частоты колебаний поля $\sigma \gg \omega$ так что

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{met}}(\omega) &= i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \Rightarrow \\ n_{\text{met}} = \kappa_{\text{met}} &= \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} \gg 1 \end{aligned}$$

(?? какие следствия?)

О других уравнениях электродинамики в веществе

(укажу, какие там еще есть уравнения, их мб очень много ещё.)

17.3 Details of Maxwell's Equations

Обсудим каждое уравнение Максвелла поотдельности.

17.3.1 Gauss's law

(он так в статье одной назывался, название не проверял)

Закон Гаусса говорит об обнулении дивергенции (?) магнитного потока:

О ковариантной форме

или в ковариантной форме:

$$\partial_j B^j = 0$$

17.3.2 Faraday's law

Закон Фарадея есть:

О ковариантной форме

или в ковариантной форме:

$$\partial_t B^i + \epsilon^{ijk} \partial_j E_k = 0,$$

17.3.3 Coulomb's law

Обсудим подробно закон Кулона.

Типичный закон Кулона (???)**О ковариантной форме в искривленном пространстве**

В искривленном пространстве в в случае диагональной метрики закон Кулона есть есть

$$\partial_k \tilde{E}^k = \frac{\varrho}{\varepsilon_0},$$

где $\tilde{E}^j \equiv -g^{jj} g^{00} \sqrt{-g} E_j$, $\varrho \equiv \sqrt{-g} \rho$.

В общем виде метрики, закон имеет вид:

$$\alpha^{kj} \partial_k E_j + \gamma^j E_j - c g^{m\mu} g^{n0} \epsilon_{kmn} \partial_\mu B^k - c \sigma^{mn0} \epsilon_{kmn} B^k = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

with the following geometric coefficients

$$\begin{aligned} \alpha^{kj} &\equiv (g^{0k} g^{j0} - g^{jk} g^{00}), \\ \alpha^{\mu ji} &\equiv (g^{0\mu} g^{ji} - g^{j\mu} g^{0i}) \\ \gamma^j &\equiv \left[\partial_k (g^{0k} g^{j0} - g^{jk} g^{00}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k (\sqrt{-g}) (g^{0k} g^{j0} - g^{jk} g^{00}) \right] \\ \sigma^{mn\beta} &\equiv \left[\partial_\mu (g^{m\mu} g^{n\beta}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) (g^{m\mu} g^{n\beta}) \right] \\ \xi^{ji} &\equiv \left[\partial_\mu (g^{0\mu} g^{ji} - g^{j\mu} g^{0i}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) (g^{0\mu} g^{ji} - g^{j\mu} g^{0i}) \right] \end{aligned}$$

(?? укажу вывод, вроде тут все просто выводится.)

Граница применимости закона Кулона (????)

(?? хз, четко потом напишу)

Экспериментальные проверки

О другом про закон Кулона

Можно ли более явно показать, что можно сдеформировать пространство из произвольной формы в сферу, как говорит нам теорема Гаусса? (????)

(оставил этот вопрос, не до него, вряд ли тут будет что-то неоткрытое. Типично так просто говорят, что можно так сделать, вот и все. Конкретно, как - мб когда-то подумаю, напишу. Пока пусть явно я не могу это сделать, слова общие о теореме Гаусса итак достаточны для веры, что все тут нормально. Зато мб интересно было бы отследить, что если топология пространства особенная, то так теорема Гаусса не работала бы. Так что потом когда-то мб и напишу это с примерами, когда это не так.)

Суть закона Кулона

(потом напишу, пока путаюсь!!!)

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R})$$

вывод закона Кулона

Для постоянного электрического поля уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0\end{aligned}$$

Подставим $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, находим так называемое уравнение Пуассона для постоянного электромагнитного поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho$$

В пустоте, т.е. при $\rho = 0$, оно становится так называемым Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0$$

Из последнего уравнения следует, в частности, что потенциал электрического поля нигде не может иметь ни максимума, ни минимума. (???)

Действительно, для того чтобы φ имело экстремальное значение, необходимо, чтобы все первые производные от φ по координатам были равны нулю, а вторые производные $\partial^2\varphi/\partial x^2, \partial^2\varphi/\partial y^2, \partial^2\varphi/\partial z^2$ имели одинаковый знак.

Последнее невозможно, так как при этом не может быть удовлетворено уравнение (36.5).

Определим теперь поле, создаваемое точечным зарядом.

Из соображений симметрии ясно, что оно будет направлено в каждой точке по радиус-вектору, проведенному из точки, в которой находится заряд e .

Из тех же соображений ясно, что абсолютная величина E поля будет зависеть только от расстояния R до заряда. Для нахождения её применим уравнение Максвелла в интегральной форме $\oint \mathbf{E} d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho dV$.

Поток электрического поля через шаровую поверхность с радиусом R , проведенную вокруг заряда e , равен $4\pi R^2 E$; этот поток должен быть равен $4\pi e$. Отсюда находим закон Кулона:

$$E = \frac{e}{R^2},$$

или в векторном виде:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}$$

То есть поле, создаваемое точечным зарядом, обратно пропорционально квадрату, расстояния от этого заряда.

Потенциал этого поля

$$\varphi = \frac{e}{R}$$

Случай системы зарядов

Если мы имеем систему зарядов, то создаваемое ею поле, согласно принципу суперпозиции, равно сумме полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

В частности, потенциал такого поля равен

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a}$$

где R_a - расстояние от заряда e_a до точки, в которой мы ищем потенциал.

Если ввести плотность заряда ρ , то эта формула приобретает вид

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV,$$

где R - расстояние от элемента объема dV до данной точки наблюдения поля.

Отметим здесь математическое соотношение, получающееся при подстановке в (36.4) значений ρ и φ для точечного заряда, т.е.

$$\rho = e\delta(\mathbf{R}) \text{ и } \varphi = e/R.$$

Мы находим тогда:

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R})$$

О применениях закона Кулона

(пока редко применял)

О бесконечности собственной потенциальной энергии

(?? что с этим делать? закон Кулона не работает???)

Об обобщениях закона Кулона

(напишу про теорию Борна-Инфельда, запомнил уже!!!)

О выводе ненулевого поля в случае отсутствия зарядов (???)

(вопрос, что неправильно в выкладке ниже)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$$

To solve this equation for the case of central symmetry. Then (6.2) is imply

$$\frac{d}{dr} (r^2 D_r) = 0$$

and (6.3) has the solution

$$D_r = e/r^2$$

17.3.4 Ampere's law**О ковариантной форме в искривленном пространстве**

В искривленном пространстве в случае диагональной метрики

$$\epsilon_{ijk} \partial_j \bar{B}^{ijjk} = \mu_0 (j^i + j_D^i)$$

где

$$\bar{B}^{ijjk} \equiv g^{ii} g^{jj} \sqrt{-g} B^k,$$

$$j^i \equiv \sqrt{-g} j^i$$

$$j_D^i \equiv -\varepsilon_0 \sqrt{-g} (g^{00} g^{ii} \partial_t E_i + c^2 E_i \xi^{ii})$$

(пока не знаю, откуда такой вид)

$$\frac{1}{c} \alpha^{\mu ji} \partial_\mu E_j + \frac{1}{c} E_j \xi^{ji} - \epsilon_{kmn} \partial_\mu B^k g^{m\mu} g^{ni} - B^k \epsilon_{kmn} \sigma^{mni} = \mu_0 j^i,$$

with the following geometric coefficients

$$\alpha^{kj} \equiv (g^{0k} g^{j0} - g^{jk} g^{00}),$$

$$\alpha^{\mu ji} \equiv (g^{0\mu} g^{ji} - g^{j\mu} g^{0i})$$

$$\gamma^j \equiv \left[\partial_k (g^{0k} g^{j0} - g^{jk} g^{00}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k (\sqrt{-g}) (g^{0k} g^{j0} - g^{jk} g^{00}) \right]$$

$$\sigma^{mn\beta} \equiv \left[\partial_\mu (g^{m\mu} g^{n\beta}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) (g^{m\mu} g^{n\beta}) \right]$$

$$\xi^{ji} \equiv \left[\partial_\mu (g^{0\mu} g^{ji} - g^{j\mu} g^{0i}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) (g^{0\mu} g^{ji} - g^{j\mu} g^{0i}) \right]$$

17.4 Properties of the Electromagnetic Field

Обсудим подробно свойства электромагнитного поля.

(мб это в часть про модели поля перенесу, пока идея в том, чтобы все эти свойства тут сполна описать. пока мало свойств знаю, практиковаться нужно.)

17.4.1 Gauges in Electrodynamics (?)

Обсудим подробно калибровки.

Изменение $F_{\mu\nu}$ при калибровках

(?? вопрос, каким может стать он при калибровках. что мы можем занулить, а что нет??? как матрица эта может меняться?? посмотрю потом варианты, отвечу, пока для меня это не очевидно.)

Связь сохранения заряда и калибровочной инвариантности

(там в одной формуле это проявляется, понимаю в какой, потом пропишу. также обсужу глубокий смысл этого, пока его не совсем вижу)

17.4.2 Field Transformations under Change of Reference Frames (???)**Лоренцев буст для электрического и магнитного полей**

Тензор напряженности при замене координат пространства Минковского преобразуется как

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu'\nu'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^{\nu}} \Leftrightarrow \hat{F}' = \Lambda'^T \cdot \hat{F} \cdot \Lambda', \quad (\Lambda')^{\mu'}_{\mu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x'^{\mu}}$$

При бусте вдоль оси x

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_x & \mathcal{E}_y & \mathcal{E}_z \\ -\mathcal{E}_x & 0 & -\mathcal{H}_z & \mathcal{H}_y \\ -\mathcal{E}_y & \mathcal{H}_z & 0 & -\mathcal{H}_x \\ -\mathcal{E}_z & -\mathcal{H}_y & \mathcal{H}_x & 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому, перемножая матрицы, получим закон преобразования электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_x &= \mathcal{E}_x, & \mathcal{H}'_x &= \mathcal{H}_x, \\ \mathcal{E}'_y &= \gamma(\mathcal{E}_y - \beta\mathcal{H}_z), & \mathcal{H}'_y &= \gamma(\mathcal{H}_y + \beta\mathcal{E}_z) \\ \mathcal{E}'_z &= \gamma(\mathcal{E}_z + \beta\mathcal{H}_y), & \mathcal{H}'_z &= \gamma(\mathcal{H}_z - \beta\mathcal{E}_y) \end{aligned}$$

Это преобразование можно записать и в общем виде, если заметить, что электрическое и магнитные поля, направленные вдоль направления лоренцева буста не преобразуются, а для поперечных компонент полей имеют место простые правила образования правых и левых троек, так что для продольных и поперечных компонент электрического поля

$$\mathcal{E}_{\parallel} = \beta \frac{\mathcal{E} \cdot \beta}{\beta^2}, \quad \mathcal{E}_{\perp} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_{\parallel}$$

и аналогичных компонент магнитного поля легко находим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}' &= \mathcal{E}_{\parallel} + \gamma(\mathcal{E}_{\perp} + \beta \times \mathcal{H}) \\ \mathcal{H}' &= \mathcal{H}_{\parallel} + \gamma(\mathcal{H}_{\perp} - \beta \times \mathcal{E}) \end{aligned}$$

Отсюда, ясно, что построение релятивистских инвариантов поля, исходя из явного вида преобразований полей при лоренцевом бусте (4.16) является нетривиальной задачей, в то время как использование тензорного анализа существенно упрощает эту задачу.

Пример преобразования электрического поля в магнитное (???)

(давно хотел четко его прописать, пока хз)

У поля покоящегося заряда также может быть электрическое и магнитное поля параллельны?

(мне кажется это сомнительным)

Преобразования уравнений Максвелла в трехмерной форме при преобразованиях Лоренца (???)

(проделаю это, хорошая задача, что-то ни разу еще не делал. посмотрю, как они сохраняются.)

17.4.3 Invariants of the Electromagnetic Field

(потом подробно напишу, пока не актуально)

Суть инвариантов

(напишу, что они такой-то имеют вид и там-то нужны.)

Получение инвариантов

В евклидовом пространстве из векторов электрического и магнитного полей можно построить два скаляра и один псевдоскаляр: $\mathcal{E}^2, \mathcal{H}^2$ и $\mathcal{E} \cdot \mathcal{H}$, соответственно. Любая функция этих скаляров будет являться инвариантом относительно вращений и трансляций евклидова пространства.

Поскольку указанные преобразования евклидова пространства образуют часть вращений, бустов и трансляций пространства-времени Минковского, мы заключаем, что релятивистские инварианты поля квадратичны по электрическому и магнитному полям, а значит, они квадратичны по тензору напряженности поля и дуальному тензору напряженности. Другие релятивистские инварианты будут функциями от квадратичных инвариантов. Итак, квадратичные скаляры это

$$\mathcal{I}_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad \mathcal{I}_2 = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}, \quad \mathcal{I}_3 = \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$$

Вычислим их в терминах электрического и магнитного полей:

$$\mathcal{I}_1 = F_{0\alpha}F^{0\alpha} + F_{\alpha 0}F^{\alpha 0} + F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -2\mathcal{E} \cdot \mathcal{E} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{H}^\gamma\epsilon_{\alpha\beta\gamma'}\mathcal{H}^{\gamma'} = 2(\mathcal{H}^2 - \mathcal{E}^2)$$

Аналогично с учетом преобразования дуальности (4.11) найдем

$$\mathcal{I}_2 = -4\mathcal{E} \cdot \mathcal{H}, \quad \mathcal{I}_3 = -\mathcal{I}_1$$

Итак, независимыми релятивистскими инвариантами поля являются скаляры, квадратичные по тензору напряженности: $\mathcal{I}_{1,2}$.

При этом они являются также калибровочными инвариантами, но первый скаляр, а второй - псевдоскаляр.

Обзор применений инвариантов

(потом укажу, что в построении действия, мб еще где-то.)

17.4.4 Other properties of the electromagnetic field

Сила и давление электромагнитного поля

(пока так, мелочи просто. из белоусова задачи некоторые)

Сила воздействия электромагнитного поля

(так с ходу и хз, как там считать её.)

давление на обкладку плоского тонкого конденсатора без диэлектрика

Найти давление на обкладку плоского тонкого конденсатора без диэлектрика:

- 1) исходя из плотности силы $\rho \mathbf{E}$;
- 2) исходя из перепада давления электрического поля.

давление на стенку соленоида без сердечника

Найти давление на стенку соленоида без сердечника:

- 1) исходя из плотности силы $\frac{1}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$;
- 2) исходя из перепада давления магнитного поля.

Совершение работы полем (!!!?)

(?? что-то я не понял, как оно конкретно совершает работу и почему сохраняется при этом энергия???)

почему сохраняется при этом энергия????

Пример: работа над колебания частицы в поле под действием волны равна разнице энергий поля (???)

(??? как посчитать разность энергии и убедиться, что она и конвертируется в работу? пока что-то принимаю просто это как факт, потому что по идее иначе быть и не может. доказать не могу пока.)

17.5 Electromagnetic Waves

Приведем подробную теорию электромагнитных волн как типичной конфигурации электромагнитного поля.

(тут уже в шаге я от доработанной теории, с которой можно решать задачи! еще немного и пойду тренироваться!)

17.5.1 Wave Equation and Parameters of a Plane Wave

основные методы

(Это по идее уже во введении будет написано, так что тут удалю. но это позже.)

Решение волнового уравнения для плоских волн

Динамика плоских электромагнитных волн, то есть когда поле зависит только от одной координаты, скажем x , и от времени, описывается уравнением:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

где под f подразумевается любая компонента векторов **Е** или **Н**.

(подробнее про решение по идее в умф все будет, это не вопрос теории поля)

Решаем волновое уравнение следующим образом. Запишем его как $\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$. Введем $\xi = t - \frac{x}{c}$, $\eta = t + \frac{x}{c}$, тогда $t = \frac{1}{2}(\eta + \xi)$, $x = \frac{c}{2}(\eta - \xi)$, $\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right)$, и волновое уравнение запишем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

И его решение имеет вид $f = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, где f_1 и f_2 - произвольные функции, в итоге

$$f = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Пусть, например, $f_2 = 0$, так что $f = f_1(t - x/c)$.

Качественное объяснение решения волнового уравнения

Мы получили, что В каждой плоскости $x = \text{const}$ поле меняется со временем; в каждый данный момент поле различно для разных x .

Очевидно, что поле имеет одинаковое значение для координат x и моментов времени t , удовлетворяющих соотношениям $t - x/c = \text{const}$, т.е. $x = \text{const} + ct$.

Это значит, что если в некоторый момент $t = 0$ в некоторой точке x пространства поле имело определенное значение, то через промежуток времени t то же самое значение поле имеет на расстоянии ct вдоль оси x от первоначального места.

Мы можем сказать, что все значения электромагнитного поля распространяются в пространстве вдоль оси x со скоростью, равной скорости света c . Таким образом, $f_1(t - x/c)$ представляет собой плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси x . И также $f_2(t + x/c)$ представляет собой волну, бегущую в противоположном, отрицательном, направлении оси x .

Векторный потенциал плоской волны может быть всегда выбран перпендикулярным к направлению распространения этой волны (???)

(пока не зашло, потом досмотрю, это не так важно мб.)

Потенциалы электромагнитной волны можно выбрать так, чтобы $\varphi = 0$, причем $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

Выберем потенциалы рассматриваемой теперь плоской волны именно таким образом.

Условие $\text{div } \mathbf{A} = 0$ дает в этом случае

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$$

поскольку все величины не зависят от y и z .

Согласно волновому уравнению, будем иметь тогда и $\partial^2 A_x / \partial t^2 = 0$, т.е. $\partial A_x / \partial t = \text{const}$.

Но производная $\partial \mathbf{A} / \partial t$ определяет электрическое поле, и мы видим, что отличная от нуля компонента A_x означала бы в рассматриваемом случае наличие постоянного продольного электрического поля.

Поскольку такое поле не имеет отношения к электромагнитной волне, то можно положить $A_x = 0$

Таким образом, векторный потенциал плоской волны может быть всегда выбран перпендикулярным к оси x , т.е. к направлению распространения этой волны.

$\vec{E}$ и $\vec{H}$ в плоской волне связаны как $\vec{H} = [n\vec{E}]$

(мб перенесу в начало про плоские волны что ниже?)

В плоской волне, бегущей в положительном направлении оси x в такой волне все величины являются функциями $(t - x/c)$. Из формул $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ находим:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{A}',$$

$$\mathbf{H} = [\nabla \mathbf{A}] = \left[\nabla \left(t - \frac{x}{c} \right) \cdot \mathbf{A}' \right] = -\frac{1}{c} [\mathbf{n} \mathbf{A}'],$$

где штрих обозначает дифференцирование по $t - x/c$, а $\mathbf{n}$ есть единичный вектор вдоль направления распространения волны.

Подставляя первое равенство во второе, находим:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n} \mathbf{E}]$$

То есть поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ плоской волны направлены перпендикулярно к направлению распространения волны, поэтому такие волны называют поперечными. Также $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ перпендикулярны друг к другу и одинаковы по абсолютной величине.

О непоперечных плоских волнах (?)

(таких скорее всего нет, но я не проверял еще. Потом напишу, что думаю про это)

Основные свойства монохроматических волн

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = i[\mathbf{k}\mathbf{A}]$$

Описание монохроматических волн

Монохроматическая волна - это волна, в которой поле является простой периодической функцией времени, например, зависимость эта может посредством множителя вида $\cos(\omega t + \alpha)$, где ω - частота волны. Поэтому $\partial^2 f / \partial t^2 = -\omega^2 f$, так что волновое уравнение становится:

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0.$$

Векторный потенциал такой волны удобнее всего написать в виде вещественной части комплексного выражения:

$$\mathbf{A} = \text{Re} \{ \mathbf{A}_0 e^{-i\omega(t-x/c)} \} \equiv \text{Re} \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)},$$

где $\mathbf{A}_0$ есть некоторый постоянный комплексный вектор, а $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$ есть так называемый волновой вектор. Величину, стоящую с множителем i в показателе, называют фазой волны. До тех пор, пока мы производим над величинами лишь линейные операции, можно опускать знак взятия вещественной части и оперировать с комплексными величинами как таковыми. подставив $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ в выражения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ плоской волны, получим связь

между напряженностями и векторным потенциалом плоской монохроматической волны в виде

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = i[\mathbf{k}\mathbf{A}]$$

Очевидно, что и напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в такой волне будут иметь аналогичный вид с той же частотой ω .

Длина волны

Длина волны это:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega};$$

это есть период изменения поля с координатой x в заданный момент времени t .

(тут примеры и комментарии приведу. как эту формулу интуитивной сделать, подумаю)

Волновой вектор

Волновой вектор есть:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении распространения волны. С ним можно записать вектор-потенциал монохроматической волны в виде $\mathbf{A} = \text{Re} \{ \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \}$, не зависящем от выбора осей координат.

Введем четырехмерный волновой вектор

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right)$$

Эти величины действительно составляют 4-вектор, ведь при умножении на 4-вектор x^i он дает скаляр - фазу волны:

$$k_i x^i = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}$$

(?) Из определений волновых векторов видно, что квадрат волнового 4-вектора равен нулю:

$$k^i k_i = 0.$$

(?? проверю потом) Это соотношение следует также и непосредственно из того, что выражение

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \exp(-ik_i x^i)$$

должно быть решением волнового уравнения $\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} \equiv g^{kl} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0$.

Поток энергии в плоской волне

Поток энергии в плоской волне считаем как $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}[\mathbf{n}\mathbf{E}]]$, и, поскольку $\mathbf{E}\mathbf{n} = 0$, он имеет вид:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} E^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} H^2 \mathbf{n}.$$

Таким образом, поток энергии направлен вдоль направления распространения волны.

Поскольку плотность энергии волны $W = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}$, то можно написать:

$$\mathbf{S} = cW\mathbf{n},$$

в согласии с тем, что поле распространяется со скоростью света.

ТЭИ плоской волны (?)

(??? пок не усвоено)

Как у всякой плоской волны, в монохроматической волне, распространяющейся вдоль оси x , отличны от нуля лишь следующие компоненты тензора энергии-импульса:

$$T^{00} = T^{01} = T^{11} = W$$

С помощью волнового 4-вектора эти равенства можно записать в тензорном виде как

$$T^{ik} = \frac{Wc^2}{\omega^2} k^i k^k$$

Импульс единицы объема электромагнитного поля в плоской волне (??)

(???? потом пропишу в основах про него.)

Импульс единицы объема электромагнитного поля есть $\mathbf{S}/c^2$.

Для плоской волны это дает

$$\mathbf{p} = (W/c)\mathbf{n}.$$

Обратим внимание на то, что соотношение между энергией W и импульсом W/c электромагнитной волны оказывается таким же, как для частиц, движущихся со скоростью света??.

Поток импульса (???)

(?? что это вообще??)

Поток импульса поля дается максвелловским тензором напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$.

Выбирая по-прежнему направление распространения волны в качестве оси x , найдем, что единственная отличная от нуля компонента $T^{\alpha\beta}$ есть

$$T^{xx} = -\sigma_{xx} = W$$

Как и следовало, поток импульса направлен по направлению распространения волны и равен по величине плотности энергии.

Преобразование плотности энергии плоской электромагнитной волны при смене системы отсчета

Закон преобразования плотности энергии плоской электромагнитной волны при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой есть

$$W = W' \frac{\left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'\right)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Поскольку $W = E^2/4\pi = H^2/4\pi$, то абсолютные величины напряженностей поля волны преобразуются как $\sqrt{W}$.

Действительно. В формулу

$$W = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(W' + 2 \frac{V}{c^2} S'_x - \frac{V^2}{c^2} \sigma'_{xx} \right)$$

надо подставить

$$S'_x = cW' \cos \alpha', \quad \sigma'_{xx} = -W' \cos^2 \alpha'$$

где α' - угол (в системе K') между осью x' (вдоль которой направлена скорость $\mathbf{V}$) и направлением распространения волны.

В результате находим:

$$W = W' \frac{(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha')^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Поскольку $W = E^2/4\pi = H^2/4\pi$, то абсолютные величины напряженностей поля волны преобразуются как $\sqrt{W}$.

(?? тут позже укажу, где он нужен, пока не использовал, но я почти понимаю, где он нужен. пока не переходил из одной СО в другую, чтобы потренироваться!!)

Примеры плоских волн (?)

(немногочисленных желательных тут приведу. чтобы научиться сполна ориентироваться, пока сложно придумать примеры)

О фронте волны (?!)

(?? вопрос: вот волна распространяется, как прямо сам фронт её выглядит??? там как-то поле к нулю спадает?? что там в самом начале поля, если время полностью зафиксировать?)

Доказательство, что импульс из лазера на самом деле удовлетворяет уравнениям Максвелла (!?!?!?!?)

(очень важный вопрос, потому что наши волны именно так и распространяются часто. пока не вижу это, нужно тренироваться!)

17.5.2 Polarization of Waves (?!!!)

Обсудим подробно поляризацию монохроматической волны.

Суть поляризации

(потом продублирую в 1ю часть этот параграф)

Вывод поляризации поля по Ландау (?!!!)

(потом узнаю, есть ли другие способы ввести это??)

Рассмотрим вопрос о направлении поля монохроматической волны $\mathbf{E} = \text{Re} \{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \}$, где $\mathbf{E}_0$ есть некоторый комплексный вектор. Его квадрат $\mathbf{E}_0^2$ есть некоторое, вообще говоря, тоже комплексное число. Если $\mathbf{E}_0^2 = |\mathbf{E}_0|^2 e^{-2i\alpha}$, то определим вектор $\mathbf{b}$ как

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{-i\alpha}$$

будет иметь вещественный квадрат $\mathbf{b}^2 = |\mathbf{E}_0|^2$. Тогда

$$\mathbf{E} = \text{Re} \{ \mathbf{b} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t - \alpha)} \}$$

Также $\mathbf{b}$ есть

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2,$$

где $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ - два вещественных вектора. Поскольку квадрат $\mathbf{b}^2 = b_1^2 - b_2^2 + 2i\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ по определению вещественный, то $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0$ т.е. векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ взаимно перпендикулярны.

Выберем направление $\mathbf{b}_1$ в качестве оси y (ось x совпадает с направлением распространения волны). Тогда имеем:

$$E_y = b_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha), \quad E_z = \pm b_2 \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha),$$

где знак плюс или минус имеет место в зависимости от того, направлен вектор $\mathbf{b}_2$ в положительном или отрицательном направлении оси z . Поэтому

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1$$

Таким образом, в каждой точке пространства вектор электрического поля вращается в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, причем его конец описывает эллипс, поэтому и такая волна называется эллиптически поляризованной. Вращение происходит в направлении по или против направления винта, ввинчиваемого вдоль оси x , соответственно при знаке плюс или минус при E_z .

Если $b_1 = b_2$, то эллипс превращается в круг, т.е. вектор $\mathbf{E}$ вращается, оставаясь постоянным по величине. В этом случае говорят, что волна поляризована по кругу. В такой волне отношение y - и z -составляющих комплексной амплитуды $\mathbf{E}_0$ равно

$$\frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \pm i,$$

соответственно для вращения по и против направления винта (правая и левая поляризации).

Наконец, если b_1 или b_2 равно нулю, то поле волны направлено везде и всегда параллельно (или антипараллельно) одному и тому же направлению. Волну называют в этом случае линейно поляризованной или поляризованной в плоскости. Если две линейно поляризованных волны наложатся друг на друга, получится эллиптически поляризованная волна.

Эффект Доплера через закон преобразования волнового 4-вектора

(в другое место его перенесу)

Используя закон преобразования волнового 4-вектора, в строчку получается эффект Доплера - изменение частоты волны ω , испускаемой источником, движущимся по отношению к наблюдателю, по сравнению с «собственной» частотой ω_0 того же источника в системе отсчета, в которой он покоится (K_0).

Пусть V - скорость источника, т.е. скорость системы отсчета K_0 относительно K . Согласно общим формулам преобразования 4-векторов имеем:

$$k^{(0)0} = \frac{k^0 - \frac{V}{c} k^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

(скорость системы K относительно K_0 есть $-V$). Подставив сюда $k^0 = \omega/c$, $k^1 = k \cos \alpha = \frac{\omega}{c} \cos \alpha$, где α - угол в системе K между направлением испускаемой волны и направлением движения источника, и выражая ω через ω_0 , получим:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \alpha}$$

Это и есть искомая формула.

При $V \ll c$ она дает, если угол α не слишком близок к $\pi/2$:

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha \right)$$

При $\alpha = \pi/2$ имеем:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{V^2}{2c^2} \right)$$

В этом случае относительное изменение частоты пропорционально квадрату отношения V/c .

Оси эллипса поляризации по комплексной амплитуде $\mathbf{E}_0$

(?? не думаю, что это нужно, так что пока не смотрел.)

Определим направление и величину осей эллипса поляризации, то есть вектора $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i \mathbf{b}_2$, по комплексной амплитуде $\mathbf{E}_0$.

Имеем из (48.7):

$$\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^* = b_1^2 + b_2^2, \quad [\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*] = -2i [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2]$$

или

$$b_1^2 + b_2^2 = A^2 + B^2, \quad b_1 b_2 = AB \sin \delta$$

где введены обозначения

$$|E_{0y}| = A, \quad |E_{0z}| = B, \quad \frac{E_{0z}}{B} = \frac{E_{0y}}{A} e^{i\delta}$$

для абсолютных значений E_{0y} и E_{0z} и разности фаз (δ) между ними.

Отсюда

$$2b_{1,2} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \sin \delta} \pm \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \sin \delta}$$

чем и определяются величины полуосей эллипса поляризации.

Для определения их направления (относительно произвольных исходных осей y, z) исходим из равенства

$$\operatorname{Re} \{ (\mathbf{E}_0 \mathbf{b}_1) (\mathbf{E}_0^* \mathbf{b}_2) \} = 0$$

В котором легко убедиться, подставив $\mathbf{E}_0 = (\mathbf{b}_1 + i \mathbf{b}_2) e^{-i\alpha}$.

Раскрывая это равенство в координатах y, z , получим для угла θ между направлением $\mathbf{b}_1$ и осью y :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2AB \cos \delta}{A^2 - B^2}$$

Направление вращения поля определяется знаком x -компоненты вектора $[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2]$.

Написав из (1)

$$2i [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2]_x = E_{0z} E_{0y}^* - E_{0y} E_{0z}^* = |E_{0y}|^2 \left\{ \left(\frac{E_{0z}}{E_{0y}} \right) - \left(\frac{E_{0z}}{E_{0y}} \right)^* \right\}$$

мы видим, что направление вектора $[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2]$ (по или против положительного направления оси x), а тем самым и знак вращения (по или против направления винта, ввинчиваемого вдоль оси x) дается знаком мнимой части отношения E_{0z}/E_{0y} (плюс в первом и минус во втором случае).

Это правило обобщает правило (48.11) при круговой поляризации.

Примеры монохроматических волн

(тут с опытом соберу примеры, нпр. для задач ниже они нужны.)

17.5.3 Spectral Decomposition of Electromagnetic Waves

Всякую волну, как и любую функцию можно раскладывать по спектру как показано в этом разделе.

Спектральное разложение в случае дискретного спектра

Простейший случай такого рода возникает при разложении чисто периодического (хотя и не монохроматического) поля.

Это есть разложение в обычный ряд Фурье; оно содержит частоты, являющиеся целыми кратными «основной» частоты $\omega_0 = 2\pi/T$, где T - период поля.

Напишем его в виде

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_0 n t}$$

(f — какая-либо из величин, описывающих поле).

Величины f_n определяются по самой функции f интегралами

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega_0 t} dt$$

Ввиду вещественности функции $f(t)$ очевидно, что

$$f_{-n} = f_n^*$$

В более сложных случаях в разложении могут присутствовать частоты, являющиеся целыми кратными (и их суммами) нескольких различных, несоизмеримых друг с другом основных частот.

Квадрат функции при дискретном спектральном разложении

(просто такая заготовка, пока не нужна нигде была)

При возведении суммы (49.1) в квадрат и усреднении по времени произведения членов с различными частотами обращаются в нуль ввиду наличия в них осциллирующих множителей.

Останутся лишь члены вида $f_n f_{-n} = |f_n|^2$.

Таким образом, средний квадрат поля (средняя интенсивность волны) представится в виде суммы интенсивностей монохроматических компонент:

$$\overline{f^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2$$

(подразумевается, что среднее по периоду значение самой функции $f(t)$ равно нулю, так что $f_0 = \bar{f} = 0$).

Спектральное разложение в случае непрерывного спектра

К другой категории относятся поля, разлагающиеся в интеграл Фурье, содержащий непрерывный ряд различных частот.

Для этого функции $f(t)$ должны удовлетворять определенным условиям; обычно речь идет о функциях, обращающихся в нуль при $t = \pm\infty$.

Такое разложение имеет вид

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

причем компоненты Фурье определяются по самой функции $f(t)$ интегралами

$$f_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

При этом аналогично дискретному случаю:

$$f_{-\omega} = f_{\omega}^*$$

Интенсивность волны через фурье-компоненту

Выразим полную интенсивность волны, т.е. интеграл от f^2 по всему времени:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f e^{-i\omega t} dt \right\} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} f_{-\omega} \frac{d\omega}{2\pi},$$

или, учитывая $f_{-\omega} = f_{\omega}^*$, получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

О случаях применений разложения (??)

(Пока ни разу не применял, применю - напишу. но вообще мб фурье оптика, мб решение каких-то умф задач, потом подумаю про это.)

17.5.4 Electromagnetic waves at finite temperature

(see books about it. Now, I don't know how to do it)

17.5.5 Partially Polarized Light (??)

(!! тут так и не зашарил, и пока это не нужно, так что опускаю)

основные методы

(хз, этот раздел мне абсолютно еще не зашел)

Описание частично поляризованных волн

Обсудим почти монохроматические волны, то есть волны, содержащие частоты в некотором малом интервале $\Delta\omega$.

Рассмотрим такую волну, и пусть ω есть некоторая средняя ее частота, для определенности, будем говорить об электрическом поле $\mathbf{E}$. Её поле в заданной точке пространства можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t) e^{-i\omega t}$$

где комплексная амплитуда $\mathbf{E}_0(t)$ является некоторой медленно меняющейся функцией времени (у строго монохроматической волны было бы $\mathbf{E}_0 = \text{const}$). Поскольку $\mathbf{E}_0$ определяет поляризацию волны, то это значит, что в каждой точке волны ее поляризация меняется со временем; такую волну называют частично поляризованной.

Свойства поляризации электромагнитных волн, в частности света, наблюдаются экспериментально посредством пропускания исследуемого света через различные тела (например, призмы Николя) и измерения интенсивности прошедшего через тело света. С математической точки зрения это означает, что о свойствах поляризации света делаются заключения исходя из значений некоторых квадратичных функций его поля.

При этом, разумеется, идет речь о средних по времени значениях этих функций.

Квадратичная функция поля состоит из членов, пропорциональных произведениям $E_\alpha E_\beta$, $E_\alpha^* E_\beta^*$ или $E_\alpha E_\beta^*$. Произведения вида

$$E_\alpha E_\beta = E_{0\alpha} E_{0\beta} e^{-2i\omega t}, \quad E_\alpha^* E_\beta^* = E_{0\alpha}^* E_{0\beta}^* e^{2i\omega t}$$

содержащие быстро осциллирующие множители $e^{\pm 2i\omega t}$, при усреднении по времени дают нуль. Произведения же $E_\alpha E_\beta^* = E_{0\alpha} E_{0\beta}^*$ такого множителя не содержат, и потому их средние значения отличны от нуля.

$\rho_{\alpha\beta}$ тензор поляризации (??)

(?? вообще плохо понимаю это пока)

Свойства частично поляризованного света вполне характеризуются тензором

$$J_{\alpha\beta} = \overline{E_{0\alpha} E_{0\beta}^*}$$

Поскольку вектор $\mathbf{E}_0$ всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к направлению волны, то тензор $J_{\alpha\beta}$ имеет всего четыре компоненты (здесь индексы α, β подразумеваются пробегающими всего два значения: $\alpha, \beta = 1, 2$, отвечающих осям y и z ; ось x - вдоль направления распространения волны).

Сумма диагональных компонент тензора $J_{\alpha\beta}$ (обозначим ее через J) есть вещественная величина - среднее значение квадрата модуля вектора $\mathbf{E}_0$ (или, что то же, вектора $\mathbf{E}$):

$$J \equiv J_{\alpha\alpha} = \overline{\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*}$$

Этой величиной определяется интенсивность волны, измеряемая плотностью потока энергии в ней.

Для того чтобы исключить эту величину, не имеющую прямого отношения к поляризационным свойствам, введем вместо $J_{\alpha\beta}$ тензор

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{J_{\alpha\beta}}{J}$$

Для которого $\rho_{\alpha\alpha} = 1$; будем называть его поляризационным тензором.

Из определения (50.1) видно, что компоненты тензора $J_{\alpha\beta}$, а с ним и $\rho_{\alpha\beta}$, связаны соотношениями

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\beta\alpha}^*$$

(т.е. тензор, как говорят, эрмитов).

В силу этих соотношений диагональные компоненты ρ_{11} и ρ_{22} вещественны (причем $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$), а $\rho_{21} = \rho_{12}^*$.

Всего, следовательно, поляризационный тензор характеризуется тремя вещественными параметрами.

Выясним условия, которые должен удовлетворять тензор $\rho_{\alpha\beta}$ для вполне поляризованного света.

В этом случае $\mathbf{E}_0 = \text{const}$, и поэтому Имеем просто:

$$J_{\alpha\beta} = J\rho_{\alpha\beta} = E_{0\alpha}E_{0\beta}^*$$

(без усреднения), т.е. компоненты тензора могут быть представлены в виде произведений компонент некоторого постоянного вектора.

Необходимое и достаточное условие для этого выражается равенством нулю определителя

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} = 0$$

В общем случае произвольной поляризации этот определитель имеет значения между 0 и 1/4.

Поляризация в естественном свете

(хз)

Противоположным случаем является неполяризованный, или естественный свет. Полное отсутствие поляризации означает, что все направления (в плоскости yz) вполне эквивалентны, то есть поляризационный тензор должен иметь вид

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$$

При этом определитель $|\rho_{\alpha\beta}| = 1/4$.

P Степень поляризации

Степенью поляризации назовем положительную величину P , определенную согласно

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \frac{1}{4}(1 - P^2)$$

Она пробегает значения от 0 для неполяризованного до 1 для поляризованного света.
(ни разу не использовал ещё)

Симметричная и антисимметричная части тензора поляризации (???)

(хз)

Произвольный тензор $\rho_{\alpha\beta}$ может быть разложен на две части симметричную и антисимметричную.

Из них первая

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta} + \rho_{\beta\alpha})$$

В силу эрмитовости $\rho_{\alpha\beta}$ является вещественной.

Антисимметричная же часть, напротив, чисто мнима.

Как и всякий антисимметричный тензор ранга, равного числу измерений, она сводится к псевдоскаляру (???) см. примечание на с. 34):

$$\frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta} - \rho_{\beta\alpha}) = -\frac{i}{2}e_{\alpha\beta}A$$

где A - вещественный псевдоскаляр, $e_{\alpha\beta}$ - единичный антисимметричный тензор (с компонентами $e_{12} = -e_{21} = 1$).

Таким образом, Поляризационный тензор представится в виде

$$\rho_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \frac{i}{2}e_{\alpha\beta}A, \quad S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$$

т.е. сводится к одному вещественному симметричному тензору и одному псевдоскаляру.

Для поляризованной по кругу волны вектор $\mathbf{E}_0 = \text{const}$, причем

$$E_{02} = \pm i E_{01}$$

Легко видеть, что при этом $S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$, а $A = \pm 1$.

Напротив, для линейно поляризованной волны постоянный вектор $\mathbf{E}_0$ может быть выбран вещественным, так что $A = 0$.

В общем случае величину A можно назвать степенью круговой поляризации; она пробегает значения от $+1$ до -1 , причем эти предельные значения отвечают соответственно Право- и левоциркулярно поляризованным волнам.

Вещественный тензор $S_{\alpha\beta}$, как и всякий симметричный тензор, может быть приведен к главным осям с двумя различными главными значениями, которые обозначим через λ_1 и λ_2 .

Направления главных осей взаимно перпендикулярны.

Обозначая через $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$ орты (единичные векторы) этих направлений, можно представить $S_{\alpha\beta}$ в виде

$$S_{\alpha\beta} = \lambda_1 n_\alpha^{(1)} n_\beta^{(1)} + \lambda_2 n_\alpha^{(2)} n_\beta^{(2)}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

1. Величины λ_1 и λ_2 положительны и пробегают значения от 0 до 1. Пусть $A = 0$, так что $\rho_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}$.

Каждый из двух членов в (50.10) имеет вид произведения двух компонент постоянного вещественного вектора ($\sqrt{\lambda_1}\mathbf{n}^{(1)}$ или $\sqrt{\lambda_2}\mathbf{n}^{(2)}$).

Другими словами, каждый из этих членов соответствует линейно поляризованному свету.

Далее, мы видим, что в (50.10) нет члена, содержащего произведения компонент этих двух волн. Это означает, что обе части можно рассматривать как физически независимые друг от друга, или, как говорят, некогерентные. Действительно, если две волны независимы друг от друга, то среднее значение произведения $E_\alpha^{(1)} E_\beta^{(2)}$ равно произведению средних значений каждого из множителей, и поскольку каждое из последних равно нулю, то и

$$\overline{E_\alpha^{(1)} E_\beta^{(2)}}$$

Таким образом, мы приходим к результату, что при $A = 0$ частично поляризованную волну можно представить как наложение двух некогерентных волн (с интенсивностями, пропорциональными λ_1 и λ_2), линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях.

(В общем же случае комплексного тензора $\rho_{\alpha\beta}$ можно показать, что свет может быть представлен как наложение двух некогерентных эллиптически поляризованных волн, эллипсы поляризации которых подобны и взаимно перпендикулярны, - см. задачу 2.)

Пусть φ - угол между осью 1 (ось y) и ортом $\mathbf{n}^{(1)}$; тогда

$$\mathbf{n}^{(1)} = (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad \mathbf{n}^{(2)} = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$$

Вводя величину $l = \lambda_1 - \lambda_2$ (пусть $\lambda_1 > \lambda_2$), представим компоненты тензора (50.10) в следующем виде:

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + l \cos 2\varphi & l \sin 2\varphi \\ l \sin 2\varphi & 1 - l \cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

Таким образом, при произвольном выборе осей y, z поляризационные свойства волны можно характеризовать следующими тремя вещественными параметрами: A - степень круговой поляризации, l - степень максимальной линейной поляризации, φ - угол между направлением $\mathbf{n}^{(1)}$ максимальной поляризации и осью y .

Параметры Стокса (??)

(????????????????)

Вместо этих параметров может представить определенные преимущества другой набор трех параметров:

$$\xi_1 = l \sin 2\varphi, \quad \xi_2 = A, \quad \xi_3 = l \cos 2\varphi$$

(их называют параметрами Стокса).

Поляризационный тензор выражается через них согласно

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}$$

Все три параметра пробегают значения между -1 и +1.

Параметр ξ_3 характеризует линейную поляризацию вдоль осей y и z : значению $\xi_3 = 1$ отвечает полная линейная поляризация вдоль оси y , а значению $\xi_3 = -1$ - вдоль оси z .

Параметр же ξ_1 характеризует линейную поляризацию вдоль направлений, составляющих 45° с осью y : значению $\xi_1 = 1$ отвечает полная поляризация под углом $\varphi = \pi/4$, а значению $\xi_1 = -1$ - под углом $\varphi = -\pi/4$

Определитель тензора (50.13) равен

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \frac{1}{4} (1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)$$

Сравнив с (50.8), мы видим, что

$$P = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$$

Таким образом, при заданной общей степени поляризации P возможны различные типы поляризации, характеризуемые значениями трех величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 с заданной суммой их квадратов; эти величины образуют как бы вектор заданной длины.

Величины $\xi_2 = A$ и $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2} = l$ инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Это обстоятельство в значительной степени очевидно уже из самого смысла этих величин как степеней круговой и линейной поляризаций 1).

Закон преобразования параметров Стокса

(???)

Закон преобразования параметров Стокса при повороте осей y, z на угол φ определяется связью параметров Стокса с компонентами двухмерного тензора в плоскости yz и дается формулами

$$\xi'_1 = \xi_1 \cos 2\varphi - \xi_3 \sin 2\varphi, \quad \xi'_3 = \xi_1 \sin 2\varphi + \xi_3 \cos 2\varphi, \quad \xi'_2 = \xi_2$$

(?? поч?? и где это нужно??)

Разложение света на естественную и поляризационную части

(?? зачем нужно?)

Разложение произвольного частично поляризованного света на «естественную» и «поляризованную» части означает представление тензора $J_{\alpha\beta}$ в виде

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}J^{(e)}\delta_{\alpha\beta} + E_{0\alpha}^{(n)}E_{0\beta}^{(n)*}$$

Первый член отвечает естественной, а второй - поляризованной частям света.

Для определения интенсивностей этих частей замечаем, что определитель

$$\left| J_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}J^{(e)}\delta_{\alpha\beta} \right| = \left| E_{0\alpha}^{(n)}E_{0\beta}^{(n)*} \right| = 0$$

Представив $J_{\alpha\beta} = J\rho_{\alpha\beta}$ в виде (50.13) и решая это уравнение, получим:

$$J^{(e)} = J(1 - P)$$

Интенсивность же поляризованной части $J^{(n)} = \left| \mathbf{E}_0^{(n)} \right|^2 = J - J^{(e)} = JP$. Поляризованная часть света представляет собой, вообще говоря, эллиптически поляризованную волну, причем направления осей эллипса совпадают с главными осями тензора $S_{\alpha\beta}$.

Величины b_1 и b_2 осей эллипса и угол φ , образуемый осью $\mathbf{b}_1$ с осью y , определяются из равенств:

$$b_1^2 + b_2^2 = JP, \quad 2b_1b_2 = JP\xi_2, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

Частично поляризованная волна представляется в виде наложения двух некогерентных эллиптически поляризованных волн

Представим произвольную частично поляризованную волну в виде наложения двух некогерентных эллиптически поляризованных волн.

Для эрмитового тензора $\rho_{\alpha\beta}$ «Главные оси» определяются двумя единичными комплексными ортами $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}\mathbf{n}^* = 1$), удовлетворяющими уравнениям

$$\rho_{\alpha\beta}n_\beta = \lambda n_\alpha$$

Главные значения λ_1 и λ_2 даются корнями уравнения

$$|\rho_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta}| = 0$$

Умножив уравнение (1) с обеих сторон на n_α^* , имеем:

$$\lambda = \rho_{\alpha\beta}n_\alpha^*n_\beta = \frac{1}{J}\overline{|E_{0\alpha}n_\alpha^*|^2}$$

откуда видно, что λ_1, λ_2 вещественны и положительны.

Умножив уравнения

$$\rho_{\alpha\beta}n_\beta^{(1)} = \lambda_1 n_\alpha^{(1)}, \quad \rho_{\alpha\beta}^* n_\beta^{(2)*} = \lambda_2 n_\alpha^{(2)*}$$

первое на $n_\alpha^{(2)*}$, а второе на $n_\alpha^{(1)}$, вычтя почленно одно из другого и воспользовавшись эрмитовостью тензора $\rho_{\alpha\beta}$, получим:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) n_\alpha^{(1)} n_\alpha^{(2)*} = 0$$

Отсюда следует, что $\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(2)*} = 0$, т.е. орты $\mathbf{n}^{(1)}$ и $\mathbf{n}^{(2)}$ ортогональны друг Другу. Искомое разложение волны осуществляется формулой

$$\rho_{\alpha\beta} = \lambda_1 n_{\alpha}^{(1)} n_{\beta}^{(1)*} + \lambda_2 n_{\alpha}^{(2)} n_{\beta}^{(2)*}$$

Всегда можно выбрать комплексную амплитуду так, чтобы из двух взаимно перпендикулярных компонент одна была вещественна, а другая мнима

Положив

$$n_1^{(1)} = b_1, \quad n_2^{(1)} = ib_2$$

(где теперь b_1 и b_2 подразумеваются нормированными условием $b_1^2 + b_2^2 = 1$), получим тогда из уравнения $\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(2)*} = 0$:

$$n_1^{(2)} = ib_2, \quad n_2^{(2)} = b_1$$

Отсюда видно, что эллипсы обоих эллиптически поляризованных колебаний подобны (имеют одинаковые отношения осей), причем один из них повернут на прямой угол относительно другого.

17.5.6 Other Descriptions of Electromagnetic Waves

(то, что тоже есть, но не так нужно)

Подход Гюйгенса-Френеля

(не заносить же это в оптику?)

Подход Дирака (???)

(?? это скорее всего вообще не нужно в ЭД и оптике, так что лишь строчка на это.)

18 Electrostatics and Magnetostatics

Обсудим постоянное электромагнитное поле, то есть поле, не зависящее от времени. (тут сперва разбираю Ландау, потом дополню задачами Киселева и будет сделано)

18.1 Static Electric Field

(по умф заготовки важно сделать для этого раздела!!)

18.1.1 Energy of the Electrostatic Field

Теория

Определим энергию системы зарядов.

При этом будем исходить из представления об энергии поля, т.е. из выражения $W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$ для плотности энергии.

Именно, энергия системы зарядов должна быть равна

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV$$

где $\mathbf{E}$ есть поле, создаваемое этими зарядами, а интеграл берется по всему пространству.

Подставляя сюда $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, можно преобразовать U следующим образом:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \text{grad } \varphi dV = -\frac{1}{8\pi} \int \text{div}(\mathbf{E}\varphi) dV + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \text{div } \mathbf{E} dV$$

Первый из этих интегралов согласно теореме Гаусса равен интегралу от $\mathbf{E}\varphi$ по поверхности, ограничивающей объем интегрирования; но поскольку интегрирование производится по всему пространству,

(?? и???)

О заблуждениях про энергию электростатического поля

(тоже укажу, тут можно ошибаться.)

18.1.2 Dipole Moment

Основные формулы и суть (?!!!)

(потом обязательно выпишу)

Разложение потенциала

Рассмотрим компактную, размера a , систему покоящихся зарядов на больших расстояниях $R \gg a$.

В этом случае потенциал $\phi(\mathbf{R}) = \sum_q \frac{e_q}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_q|}$ можно разложить в ряд Тейлора по степеням малого параметра a/R :

$$\phi(\mathbf{R}) = \sum_q e_q \sum_l \frac{(-1)^l}{l!} (r_q)_{\alpha_1} \dots (r_q)_{\alpha_l} \frac{\partial^l}{\partial R_{\alpha_1} \dots \partial R_{\alpha_l}} \frac{1}{|\mathbf{R}|}$$

Такое разложение называется мультипольным, а тензорные величины, входящие в это разложение в виде

$$\phi(\mathbf{R}) = \sum_l \frac{1}{l! R^{l+1}} n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_l} \mathcal{M}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}, \quad n = \frac{\mathbf{R}}{R},$$

определяют 2^l -польные моменты $\mathcal{M}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$.

Нулевое приближение называется монополем.

В ведущем порядке по отношению размера системы зарядов к расстоянию до точки наблюдения

$$\phi_{(0)}(\mathbf{R}) = \frac{1}{R} \sum_q e_q = \frac{Q}{R}, \quad \sum_q e_q = Q,$$

где Q - полный заряд системы.

Таким образом, в нулевом приближении потенциал электрического поля задается электрическим зарядом системы (электрическим монополем), и он может обращаться в нуль, если система нейтральна.

Дипольное приближение

В первом порядке

$$\phi_{(1)}(\mathbf{R}) = - \sum_q e_q r_q^\alpha \frac{\partial}{\partial R_\alpha} \frac{1}{|\mathbf{R}|} = - \sum_q e_q r_q^\alpha \left(-\frac{1}{|\mathbf{R}|^2} \right) \frac{R_\alpha}{|\mathbf{R}|},$$

$$\phi_{(1)}(\mathbf{R}) = \sum_q e_q \mathbf{r}_q \cdot \mathbf{n} \frac{1}{|\mathbf{R}|^2} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}}{R^2},$$

где введен единичный вектор по направлению радиус-вектора $\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{R}}{R}$ и дипольный момент

$$\mathbf{d} \equiv \sum_q e_q \mathbf{r}_q$$

Электрическое поле диполя определяется выражением

$$\mathcal{E}_{(1)} = -\nabla \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}}{R^2}$$

(??? потренируюсь в том, что ниже)

Для последующих выкладок выполним упражнение и вычислим $[\mathbf{a}, \text{rot } \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, [\nabla, \mathbf{b}]]$.
Записывая покомпонентно,

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta \epsilon_{\gamma\lambda\rho} \partial_\lambda b_\rho = \text{свертка по } \gamma = a_\beta (\delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\rho} - \delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\lambda}) \partial_\lambda b_\rho = a_\beta \partial_\alpha b_\beta - a_\beta \partial_\beta b_\alpha$$

Поэтому, полагая вектор $\mathbf{a}$ постоянным $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{const}}$, находим

$$[\mathbf{a}, \text{rot } \mathbf{b}] = \nabla (\mathbf{a}_{\text{const}} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}.$$

Отсюда, пользуясь правилом дифференцирования произведения $(fg)' = f'g + fg'$, получим

$$\begin{aligned} \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \nabla (\mathbf{a}_{\text{const}} \cdot \mathbf{b}) + \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_{\text{const}}) = \\ &= [\mathbf{a}, \text{rot } \mathbf{b}] + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + [\mathbf{b}, \text{rot } \mathbf{a}] + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} \end{aligned}$$

Тогда, используя полученное нами правило, запишем:

$$\nabla \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}}{R^3} - \left[\mathbf{d}, \text{rot } \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] + (\mathbf{d} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

Для первого члена вычислим

$$\left(\text{rot } \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right)_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta \frac{R_\gamma}{R^3} = \epsilon_{\alpha[\beta\gamma]} \left(\frac{\delta_{\{\beta\gamma\}}}{R^3} - 3 \frac{R_{\{\beta} R_{\gamma\}}}{R^5} \right) = 0,$$

так как свертка антисимметричного тензора с симметричным тождественно равна нулю, и первый член выше зануляется. Для второго члена найдем

$$\mathbf{d}_\beta \partial_\beta \frac{R_\alpha}{R^3} = \mathbf{d}_\beta \left(\frac{\delta_{\beta\alpha}}{R^3} - 3 \frac{R_\beta R_\alpha}{R^5} \right),$$

так что поле диполя

$$\mathcal{E}_{(1)} = \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{R^3}$$

О случаях применения дипольного момента (???)

(давно хотел уже указать это)

Дипольный момент двух полусфер

(запишу из семинаров киселева. мб отдельный раздел с моделями создам)

18.1.3 Multipole Moments

Квадрупольные моменты

Третий член разложения $\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots$ по $1/R_0$ называется квадрупольным потенциалом и равен

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0},$$

где сумма берется по всем зарядам; индекс, указывающий номер заряда, мы здесь опустили; x_α - компоненты вектора $\mathbf{r}$, а X_α вектора $\mathbf{R}_0$. Если сумма зарядов и дипольный момент системы равны нулю, то разложение начинается с $\varphi^{(2)}$.

В выражение (41.2) входят шесть величин $\sum e x_\alpha x_\beta$. Легко видеть, что в действительности поле зависит не от шести независимых величин, а только от пяти. Это следует из того, что функция $1/R_0$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \frac{1}{R_0} \equiv \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = 0$$

(??????)

Мы можем поэтому написать $\varphi^{(2)}$ в виде

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}$$

Определим квадрупольный момент системы как:

$$D_{\alpha\beta} := \sum e \left(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta} \right).$$

Из определения $D_{\alpha\beta}$ следует, что сумма его диагональных компонент равна нулю:

$$D_{\alpha\alpha} = 0$$

Симметричный тензор $D_{\alpha\beta}$ имеет поэтому всего пять независимых компонент. С его помощью можно написать:

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}$$

или, произведя дифференцирование (??????)

$$\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = \frac{3X_\alpha X_\beta}{R_0^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3}$$

и учитывая, что $\delta_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\alpha} = 0$

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2R_0^3}$$

Как и всякий симметричный трехмерный тензор, тензор может быть приведен к главным осям.

При этом в силу условия (41.4) в общем случае лишь два из трех главных значений независимы.

Если же система зарядов симметрична относительно некоторой оси (ось z), то она же является одной из главных осей тензора $D_{\alpha\beta}$, положение двух других осей в плоскости xy произвольно, и все три главных значения связаны между собой:

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}$$

Обозначая компоненту D_{zz} как D (ее называют обычно в этом случае просто квадрупольным моментом), получим потенциал в виде

$$\varphi^{(2)} = \frac{D}{4R_0^3} (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{D}{2R_0^3} P_2(\cos \theta)$$

где θ - угол между $\mathbf{R}_0$ и осью z , а P_2 - полином Лежандра.

Подобно тому как это было сделано для дипольного момента, легко убедиться в том, что квадрупольный момент системы не зависит от выбора начала координат, если равны нулю как полный заряд, так и дипольный момент системы. (???)

Поиск квадрупольного момента системы (??)

(на это есть задачи. вообще в 1й части должно быть это написано.)

Мультипольные моменты

Аналогичным образом можно было бы написать следующие члены разложения (41.1).

l -й член разложения определяется тензором (так называемым тензором 2^l -польного момента) l -го ранга, симметричным по всем своим индексам и обращающимся в нуль при свертывании по любой паре индексов; можно показать, что такой тензор обладает $2l + 1$ независимыми компонентами.

Мы напишем здесь общий член разложения потенциала в другом виде, используя известную из теории сферических функций формулу

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + r^2 - 2rR_0 \cos \chi}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R_0^{l+1}} P_l(\cos \chi)$$

где χ - угол между $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$.

Введем сферические углы Θ, Φ и θ, φ , образуемые соответственно векторами $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$ с фиксированными осями координат, и воспользуемся известной теоремой сложения для сферических функций:

$$P_l(\cos \chi) = \sum_{m=-l}^l \frac{(l - |m|)!}{(l + |m|)!} P_l^{|m|}(\cos \Theta) P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{-im(\Phi - \varphi)}$$

где P_l^m - присоединенные полиномы Лежандра.

Введем также сферические функции

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad m \geq 0$$

$$Y_{l,-|m|}(\theta, \varphi) = (-1)^{-m} Y_{l|m|}^*$$

Тогда разложение $\frac{1}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|}$ примет вид

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r^l}{R_0^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\Theta, \Phi) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

(???????? derive!!!)

Произведя такое разложение в каждом члене суммы (40.1), получим окончательно следующее выражение для l -го члена разложения потенциала:

$$\varphi^{(l)} = \frac{1}{R_0^{l+1}} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Q_m^{(l)} Y_{lm}^*(\Theta, \Phi)$$

где

$$Q_m^{(l)} = \sum_a e_a r_a^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta_a, \varphi_a)$$

Совокупность $2l+1$ величин $Q_m^{(l)}$ составляет 2^l -польный момент системы зарядов.

Определенные таким образом величины $Q_m^{(1)}$ связаны с компонентами вектора дипольного момента $\mathbf{d}$ формулами

$$Q_0^{(1)} = id_z, \quad Q_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}} (d_x \pm id_y)$$

Величины же $Q_m^{(2)}$ связаны с компонентами тензора $D_{\alpha\beta}$ соотношениями

$$\begin{aligned} Q_0^{(2)} &= -\frac{1}{2} D_{zz}, \\ Q_{\pm 1}^{(2)} &= \pm \frac{1}{\sqrt{6}} (D_{xz} \pm iD_{yz}) \\ Q_{\pm 2}^{(2)} &= -\frac{1}{2\sqrt{6}} (D_{xx} - D_{yy} \pm 2iD_{xy}) \end{aligned}$$

(потренируюсь тут потом позже)

Обзор применений мультипольных моментов

Мультипольные моменты как важный параметр в задачах излучения

(вроде только там они и используются. пока других применений не знаю.)

Мультипольные моменты как подготовка к задачам про излучение в гравитации

(мб там в гравитации, где грав волны? или в каких-то точных вычислениях электростатики нужно это? пока не знаю.)

Квадрупольный момент однородно заряженного эллипсоида относительно его центра (?)

Определить квадрупольный момент однородно заряженного эллипсоида относительно его центра.

(это как пример, в записи про электричество все в разы подробнее про это, там много задач решено)

18.1.4 Energy of a System of Charges in an External Field

Опишем систему зарядов, находящуюся во внешнем электрическом поле.

Потенциальная энергия

(? там в школе была у меня какая-то путаница с $1/2$ и интуитивными рассуждениями, потом это подумая)

Посредством $\varphi(\mathbf{r})$ будем теперь обозначать потенциал этого внешнего поля.

Полная потенциальная энергия системы складывается из энергии каждого из зарядов $e_a \varphi(\mathbf{r}_a)$, то есть:

$$U = \sum_a e_a \varphi(\mathbf{r}_a)$$

Выберем снова систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов; $\mathbf{r}_a$ - радиус-вектор заряда e_a В этих координатах.

Предположим, что внешнее поле слабо меняется на протяжении системы зарядов, т.е. является по отношению к этой системе квазиоднородным.

Тогда мы можем разложить энергию U в ряд по степеням $\mathbf{r}_a$:

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots$$

В этом разложении первый член есть

$$U^{(0)} = \varphi_0 \sum_a e_a$$

где φ_0 - значение потенциала в начале координат. В этом приближении энергия системы такова, как если бы все заряды находились в одной точке.

Второй член разложения

$$U^{(1)} = (\text{grad } \varphi)_0 \cdot \sum_a e_a \mathbf{r}_a.$$

Если $\mathbf{E}_0$ - поля в начале координат и дипольный момент d системы, то потенциальная энергия запишется в виде:

$$U^{(1)} = -d\mathbf{E}_0$$

Сила и момент сил

Полная сила, действующая на систему во внешнем квазиоднородном поле, есть, с точностью до рассмотренных членов,

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}_0 \sum e_a + (\text{grad } d\mathbf{E})_0$$

Если полный заряд равен нулю, то первый член исчезает и тогда

$$\mathbf{F} = (d\nabla)\mathbf{E}$$

т.е. сила определяется производными напряженности поля (взятыми в начале координат).

Полный же момент действующих на систему сил есть

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{r}_a \cdot e_a \mathbf{E}_0] = [d\mathbf{E}_0]$$

т.е. определяется самой напряженностью поля.

(? и зачем он, где применяется? тут примеры)

Энергия взаимодействия двух диполей

Две системы с равными нулю суммами зарядами в каждой и дипольными моментами d_1 и d_2 , находящиеся далеко друг от друга по сравнению с их собственными размерами. Потенциальная энергия U взаимодействия этих систем равна:

$$U = \frac{(\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2) R^2 - 3 (\mathbf{d}_1 \mathbf{R}) (\mathbf{d}_2 \mathbf{R})}{R^5}$$

где $\mathbf{R}$ - вектор расстояния между обеими системами.

Действительно, рассмотрим один диполь как находящуюся в поле второй.

Тогда

$$U = -d_2 \mathbf{E}_1$$

где $\mathbf{E}_1$ - поле первой системы.

Подставляя для $\mathbf{E}_1$ выражение (40.8), находим:

$$U = \frac{(\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2) R^2 - 3 (\mathbf{d}_1 \mathbf{R}) (\mathbf{d}_2 \mathbf{R})}{R^5}$$

где $\mathbf{R}$ - вектор расстояния между обеими системами.

Для случая, когда у одной из систем сумма зарядов отлична от нуля (и равна e), получаем аналогичным образом:

$$U = e \frac{d\mathbf{r}}{R^3}$$

где $\mathbf{R}$ - вектор, направленный от диполя к заряду.

Следующий член разложения электростатического поля

(?? не писал уже ли я об этом??)

Третий член разложения потенциальной энергии равен

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

Здесь опущены индексы, указывающие номер заряда; значения вторых производных от потенциала берутся в начале координат.

Но потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha^2} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0$$

Поэтому мы можем написать:

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \sum e \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} r^2 \right)$$

или, окончательно,

$$U^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

Общий член разложения потенциальной энергии

Общий член ряда потенциальной энергии может быть выражен через определенные в предыдущем параграфе 2^l -польные моменты $D_m^{(l)}$.

Для этого надо предварительно разложить потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в ряд по шаровым функциям; общий вид такого разложения:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} r^l \sum_{m=-l}^l a_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

где r, θ, φ - сферические координаты точки, а a_{lm} - постоянные коэффициенты. Составляя сумму (42.1) и учитывая определение (41.13), получим:

$$U^{(l)} = \sum_{m=-l}^l a_{lm} Q_m^{(l)}$$

(?? и что??? что такое Q кст???)

18.1.5 Decomposition of the Electrostatic Field

Разложение потенциала

Рассмотрим поле, создаваемое точечным зарядом e , находящимся в начале координат. Потенциал φ этого поля определяется уравнением

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r}).$$

Разложим φ в пространственный интеграл Фурье, т.е. представим его в виде

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad d^3k = dk_x dk_y dk_z$$

где $\varphi_{\mathbf{k}} = \int \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dV$. Применив к обеим частям интеграла Фурье оператор Лапласа, находим:

$$\Delta\varphi = - \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

так что компонента Фурье от выражения $\Delta\varphi$ есть

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2 \varphi_{\mathbf{k}}$$

С другой стороны, можно найти $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$, взяв компоненту Фурье от обеих частей уравнения (51.1):

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = - \int 4\pi e \delta(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dV = -4\pi e$$

Сравнивая оба полученных выражения, находим:

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2}$$

Эта формула и решает поставленную задачу

Разложение напряженности

Аналогично потенциалу φ можно разложить и напряженность:

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

С помощью (51.2) имеем:

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = - \int i\mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

Сравнивая с (51.4), находим:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} = -i \frac{4\pi e k}{k^2}$$

Отсюда видно, что поле волн, на которое мы разложили кулоново поле, направлено по волновому вектору. Поэтому эти волны можно назвать продольными.

(?? я вот что-то не понял, мы же с постоянным полем работали, как там волны появляются???)

Поле, созданное зарядами, тоже можно формально разложить по плоским волнам (в интеграл Фурье).

Это разложение существенно отличается от разложения электромагнитных волн в пустоте. Действительно, поле зарядов не удовлетворяет однородному волновому уравнению, а потому и каждый член разложения поля не удовлетворяет этому уравнению. Отсюда следует, что для плоских волн, на которые можно разложить поле зарядов, не выполняется соотношение $k^2 = \omega^2/c^2$, которое имеет место для плоских монохроматических электромагнитных волн. В частности, если формально представить электростатическое поле в виде наложения плоских волн, то «частота» этих волн будет равна нулю, так как рассматриваемое поле не зависит от времени; волновые же векторы, конечно, отличны от нуля.

О случаях применения

хз, мб в электростатике нужно, пока не встречал

18.1.6 Electric field at finite temperature

(see books about it. Now, I don't know how to do it)

18.2 Static Magnetic Field

Подробно опишем постоянное магнитное поле.

18.2.1 Main Properties of a Static Magnetic Field

Обзор свойств постоянного магнитного поля

(в 1ю часть отнесу потом)

МП не выполняет работу.

(про это подробнее напишу потом)

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}\mathbf{R}]}{R^3} dV$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} dV = \frac{1}{c} \sum \frac{\bar{e}_a \mathbf{v}_a}{R_a}$$

где R - расстояние от точки наблюдения поля до элемента объема dV ,

С учетом уравнения Лапласа $\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R})$ и выражения для поля электрического диполя

$$\mathcal{E} = \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{d}}{R} \right) = \frac{1}{R^3} \{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}\} - \frac{4\pi}{3} \delta(\mathbf{R}) \mathbf{d}$$

вычисленного ранее в (6.11), находим поле магнитного диполя

$$\mathcal{H} = \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}}{R^3} + \frac{8\pi}{3} \boldsymbol{\mu} \delta(\mathbf{R})$$

доказательство отсутствия магнитных монополей

(пока хз)

вроде экспериментом доказывается. каким?

а что там теоретически люди делают с этим.

Вывод законов постоянного магнитного поля

Рассмотрим среднее по времени магнитное поле $\bar{\mathbf{H}}$, создаваемое зарядами, совершающими финитное движение. Это поле будет теперь функцией только от координат, но не от времени, т.е. будет постоянным.

Для того чтобы найти уравнения, определяющие среднее магнитное поле, усредним по времени уравнения Максвелла $\text{div } \mathbf{H} = 0$, $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$

Первое из них дает просто

$$\text{div } \bar{\mathbf{H}} = 0$$

Во втором уравнении среднее значение производной $\partial \mathbf{E} / \partial t$, как и вообще производной от всякой величины, меняющейся в конечном интервале, равно нулю, поэтому второе уравнение Максвелла приобретает вид

$$\text{rot } \bar{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}$$

Для получения из них $\bar{\mathbf{H}}$, введем средний векторный потенциал $\bar{\mathbf{A}}$ согласно

$$\text{rot } \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{H}},$$

и теперь второе уравнение Максвелла дает

$$\text{grad div } \bar{\mathbf{A}} - \Delta \bar{\mathbf{A}} = \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}$$

И так как на потенциал $\bar{\mathbf{A}}$ можно наложить любое дополнительное условие, выберем его в Лоренцевой калибровке:

$$\text{div } \bar{\mathbf{A}} = 0,$$

тогда уравнение, определяющее векторный потенциал постоянного магнитного поля, приобретает вид

$$\Delta \bar{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}$$

Решение этого уравнения легко найти, заметив, что оно аналогично уравнению для скалярного потенциала постоянного электрического поля $\Delta\varphi = -4\pi\rho$, поэтому по аналогии с его решением $\varphi = \int \frac{\rho}{R}dV$ имеем:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} dV,$$

где R - расстояние от точки наблюдения поля до элемента объема dV ,

$\overline{\mathbf{A}}$ можно также записать через сумму по зарядам, подставляя $j = \rho\mathbf{v}$ и помня, что все заряды точечные. Поэтому, если написать вместо интеграла $\int \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R}dV$ сумму $\sum \frac{e_a\mathbf{v}_a}{R_a}$, то R_a радиус-векторами отдельных частиц, меняющимися при движении зарядов. Имеем:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \frac{\overline{e_a\mathbf{v}_a}}{R_a}$$

где усредняется все выражение, стоящее под чертой.

(?? тут потренируюсь, проверю, пока так понял)

Теперь напряженность поля:

$$\overline{\mathbf{H}} = \text{rot } \overline{\mathbf{A}} = \text{rot } \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} dV$$

Операция rot производится по координатам точки наблюдения, поэтому rot можно перенести под знак интеграла и при дифференцировании считать j постоянным. Раскрывая ротор по формуле для вектора f и скаляра $\mathbf{a}$, $\text{rot } f\mathbf{a} = f \text{rot } \mathbf{a} + [\text{grad } f \cdot \mathbf{a}]$ приходим к произведению $\bar{\mathbf{j}} \cdot \frac{1}{R}$, находим:

$$\text{rot } \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} = \left[\text{grad } \frac{1}{R} \cdot \bar{\mathbf{j}} \right] = \frac{[\bar{\mathbf{j}}\mathbf{r}]}{R^3}$$

и, следовательно, $\overline{\mathbf{H}}$ удовлетворяет так называемому закону Био-Савара:

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \int \frac{[\bar{\mathbf{j}}\mathbf{R}]}{R^3} dV,$$

где радиус-вектор $\mathbf{R}$ направлен из dV в точку наблюдения поля.

(?? а когда нельзя было бы переносить ротор под знак интеграла? не совсем понял пока что)

18.2.2 Magnetic Moment

Вывод магнитного момента

Рассмотрим среднее магнитное поле, создаваемое системой стационарно движущихся зарядов на больших расстояниях от этой системы.

Введем систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов, аналогично тому, как мы делали при дипольном моменте (??!!!).

Пусть радиус-векторы отдельных зарядов $\mathbf{r}_a$, а радиус-вектор точки, в которой мы ищем поле, $\mathbf{R}_0$. Тогда $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a$ есть радиус-вектор от заряда e_a к точке наблюдения. Векторный потенциал с точностью до членов первого порядка по $\mathbf{r}_a$, опуская индекс a для краткости, имеет вид:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \frac{\overline{e_a\mathbf{v}_a}}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a|} = \frac{1}{cR_0} \sum e\bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{c} \sum e\mathbf{v} \left(\mathbf{r} \nabla \frac{1}{R_0} \right)$$

В первом члене можно написать: $\sum e\bar{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r}$, но среднее значение производной от меняющейся в конечном интервале величины $\sum e\mathbf{r}$ равно нулю. Таким образом, для $\bar{\mathbf{A}}$ остается выражение

$$\bar{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c} \sum e\mathbf{v} \left(\mathbf{r} \nabla \frac{1}{R_0} \right) = \frac{1}{cR_0^3} \sum e\mathbf{v} (\mathbf{r}\mathbf{R}_0)$$

(???????)

Преобразуем его следующим образом. Замечая, что $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, мы можем написать (помня, что $\mathbf{R}_0$ есть постоянный вектор):

$$\sum e(\mathbf{R}_0\mathbf{r})\mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0) + \frac{1}{2} \sum e[\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0) - \mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)]$$

При подстановке этого выражения в $\bar{\mathbf{A}}$ среднее значение от первого члена (с производной по времени) снова обратится в нуль, поэтому:

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{2cR_0^3} \sum e [\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0) - \mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)]$$

Введем так называемый магнитный момент: вектор

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e[\mathbf{r}\mathbf{v}],$$

тогда

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{[\mathbf{m}\mathbf{R}_0]}{R_0^3} = \left[\nabla \frac{1}{R_0} \cdot \mathbf{m} \right]$$

This is where the magnetic moment comes from.

Свойства магнитного момента

Если у всех зарядов системы отношение заряда к массе одинаково, то мы можем написать:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e[\mathbf{r}\mathbf{v}] = \frac{e}{2mc} \sum m[\mathbf{r}\mathbf{v}]$$

Если скорости всех зарядов $v \ll c$, то $m\mathbf{v} = \mathbf{p}$ заряда, и мы получаем:

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2mc} \sum [\mathbf{r}\mathbf{p}] = \frac{e}{2mc} \mathbf{M}$$

где $\mathbf{M} = \sum [\mathbf{r}\mathbf{p}]$ механический момент импульса системы.

Таким образом, в нерелятивистском при одинаковом отношении зарядов к массе, отношение магнитного момента к механическому постоянно и равно $/2m$.

Отношение магнитного и механического моментов для системы из двух зарядов в нерелятивистском случае (??)

(??)

Выбирая начало координат в центре инерции обеих частиц, будем иметь $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$ и $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ - импульс относительного движения.

С помощью этих соотношений найдем:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2} \right) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{M}$$

О случаях применения магнитного момента (??)

(пока не встречал, нужно будет - впишу сразу)

Магнитный момент: second derivation по Киселеву (?!!!)

(!! укажу потом, какая же суть этого вывода, а то её легко потерять!!!)

Рассмотрим периодическое финитное² движение ансамбля частиц и его усредненное по периоду поле на больших расстояниях. В результате такого движения возникает не только электрическое, но и статическое магнитное поле. Для его расчета запишем решение для вектор-потенциала в виде запаздывающих потенциалов:

$$\mathcal{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t_r)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}$$

где t_r - время, которое отличается от момента регистрации сигнала на интервал, необходимый для того, чтобы электромагнитная волна достигла точки наблюдения (время распространения):

$$t_r = t - \frac{1}{c} |\mathbf{R} - \mathbf{r}|$$

Для точечных частиц

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t_r) = \sum_q e_q \mathbf{v}_q(\mathbf{r}, t_r) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t_r)), \quad \mathbf{v}_q = \frac{d\mathbf{r}_q}{dt_r}$$

На больших расстояниях проведем разложение по малому размеру системы с точностью до членов первого порядка малости. В нулевом приближении

$$\langle \mathcal{A}_{(0)} \rangle = \frac{1}{c} \sum e_q \frac{\langle \mathbf{v}_q \rangle}{R}$$

и усреднение по периоду полной производной периодической функции с периодом T дает ноль:

$$\left\langle \frac{df(t)}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{df(t)}{dt} dt = \frac{1}{T} [f(T) - f(0)] = 0$$

так что

$$\langle \mathbf{v}_q \rangle = 0$$

и

$$\langle \mathcal{A}_{(0)} \rangle = 0$$

В первом порядке

$$\langle \mathcal{A}_{(1)} \rangle = \frac{1}{c} \sum_q e_q \left\{ \langle \mathbf{v}_q (-\mathbf{r}_q)^\alpha \rangle \partial_\alpha \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \left\langle \frac{d\mathbf{v}_q}{dt_r} (-\mathbf{r}_q \cdot \nabla) t_r \right\rangle \right\}$$

где мы учли, что скорость также зависит от расстояний через аргумент запаздывания по времени, но этот вклад не существен для данного случая усреднения по периоду, поскольку $\langle \mathbf{v}(t_r) - \mathbf{v}(t - R/c) \rangle = 0$ для периодического движения, и, в то же время, с точностью рассматриваемого приближения первого порядка малости по координатам частиц в системе $\langle \mathbf{v}(t_r) - \mathbf{v}(t - R/c) \rangle = \langle \dot{\mathbf{v}}(-\mathbf{r} \cdot \nabla t_r) \rangle$. Далее,

$$\partial_\alpha \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \frac{\mathbf{R}_\alpha}{R} = -\frac{\mathbf{n}_\alpha}{R^2}$$

а для среднего запишем:

$$\langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{r}_\alpha \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{v}_\alpha \mathbf{r}_\beta + \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha) \right\rangle$$

где опять можно отбросить нулевое значение для среднего от периодической функции и получить

$$\langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{r}_\alpha \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}_\beta \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{v}_\alpha \mathbf{r}_\beta \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_{\beta\alpha\gamma} \langle \mathbf{v} \times \mathbf{r} \rangle_\gamma$$

откуда

$$\langle \mathcal{A}_{(1)} \rangle = \frac{1}{2cR^2} \sum_q e_q \langle (\mathbf{r}_q \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}_q - (\mathbf{v}_q \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r}_q \rangle = \frac{1}{2cR^2} \sum_q e_q \langle \mathbf{r}_q \times \mathbf{v}_q \rangle \times \mathbf{n}$$

так что, определяя величину магнитного диполя

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_q e_q \langle \mathbf{r}_q \times \mathbf{v}_q \rangle$$

можно записать вектор-потенциал в первом приближении:

$$\langle \mathcal{A}_{(1)} \rangle = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}}{R^2} = \text{rot} \frac{\boldsymbol{\mu}}{R}$$

Отсюда несложно получить выражение для магнитного поля магнитного момента

$$\mathcal{H} = \text{rot} \langle \mathcal{A}_{(1)} \rangle = \nabla \times \left(\nabla \times \frac{\boldsymbol{\mu}}{R} \right) = \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{\mu}}{R} \right) - \mu \nabla^2 \frac{1}{R}$$

С учетом уравнения Лапласа $\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R})$ и выражения для поля электрического диполя

$$\mathcal{E} = \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{d}}{R} \right) = \frac{1}{R^3} \{ 3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{d} \} - \frac{4\pi}{3} \delta(\mathbf{R}) \mathbf{d}$$

вычисленного ранее в (6.11), находим поле магнитного диполя

$$\mathcal{H} = \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}}{R^3} + \frac{8\pi}{3} \boldsymbol{\mu} \delta(\mathbf{R})$$

Как видим, формула для статического магнитного поля магнитного диполя в точности повторяет регулярную часть выражения для статического электрического поля электрического диполя, в то время как вклад с дельта-функцией отличается и знаком, и фактором удвоения.

О важности контактного члена

(киселев говорил, потом укажу это, пока и лень и не знаю. в сверхтонком расщеплении мб.)

18.2.3 Larmor's Theorem

(!!! прописать нужно пар 19 ландау про постоянное поле, это супер важно!!!)

суть теоремы Лармора

хз

Средняя действующая на систему зарядов во внешнем постоянном однородном магнитном поле сила нулевая

(тут идея всё другое привести, если не многое будет - удалю)

Средняя по времени сила, действующая на систему зарядов во внешнем постоянном однородном магнитном поле есть:

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum \frac{e}{c} \overline{[\mathbf{v}\mathbf{H}]} = \overline{\frac{d}{dt} \sum \frac{e}{c} [\mathbf{r}\mathbf{H}]} = 0.$$

Она обращается в нуль как среднее значение производной по времени от всякой величины, меняющейся в конечных пределах.

(мб добавлю, почему это важно)

Магнитный момент системы в магнитном поле

Среднее значение момента сил

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c} \overline{[\mathbf{r}[\mathbf{v}\mathbf{H}]]}$$

можно выразить через магнитный момент системы, для чего пишем, раскрывая двойное векторное произведение: (?? проверю позже??)

$$\mathbf{K} = \sum \frac{e}{c} \{ \mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{H}) - \mathbf{H}(\mathbf{v}\mathbf{r}) \} = \sum \frac{e}{c} \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{H}) - \frac{1}{2} \mathbf{H} \frac{d}{dt} r^2 \right\}$$

При усреднении второй член обращается в нуль, так что (??)

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c} \overline{\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{H})} = \frac{1}{2c} \sum e \{ \overline{\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{H})} - \overline{\mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{H})} \}$$

и окончательно

$$\bar{\mathbf{K}} = [\bar{\mathbf{m}}\mathbf{H}].$$

Функция Лагранжа зарядов в магнитном поле

(?? проделаю позже вывод ниже)

Функция Лагранжа системы зарядов во внешнем постоянном однородном магнитном поле содержит дополнительный член по отношению к функции Лагранжа замкнутой системы:

$$L_H = \sum \frac{e}{c} \mathbf{A}\mathbf{v} = \sum \frac{e}{2c} [\mathbf{H}\mathbf{r}]\mathbf{v} = \sum \frac{e}{2c} [\mathbf{r}\mathbf{v}]\mathbf{H} = \mathbf{m}\mathbf{H}$$

(мы воспользовались выражением $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{H}\mathbf{r}]$ для векторного потенциала однородного поля). И записали через магнитный момент

Система зарядов в центрально-симметричном электростатическом поле (?!!!)

Рассмотрим систему зарядов, совершающих финитное движение со скоростями $v \ll c$ в центрально-симметричном электрическом поле, создаваемом некоторой неподвижной частицей.

Перейдем от неподвижной системы координат к системе, равномерно вращающейся вокруг оси, проходящей через неподвижную частицу. В неподвижной системе функция Лагранжа системы зарядов есть $L = \sum \frac{mv^2}{2} - U$, где U - потенциальная энергия зарядов во внешнем электрическом поле вместе с энергией их взаимодействия друг с другом.

При переходе к вращающейся системе координат U остается неизменной, так как является функцией от расстояний зарядов до неподвижной частицы и от их взаимных расстояний. А скорость $\mathbf{v}$ частицы в новой системе координат связана с ее же скоростью $\mathbf{v}'$ в старой системе соотношением $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [\Omega \mathbf{r}]$ где $\mathbf{r}$ - радиус-вектор частицы, а Ω - угловая скорость вращающейся системы координат. Поэтому в новой системе функция Лагранжа будет

$$L = \sum \frac{m}{2} (\mathbf{v} + [\Omega \mathbf{r}])^2 - U$$

Предположим, что у всех частиц отношение e/m зарядов к массам одинаково, и положим

$$\Omega = \frac{e}{2mc} \mathbf{H}$$

Тогда в первом порядке по H функция Лагранжа приобретает вид

$$L = \sum \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2c} \sum e [\mathbf{H} \mathbf{r}] \mathbf{v} - U$$

Дальше какая-то теория

Мы видим, что она совпадает с функцией Лагранжа, которой описывалось бы движение рассматриваемых зарядов в неподвижной системе координат при наличии постоянного магнитного поля (ср.

(45.2)).

Таким образом, мы приходим к результату, что в нерелятивистском случае поведение системы зарядов с одинаковыми отношениями e/m , совершающих финитное движение в центрально-симметричном электрическом поле и в слабом однородном магнитном поле $\mathbf{H}$, эквивалентно поведению этой же системы зарядов в том же электрическом поле в системе координат, равномерно вращающейся с угловой скоростью (45.4).

Это утверждение составляет содержание так называемой теоремы Лармора, а угловая скорость $\Omega = eH/2mc$ называется ларморовой частотой.

К этому же вопросу можно подойти с другой точки зрения.

При достаточно слабом магнитном поле H ларморова частота мала по сравнению с частотами финитного движения данной системы зарядов, и можно рассматривать относящиеся к этой системе величины, усредненные по временам, малым по сравнению с периодом $2\pi/\Omega$.

Эти величины будут медленно (с частотой Ω) меняться со временем.

Рассмотрим изменение среднего механического момента системы $\bar{\mathbf{M}}$.

Согласно известному уравнению механики производная $\dot{\bar{\mathbf{M}}}$ равна моменту действующих на систему сил $\bar{\mathbf{K}}$.

Поэтому имеем, с помощью формулы (45.1):

$$\frac{d\bar{\mathbf{M}}}{dt} = \bar{\mathbf{K}} = [\bar{\mathbf{m}} \mathbf{H}]$$

Если отношение e/m для всех частиц в системе одинаково, то механический и магнитный моменты пропорциональны друг другу, и с помощью формул (44.5) и (45.4) находим:

$$\frac{d\bar{\mathbf{M}}}{dt} = -[\Omega \bar{\mathbf{M}}]$$

Это уравнение означает, что вектор $\bar{\mathbf{M}}$ (а с ним и магнитный момент $\bar{\mathbf{m}}$) вращается с угловой скоростью $-\Omega$ вокруг направления поля, сохраняя при этом свою абсолютную величину и угол, образуемый им с этим направлением (так называемая ларморова прецессия).

О случаях применения теоремы Лармона (??)

хз

18.2.4 Magnetic Dipole (??)

см семинары киселева на его канале на ютубе

Магнитный диполь во внешнем поле (??)

(киселев)

Запишем действие для взаимодействия тока системы частиц с внешним полем

$$S_{\text{int}}(\mathcal{A}) = -\frac{1}{c} \sum_q e_q \int \mathcal{A}_\mu(x_q) dx_q^\mu$$

для случая магнитного поля, которое очень слабо меняется в пределах системы частиц, совершающих финитное периодическое движение:

$$S_{\text{int}}(\mathcal{A}) = -\frac{1}{c} \sum_q e_q \int dt \frac{d\mathbf{r}_q^\alpha}{dt} \mathcal{A}_\alpha = \frac{1}{c} \int dt \sum_q e_q \mathbf{v}_q \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}_q)$$

Поскольку магнитное поле слабо меняется в области движения системы, мы можем положить его равным своему постоянному значению в центре системы

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}_q) \approx \mathcal{H}_0$$

и воспользоваться формулой (7.13) для вектор-потенциала, выражающей его через магнитное поле, так что

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}_q) = -\frac{1}{2} \mathbf{r}_q \times \mathcal{H}_0$$

и лагранжиан взаимодействия в этом приближении примет вид

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \approx -\frac{1}{2c} \sum_q e_q \mathbf{v}_q \cdot \mathbf{r}_q \times \mathcal{H}_0 = -\frac{1}{2c} \sum_q e_q (\mathbf{v}_q \times \mathbf{r}_q) \cdot \mathcal{H}_0$$

Тогда определение магнитного момента

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_q e_q \langle \mathbf{r}_q \times \mathbf{v}_q \rangle$$

позволяет записать для вклада магнитного диполя

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathcal{H}_0$$

где, напомним, $\mathcal{H}_0$ - магнитное поле в точке расположения диполя. Потенциальная энергия такого взаимодействия, согласно обычным правилам механики,

$$U = -\mathcal{L}_{\text{int}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathcal{H}_0$$

т.е. магнитный диполь имеет минимальную энергию в поле, если он ориентирован по магнитному полю. Сила, возникающая вследствие такого взаимодействия, задается выражением

$$\mathbf{F} = \nabla \mathcal{L}_{\text{int}} = \nabla (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathcal{H}_0)$$

где мы считаем вектор магнитного момента постоянным. В тензорных обозначениях евклидова пространства, опуская для краткости символ ведущего приближения у магнитного поля,

$$F_\alpha = \mu^\beta \nabla_\alpha \mathcal{H}_\beta = \mu^\beta (\nabla_\alpha \mathcal{H}_\beta - \nabla_\beta \mathcal{H}_\alpha) + \mu^\beta \nabla_\beta \mathcal{H}_\alpha$$

Первый вклад выражается в виде

$$(\nabla_\alpha \mathcal{H}_\beta - \nabla_\beta \mathcal{H}_\alpha) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha'\beta'} \nabla_{\alpha'} \mathcal{H}_{\beta'} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\text{rot } \mathcal{H})_\gamma$$

В силу уравнений Максвелла для ротора магнитного поля при отсутствии электрического поля и в точке, где нет внешних токов, имеем

$$\text{rot } \mathcal{H}_0 = 0$$

и, в итоге,

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathcal{H}_{\text{ext.}}$$

где мы ввели обозначение для внешнего магнитного поля (external), которое, вообще говоря, может быть неоднородно, что приводит, как видим, к возникновению силы, действующей на частицу с магнитным моментом.

Связь магнитного момента и квантовых явлений (??)

(важная связь, пойму нормально - пропишу)

Прецессия в однородном поле

Для одной частицы определение магнитного дипольного момента эквивалентно записи

$$\boldsymbol{\mu} = \bar{g} \mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad \bar{g} = g \frac{e}{2mc\gamma}$$

т.е. магнитный момент пропорционален орбитальному моменту $\mathbf{l}$, и коэффициент пропорциональности $\bar{g}$ носит название гиромагнитного отношения, величина $\gamma \bar{g}/g$ - магнетон, а фактор g - же-фактор Ланде (для орбитального момента частицы он равен единице, а для собственного магнитного момента частицы полагают $\gamma = 1$, а значение фактора Ланде зависит от природы самой частицы, например, для элементарной заряженной массивной частицы со спином $\frac{1}{2}$ он с высокой точностью равен 2). Это же выражение для связи магнитного момента с орбитальным справедливо и для системы тождественных частиц. В общем случае полагают, что собственный магнитный момент системы или частицы связан с орбитальным с помощью фактора Ланде вне зависимости от наличия или отсутствия внешнего магнитного поля за счет сил, которые действуют внутри системы. В таком случае можно говорить о том, что гамильтониан взаимодействия орбитального момента системы с магнитным полем имеет вид

$$H_{\text{int}} = -\bar{g} \mathbf{l} \cdot \mathcal{H}$$

В гамильтоновой механике эволюция динамической переменной $F(q, p, t)$ задается скобкой Пуассона этой величины с функцией Гамильтона $\{F, H\}_{\mathbb{P}}$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}_{\mathbb{P}}$$

где

$$\{F, G\}_{\mathbb{P}} = \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial q^\alpha}$$

где, конечно, подразумевается применение правила Эйнштейна для суммирования по неммым индексам. Для эволюции орбитального момента в однородном и постоянном магнитном поле необходимо вычислить

$$\frac{dl_\iota}{dt} = -\bar{g}\mathcal{H}^\beta \left\{ \frac{\partial l_\iota}{\partial r^\alpha} \frac{\partial l_\beta}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial l_\iota}{\partial p_\alpha} \frac{\partial l_\beta}{\partial r^\alpha} \right\} = -\bar{g}\mathcal{H}^\beta \{l_\iota, l_\beta\}_{\mathbb{P}}$$

так что подставляя

$$l_\iota = \epsilon_{\iota\kappa\lambda} r_\kappa p_\lambda, \quad l_\beta = \epsilon_{\beta\gamma\eta} r_\gamma p_\eta$$

находим скобку Пуассона для компонент орбитального момента

$$\begin{aligned} \{l_\iota, l_\beta\}_{\mathbb{P}} &= \epsilon_{\iota\kappa\lambda} \epsilon_{\beta\gamma\eta} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r^\alpha} r_\kappa p_\lambda \right) \left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha} r_\gamma p_\eta \right) - \left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha} r_\kappa p_\lambda \right) \left(\frac{\partial}{\partial r^\alpha} r_\gamma p_\eta \right) \right] \\ &= \epsilon_{\iota\kappa\lambda} \epsilon_{\beta\gamma\eta} [\delta_\kappa^\alpha p_\lambda r_\gamma \delta_\eta^\alpha - r_\kappa \delta_\lambda^\alpha \delta_\gamma^\alpha p_\eta] = \epsilon_{\iota\kappa\lambda} \epsilon_{\beta\gamma\eta} [\delta_{\kappa\eta} p_\lambda r_\gamma - r_\kappa \delta_{\lambda\gamma} p_\eta] \\ &= (\delta_{\iota\gamma} \delta_{\lambda\beta} - \delta_{\iota\beta} \delta_{\lambda\gamma}) p_\lambda r_\gamma - (\delta_{\iota\eta} \delta_{\kappa\beta} - \delta_{\iota\beta} \delta_{\kappa\eta}) r_\kappa p_\eta \\ &= r_\iota p_\beta - \delta_{\iota\beta} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - r_\beta p_\iota + \delta_{\iota\beta} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) = r_\iota p_\beta - r_\beta p_\iota \\ &= \epsilon_{\iota\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha'\beta'} r_{\alpha'} p_{\beta'} = \epsilon_{\iota\beta\gamma} (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_\gamma = \epsilon_{\iota\beta\gamma} l_\gamma \end{aligned}$$

Значит,

$$\frac{dl_\iota}{dt} = -\bar{g} \epsilon_{\iota\beta\gamma} l_\gamma \mathcal{H}^\beta \Rightarrow \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \bar{g} \mathbf{l} \times \mathcal{H}$$

или для магнитного момента

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \bar{g} \boldsymbol{\mu} \times \mathcal{H}$$

т.е. магнитный момент вращается вокруг оси магнитного поля с частотой $\boldsymbol{\omega} = -\omega_g \mathcal{H} / \mathcal{H}$,

$$\omega_g = \bar{g} \mathcal{H} = \frac{g}{2} \frac{e \mathcal{H}}{mc \gamma} = \frac{g}{2} \omega$$

где ω - ларморовская частота вращения частицы в однородном магнитном поле.

Вращение спина в магнитном поле

(тут перечитаю киселева, а то где-то мб важная его теория вылетела)

При движении в однородном и постоянном магнитном поле $\mathcal{H}$ траектория частицы удовлетворяет уравнению движения

$$m \gamma \dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{H}$$

т.е. имеет место вращение с Ларморовской частотой

$$\boldsymbol{\omega}_L = -\frac{e \mathcal{H}}{mc \gamma}$$

так что

$$\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{v}.$$

Собственный магнитный момент частицы $\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2mc} g \mathbf{s}$ где s - спин частицы, подвергается действию двух эффектов. Во-первых, спин начинает вращаться за счет прецессии в постоянном магнитном поле

$$\dot{\mathbf{s}}^{\{1\}} = \frac{g}{2} \gamma \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{s},$$

где гамма-фактор появился ввиду того, что он не входит в гиромагнитное отношение для связи магнитного момента частицы со спином.

Во-вторых, поскольку частица движется с ускорением, то вектор собственного спина частицы, который покоится в системе покоя частицы, будет испытывать вращение за счет Томасовской прецессии системы покоя частицы:

$$\dot{s}^{\{2\}} = \omega_{\text{Th}} \times \mathbf{s}, \quad \omega_{\text{Th}} = -(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}}{v^2}$$

В постоянном магнитном поле эта частота

$$\omega_{\text{Th}} = -\frac{\gamma - 1}{v^2} \mathbf{v} \times (\omega_L \times \mathbf{v}) = -(\gamma - 1)\omega_L$$

(посмотрю Томаса прецессию еще раз, а то пока слабо взята!!)

За счет этих двух эффектов имеем:

$$\dot{s} = \left\{ \frac{g}{2}\gamma - (\gamma - 1) \right\} \omega_L \times s = \omega_L \times s + \omega_L \times s \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \gamma$$

Первый член в этой формуле показывает, что спин вращается в постоянном магнитном поле также, как и скорость частицы, а второй отвечает за отличие во вращении спина и скорости частицы. Это отличие используется, чтобы измерять отличие g -фактора Ланде от двойки для элементарных частиц (электрона и мюона, например), что предсказывается в квантовой теории поля при учете квантовых петель за счет взаимодействий элементарных частиц. Тогда проекция спина на импульс частицы изменяется в зависимости от времени вращения в магнитном поле.

(??? что в конце не понял и побежал дальше)

О применениях магнитного диполя (?)

(в излучении нужен он??? вообще, хз, так и не понял, что это такое)

18.2.5 Typical Models with Magnetic Dipole: An Overview

О постоянно магнитном поле

Показать, что однородное магнитное поле $\mathbf{H}$, направленное по оси z , может быть описано векторным потенциалом $\mathbf{A}_1 = (0, Hx, 0)$. Градиентным преобразованием перейти к погенциалу $\mathbf{A}_2 = \frac{1}{2}[\mathbf{H} \times \mathbf{r}]$.

Убывающее магнитное поле

Магнитное поле, имеющее составляющую вдоль оси z , убывает вдоль этой оси с постоянным градиентом $\partial H_z / \partial z = -h = \text{const}$. Может ли такое поле быть параллельным оси z во всем пространстве? Найти радиальные компоненты поля вне оси z . Представить картину силовых линий.

Сила, действующей на магнитный диполь в неоднородном поле

Получить формулу $\mathbf{F} = (\mu \nabla) \mathbf{H}$ для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном поле.

Уравнение силовой линии магнитного диполя

Найти в полярных координатах уравнение силовой линии магнитного диполя. Определить, как меняется поле вдоль силовой линии.

энергия взаимодействия движущегося магнитного диполя μ с неподвижным ядром

Определить энергию взаимодействия магнитного диполя μ , движущегося со скоростью $v \ll c$ с неподвижным ядром с зарядом Ze .

18.2.6 Dirac's Monopole

помню, что он есть, у Киселева мб потом прочитаю про это, пока что не актуально.

Суть

Вывод по Киселеву

(у киселева спишу, когда станет актуально)

Рассмотрим для начала множество бесконечно малых электрических диполей, построенных в одну линию,

$$d\mathbf{d} = e\mathbf{l}ds$$

где $\mathbf{l}$ - единичный вектор на луче, а ds - бесконечно малая длина на линии. Так как на линии заряды компенсируют друг друга за исключением концов, мы получим, в итоге, изолированный заряд - электрический монополю, в то время как заряд противоположного знака будет находиться на бесконечности. Таким образом, из электрических диполей можно построить поле электрического монополя. В самом деле, потенциал линии диполей по принципу суперпозиции получается суммированием потенциалов каждого диполя: так что интегральный потенциал, действительно, - потенциал электрического монополя, поле которого

$$\mathcal{E} = \frac{e}{r^3}\mathbf{r}$$

Проведем аналогичное рассмотрение для множества бесконечно малых магнитных диполей, выстроенных в линию,

$$d\boldsymbol{\mu} = m\mathbf{l}ds$$

Тогда интегральный вектор-потенциал такой линии -

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{r}) &= \int [d\boldsymbol{\mu}, (\mathbf{r} + s\mathbf{l})] \frac{1}{|\mathbf{r} + s\mathbf{l}|^3} \\ &= \int m[\mathbf{l}, (\mathbf{r} + s\mathbf{l})] \frac{1}{|\mathbf{r} + s\mathbf{l}|^3} ds = \int m[\mathbf{l}, \mathbf{r}] \frac{1}{|\mathbf{r} + s\mathbf{l}|^3} ds\end{aligned}$$

В полярных координатах с осью z , направленной против вектора $\mathbf{l}$, т.е. по лучу линии диполей,

$$\mathcal{A} \cdot d\mathbf{r} = \mathcal{A}_r \cdot dr + \mathcal{A}_\theta \cdot r d\theta + \mathcal{A}_\phi \cdot r \sin \theta d\phi$$

векторное произведение $[\mathbf{l}, \mathbf{r}]$ закручивается вокруг вектора $\mathbf{l}$, т.е. оно имеет единственную ненулевую компоненту

$$\mathcal{A}_r = 0, \quad \mathcal{A}_\theta = 0, \quad \mathcal{A}_\phi \neq 0$$

Точнее, вводя углы на рисунке,

находим выражение для векторного произведения

$$[\mathbf{l}, \mathbf{r}]_\phi = -r_\perp, \quad r_\perp = r \sin \theta$$

и для расстояния от диполя до точки $\mathbf{r}$

$$|\mathbf{r} + s\mathbf{l}| = \frac{r_\perp}{\sin \theta'}$$

в то время как дифференциал длины линии

$$ds = d \frac{r_{\perp} \cos \theta'}{\sin \theta'} = r_{\perp} d \operatorname{ctg} \theta' = -r_{\perp} \frac{1}{\sin^2 \theta'} d\theta'$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\phi}(\mathbf{r}) &= \int m[\mathbf{l}, \mathbf{r}]_{\phi} \frac{1}{|\mathbf{r} + s\mathbf{l}|^3} ds = m \int_{\pi}^{\theta} \frac{r_{\perp}}{\sin^2 \theta'} r_{\perp} \frac{\sin^3 \theta'}{r_{\perp}^3} d\theta' = \\ &= \frac{m}{r_{\perp}} \int_{\pi}^{\theta} \sin \theta' d\theta' = -\frac{m}{r_{\perp}} \cos \theta' \Big|_{\pi}^{\theta} = -\frac{m}{r_{\perp}} [\cos \theta + 1] \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathcal{A}_r = 0, \quad \mathcal{A}_{\theta} = 0, \quad \mathcal{A}_{\phi} = -\frac{m}{r_{\perp}} [\cos \theta + 1]$$

Пользуясь тригонометрией, можно записать:

$$r_{\perp} = r 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \cos \theta + 1 = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

и получить другое представление:

$$\mathcal{A}_{\phi} = -\frac{m}{r} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$$

Найдем интеграл по контуру-окружности вокруг оси магнитных диполей при фиксированном расстоянии r и θ

$$\begin{aligned} \oint \mathcal{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathcal{A}_{\phi} \cdot r \sin \theta d\phi = 2\pi r_{\perp} \left\{ -\frac{m}{r_{\perp}} [\cos \theta + 1] \right\} \Rightarrow \\ \Phi(\theta) &= \oint \mathcal{A} \cdot d\mathbf{r} = -2\pi m [\cos \theta + 1] \end{aligned}$$

Согласно теореме Стокса

$$\oint \mathcal{A} \cdot d\mathbf{r} = \int \operatorname{rot} \mathcal{A} \cdot d^2s = \int \mathcal{H} \cdot d^2s$$

105 где поверхность имеет своей границей контур интегрирования. При $\theta \rightarrow 0$

$$\Phi(0) = -4\pi m$$

Если поверхность пересекает линию магнитных диполей, т.е. представляет собой малую площадку, стягивающуюся вокруг линии, то $\Phi(0)$ есть, в точности, поток магнитного поля, проходящий через линию к ее концу. Этот поток постоянен.

Если же поверхность охватывает линию, не пересекая ее, т.е. является, например, сферой с центром в начале линии с выколотой точкой пересечения сферы с линией, то мы имеем практически замкнутую поверхность с отрицательной ориентацией (ее стягивающаяся в точку граница обходится по часовой стрелке относительно поверхности), так что поток через нее равен

$$-\oint \mathcal{H} \cdot d^2s = -4\pi m$$

По теореме Гаусса-Остроградского

$$\oint \mathcal{H} \cdot d^2s = \int \operatorname{div} \mathcal{H} d^3r = 4\pi m$$

так что внутри сферы находится магнитный заряд m . К такому же выводу можно прийти, если просто провести аналогию с электрическим полем линии диполей. В самом деле, для единичных диполей выражения для электрического и магнитного полей идентичны (при $r \neq 0$)

$$\mathcal{E} = \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3} \longleftrightarrow \mathcal{H} = \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}}{r^3}$$

так что чисто формально для магнитного поля диполя можно ввести магнитный скалярный потенциал, аналогичный электрическому

$$\mathcal{H} = -\nabla \phi_M$$

для которого можно повторить приведенные в начале этого раздела вычисления для линии диполей и получить поле одиночного магнитного заряда-монополя:

$$\mathcal{H} = \frac{m}{r^3} \mathbf{r}$$

Мы показали в явном виде, что такая дуальность магнитного и электрического полей, действительно, имеет место, т.е. конструктивно нашли конкретное выражение для вектор-потенциала, дающего магнитное поле монополя Дирака.

Однако полученные нами выражения для вектор-потенциала (Д.21) и (Д.22) при этом сингулярны в точке $\theta = 0$, т.е. на линии магнитных диполей. Значит, присутствие магнитных зарядов и, следовательно, неравенство нулю дивергенции магнитного поля можно достичь, в некотором смысле, только для сингулярных вектор-потенциалов. Именно в таком случае удастся избежать зануления выражения, определяющего дивергенцию магнитного поля:

$$\partial_\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta \mathcal{A}_\gamma \neq 0$$

Рассмотренные нами магнитные диполи можно представить как бесконечно малые соленоиды (нейтральны элсктрически, конечно). Поэтому выстроены в линию солсноиды дают на концс как бы магнитный заряд (математически, в точности поле магнитного монополя). При этом через соленоиды проходит поток магнитного поля, равный потоку, исходящему от магнитного монополя. Как мы видели, сумма потоков магнитного поля от монополя и за счет поля внутри соленоидов тождественно равна нулю.

Линия магнитных диполей, конечно, может быть и не прямой, а произвольной, так как поле внутри соленоидов полностью экранировано, и от этого нисколько не изменится поток, приносимый соленоидами в точку расположения монополя. Такая произвольно кривая линия магнитных диполей, на которой вектор-потенциал имеет сингулярность, называется струной Дирака (или нитью Дирака).

Конечно, вектор-потенциал магнитного монополя неоднозначен, так как можно совершить калибровочное, градиентное преобразование, которое не изменит магнитного поля,

$$\mathcal{A}'_\mu = \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu f$$

где f - произвольная регулярная функция от координат. Для вектор-потенциала получим

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} + \nabla f$$

Положим

$$f = m[\cos \theta + 1]\phi$$

и в полярных координатах (см. (Д.21)) найдем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_\phi &= \mathcal{A}_\phi + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0 \\ \mathcal{A}'_r &= \mathcal{A}_r + \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \\ \mathcal{A}'_\theta &= \mathcal{A}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{m}{r} \phi \sin \theta\end{aligned}$$

Как видим, полученный вектор-потенциал (Д.24) уже не имеет явной сингулярности, но вместо этого он приобрел неоднозначность при $\phi = 0, \phi = 2\pi$: в пространстве эти точки совпадают, но предельные переходы с двух концов в эту точку для вектор-потенциала дают разные результаты, т.е. скачок. При этом в любой малой области параметров - сферических координатах - вектор-потенциал описывается вполне гладкими функциями. В этом случае говорят, что вектор-потенциал можно описать как функцию на многообразии, пространстве, локальные свойства которого вполне аналогичны локальным свойствам евклидова пространства, но глобальная топологическая структура которого, вообще говоря, может быть отлична от евклидовой.

Наконец, рассмотрим движение частицы с электрическим зарядом e вокруг нити Дирака в магнитном поле бесконечно близко к этой нити, так что мы будем считать для этой частицы поле однородным. Выпишем адиабатический инвариант - фазовый объем частицы:

$$\mathcal{I} = \oint \mathcal{P} d\mathbf{r} = -\frac{e}{c} \int \mathcal{H} d^2\Sigma$$

Как мы видели,

$$\int \mathcal{H} d^2\Sigma = -4\pi m$$

в то время как квантовая гипотеза Бора гласит, что фазовый объем частицы квантуется:

$$\oint \mathcal{P} d\mathbf{r} = 2\pi\hbar n, \quad n \in \mathbb{N}$$

где $\hbar$ - "постоянная Планка с чертой". Поэтому из (Д.25) следует, что электрический и магнитный заряды связаны квантовым условием Дирака

$$e m = \frac{n}{2} c \hbar, \quad \Longleftrightarrow \quad m = \frac{n}{2} \frac{e}{\alpha}$$

где

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

есть постоянная тонкой структуры $\alpha \approx 1/137$. Поэтому существование монополя могло бы дать объяснение факту квантования заряда: все известные в физике электрические заряды пропорциональны кванту (равному $1/3$ заряда электрона).

Как догадаться до построения такой теории

(???????)

Experimental tests of magnetic monopole

(???????)

О случаях применения

(??????)

18.2.7 Magnetic field at finite temperature

(see books about it. Now, I don't know how to do it)

18.3 Constant Electromagnetic fields

Обсудим постоянные и однородные поля. Если напряженность поля во всех точках пространства одинакова, то поле называют однородным.

(??? пока что-то не применял, так что пока так зависла структура.)

Основные формулы постоянного электромагнитного поля

(продублирую в 1ю часть)

Скалярный потенциал однородного электрического поля есть:

$$\varphi = -\mathbf{E}\mathbf{r}$$

Действительно, при $\mathbf{E} = \text{const}$ имеем $\text{grad}(\mathbf{E}\mathbf{r}) = (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{E}$.

Векторный же потенциал однородного магнитного поля выражается через напряженность этого поля $\mathbf{H}$ в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{H}\mathbf{r}]$$

Действительно, при $\mathbf{H} = \text{const}$ находим с помощью известных формул векторного анализа:

$$\text{rot}[\mathbf{H}\mathbf{r}] = \mathbf{H} \text{div } \mathbf{r} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{r} = 2\mathbf{H}$$

(напомним, что $\text{div } \mathbf{r} = 3$).

Векторный потенциал однородного магнитного поля можно выбрать и иначе, например, в виде

$$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0$$

(ось z выбрана вдоль направления $\mathbf{H}$).

Легко убедиться, что и при таком выборе $\mathbf{A}$ имеет место равенство $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$.

В соответствии с формулами преобразования (18.3) потенциалы (19.4) и (19.5) отличаются друг от друга градиентом некоторой функции: (19.5) получается

Из (19.4) прибавлением ∇f , где $f = -xyH/2$.

(потом нужно выделить основные формулы будет)

О калибровках (?)

(кст, даже ведь в школе мы делали уже это)

Очевидно, что потенциалы постоянного поля можно выбрать так, чтобы они были функциями только от координат, но не от времени.

Постоянное электрическое поле $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ определяется только скалярным потенциалом, а магнитное $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ - векторным потенциалом, ведь.

(????) Легко убедиться в том, что если описывать постоянное электромагнитное поле с помощью не зависящих от времени потенциалов, то к скалярному потенциалу можно прибавить, не изменяя поля, лишь произвольную постоянную (не зависящую ни от координат, ни от времени).

Обычно на φ накладывают еще дополнительное условие, требуя, чтобы он имел определенное значение в определенной точке пространства; чаще всего выбирают φ так, чтобы он был равен нулю на бесконечности, и тогда он становится однозначным.

Векторный потенциал же по-прежнему не однозначен даже для постоянного электромагнитного поля; к нему можно прибавить градиент любой функции координат.

Энергия заряда в постоянном электромагнитном поле

Энергия заряда в поле есть обычная плюс потенциальная $e\varphi$:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi$$

Заметим, что энергия зависит только от скалярного, но не от векторного потенциала, то есть магнитное поле не влияет на энергию зарядов, что связано с тем, что магнитное поле, в противоположность электрическому, не производит над зарядом работы.

Вариационный принцип для траектории частицы в постоянном электромагнитном поле

(в раздел про частицы перенесу. также это в механике мне нужно собрать нормально!)

Вариационный принцип для траектории частицы (принцип Мопертюи) в постоянном электромагнитном поле в релятивистской механике имеет вид:

$$\delta \int \left\{ \sqrt{\frac{1}{c^2}(\mathcal{E} - e\varphi)^2 - m^2 c^2} dl + \frac{e}{c} \mathbf{A} d\mathbf{r} \right\} = 0$$

Действительно, принцип Мопертюи заключается в том, что если полная энергия частицы сохраняется (движение в постоянном поле), то ее траектория может быть определена из вариационного уравнения

$$\delta \int \mathbf{P} d\mathbf{r} = 0,$$

где $\mathbf{P}$ - обобщенный импульс частицы, выраженный через энергию и дифференциалы координат, а интеграл берется вдоль траектории частицы.

Подставляя $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$ и замечая, что направления $\mathbf{p}$ и $d\mathbf{r}$ совпадают, имеем:

$$\delta \int \left(p dl + \frac{e}{c} \mathbf{A} d\mathbf{r} \right) = 0,$$

где $dl = \sqrt{d\mathbf{r}^2}$ есть элемент дуги.

Определяя p из $p^2 + m^2 c^2 = (\mathcal{E} - e\varphi)^2 / c^2$, находим окончательно:

$$\delta \int \left\{ \sqrt{\frac{1}{c^2}(\mathcal{E} - e\varphi)^2 - m^2 c^2} dl + \frac{e}{c} \mathbf{A} d\mathbf{r} \right\} = 0$$

(?? и что с ним дальше делать?? потом узнаю.)

(также укажу, где оно применяется, пока не знаю.)

19 Time-Varying Fields

(пока такая классификация, сойдет. мб потом переделаю.)

19.1 Field of Moving Charges

Обсудим переменные поля, создаваемые движущимися зарядами и всё, что с ними связано.

(лл2 выгрузки пока)

19.1.1 Liénard–Wiechert Potentials

(лл2)

Вывод уравнений

Выведем уравнения, определяющие потенциалы поля, создаваемого движущимися зарядами.

Это удобно сделать в четырехмерном виде, повторив произведенный вывод волнового уравнения с той лишь разницей, что надо использовать уравнения Максвелла

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

с отличной от нуля правой частью.

Такая же правая часть появится и в уравнении (46.8), и после наложения на потенциалы условия Лоренца

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0$$

Получим

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i$$

Это и есть уравнение, определяющее потенциалы произвольного электромагнитного поля.

В трехмерном виде оно записывается в виде двух уравнений - для $\mathbf{A}$ и для φ :

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho\end{aligned}$$

Для постоянного поля они сводятся к уже известным нам уравнениям (36.4) и (43.4), а для переменного поля без зарядов — к однородным волновым уравнениям. Решение неоднородных линейных уравнений (62.3)–(62.4) может быть представлено, как известно, в виде суммы решения этих же уравнений без правой части и частного интеграла уравнений с правой частью.

Запаздывающие потенциалы в ковариантном виде

(у киселева и у Тонга есть, потом допишу, пока не так нужно.)

Запаздывающие потенциалы как решение уравнений

Для нахождения этого частного интеграла разделим все пространство на бесконечно малые участки и определим поле, создаваемое зарядом, находящимся в одном из таких элементов объема.

Вследствие линейности уравнений истинное поле будет равно сумме полей, создаваемых всеми такими элементами.

Заряд d в заданном элементе объема является, вообще говоря, функцией от времени.

Если выбрать начало координат в рассматриваемом элементе объема, то плотность заряда $\rho = de(t)\delta(\mathbf{R})$, где $\mathbf{R}$ расстояние от начала координат.

Таким образом, нам надо решить уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi de(t)\delta(\mathbf{R})$$

Везде, кроме начала координат, $\delta(\mathbf{R}) = 0$, и мы имеем уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае φ обладает центральной симметрией, т.е. есть функция только от R .

Поэтому, если написать оператор Лапласа в сферических координатах, то (62.6) приобретет вид

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Для решения этого уравнения сделаем подстановку $\varphi = \chi(R, t)/R$.

Тогда для χ мы получим:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

Но это есть уравнение плоских волн, решение которого имеет вид:

$$\chi = f_1 \left(t - \frac{R}{c} \right) + f_2 \left(t + \frac{R}{c} \right)$$

Поскольку мы ищем только частный интеграл уравнения, то достаточно взять только одну из функций f_1 и f_2 .

Обычно бывает удобным выбирать $f_2 = 0$ (см. об этом ниже).

Тогда потенциал φ везде, кроме начала координат, имеет вид

$$\varphi = \frac{\chi \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R}$$

Функция χ в этом равенстве пока произвольна; выберем ее теперь так, чтобы получить верное значение для потенциала также и в начале координат.

Иначе говоря, мы должны подобрать χ так, чтобы в начале координат удовлетворялось уравнение (62.5).

Это легко сделать, заметив, что при $R \rightarrow 0$ сам потенциал стремится к бесконечности, а потому его производные по координатам растут быстрее, чем производные по времени.

Следовательно, при $R \rightarrow 0$ в уравнении (62.5) можно пренебречь членом $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ по сравнению с $\Delta\varphi$.

Тогда оно переходит в известное уже нам уравнение (36.9), приводящее к закону Кулона.

Таким образом, вблизи начала координат формула (62.7) должна переходить в закон Кулона, откуда следует, что $\chi(t) = de(t)$, т.е.

$$\varphi = \frac{de \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R}$$

Отсюда легко перейти к решению уравнения (62.4) для произвольного распределения зарядов $\rho(x, y, z, t)$.

Для этого достаточно написать $de = \rho dV$ (dV - элемент объема) и проинтегрировать по всему пространству.

К полученному таким образом решению неоднородного уравнения (62.4) можно прибавить еще решение φ_0 этого же уравнения без правой части.

Таким образом, общее решение имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{R} \rho(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}) dV' + \varphi_0$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad dV' = dx' dy' dz'$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$; R есть расстояние от элемента объема dV' до «точки наблюдения», в которой мы ищем значение потенциала.

Мы будем писать это выражение коротко в виде

$$\varphi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV + \varphi_0$$

где индекс показывает, что значение ρ надо брать в момент времени $t - R/c$, а штрих у dV опущен.

Аналогичным образом имеем для векторного потенциала:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R} dV + \mathbf{A}_0$$

где $\mathbf{A}_0$ - решение уравнения (62.3) без правой части.

Выражения (62.9) – (62.10) (без φ_0 и $\mathbf{A}_0$) называются запаздывающими потенциалами.

Комментарии (??)

В случае неподвижных зарядов (т.е. не зависящей от времени плотности ρ) формула (62.9) переходит в известную уже нам формулу (36.8) для потенциала электростатического поля; формула же (62.10) в случае стационарного движения зарядов переходит (после усреднения) в формулу (43.5) для векторного потенциала постоянного магнитного поля.

Величины φ_0 и $\mathbf{A}_0$ в (62.9) – (62.10) определяются так, чтобы удовлетворить условиям задачи.

Для этого, очевидно, было бы достаточно задать начальные условия, т.е. поле в начальный момент времени.

Однако с такими начальными условиями обычно не приходится иметь дела.

Вместо этого задаются условия на больших расстояниях от системы зарядов в течение всего времени.

Именно, задается падающее на систему внешнее излучение.

Соответственно этому поле, возникающее в результате взаимодействия этого излучения с системой, может отличаться от внешнего поля только излучением, исходящим от системы.

Такое исходящее от системы излучение на больших расстояниях должно иметь вид волны, распространяющейся по направлению от системы, т.е. в направлении возрастающих R .

Но этому условию удовлетворяют именно запаздывающие потенциалы.

Таким образом, последние представляют собой поле, исходящее от системы, а φ_0 и $\mathbf{A}_0$ надо отождествить с внешним полем, действующим на систему.

Потенциалы Лиенара-Вихерта

(?? так пока не понял, это те же, что и запаздывающие?)

Потенциалы Лиенара-Вихерта есть запаздывающие потенциалы для одной частицы:

$$\varphi = \frac{e}{\left(R - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c}\right)}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c\left(R - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c}\right)}$$

где $\mathbf{R}$ - радиус-вектор, проведенный из точки нахождения заряда в точку наблюдения P , и все величины в правых частях равенств должны быть взяты в момент времени t' , определяющийся из (63.1).

Theory

Определим потенциалы поля, создаваемого одним точечным зарядом, совершающим заданное движение по траектории $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$.

Согласно формулам запаздывающих потенциалов поле в точке наблюдения $P(x, y, z)$ в момент времени t определяется состоянием движения заряда в предшествующий момент времени t' , для которого время распространения светового сигнала из точки нахождения заряда $\mathbf{r}_0(t')$ в точку наблюдения P как раз совпадает с разностью $t - t'$.

Пусть $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$ - радиус-вектор от заряда e в точку P вместе с $\mathbf{r}_0(t)$ он является заданной функцией времени.

Тогда момент t определяется уравнением

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t$$

Для каждого значения t это уравнение имеет всего один корень t' 1).

В системе отсчета, в которой в момент времени t' частица покоится, поле в точке наблюдения в момент t дается просто кулоновским потенциалом, т.е.

$$\varphi = \frac{e}{R(t')}, \quad \mathbf{A} = 0$$

Выражения для потенциалов в произвольной системе отсчета мы получим теперь, написав такой 4-вектор, который бы при скорости $\mathbf{v} = 0$ давал для φ и $\mathbf{A}$ значения (63.2).

Замечая, что согласно (63.1) φ из (63.2) можно написать также и в виде

$$\varphi = \frac{e}{c(t - t')}$$

находим, что искомый 4-вектор есть

$$A^i = e \frac{u^i}{R_k u^k}$$

где u^k - 4-скорость заряда, а 4-вектор $R^k = [c(t - t'), \mathbf{r} - \mathbf{r}']$, причем x', y', z', t' связаны друг с другом соотношением (63.1); последнее может быть записано в инвариантном виде как

$$R_k R^k = 0$$

Переходя теперь снова к трехмерным обозначениям, получим для потенциалов поля, создаваемого произвольно движущимся точечным зарядом, следующие выражения:

$$\varphi = \frac{e}{\left(R - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c}\right)}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c\left(R - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c}\right)}$$

где $\mathbf{R}$ - радиус-вектор, проведенный из точки нахождения заряда в точку наблюдения P , и все величины в правых частях равенств Должны быть взяты в момент времени t' , определяющийся из (63.1).

Потенциалы поля в виде (63.5) называются потенциалами Лиенара-Вихерта.

Для вычисления напряженностей электрического и магнитного полей по формулам

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$$

надо дифференцировать φ и $\mathbf{A}$ по координатам x, y, z точки и моменту t наблюдения.

Между тем формулы (63.5) выражают потенциалы как функции от t' и лишь через соотношение (63.1) - как неявные функции от x, y, z .

Поэтому для вычисления искомых производных надо предварительно вычислить производные от t' .

Дифференцируя соотношение $R(t') = c(t - t')$ по t , имеем:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right)$$

(значение $\partial R / \partial t'$ получается дифференцированием тождества $R^2 = \mathbf{R}^2$ И подстановкой $\partial \mathbf{R}(t') / \partial t = -\mathbf{v}(t')$; знак минус здесь связан с тем, что $\mathbf{r}$ есть радиус-вектор от заряда e в точку P , а не наоборот).

Отсюда

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{vR}{Rc}}$$

Аналогично, дифференцируя то же соотношение по координатам, найдем:

$$\text{grad } t' = -\frac{1}{c} \text{grad } R(t') = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial R}{\partial t'} \text{grad } t' + \frac{\mathbf{R}}{R} \right)$$

откуда

$$\text{grad } t' = -\frac{\mathbf{R}}{c \left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c} \right)}$$

Напряженности электрического и магнитного поля в случае запаздывающих потенциалов

С помощью этих формул не представляет труда вычислить поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

(?? вычисления - хз.)

Опуская промежуточные вычисления, приведем результат:

$$\mathbf{E} = e \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c} \right)^3} \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) + \frac{e}{c^2 \left(R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{c} \right)^3} \left[\mathbf{R} \left[\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R \right) \dot{\mathbf{v}} \right] \right],$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R} [\mathbf{R}\mathbf{E}].$$

Здесь $\dot{\mathbf{v}} = \partial \mathbf{v} / \partial t'$; все величины в правых сторонах равенств берутся в момент t' .

Интересно отметить, что магнитное поле оказывается везде перпендикулярным к электрическому.

Электрическое же поле состоит из двух частей различного характера. Первый член зависит только от скорости частицы (но не от ее ускорения) и на больших расстояниях меняется как $1/R^2$. Второй член зависит от ускорения, а при больших R меняется как

$1/R$. Мы увидим ниже, что этот последний член связан с излучаемыми частицей электромагнитными волнами.

(?? чет пропустил, почему так???)

Что касается первого члена, то, будучи независимым от ускорения, он должен соответствовать полю, создаваемому равномерно движущимся зарядом. Действительно, при постоянной скорости разность

$$\mathbf{R}_{t'} - \frac{\mathbf{v}}{c} R_{t'} = \mathbf{R}_t - \mathbf{v} (t - t')$$

есть расстояние $\mathbf{R}_t$ от заряда до точки наблюдения в самый момент наблюдения.

Легко также убедиться непосредственной проверкой в том, что

$$R_{t'} - \frac{1}{c} \mathbf{R}_{t'} \mathbf{v} = \sqrt{R_t^2 - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v} \mathbf{R}_t]^2} = R_t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta_t}$$

где θ_t - угол между $\mathbf{R}_t$ и $\mathbf{v}$.

В результате первый член в (63.8) оказывается совпадающим с выражением (38.8).

Вывод потенциалы Лиенара-Вихерта путем интегрирования

(?? мб это более используемый подход, но потренироваться нужно.)

Вывести потенциалы Лиенара-Вихерта путем интегрирования в формулах (62.9) – (62.10).

Напишем формулу (62.8) в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \iint \frac{\rho(\mathbf{r}', \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta \left(\tau - t + \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right) d\tau dV'$$

(и аналогично для $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$), введя в нее лишнюю δ -функцию и тем самым избавившись от неявных аргументов в функции ρ .

Для точечного заряда, движущегося по заданной траектории $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$, имеем:

$$\rho(\mathbf{r}', \tau) = e \delta [\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\tau)]$$

Подставив это выражение и произведя интегрирование по dV' , получим:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = e \int \frac{d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|} \delta \left[\tau - t + \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)| \right]$$

Интегрирование по $d\tau$ производится с помощью формулы

$$\delta[F(\tau)] = \frac{\delta(\tau - t')}{|F'(\tau)|}$$

(где t' - корень уравнения $F(t') = 0$) и приводит к формуле (63.5).

Качественное описание распространения поля от движущейся частицы

(тут опишу подробно, как Киселев говорил, что поле ортогонально ускорению, но при движении частицы, оно вытягивается в конус $1/\gamma$.)

Об особенностях работы с запаздывающим временем

(укажу. как там не запутаться с преобразованиями его?? потому что там такие преобразования, что даже просмотрев 5 раз, повторить не можешь. разложения эти все... укажу эти особенности, чтобы четко понимать)

19.1.2 Spectral Decomposition of Retarded Potentials

Суть спектрального разложения

(потом также укажу применения)

Theory

Поле, создаваемое движущимися зарядами, можно разложить на монохроматические волны. Потенциалы отдельной монохроматической компоненты поля имеют вид $\varphi_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$. Плотности заряда и тока создающей поле системы тоже можно подвергнуть спектральному разложению. Ясно, что за создание определенной монохроматической компоненты поля ответственны соответствующие компоненты от ρ и $\mathbf{j}$.

Для того чтобы выразить спектральные компоненты поля через компоненты плотностей заряда и тока, подставляем в (62.9) вместо 4 и ρ соответственно $\varphi_\omega e^{-i\omega t}$ и $\rho_\omega e^{-i\omega t}$.

Мы находим тогда:

$$\varphi_\omega e^{-i\omega t} = \int \rho_\omega \frac{e^{-i\omega(t-R/c)}}{R} dV$$

Сокращая на $e^{-i\omega t}$ и вводя абсолютную величину волнового вектора $k = \omega/c$, имеем:

$$\varphi_\omega = \int \rho_\omega \frac{e^{ikR}}{R} dV$$

Аналогично, для $\mathbf{A}_\omega$ получим:

$$\mathbf{A}_\omega = \int \mathbf{j}_\omega \frac{e^{ikR}}{cR} dV$$

Заметим, что формула (64.1) представляет собой обобщение решения уравнения Пуассона на более общее уравнение вида

$$\Delta \varphi_\omega + k^2 \varphi_\omega = -4\pi \rho_\omega$$

(получающееся из уравнения (62.4) при ρ, φ , зависящих от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$).

При разложении в интеграл Фурье компонента Фурье плотности заряда есть

$$\rho_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho e^{i\omega t} dt$$

Подставляя это выражение в (64.1), Получим:

$$\varphi_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\rho}{R} e^{i(\omega t + kR)} dV dt$$

Здесь надо еще перейти от непрерывного распределения плотности зарядов к точечным зарядам, о движении которых фактически идет речь.

Так, если имеется всего один точечный заряд, то полагаем:

$$\rho = e\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)]$$

где $\mathbf{r}_0(t)$ - радиус-вектор заряда, являющийся заданной функцией времени.

Подставляя это выражение в (64.4) и производя интегрирование по dV (сводящееся к замене $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r}_0(t)$), получим:

$$\varphi_\omega = e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R(t)} e^{i\omega[t+R(t)/c]} dt$$

где теперь $R(t)$ - расстояние от движущейся частицы до точки наблюдения.

Аналогичным образом, для векторного потенциала получим:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{v}(t)}{R(t)} e^{i\omega[t+R(t)/c]} dt$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ - скорость частицы. Формулы, аналогичные (64.5) – (64.6), могут быть написаны и в случае, когда спектральное разложение плотностей заряда и тока содержит дискретный ряд частот.

Так, при периодическом (с периодом $T = 2\pi/\omega_0$) движении точечного заряда спектральное разложение поля содержит лишь частоты вида $n\omega_0$ и соответствующие компоненты векторного потенциала

$$\mathbf{A}_n = \frac{e}{cT} \int_0^T \frac{\mathbf{v}(t)}{R(t)} e^{in\omega_0[t+R(t)/c]} dt$$

(и аналогично для φ_n).

В обоих случаях (64.6) – (64.7) компоненты Фурье определены в соответствии с § 49.

Поле равномерно и прямолинейно движущегося заряда в виде плоских волн

Разложение поля равномерно и прямолинейно движущегося заряда имеет вид:

Наконец, для поля имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\mathbf{k} &= -i\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k} + \frac{i(\mathbf{k}\mathbf{v})}{c} \mathbf{A}_\mathbf{k} = i4\pi e \frac{-\mathbf{k} + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})\mathbf{v}}{c^2}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c}\right)^2} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t} \\ \mathbf{H}_\mathbf{k} &= i[\mathbf{k}\mathbf{A}_\mathbf{k}] = i \frac{4\pi e}{c} \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c}\right)^2} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t} \end{aligned}$$

Поступаем аналогично тому, как делалось в § 51.

Плотность заряда пишем в виде $\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, где $\mathbf{v}$ - скорость частицы.

Взяв компоненту Фурье от уравнения $\square\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, находим:

$$(\square\varphi)_\mathbf{k} = -4\pi e \cdot e^{-i(\mathbf{v}\mathbf{k})t}$$

С другой стороны, из

$$\varphi = \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi_\mathbf{k} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

имеем:

$$(\square\varphi)_\mathbf{k} = -k^2\varphi_\mathbf{k} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_\mathbf{k}}{\partial t^2}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_\mathbf{k}}{\partial t^2} + k^2\varphi_\mathbf{k} = 4\pi e \cdot e^{-i(\mathbf{v}\mathbf{k})t}$$

откуда окончательно

$$\varphi_{\mathbf{k}} = 4\pi e \frac{e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c}\right)^2}$$

Отсюда видно, что волна с волновым вектором $\mathbf{k}$ обладает частотой $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$.

Аналогично находим для векторного потенциала:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{c} \frac{\mathbf{v} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c}\right)^2}$$

Наконец, для поля имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} &= -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} + \frac{i(\mathbf{k}\mathbf{v})}{c} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = i4\pi e \frac{-\mathbf{k} + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})\mathbf{v}}{c^2}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c}\right)^2} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t} \\ \mathbf{H}_{\mathbf{k}} &= i[\mathbf{k}\mathbf{A}_{\mathbf{k}}] = i \frac{4\pi e}{c} \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c}\right)^2} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t} \end{aligned}$$

О применениях спектрального разложения

(??? оно там потом применяется, но я хз, где и почему?? потом тоже укажу. зачем вообще так раскладываем мы???)

19.1.3 Higher-Order Lagrangian and Hamiltonian Functions

(??? почему она в этом разделе???)

Суть и основные формулы

(скоро пропишу)

Теория

В обычной классической механике систему взаимодействующих друг с другом частиц можно описывать с помощью функции Лагранжа, зависящей только от координат и скоростей этих частиц в один и тот же момент времени.

Возможность этого в конечном итоге обусловлена тем, что в механике скорость распространения взаимодействий предполагается бесконечной. Мы уже знаем, что благодаря конечной скорости распространения взаимодействий поле надо рассматривать как самостоятельную систему с собственными «степенями свободы». Поэтому если мы имеем систему взаимодействующих частиц, то для ее описания мы должны рассматривать систему, состоящую из этих частиц и поля. Поэтому невозможно строгое описание системы взаимодействующих частиц с помощью функции Лагранжа, зависящей только от координат и скоростей частицы не содержащей никаких величин, связанных с собственными «степенями свободы» поля.

Однако если скорости v всех частиц малы по сравнению со скоростью света, то систему зарядов можно описывать некоторой приближенной функцией Лагранжа. При этом оказывается возможным ввести функцию Лагранжа, описывающую систему не только при пренебрежении всеми степенями v/c (классическая функция Лагранжа), но и с точностью до величин порядка v^2/c^2 .

Последнее обстоятельство связано с тем, что излучение электромагнитных волн движущимися зарядами (и, тем самым, возникновение «самостоятельного» поля) появляется лишь в третьем приближении по v/c (см. ниже, §67)¹.

Предварительно заметим, что в нулевом приближении, т. е. при полном пренебрежении запаздыванием потенциалов, функция Лагранжа Для системы зарядов имеет вид

$$L^{(0)} = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

(суммирование производится по зарядам, входящим в состав системы). Второй член есть потенциальная энергия взаимодействия, какой она была бы для неподвижных зарядов.

Для получения следующего приближения поступим следующим образом. Функция Лагранжа для заряда e_a , находящегося во внешнем поле, есть

$$L_a = -m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} - e_a \varphi + \frac{e_a}{c} \mathbf{A} \mathbf{v}_a$$

Выбрав какой-либо один из зарядов системы, мы определим потенциалы поля, создаваемого всеми остальными зарядами в точке, где находится первый, и выразим их через координаты и скорости зарядов, создающих это поле (как раз это можно сделать только приближенно: φ - с точностью до членов порядка v^2/c^2 , а $\mathbf{A}$ - до членов порядка v/c).

Подставляя полученные таким образом выражения для потенциалов в (65.2), мы получим функцию Лагранжа для одного из зарядов системы (при данном движении остальных). Отсюда уже без труда можно найти L для всей системы. Будем исходить из выражений для запаздывающих потенциалов:

$$\varphi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R} dV$$

Если скорости всех зарядов малы по сравнению со скоростью света, то распределение зарядов не успевает сильно измениться за время R/c .

Поэтому мы можем разложить $\rho_{t-R/c}$ И $\mathbf{j}_{t-R/c}$ В ряд по степеням R/c .

Для скалярного потенциала находим, таким образом, с точностью до членов второго порядка:

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R \rho dV$$

) ρ без индексов есть ρ в момент времени t ; знаки дифференцирования по времени могут, очевидно, быть вынесены из-под знака интеграла). Но $\int \rho dV$ есть постоянный полный заряд системы.

Поэтому второй член в полученном выражении равен нулю, так что

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{R} + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R \rho dV$$

Аналогично можно поступить с $\mathbf{A}$.

Но выражение для векторного Потенциала через плотность тока содержит уже само по себе $1/c$, а при подстановке в функцию Лагранжа умножается еще раз на $1/c$.

Поскольку мы ищем функцию Лагранжа только с точностью до членов Второго порядка, то в разложении $\mathbf{A}$ достаточно ограничиться только первым членом, т. е.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\rho \mathbf{v}}{R} dV$$

(мы подставили $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$).

Предположим сначала, что поле создается всего одним точечным зарядом e . Тогда имеем из (65.3) – (65.4):

$$\varphi = \frac{e}{R} + \frac{e}{2c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{cR}$$

где R - расстояние от заряда.

Выберем вместо φ и $\mathbf{A}$ другие потенциалы φ' и $\mathbf{A}'$, т. е. произведем калибровочное преобразование (см. § 18):

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f$$

причем в качестве f выберем функцию

$$f = \frac{e}{2c} \frac{\partial R}{\partial t}$$

Тогда мы получим

$$\varphi' = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{e\mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c} \nabla \frac{\partial R}{\partial t}$$

Для вычисления $\mathbf{A}'$ заметим, что $\nabla \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla R$.

Операция ∇ означает здесь дифференцирование по координатам точки наблюдения, в которой ищется значение $\mathbf{A}'$.

Поэтому градиент ∇R равен единичному вектору $\mathbf{n}$, направленному от заряда e к точке наблюдения, так что

$$\mathbf{A}' = \frac{e\mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c} \dot{\mathbf{n}}$$

Далее пишем:

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) = \frac{\dot{\mathbf{R}}}{R} - \frac{\mathbf{R}\dot{R}}{R^2}$$

Но производная $-\dot{\mathbf{r}}$ при заданной точке наблюдения есть скорость $\mathbf{v}$ заряда, а производную $\dot{R}$ легко определить, дифференцируя тождество $R^2 = \mathbf{R}^2$, т.е. написав

$$R\dot{R} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}} = -\mathbf{R}\mathbf{v}$$

Таким образом,

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{-\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})}{R}$$

Подставляя это в выражение для $\mathbf{A}'$, находим окончательно

$$\varphi' = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{e[\mathbf{v} + (\mathbf{v}\mathbf{n})\mathbf{n}]}{2cR}$$

Если поле создается не одним, а несколькими зарядами, то надо, очевидно, просуммировать эти выражения по всем зарядам.

Подставляя их затем в (65.2), найдем функцию Лагранжа L_a заряда e_a (при заданном движении всех остальных зарядов).

При этом нужно первый член в (65.2) тоже разложить по степеням v_a/c , оставляя члены до второго порядка.

Таким образом, мы находим:

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{1}{8} \frac{m_a v_a^4}{c^2} - e_a \sum_b' \frac{e_b}{R_{ab}} + \frac{e_a}{2c^2} \sum_b' \frac{e_b}{R_{ab}} \left[\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \mathbf{n}_{ab}) (\mathbf{v}_b \mathbf{n}_{ab}) \right]$$

(суммирование производится по всем зарядам, за исключением e_a ; $\mathbf{n}_{ab}$ - единичный вектор в направлении между e_b и e_a).

Отсюда уже не представляет труда найти функцию Лагранжа для всей системы.

Легко сообразить, что эта функция равна не сумме L_a для всех зарядов, а имеет вид

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 R_{ab}} [\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \mathbf{n}_{ab}) (\mathbf{v}_b \mathbf{n}_{ab})]$$

Действительно, для каждого из зарядов при заданном движении всех остальных эта функция L переходит в приведенную выше L_a .

Выражение (65.7) есть искомая функция Лагранжа системы зарядов с точностью до членов второго порядка.

Функция Гамильтона с точностью до второго порядка

Наконец, определим еще функцию Гамильтона системы зарядов В том же приближении.

Это можно было бы сделать по общим правилам нахождения $\mathcal{H}$ по L ; однако проще поступить следующим образом.

Второй и четвертый члены в (65.7) представляют собой малую поправку к $L^{(0)}$ (65.1).

С другой стороны, из механики известно, что при небольшом изменении L и $\mathcal{H}$ малые добавки к ним равны по величине и противоположны по знаку (причем изменение L рассматривается при заданных координатах и скоростях, а изменение $\mathcal{H}$ при заданных координатах и импульсах; см. I § 40).

Поэтому мы можем сразу написать $\mathcal{H}$, вычтя из

$$\mathcal{H}^{(0)} = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

те же второй и четвертый члены из (65.7), предварительно заменив в них скорости на импульсы с помощью соотношений первого приближения $\mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a/m_a$.

Таким образом,

$$\mathcal{H} = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} - \sum_a \frac{p_a^4}{8c^2 m_a^3} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b R_{ab}} [\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b + (\mathbf{p}_a \mathbf{n}_{ab}) (\mathbf{p}_b \mathbf{n}_{ab})]$$

Функция Гамильтона во втором порядке без движения системы как целого

(??)

Напишем функцию Гамильтона во втором приближении для системы из двух частиц, исключив из нее движение системы как целого.

Нужно упростить формулу

$$\mathcal{H} = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} - \sum_a \frac{p_a^4}{8c^2 m_a^3} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b R_{ab}} [\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b + (\mathbf{p}_a \mathbf{n}_{ab}) (\mathbf{p}_b \mathbf{n}_{ab})]$$

Выбираем систему отсчета, в которой сумма импульсов обеих частиц равна нулю. В ней:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_2} = 0$$

Поэтому в рассматриваемой системе отсчета действие является функцией разности $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ радиус-векторов обеих частиц.

Поэтому имеем $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$, где $\mathbf{p} = \partial S / \partial \mathbf{r}$ есть импульс относительного движения частиц.

Функция Гамильтона равна

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) + \frac{e_1 e_2}{r} - \frac{p^4}{8c^2} \left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right) + \frac{e_1 e_2}{2m_1 m_2 c^2 r} [p^2 + (\mathbf{p}\mathbf{n})^2]$$

(?????)

Центр инерции системы взаимодействующих частиц с точностью до второго порядка

(?? а кст до этого как было?)

Определить (с точностью до членов второго порядка) центр инерции системы взаимодействующих частиц.

Наиболее просто задача решается с помощью формулы

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_a \mathcal{E}_a \mathbf{r}_a + \int W \mathbf{r} dV}{\sum_a \mathcal{E}_a + \int W dV},$$

где $\mathcal{E}_a$ - кинетическая энергия частицы (включая ее энергию покоя), а W - плотность энергии создаваемого частицами поля.

Поскольку $\mathcal{E}_a$ содержат большие величины $m_a c^2$, то для получения следующего приближения достаточно учесть в $\mathcal{E}_a$ и W лишь члены, не содержащие c , т.е. нерелятивистскую кинетическую энергию частиц и энергию электростатического поля.

Имеем:

$$\begin{aligned} \int W \mathbf{r} dV &= \frac{1}{8\pi} \int E^2 \mathbf{r} dV = \frac{1}{8\pi} \int (\nabla \varphi)^2 \mathbf{r} dV = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \left(d\mathbf{f} \nabla \frac{\varphi^2}{2} \right) \mathbf{r} - \frac{1}{8\pi} \int \nabla \frac{\varphi^2}{2} dV - \frac{1}{8\pi} \int \varphi \Delta \varphi \cdot \mathbf{r} dV \end{aligned}$$

интеграл по бесконечно удаленной поверхности исчезает, второй интеграл также преобразуется в поверхностный и тоже исчезает, а в третьем подставляем $\Delta \varphi = -4\pi \rho$ и получаем:

$$\int W \mathbf{r} dV = \frac{1}{2} \int \rho \varphi \mathbf{r} dV = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi_a \mathbf{r}_a$$

где φ_a - потенциал, создаваемый в точке $\mathbf{r}_a$ всеми зарядами, за исключением e_a^i .

Окончательно находим:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mathcal{E}} \sum_a \mathbf{r}_a \left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} + \frac{e_a}{2} \sum_b' \frac{e_b}{R_{ab}} \right)$$

(суммирование по всем b , кроме $b = a$), где $\mathcal{E} = \sum_a \left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} \right)$ есть полная энергия системы.

Таким образом, в рассматриваемом приближении координаты центра инерции действительно могут быть выражены через величины, относящиеся только к самим частицам.

В чем сложность функции Лагранжа до второго порядка (???)

(Казалось бы, беру, раскладываю в ряд и всё?? пока не так уж въехал просто.)

Примеры применений функций до второго порядка

(в аналогах с ОТО она используется, потом укажу как. еще где найду - допишу.)

О ещё более высоких порядках

(пока хз, мб потом задумаюсь о них.)

19.2 Radiation: Formalism

Обсудим основы излучения электромагнитных волн и некоторые типичные модели.

(потому перенесу половину мало нужного в запись про классическую электродинамику!)

19.2.1 Field of a System of Charges at Large Distances

(?? почему это не в прошлом разделе??)

Theory

Рассмотрим поле, создаваемое системой движущихся зарядов на расстояниях, больших по сравнению с ее собственными размерами.

Выберем начало координат O где-либо внутри системы зарядов.

Радиус-вектор из O в точку наблюдения поля P обозначим посредством $\mathbf{R}_0$, а единичный вектор в этом направлении - через $\mathbf{n}$ радиус-вектор элемента заряда $de = \rho dV$ пусть будет $\mathbf{r}$, а радиус-вектор от de в точку P обозначим как $\mathbf{R}$; очевидно, что $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$.

На больших расстояниях от системы $R_0 \gg r$ и приближенно имеем:

$$R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| = R_0 - \mathbf{n}\mathbf{r}$$

Подставим это в формулы для запаздывающих потенциалов.

В знаменателе подынтегральных выражений можно пренебречь $\mathbf{r}\mathbf{n}$ по сравнению с R_0 . В аргументе же $t - R/c$ этого пренебрежения, вообще говоря, сделать нельзя; возможность такого пренебрежения определяется здесь не относительной величиной R_0/c и $\mathbf{r}\mathbf{n}/c$, а тем, насколько меняются сами ρ и $\mathbf{j}$ за время $\mathbf{r}\mathbf{n}/c$.

Учитывая, что при интегрировании R_0 является постоянной и потому может быть вынесено за знак интеграла, находим для потенциалов поля на большом расстоянии от системы зарядов следующие выражения:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{R_0} \int \rho_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\mathbf{n}}{c}} dV \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\mathbf{n}}{c}} dV.\end{aligned}$$

На достаточно больших расстояниях от системы поле в малых участках пространства можно рассматривать как плоскую волну.

Для этого надо, чтобы расстояния были велики не только по сравнению с размерами системы, но и по сравнению с длиной излучаемых системой электромагнитных волн.

Об этой области поля говорят как о волновой зоне излучения.

В плоской волне поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ связаны друг с другом соотношением $\mathbf{E} = [\mathbf{H}\mathbf{n}]$.

Поскольку $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, то для полного определения поля в волновой зоне достаточно вычислить только векторный потенциал.

В плоской волне имеем $\mathbf{H} = [\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]/c$, где точка над буквой означает дифференцирование по времени.

Таким образом, зная $\mathbf{A}$, найдем $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ по формулам

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}], \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c}[[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]$$

Отметим, что поле на далеких расстояниях оказывается обратно пропорциональным первой степени расстояния R_0 от излучающей системы.

Следует также заметить, что время t входит в выражения (66.1)-(66.3) везде в комбинации $t - R_0/c$ с расстоянием R_0 .

Для излучения, создаваемого одним произвольно движущимся точечным зарядом, бывает удобно пользоваться потенциалами Лиенара-Вихерта.

На далеких расстояниях можно заменить в формуле (63.5) переменный радиус-вектор $\mathbf{R}$ постоянной величиной $\mathbf{R}_0$, а в условии (63.1), определяющем t' , надо положить $R = R_0 - \mathbf{r}_0\mathbf{n}\mathbf{r}_0(t)$.

Таким образом,

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}(t')}{cR_0\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}(t')}{c}\right)}$$

где t' определяется из равенства

$$t' - \frac{1}{c}\mathbf{r}_0(t')\mathbf{n} = t - \frac{R_0}{c}$$

Излучаемые системой электромагнитные волны уносят с собой определенную энергию.

Поток энергии дается вектором Пойнтинга, равным в плоской волне

$$\mathbf{S} = c\frac{H^2}{4\pi}\mathbf{n}$$

Интенсивность dI излучения в элемент телесного угла do определяют как количество энергии, протекающей в единицу времени через элемент $df = R_0^2 do$ шаровой поверхности с центром в начале координат и с радиусом R_0 .

Это количество равно плотности потока энергии S , помноженной на df , т. е.

$$dI = c\frac{H^2}{4\pi}R_0^2 do$$

Поскольку поле H обратно пропорционально R_0 , то мы видим, что количество энергии, излучаемой системой в единицу времени в элемент телесного угла do , одинаково для всех расстояний (при одинаковых для них значениях разности $t - R_0/c$).

Так, разумеется, и должно быть, поскольку излучаемая системой энергия распространяется в окружающем пространстве со скоростью c , нигде не накапливаясь и не исчезая.

Выведем формулы для спектрального разложения излучаемых системой волн. Они могут быть получены непосредственно из формул §64. Подставляя в (64.2) $R = R_0 - \mathbf{r}\mathbf{n}$ (причем в знаменателе подынтегрального выражения можно ограничиться подстановкой $R = R_0$), получим для компоненты Фурье векторного потенциала:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int \mathbf{j}_\omega e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} dV$$

(где $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$).

Компоненты $\mathbf{H}_\omega$ и $\mathbf{E}_\omega$ определяются по формулам (66.3). Подставляя в них вместо $\mathbf{H}, \mathbf{E}, \mathbf{A}$ соответственно $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}, \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}, \mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$ и сокращая затем на $e^{-i\omega t}$, получим:

$$\mathbf{H}_\omega = i [\mathbf{k} \mathbf{A}_\omega], \quad \mathbf{E}_\omega = \frac{ic}{\omega} [\mathbf{k} [\mathbf{A}_\omega \mathbf{k}]]$$

Говоря о спектральном распределении интенсивности излучения, необходимо различать разложения в интеграл и ряд Фурье.

С разложением в интеграл Фурье приходится иметь дело для излучения, сопровождающего столкновения заряженных частиц.

При этом представляет интерес полное количество энергии, излученной за время столкновения (и соответственно потерянной сталкивающимися частицами).

Пусть $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega}$ есть энергия, излученная в элемент телесного угла $d\omega$ в виде волн с частотами в интервале $d\omega$.

Согласно общей формуле (49.8) доля полного излучения, приходящаяся на интервал частот $d\omega/2\pi$, получается из обычного выражения для интенсивности заменой квадрата поля на квадрат модуля его компоненты Фурье и одновременным умножением на 2.

Поэтому имеем вместо $dI = c \frac{H^2}{4\pi} R_0^2 d\omega$:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_\omega|^2 R_0^2 d\omega$$

Если заряды совершают периодическое движение, то поле излучения должно быть разложено в ряд Фурье.

Согласно общей формуле (49.4) интенсивность отдельной компоненты разложения в ряд Фурье получается из обычного выражения для интенсивности заменой поля на его компоненту Фурье и одновременным умножением на 2.

Таким образом, интенсивность излучения с частотой $\omega = n\omega_0$ в элемент телесного угла $d\omega$ равна

$$dI_n = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 d\omega$$

Фурье компоненты поля

Наконец, выпишем формулы, определяющие компоненты Фурье поля излучения непосредственно по заданному движению излучающих зарядов.

При разложении в интеграл Фурье имеем:

$$\mathbf{j}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j} e^{i\omega t} dt$$

Подставляя это в (66.7) и переходя затем от непрерывного распределения токов к точечному заряду, движущемуся по траектории $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$ (ср. § 64), получим:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int_{-\infty}^{\infty} e \mathbf{v}(t) e^{i[\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}_0(t)]} dt$$

Поскольку $\mathbf{v} = d\mathbf{r}_0/dt$, то $\mathbf{v} dt = d\mathbf{r}_0$, и эту формулу можно написать также и в виде контурного интеграла, взятого вдоль траектории заряда:

$$\mathbf{A}_\omega = e \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int e^{i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}_0)} d\mathbf{r}_0$$

Компонента Фурье магнитного поля согласно (66.8) имеет вид

$$\mathbf{H}_\omega = e \frac{i\omega e^{ikR_0}}{c^2 R_0} \int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)} [\mathbf{n} d\mathbf{r}_0]$$

Если заряд совершает периодическое движение по замкнутой траектории, то поле разлагается в ряд Фурье.

Компоненты разложения получаются заменой в формулах (66.11)-(66.13) интегрирования по всему времени усреднением по периоду T движения (см. определения в § 49).

Так, для компоненты Фурье магнитного поля с частотой $\omega = n\omega_0 = 2\pi n/T$ имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n &= e \frac{2\pi i n e^{ikR_0}}{c^2 T^2 R_0} \int_0^T e^{i(n\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t))} [\mathbf{n}\mathbf{v}(t)] dt = \\ &= e \frac{2\pi i n e^{ikR_0}}{c^2 T^2 R_0} \oint e^{i(n\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)} [\mathbf{n} d\mathbf{r}_0]. \end{aligned}$$

Во втором интеграле интегрирование производится по замкнутой орбите частицы.

Четырехмерное спектральное разложение излучаемого 4-импульса

Получить четырехмерное выражение для спектрального разложения излучаемого 4-импульса при движении заряда по заданной траектории.

Подставив (66.8) в $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_\omega|^2 R_0^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi}$ и учитывая, что в силу условия Лоренца (62.1) $k\varphi_\omega = \mathbf{k}\mathbf{A}_\omega$, находим:

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} &= \frac{c}{2\pi} (k^2 |\mathbf{A}_\omega|^2 - |\mathbf{k}\mathbf{A}_\omega|^2) R_0^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi} = \\ &= \frac{c}{2\pi} k^2 (|\mathbf{A}_\omega|^2 - |\varphi_\omega|^2) R_0^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi} = -\frac{c}{2\pi} k^2 A_{i\omega} A_\omega^{i*} R_0^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi} \end{aligned}$$

Невозможность описания частиц на языке мультипольных моментов (??)

Излучение релятивистски движущихся частиц не удастся описать на языке мультипольных моментов,

(почему?? вроде так Ландау говорил.)

19.2.2 Dipole Radiation (!!)

Случаи применимости дипольного приближения по Ландау

Временем $\mathbf{r}\mathbf{n}/c$ в подынтегральных выражениях запаздывающих потенциалов (66.1)-(66.2) можно пренебречь, если за это время распределение зарядов мало меняется.

Найдем условия осуществления этого требования. Пусть T означает порядок величины времени, в течение которого распределение зарядов в системе меняется заметным образом. Излучение этой системы будет, очевидно, обладать периодом порядка T (т.е. частотой порядка $1/T$). Обозначим далее посредством a порядок величины размеров системы. Тогда время $\mathbf{r}\mathbf{n}/c \sim a/c$.

Для того чтобы за это время распределение зарядов в системе не успело значительно измениться, необходимо, чтобы $a/c \ll T$. Но cT есть не что иное, как длина волны λ излучения. Таким образом, условие $a \ll cT$ можно написать в виде

$$a \ll \lambda$$

т.е. размеры системы должны быть малы по сравнению с длиной излучаемой волны.

Заметим, что условие (67.1) можно получить и из (66.7).

В подынтегральном выражении $\mathbf{j}$ пробегает значения в интервале порядка размеров системы, так как вне системы $\mathbf{j}$ равно нулю.

Поэтому показатель $i\mathbf{k}\mathbf{r}$ мал, и им можно пренебречь для тех волн, у которых $ka \ll 1$, что эквивалентно (67.1).

Это условие можно написать еще и в другом виде, заметив, что $T \sim a/v$, так что $\lambda \sim ca/v$, если v есть порядок величины скорости зарядов.

Из $a \ll \lambda$ находим тогда:

$$v \ll c$$

т.е. скорости зарядов должны быть малы по сравнению со скоростью света

Будем предполагать, что это условие выполнено, и займемся изучением излучения на расстояниях от излучающей системы, больших по сравнению с длиной волны (а следовательно, во всяком случае больших по сравнению с размерами системы).

Как было указано в § 66, на таких расстояниях поле можно рассматривать как плоскую волну, и потому для определения поля достаточно вычислить только векторный потенциал.

Потенциалы в дипольном приближении

Векторный потенциал (66.2) имеет теперь вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'} dV$$

где время $t' = t - R_0/c$ и уже не зависит от переменных интегрирования.

Подставляя $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, переписываем (67.3) в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \left(\sum e\mathbf{v} \right)$$

где суммирование производится по всем зарядам системы; для краткости мы будем опускать индекс t' - все величины в правых сторонах равенств берутся в момент времени t' .

Но $\sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}}$, где $\mathbf{d}$ - дипольный момент системы.

Таким образом,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \mathbf{d}$$

С помощью формул (66.3) находим, что магнитное поле равно

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0} [\ddot{\mathbf{d}} \mathbf{n}]$$

а электрическое поле

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0} [[\ddot{\mathbf{d}} \mathbf{n}] \mathbf{n}]$$

Отметим, что в рассматриваемом приближении излучение определяется второй производной от дипольного момента системы.

Такое излучение называется дипольным.

Поскольку $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$, то $\ddot{\mathbf{d}} = \sum e\ddot{\mathbf{r}}$.

Таким образом, заряды могут излучать, только если они движутся с ускорением.

Равномерно движущиеся заряды не излучают. Это следует также и непосредственно из принципа относительности, так как равномерно движущийся заряд можно рассматривать в такой инерциальной системе, где он покоится, а покоящиеся заряды не излучают.

Интенсивность дипольного излучения

Подставляя (67.5) в $dI = c \frac{H^2}{4\pi} R_0^2 do$, получим интенсивность дипольного излучения:

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}]^2 do = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta do$$

где θ - угол между векторами $\ddot{\mathbf{d}}$ и $\mathbf{n}$.

Это есть количество энергии, излучаемой системой в единицу времени в элемент телесного угла do ; отметим, что угловое распределение излучения дается множителем $\sin^2 \theta$.

Подставив $do = 2\pi \sin \theta d\theta$ и интегрируя по $d\theta$ от 0 до π , получим полное излучение:

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2$$

Если имеется всего один движущийся во внешнем поле заряд, то $d = e\mathbf{r}$ и $\ddot{d} = e\mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ - ускорение заряда.

Таким образом, полное излучение движущегося заряда

$$I = \frac{2e^2 w^2}{3c^3}$$

замкнутая система частиц с одинаковым отношением зарядов к массам не может излучать дипольно

Отметим, что замкнутая система, состоящая из частиц, у которых отношения зарядов к массам одинаковы, не может излучать дипольно.

Действительно, для такой системы дипольный момент

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = \text{const} \sum m\mathbf{r}$$

где const есть одинаковое для всех частиц отношение заряда к массе.

Но $\sum m\mathbf{r} = \mathbf{R} \sum m$, где $\mathbf{R}$ - радиус-вектор центра инерции системы (напоминаем, что все скорости $v \ll c$, так что применима нерелятивистская механика).

Поэтому да пропорционально ускорению центра инерции, т.е. равно нулю, так как центр инерции движется равномерно.

Спектральное разложение интенсивности дипольного излучения

Наконец, выпишем формулы для спектрального разложения интенсивности дипольного излучения.

Для излучения, сопровождающего столкновение, вводим количество $d\mathcal{E}_\omega$ энергии, излученной за все время столкновения в виде волн с частотами в интервале $d\omega/2\pi$ (ср. § 66).

Оно получится заменой в (67.8) вектора $\mathbf{d}$ его компонентой Фурье d_ω и одновременным умножением на 2:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4}{3c^3} \left| \ddot{\mathbf{d}}_\omega \right|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

По определению компоненты Фурье, имеем:

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}) = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}$$

откуда $\ddot{d}_\omega = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega$.

Таким образом, получаем:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\mathbf{d}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

При периодическом движении частиц аналогичным образом найдем интенсивность излучения с частотой $\omega = n\omega_0$ в виде

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3} |\mathbf{d}_n|^2$$

Излучение диполя $\mathbf{d}$, вращающегося в одной плоскости с постоянной угловой скоростью Ω

Излучение диполя $\mathbf{d}$, вращающегося в одной плоскости с постоянной угловой скоростью Ω есть:

Выбирая плоскость вращения в качестве плоскости xy , имеем:

$$d_x = d_0 \cos \Omega t, \quad d_y = d_0 \sin \Omega t$$

Ввиду монохроматичности этих функций излучение тоже монохроматично с частотой $\omega = \Omega$.

По формуле (67.7) найдем для углового распределения среднего (по периоду вращения) излучения:

$$\overline{dI} = \frac{d_0^2 \Omega^4}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \vartheta) d\vartheta$$

где ϑ - угол между направлением $\mathbf{n}$ излучения и осью z .

Полное излучение

$$\bar{I} = \frac{2d_0^2 \Omega^4}{\beta c^3}$$

Поляризация излучения определяется направлением вектора $[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}] = \omega^2 [\mathbf{n}\mathbf{d}]$.

Проецируя его на направления в плоскости $\mathbf{n}z$ и перпендикулярно к ней, найдем, что излучение поляризовано по эллипсу с отношением длин полуосей, равным $n_z = \cos \vartheta$; в частности, излучение в направлении оси z поляризовано по кругу.

угловое распределение излучения движущейся как целое (со скоростью $\mathbf{v}$) системой зарядов

Определить угловое распределение излучения движущейся как целое (со скоростью $\mathbf{v}$) системой зарядов, если известно распределение в системе отсчета, в которой система как целое покоится.

Пусть

$$dI' = f(\cos \theta', \varphi') d\vartheta', \quad d\vartheta' = d(\cos \theta') d\varphi'$$

есть интенсивность излучения в системе отсчета K' , связанной с движущейся системой зарядов (θ', φ' - углы сферических координат с полярной осью вдоль направления движения системы).

Излучаемая в течение времени dt в неподвижной (лабораторной) системе отсчета K энергия $d\mathcal{E}$ связана с излучением энергии $d\mathcal{E}'$ в системе K' формулой преобразования

$$d\mathcal{E}' = \frac{d\mathcal{E} - \mathbf{V}d\mathbf{P}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = d\mathcal{E} \frac{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

(импульс излучения, распространяющегося в заданном направлении, связан с его энергией соотношением $|d\mathbf{P}| = d\mathcal{E}/c$).

Полярные углы θ, θ' направления излучения в системах K и K' связаны формулами (5.6).

азимуты $\varphi = \varphi'$).

Наконец, времени dt' в системе K' соответствует время $dt = dt'/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ в системе K .

В результате для интенсивности $dI = (d\mathcal{E}/dt)$ до в системе K найдем:

$$dI = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta\right)^3} f\left(\frac{\cos \theta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}, \varphi\right) d\Omega$$

Так, для диполя, движущегося в направлении своей оси, $f = \text{const} \cdot \sin^2 \theta'$, и с помощью полученной формулы находим:

$$dI = \text{const} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^3 \sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta\right)^5} d\Omega$$

An Application: Instability of Classical Matter по Тонгу

(интересная задача, потом подумаю.)

The popular picture of an atom consists of a bunch of electrons orbiting a nucleus, like planets around a star. But this isn't what an atom looks like. Let's see why.

We'll consider a Hydrogen atom, with an electron orbiting around a proton, fixed at the origin. (The two really orbit each other around their common centre of mass, but the mass of the electron is $m_e \approx 9 \times 10^{-31} \text{Kg}$, while the mass of the proton is about 1800 bigger, so this is a good approximation). The equation of motion for the electron is

$$m_e \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

The dipole moment of the atom is $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$ so the equation of motion tells us $\ddot{\mathbf{p}}$. Plugging this into (6.18), we can get an expression for the amount of energy emitted by the electron,

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\frac{e^3}{4\pi\epsilon_0 m_e r^2} \right)^2$$

As the electron emits radiation, it loses energy and must, therefore, spiral towards the nucleus. We know from classical mechanics that the energy of the orbit depends on its eccentricity. For simplicity, let's assume that the orbit is circular with energy

$$E = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r}$$

Then we can equate the change in energy with the emitted power to get

$$\dot{E} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \dot{r} = -\mathcal{P} = -\frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\frac{e^3}{4\pi\epsilon_0 m_e r^2} \right)^2$$

which gives us an equation that tells us how the radius of the orbit changes,

$$\dot{r} = -\frac{\mu_0 e^4}{12\pi^2 c \epsilon_0 m_e^2 r^2}$$

Suppose that we start at some time, $t = 0$, with a classical orbit with radius r_0 . Then we can calculate how long it takes for the electron to spiral down to the origin at $r = 0$. It is

$$T = \int_0^T dt = \int_{r_0}^0 \frac{1}{\dot{r}} dr = \frac{4\pi^2 c \epsilon_0 m_e^2 r_0^3}{\mu_0 e^4}$$

Now let's plug in some small numbers. We can take the size of the atom to be $r_0 \approx 5 \times 10^{-11}$ m. (This is roughly the Bohr radius that can be derived theoretically using quantum mechanics). Then we find that the lifetime of the hydrogen atom is

$$T \approx 10^{-11} \text{ s}$$

That's a little on the small size. The Universe is 14 billion years old and hydrogen atoms seem in no danger of decaying.

Of course, what we're learning here is something dramatic: the whole framework of classical physics breaks down when we look at the atomic scale and has to be replaced with quantum mechanics. And, although we talk about electron orbits in quantum mechanics, they are very different objects than the classical orbits drawn in the picture. In particular, an electron in the ground state of the hydrogen atom emits no radiation. (Electrons in higher states do emit radiation with some probability, ultimately decaying down to the ground state).

19.2.3 Dipole Radiation in Collisions

(?!!! тут вроде не сложно, но нужно полностью разобраться с $\varkappa$!!!)

Эффективное излучение

В задачах об излучении при столкновениях (его называют тормозным излучением) редко представляет интерес излучение, сопровождающее столкновение двух частиц, движущихся по определенным траекториям.

Обычно приходится рассматривать рассеяние целого пучка параллельно движущихся частиц, и задача состоит в определении полного излучения, отнесенного к единице плотности потока частиц.

Если плотность потока частиц в пучке равна единице (т.е. В единицу времени через единицу площади сечения пучка проходит одна частица), то число частиц в пучке, имеющих «прицельное расстояние» между ρ и $\rho + d\rho$, равно $2\pi\rho d\rho$ (площадь кольца, ограниченного окружностями радиусов ρ и $\rho + d\rho$).

Поэтому искомое полное излучение получится умножением полного излучения $\Delta\mathcal{E}$ одной частицы (с заданным значением прицельного расстояния) на $2\pi\rho d\rho$ и интегрированием по $d\rho$ от 0 до ∞ .

Определенная таким образом величина имеет размерность произведения энергии на площадь.

Мы будем называть ее эффективным излучением и будем обозначать посредством $\varkappa$:

$$\varkappa = \int_0^\infty \Delta\mathcal{E} \cdot 2\pi\rho d\rho$$

Аналогичным образом можно определить эффективное излучение в определенный элемент d телесного угла, в определенном интервале $d\omega$ частот и т.п.

Угловое распределение

Выведем общую формулу, определяющую угловое распределение излучения при рассеянии пучка частиц в центрально-симметричном поле, предполагая излучение дипольным.

Интенсивность излучения (в каждый момент времени) отдельной частицей определяется формулой (67.7), в которой $\mathbf{d}$ есть дипольный момент частицы относительно рассеивающего центра 1).

Прежде всего усредняем это выражение по всем направлениям вектора $\mathbf{d}$ в плоскости поперечного сечения пучка.

Поскольку $[\ddot{\mathbf{n}}]^2 = \ddot{\mathbf{d}}^2 - (\mathbf{n}\mathbf{d})^2$ то усреднению подлежит лишь величина $(\mathbf{n}\mathbf{d})^2$.

В силу центральной симметрии рассеивающего поля и параллельности падающего пучка частиц рассеяние (а вместе с ним и излучение) обладает аксиальной симметрией относительно оси, проходящей через центр.

Выберем эту ось в качестве оси x .

Из соображений симметрии очевидно, что первые степени $\ddot{d}_y, \ddot{d}_z$ при усреднении дают нуль, а поскольку $\ddot{d}_x$ усреднением не затрагивается, то

$$\overline{\ddot{d}_x \ddot{d}_y} = \overline{\ddot{d}_x \ddot{d}_z} = 0$$

Средние же значения от $\ddot{d}_y^2$ и $\ddot{d}_z^2$ равны друг другу, так что

$$\overline{\ddot{d}_y^2} = \overline{\ddot{d}_z^2} = \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{d}}^2 - \overline{\ddot{d}_x^2})$$

Имея все это в виду, без труда найдем:

$$\overline{[\ddot{\mathbf{n}}]^2} = \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{d}}^2 - \overline{\ddot{d}_x^2}) + \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\overline{\ddot{d}_x^2}) \cos^2 \theta$$

где θ - угол между направлением $\mathbf{n}$ излучения и осью x

Интегрируя интенсивность по времени и по всем прицельным расстояниям, получим следующее окончательное выражение, определяющее эффективное излучение в зависимости от направления:

$$d\mathcal{K}_{\mathbf{n}} = \frac{do}{4\pi c^3} \left(A + B \frac{3\cos^2 \theta - 1}{2} \right)$$

где

$$A = \frac{2}{3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \ddot{\mathbf{d}}^2 dt 2\pi d\rho, \quad B = \frac{1}{3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\overline{\ddot{d}_x^2}) dt 2\pi d\rho$$

Второй член в (68.2) написан в таком виде, чтобы давать нуль при усреднении по всем направлениям, так что полное эффективное излучение $= A/c^3$.

Качественное описание

Обратим внимание на то, что угловое распределение излучения симметрично относительно плоскости, проходящей через рассеивающий центр перпендикулярно к пучку - выражение (68.2) не меняется при замене θ на $\pi - \theta$. Это свойство специфично для дипольного излучения и теряется при переходе к более высоким приближениям по v/c .

Интенсивность тормозного излучения можно разделить на две части: интенсивность излучения, поляризованного в плоскости испускания, проходящей через ось x и

направление $\mathbf{n}$ (назовем ее плоскостью xy), и интенсивность излучения, поляризованного в перпендикулярной плоскости xz .

Вектор электрического поля имеет направление вектора

$$[\mathbf{n}[\ddot{\mathbf{n}}]] = \mathbf{n}(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{n}}) - \ddot{\mathbf{n}}.$$

Компонента этого вектора в направлении, перпендикулярном к плоскости xy , есть $-\ddot{d}_z$, а проекция на плоскость xy равна $|\sin \theta \cdot \ddot{d}_x - \cos \theta \cdot \ddot{d}_y|$ (последнюю удобнее определить по равной ей z -компоненте магнитного поля, имеющего направление $[\ddot{\mathbf{n}}]$).

Возводя $\mathbf{E}$ в квадрат и усредняя по всем направлениям вектора $\ddot{\mathbf{d}}$ в плоскости yz , мы прежде всего видим, что произведение проекций поля на плоскость xy и перпендикулярно к ней обращается в нуль.

Это значит, что интенсивность действительно может быть представлена в виде суммы двух независимых частей: интенсивностей излучения, поляризованного в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Эффективное излучение и изучение в интервале частот

Интенсивность излучения с электрическим вектором, перпендикулярным к плоскости xy , определяется средним квадратом от $\ddot{d}_z^2 = \frac{1}{2} (\ddot{d}^2 - \ddot{d}_x^2)$.

Для соответствующей части эффективного излучения получим выражение

$$d\mathcal{K}_n^\perp = \frac{do}{4\pi c^3} \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\ddot{d}^2 - \ddot{d}_x^2) dt 2\pi \rho d\rho$$

Отметим, что эта часть излучения оказывается изотропной по направлениям.

Выписывать выражение для эффективного излучения с направлением электрического поля в плоскости xy нет необходимости, так как очевидно, что

$$d\mathcal{K}_n^\perp + d\mathcal{K}_n^\parallel = d\mathcal{K}_n$$

Аналогичным образом можно получить выражение для углового распределения эффективного излучения в определенном интервале частот:

$$d\mathcal{K}_{n\omega} = \frac{do}{2\pi c^3} \left[A(\omega) + B(\omega) \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right] \frac{d\omega}{2\pi}$$

где введены функции $A(\omega) = \frac{2\omega^4}{3} \int_0^\infty d\omega^2 2\pi \rho d\rho$, $B(\omega) = \frac{\omega^4}{3} \int_0^\infty (d_\omega^2 - 3d_{x\omega}^2) 2\pi \rho d\rho$.

(проделаю это потом)

19.2.4 Radiation up to the $o(1/c^2)$: Formalism

Тут квадрупольное и магнитно-дипольное и анапольное излучения (!)

Суть и основные формулы квадрупольного и магнитно-дипольное излучения

Мы находим тогда для A выражение

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cr} + \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}}{cr} + \frac{1}{2c^2 r} \ddot{\mathbf{D}} + \frac{1}{2c^2 r} \ddot{\mathcal{M}}_{ikl} n_k n_l \mathbf{e}_i$$

где d - дипольный момент системы, а $\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e[\mathbf{r}\mathbf{v}]$ - ее магнитный момент.

In summary, the radiated power up to $1/c^5$ is given by:

$$\begin{aligned} I &= I_d + I_m + I_Q + I_A \\ &= \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3} + \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3} + \frac{1}{20c^5} \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} - \frac{4}{3c^4} \ddot{\mathbf{T}} \cdot \ddot{\mathbf{d}}. \end{aligned}$$

Since the $1/c$ factor enters both the magnetic moment and toroidicity, the last three terms are proportional to $1/c^5$, being thus the $1/c^2$ lower correction to the leading term, i.e., the (electric) dipole approximation. Any subsequent terms in the expansion of the vector potential would yield corrections of the order $1/c^7$ and higher. From the considerations of symmetric properties of tensor products it can be shown that even powers of $1/c$ would be missing from the expansion, just like the $1/c^4$ terms in Eq. (30).

Вектор-потенциал с точностью до первого порядка при разложении до второго

(тут нормальное разложение. потренируюсь потом в нем еще!!)

We consider a system of electric charges in a volume V near the origin and assure that the observation point $\mathbf{r}$ is far enough: $|\mathbf{r}| \equiv r \gg V^{1/3}$, see Fig. 1.

The vector potential of such a system in the Lorenz gauge is given by

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_V dV' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right)$$

where $dV' \equiv dx'dy'dz'$, and we have taken into account the retardation effects. We write for $r' \ll r$ the following approximations over r'/r :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &\simeq \frac{1}{r} \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &\simeq r - \mathbf{r}' \cdot \nabla r = r - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r} \end{aligned}$$

or, using the unit vector $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'.$$

Further terms bringing higher powers of r in the denominators can be neglected when considering the radiation part of the field. Within this approximation, the vector potential yields

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int_V dV' \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' \right).$$

It can be expanded in $\frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'$ using the Taylor series as follows:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{cr} \int_V dV' \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) + \frac{d}{dt} \frac{1}{c^2 r} \int_V dV' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) + \\ &\quad + \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{2c^3 r} \int_V dV' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2 \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) + \dots \end{aligned}$$

The current density for a system of point charges e_i at $\mathbf{r}_i$ moving with velocities $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ can be written using the Dirac delta-function

as follows:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \tau) = \sum_i e_i \mathbf{v}_i(\tau) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(\tau)),$$

where the retarded time $\tau = t - r/c$ was introduced for convenience. The first term in expansion (14) easily simplifies to the time derivative of the dipole moment:

$$\int_V dV' \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) = \sum_i e_i \mathbf{v}_i(\tau) = \frac{d}{d\tau} \sum_i e_i \mathbf{r}_i(\tau) = \frac{d}{d\tau} \mathbf{d}(\tau) = \dot{\mathbf{d}}(\tau).$$

Thus, we have in the leading order

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr} + \dots$$

To obtain the next-order correction, we make the following transformations:

$$\begin{aligned} \int_V dV' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) &= \sum_i e_i \mathbf{v}_i(\tau) \int_V dV' \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i(\tau)) = \\ &= \sum_i e_i \mathbf{v}_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i) = \sum_i e_i \frac{d\mathbf{r}_i}{d\tau} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \sum_i e_i \mathbf{r}_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_i e_i \{ \mathbf{v}_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i) \} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \sum_i e_i \mathbf{r}_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_i e_i \mathbf{n} \times (\mathbf{v}_i \times \mathbf{r}_i) \end{aligned}$$

As we will see further, in the radiation parts of the field, the vector potential appears only as cross product with the unit vector $\mathbf{n}$. Thus, one can add to $\mathbf{A}$ an arbitrary vector proportional to $\mathbf{n}$ without changing the results. It is convenient to add to the first term of (18):

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \sum_i e_i \mathbf{r}_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \sum_i e_i \left\{ \mathbf{r}_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i) - \mathbf{n} \frac{r_i^2}{3} \right\}.$$

We will further work with the vector potential $\mathbf{A}$ shifted as described above. The sum over i is a contraction of the electric quadrupole moment tensor

$$Q_{jk} = \sum_i e_i \left\{ x_j^{(i)} x_k^{(i)} - \frac{r_i^2}{3} \delta_{jk} \right\}$$

with the unit vector $\mathbf{n}$, yielding some vector $\mathcal{D}$ with components

$$\mathcal{D}_j = \sum_k Q_{jk} n_k$$

The remaining part of this correction involves the cross product of the magnetic dipole moment

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_i e_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$$

with the unit vector $\mathbf{n}$. The last term, which is written explicitly in (14), can be transformed as follows:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{2c^3 r} \int_V dV' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2 \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) &= \frac{1}{2c^3 r} \frac{d^2}{dt^2} \int_V dV' \mathbf{e}_i j_i \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) n_k x'_k n_l x'_l = \\ &= \frac{1}{2c^2 r} \ddot{\mathcal{M}}_{ikl} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) n_k n_l \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

where $\mathbf{e}_i$ are the unit vectors of the Cartesian coordinate system and the summation over repeating indices is implied. The third-rank current quadrupole tensor is defined as:

$$\mathcal{M}_{ikl} = \frac{1}{c} \int_V dV' j_i x'_k x'_l.$$

Note that we do not attempt to make this tensor traceless and just retain the main $x'_k x'_l$ term, which is sufficient for the purposes of further derivations.

Collecting all contributions, we arrive at the vector potential in the following form:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cr} + \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}}{cr} + \frac{1}{2c^2 r} \ddot{\mathbf{D}} + \frac{1}{2c^2 r} \ddot{\mathcal{M}}_{ikl} n_k n_l \mathbf{e}_i$$

where all the quantities are evaluated at the retarded time $\tau = t - r/c$. The obtained expression might be compared, e.g., to the radiation part of the vector potential in [18, p. 17].

Вектор-потенциал до первого порядка по Ландау

(!!! я оставил эту теорию для осознания потом пары преобразований. про них потом подумать хочу. как из разложения перейти к дипольному моменту???)

Рассмотрим излучение, обусловленное следующими членами разложения векторного потенциала по степеням отношения размеров системы к длине волны (a/λ), по-прежнему предполагающегося малым. Хотя эти члены, вообще говоря, малы по сравнению с первым (дипольным), они существенны в тех случаях, когда дипольный момент системы равен нулю, так что дипольное излучение вообще отсутствует.

Разлагая в

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'+\mathbf{rn}/c} dV$$

подынтегральное выражение по степеням $(\mathbf{rn}/c)$ и сохраняя теперь два первых члена, находим:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'} dV + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \int (\mathbf{rn}) \mathbf{j}_{t'} dV$$

Подставляя сюда $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ и переходя к точечным зарядам, получим:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \sum e \mathbf{v} + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t} \sum e \mathbf{v}(\mathbf{rn}),$$

где здесь и ниже для краткости опускаем индекс t' у всех величин в правой стороне равенства.

Во втором слагаемом пишем:

$$\mathbf{v}(\mathbf{rn}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{nr}) + \frac{1}{2} \mathbf{v}(\mathbf{nr}) - \frac{1}{2} \mathbf{r}(\mathbf{nv}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{nr}) + \frac{1}{2} [[\mathbf{rv}]\mathbf{n}]$$

Мы находим тогда для $\mathbf{A}$ выражение

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{2c^2 R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e \mathbf{r}(\mathbf{nr}) + \frac{1}{cR_0} [[\dot{\mathbf{m}}]\mathbf{n}]$$

где $\mathbf{d}$ - дипольный момент системы, а $\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e [\mathbf{rv}]$ - ее магнитный момент.

Для дальнейшего преобразования заметим, что к $\mathbf{A}$ можно прибавить, не изменяя поля, любой вектор, пропорциональный $\mathbf{n}$, - В силу формул (66.3) $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ при этом не изменятся.

Поэтому вектор-потенциал также имеет вид:

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2R_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum e [3\mathbf{r}(\mathbf{n}\mathbf{r}) - \mathbf{n}r^2] + \frac{1}{cR_0} [\mathbf{m}\mathbf{n}]$$

Но стоящее под знаком $\partial^2/\partial t^2$ выражение есть произведение, $n_\beta D_{\alpha\beta}$, вектора $\mathbf{n}$ на тензор квадрупольного момента $D_{\alpha\beta} = \sum e (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2)$.

Вводя вектор $\mathbf{d}$ с компонентами $D_\alpha = \bar{D}_{\alpha\beta} n_\beta$, находим окончательное выражение для векторного потенциала:

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{\ddot{\mathbf{D}}}{6c^2R_0} + \frac{[\mathbf{m}\mathbf{n}]}{cR_0}$$

здесь опущен анапольный член, потому что Ландау захотел его не учитывать. Поэтому я не особо заинтересован в этом выводе, а пользуюсь выводом выше.

Напряженности полей и вектор Пойтинга

Вычислим их как обычно.

The next step is to calculate the magnetic field $\mathbf{B}$ using expression (23) for the vector potential. We have:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \left[\frac{1}{cr} \dot{\mathbf{d}} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{cr} \dot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{n} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2c^2r} \ddot{\mathbf{D}} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{2c^2r} \ddot{\mathcal{M}}_{ikl} \left(t - \frac{r}{c} \right) n_k n_l \mathbf{e}_i \right]$$

where we have written the time argument explicitly for convenience. In order to retain the radiation part $\mathbf{B}_1 \propto 1/r$, it is sufficient to keep solely the terms where the nabla operator acts on the time argument only:

$$\nabla \times \mathbf{f} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \nabla \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \dot{\mathbf{f}} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{f}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{n}.$$

This yields

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2r} + \frac{(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}}{c^2r} + \frac{\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}}{2c^3r} + \frac{1}{2c^3r} \ddot{\mathcal{M}}_{ikl} n_k n_l \varepsilon_{irs} n_r \mathbf{e}_s$$

The four terms in Eq. (24) correspond to the electric dipole, magnetic dipole, electric quadrupole, and current quadrupole term, respectively. Explicitly this reads

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_d + \mathbf{B}_m + \mathbf{B}_Q + \mathbf{B}_M,$$

where (mind the $1/c$ in the definitions of the magnetic moments!)

$$\mathbf{B}_d = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2r} \propto \frac{1}{c^2}, \\ \mathbf{B}_m = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}})}{c^2r} \propto \frac{1}{c^3}, \\ \mathbf{B}_Q = \frac{\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}}{2c^3r} \propto \frac{1}{c^3}, \\ \mathbf{B}_M = \frac{1}{2c^3r} \ddot{\mathcal{M}}_{ikl} n_k n_l \varepsilon_{irs} n_r \mathbf{e}_s \propto \frac{1}{c^4},$$

Thus, the magnitude of the Poynting vector contains the following terms:

$$|\mathbf{S}_1| = \frac{1}{4\pi} \left(\underbrace{c|\mathbf{B}_d|^2}_{\propto 1/c^3} + \underbrace{2c\mathbf{B}_d \cdot \mathbf{B}_m}_{\propto 1/c^4} + \underbrace{2c\mathbf{B}_d \cdot \mathbf{B}_Q}_{\propto 1/c^4} + \right. \\ \left. + \underbrace{c|\mathbf{B}_m|^2}_{\propto 1/c^5} + \underbrace{c|\mathbf{B}_Q|^2}_{\propto 1/c^5} + \underbrace{2c\mathbf{B}_m \cdot \mathbf{B}_Q}_{\propto 1/c^5} + \underbrace{2c\mathbf{B}_d \cdot \mathbf{B}_M}_{\propto 1/c^5} \right) + \mathcal{O}(c^{-6}).$$

Интенсивность дипольного, магнито-дипольного и квадрупольного излучения**Интенсивность дипольного излучения**

Интенсивность dI излучения в телесный угол do находится как $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_\omega|^2 R_0^2 d\omega \frac{d\omega}{2\pi}$. Поэтому тут будем считать H^2 .

The leading contribution to the radiated power is given by the electric dipole term. It reads

$$I_d = \frac{c}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} |\mathbf{B}_d|^2 r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi c^3} \int_{\Omega=4\pi} |\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}|^2 d\Omega.$$

Assuming that $\ddot{\mathbf{d}}$ is directed along the Oz axis and that the θ angle of the spherical coordinate system is that between $\ddot{\mathbf{d}}$ and $\mathbf{n}$, we obtain

$$I_d = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \int_{\Omega=4\pi} \sin^2 \theta d\Omega = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} \propto \frac{1}{c^3}.$$

Интенсивность магнито-дипольного излучения

In a similar fashion we can calculate the magnetic dipole contribution:

$$I_m = \frac{c}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} |\mathbf{B}_m|^2 r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi c^3} \int_{\Omega=4\pi} |(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}|^2 d\Omega$$

considering θ as the angle between $\ddot{\mathbf{m}}$ and $\mathbf{n}$. We thus see that

$$I_m = \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3} \propto \frac{1}{c^5}.$$

$$\mathcal{H}^\alpha = (\text{rot } \mathcal{A}_{(2)})^\alpha \stackrel{\text{в.з.}}{\approx} -\frac{[\mathbf{n}, [\ddot{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{n}]]_\alpha}{c^2 R} - \frac{1}{6c^3 R} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \ddot{D}_{\gamma\nu} n_\nu.$$

Вклад магнитного диполя определяется величиной

$$|[\mathbf{n}, [\ddot{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{n}]]| = |\ddot{\boldsymbol{\mu}}| \sin \theta,$$

где θ - угол между направлением распространения волны $\mathbf{n}$, т.е. волновым вектором и вектором второй производной магнитного момента. Таким образом, это излучение совершенно подобно излучению электрического диполя и как распределение по углам, и как интенсивность, для которой получим

$$\mathfrak{I}_{(\mu)} = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2$$

Интенсивность квадрупольного излучения

$$\mathfrak{I}_{(D)} = \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{\gamma\nu} \ddot{D}_{\gamma\nu}$$

Докажем это. Магнитное поле от вклада квадрупольного члена равно

$$\mathcal{H}_{\text{кв.}}^\alpha \stackrel{\text{в.з.}}{\approx} -\frac{1}{6c^3 R} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \ddot{D}_{\gamma\nu} n_\nu.$$

Для расчета интенсивности квадрупольного излучения $\mathfrak{I}_{(D)} = \frac{c}{4\pi} \langle \mathcal{H}_{\text{кв.}}^2 \rangle 4\pi R^2$ необходимо провести усреднение по углам величины

$$\mathfrak{D} = \left\langle \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \ddot{D}_{\gamma\nu} n_\nu \epsilon_{\alpha\beta'\gamma'} n_{\beta'} \ddot{D}_{\gamma'\nu'} n_{\nu'} \right\rangle,$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор, D_{ij} - симметричный тензор. Для усреднения на сфере пользуемся $\langle n_\beta n_\nu n_{\beta'} n_{\nu'} \rangle = \frac{1}{15} (\delta_{\beta\beta'} \delta_{\nu\nu'} + \delta_{\beta\nu'} \delta_{\nu\beta'} + \delta_{\beta\nu} \delta_{\beta'\nu'})$, получим:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{15} \left(2 \ddot{D}_{\gamma\nu} \ddot{D}_{\gamma\nu} + \ddot{D}_{\gamma\nu} \ddot{D}_{\gamma'\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\nu\gamma'} + \ddot{D}_{\gamma\beta} \ddot{D}_{\gamma'\beta'} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta'\gamma'} \right).$$

Тут последний член обращается в нуль как произведение симметричного $D_{\gamma\beta}$ на антисимметричный $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Во втором члене подстановка $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\nu\gamma'} = \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\gamma'} - \delta_{\beta\gamma'} \delta_{\nu\gamma}$ приводит к

$$\ddot{D}_{\gamma\nu} \ddot{D}_{\gamma'\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\nu\gamma'} = \ddot{D}_{\gamma\beta} \ddot{D}_{\gamma\beta} - \ddot{D}_{\gamma\gamma} D_{\beta\beta},$$

и тут так как тензор квадрупольного момента является бесследовым, $\ddot{D}_{\beta\beta} = 0$, получаем ответ

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{5} \ddot{D}_{\gamma\nu} \ddot{D}_{\gamma\nu} = \frac{1}{5} (\ddot{\mathbf{D}} \cdot \ddot{\mathbf{D}})$$

Интенсивность квадрупольного излучения

$$\mathfrak{I}_{(D)} = \frac{c}{4\pi} \langle \mathcal{H}^2 \rangle 4\pi R^2 = \frac{1}{36c^5} \mathfrak{D} = \frac{1}{36c^5} \frac{1}{5} \ddot{D}_{\gamma\nu} \ddot{D}_{\gamma\nu}.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{I}_{(D)} = \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{\gamma\nu} \ddot{D}_{\gamma\nu}$$

О занулении интерферирующих членов в первом порядке (!!!!????)

(?!!! вот тут у меня не зануляются они, я хз, вопрос остается.)

Зануляются они по причине ниже.

(в дополнения теорию излишнюю тут перенесу)

The product of the electric dipole and magnetic dipole terms ($\mathbf{B}_d \cdot \mathbf{B}_m$) contains the scalar product

$$\begin{aligned} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \cdot [(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}] &= (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \cdot [\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{m}}) - \ddot{\mathbf{m}}] = \\ &= (\ddot{\mathbf{d}} \cdot \underbrace{(\mathbf{n} \times \mathbf{n})}_{=0})(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{m}}) - (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \cdot \ddot{\mathbf{m}} = \mathbf{n} \cdot (\ddot{\mathbf{d}} \times \ddot{\mathbf{m}}). \end{aligned}$$

Integration of the respective term in Eq. (4) using spherical coordinates with θ corresponding to the angle between $(\ddot{\mathbf{d}} \times \ddot{\mathbf{m}})$ and $\mathbf{n}$ yields zero due to

$$\int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$$

Similar considerations apply to the product of the electric dipole and the electric quadrupole terms ($\mathbf{B}_d \cdot \mathbf{B}_Q$). It contains $(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathcal{D} \times \mathbf{n})$, which can be transformed as follows:

$$(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \cdot (\ddot{\mathcal{D}} \times \mathbf{n}) = \ddot{\mathbf{d}} \cdot [\mathbf{n} \times (\ddot{\mathcal{D}} \times \mathbf{n})] = \ddot{\mathbf{d}} \cdot \ddot{\mathcal{D}} - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}})(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathcal{D}}).$$

Bearing in mind the definition of $\mathcal{D}$, we obtain:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{d}} \cdot \ddot{\mathcal{D}} &\equiv \ddot{d}_i \ddot{\mathcal{D}}_i = \ddot{d}_i \ddot{Q}_{ij} n_j, \\ (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}})(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathcal{D}}) &\equiv \ddot{d}_i n_i \ddot{\mathcal{D}}_j n_j = \ddot{d}_i \ddot{Q}_{jk} n_i n_j n_k, \end{aligned}$$

where the summation over repeating indices is implied, as before. It is easy to show that the integration of the n_i components over the complete solid angle gives zero, e.g.:

$$\int_{\Omega=4\pi} n_x d\Omega = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cdot \underbrace{\sin \theta \cos \psi}_{n_x = x/r} = 0.$$

The same holds true for triple products:

$$\int_{\Omega=4\pi} n_i n_j n_k d\Omega = 0.$$

This means that there is no contribution into the radiated power from the product of the electric dipole and quadrupole terms.

In fact, there is a common reason for the above two contributions being zero: they contain products of an odd number of n_i components. Such expressions always yield zero upon integration over the complete solid angle. This is a consequence of independence of such an integral of the choice of axes orientation. The product of n_i is an odd-rank symmetric tensor, and the only tensor of this type invariant under axes rotation is zero. The same rationale would apply, e.g., to the products of $(\mathbf{B}_m \cdot \mathbf{B}_M)$ and $(\mathbf{B}_Q \cdot \mathbf{B}_M)$, which appear in higher orders of expansion of the radiated power.

(?!!!! далее зануляется самый неочевидный член)

Consider now the product of the magnetic dipole and the electric quadrupole terms $(\mathbf{B}_m \cdot \mathbf{B}_Q)$. The expression $(\ddot{\mathcal{D}} \times \mathbf{n}) \cdot [(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}]$ can be transformed as

$$(\ddot{\mathcal{D}} \times \mathbf{n}) \cdot [(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}] = \mathbf{n} \cdot (\ddot{\mathcal{D}} \times \ddot{\mathbf{m}}).$$

Since $\mathcal{D}$ is a vector obtained as a contraction of the electric quadrupole moment tensor Q_{ij} with the unit vector $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, we obtain:

$$\mathbf{n} \cdot (\ddot{\mathcal{D}} \times \ddot{\mathbf{m}}) = n_i \varepsilon_{ijk} \ddot{\mathcal{D}}_j \ddot{\mathbf{m}}_k = \varepsilon_{ijk} \ddot{Q}_{jl} n_l n_i \ddot{\mathbf{m}}_k.$$

The integrals of two unit vectors over the solid angle can be shown to equal

$$\int_{\Omega=4\pi} n_l n_i d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{li}.$$

The Kronecker delta contracts with $\ddot{Q}_{jl}$, hence the above term is proportional to

$$\varepsilon_{ijk} \ddot{Q}_{jl} \delta_{li} \ddot{\mathbf{m}}_k = \varepsilon_{ijk} \ddot{Q}_{ji} \ddot{\mathbf{m}}_k = 0$$

since this is the double contraction of the antisymmetric Levi-Civita symbol with symmetric quadrupole tensor derivatives.

Such a double contraction of the Levi-Civita symbol with symmetric tensors will also yield zero contributions for terms of a similar nature in higher orders of expansion.

(????? I had some mistake here, so I need to do it again. Я писал через произведение трех Леви-Чивит, там двое из их через дельта-символы переписывал, далее у меня одна Леви-Чивита осталась, по итогу усреднение дало такое:)

$$\begin{aligned} \langle [DDn][[mn]n] \rangle &= \left\langle e_{x\alpha} \ddot{D}_{ps} n_s n_\gamma e_{\alpha\nu\mu} l_{gk} \ddot{m}_g n_k n_\mu \right. \\ &= \left\langle e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\nu\mu} e_{\nu jx} \ddot{D}_{\beta\rho} \text{ling } \delta_{sx} \delta_{\gamma\mu} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \text{lopr le} \alpha \mu \log u \ddot{D}_{\rho\rho} \ddot{m}_g \delta_{\rho\mu} \delta_{\gamma k} + l_{\alpha\beta s} e_{\alpha y \mu} e_{i y \in} \ddot{D}_{\mu s} \dot{m}'_g \delta_{sr} \delta_{k\mu} \Big\rangle \cdot \frac{1}{15} = \\
 & = \left\langle 5 e_{\beta g \mu} \ddot{D}_{\beta \mu} \ddot{m}_g \right\rangle \cdot \frac{1}{15} = \\
 & = \frac{1}{3} \left\langle e_{\beta g \mu} \ddot{O}_{\mu \mu} \ddot{m}_g \right\rangle.
 \end{aligned}$$

(??? и от него ненулевой вклад. потом подумаю или спрошу умных людей, что не то?)

Анапольный член

The product of the electric dipole term

$$\mathbf{B}_d = \frac{1}{c^2 r} \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n} = \frac{1}{c^2 r} \varepsilon_{pqt} \ddot{d}_p n_q \mathbf{e}_t,$$

with the current quadrupole term (29) yields

$$\begin{aligned}
 2\mathbf{B}_d \cdot \mathbf{B}_M &= 2 \frac{1}{c^2 r} \varepsilon_{pqt} \ddot{d}_p n_q \mathbf{e}_t \cdot \frac{1}{2c^3 r} \ddot{M}_{ikl} n_k n_l \varepsilon_{irs} n_r \mathbf{e}_s = \\
 &= \frac{1}{c^5 r^2} \underbrace{\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_s}_{=\delta_{ts}} \varepsilon_{pqt} \varepsilon_{irs} n_k n_l n_q n_r \ddot{d}_p \ddot{M}_{ikl} = \\
 &= \frac{1}{c^5 r^2} \ddot{d}_p \ddot{M}_{ikl} \varepsilon_{pqt} \varepsilon_{irt} n_k n_l n_q n_r
 \end{aligned}$$

It involves the contraction of the Levi-Civita symbols

$$\varepsilon_{pqt} \varepsilon_{irt} = \delta_{pi} \delta_{qr} - \delta_{pr} \delta_{qi}$$

resulting in

$$2\mathbf{B}_d \cdot \mathbf{B}_M = \frac{1}{c^5 r^2} \left(\ddot{d}_i \ddot{M}_{ikl} n_k n_l - \ddot{d}_q \ddot{M}_{ikl} n_k n_l n_q n_i \right),$$

where the square of a unit vector $n_r n_r = 1$. We will denote the contribution to the radiated power originating from this term as I_A . It equals

$$I_A = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{c^5} \int_{\Omega=4\pi} \left(\ddot{d}_i \ddot{M}_{ikl} n_k n_l - \ddot{d}_q \ddot{M}_{ikl} n_k n_l n_q n_i \right) d\Omega.$$

Performing the transformations similar as in the previous subsection when dealing with the electric quadrupole radiation, we arrive at

$$I_A = \frac{1}{c^4} \left(\frac{4}{15} \ddot{M}_{ikk} \ddot{d}_i - \frac{2}{15} \ddot{M}_{iik} \ddot{d}_k \right) = -\frac{2}{15c^4} \left(\ddot{M}_{kki} - 2\ddot{M}_{ikk} \right) \ddot{d}_i.$$

This result can be presented in a more convenient form introducing a vector

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(\tau) &= \frac{1}{10} (\mathcal{M}_{kki} - 2\mathcal{M}_{ikk}) \mathbf{e}_i = \\
 &= \frac{1}{10c} \int_V dV' \{ (\mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r}' - 2r'^2 \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau), \}
 \end{aligned}$$

known as the anapole¹ moment or toroidicity. The former name is due to the fact that this expression has no correspondence in the multipole expansion of static electric and magnetic fields. On the other hand, a toroidal solenoid produces a field, which can be described by $\mathbf{T}$. Note that terms corresponding to the toroidal moments are sometimes included in the definitions of the dynamic electric multipole moments, and corresponding terms given for the radiated power [11, 17, 13]. The power of the anapole radiation is thus

$$I_A = -\frac{4}{3c^4} \ddot{\mathbf{T}} \cdot \ddot{\mathbf{d}}.$$

О случаях применения магнито-дипольного излучения

(пока не применял, потом подумаю.)

Отметим, что магнитно-дипольное излучение фактически во многих случаях отсутствует. Так, оно отсутствует у системы, в которой отношение заряда к массе у всех движущихся частиц одинаково (в этом случае отсутствует и дипольное излучение, как уже было отмечено в 67). Действительно, у такой системы магнитный момент пропорционален механическому моменту импульса (см. 44), и потому, в силу закона сохранения последнего, $\dot{\mathbf{m}} = 0$.

По той же причине (см. задачу к § 44) магнитно-дипольное излучение отсутствует у всякой системы, состоящей всего из двух частиц (чего, нельзя сказать о дипольном излучении).

(не совсем глубоко это понимаю, потом еще раз посмотрю.)

О случаях применения анапольного излучения

(и тут же узнаю, почему его не пишут в книгах?? казалось бы, такой же порядок, так что мб оно нужно. тут вопрос про это)

Излучение при рассеянии потока заряженных частиц одинаковыми с ними частицами (??)

Вычислить полное эффективное излучение при рассеянии потока заряженных частиц одинаковыми с ними частицами.

Дипольное (а также магнитно-дипольное) излучение при столкновении одинаковых частиц отсутствует, так что надо вычислить квадрупольное излучение.

(?! почему??)

Тензор квадрупольного момента системы из двух одинаковых частиц (относительно их общего центра инерции) равен

$$D_{\alpha\beta} = \frac{e}{2} (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})$$

где x_α - компоненты радиус-вектора $\mathbf{r}$ между частицами.

После трехкратного дифференцирования $D_{\alpha\beta}$ выражаем первую, вторую и третью производные по времени от координат x_α через относительную скорость частиц v_α согласно

$$\dot{x}_\alpha = v_\alpha, \quad \mu \ddot{x}_\alpha = \frac{m}{2} \ddot{x}_\alpha = \frac{e^2 x_\alpha}{r^3}, \quad \frac{m}{2} \ddot{\ddot{x}}_\alpha = e^2 \frac{v_\alpha r - 3x_\alpha v_r}{r^4}$$

где $v_r = \mathbf{v}\mathbf{r}/r$ - радиальная компонента скорости (второе равенство есть уравнение движения заряда, а третье получается дифференцированием второго).

Вычисление приводит к следующему выражению для интенсивности

$$I = \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2 = \frac{2e^6}{15m^2c^5} \frac{1}{r^4} (v^2 + 11v_\varphi^2)$$

($v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2$); v и v_φ выражаем через r с помощью равенств

$$v^2 = v_0^2 - \frac{4e^2}{mr}, \quad v_\varphi = \frac{\rho v_0}{r}$$

Интегрирование по времени заменяем интегрированием по dr подобно тому, как это было сделано в задаче 3 к §70, т.е. написав

$$dt = \frac{dr}{v_r} = \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 - \frac{\rho^2 v_0^2}{r^2} - \frac{4e^2}{mr}}}$$

В двойном интеграле (по dr и $d\rho$) производим сначала интегрирование по $d\rho$, а затем по dr .

В результате вычислений получается следующий результат:

$$\mathbf{x} = \frac{4\pi}{9} \frac{e^4 v_0^3}{mc^5}$$

Сила отдачи при стационарном финитном движении (!??)

(!!! пропишу потом в первую часть, пока от полей силу не освоил!! потом порешаю.)

Найти силу отдачи, действующую на излучающую систему частиц, совершающих стационарное финитное движение.

Искомая сила F вычисляется как потеря импульса системой в единицу времени, т.е. как поток импульса, уносимого испускаемыми системой электромагнитными волнами:

$$F_\alpha = \oint \sigma_{\alpha\beta} df_\beta = \int \sigma_{\alpha\beta} n_\beta R_0^2 d\Omega$$

интегрирование производится по сферической поверхности большого радиуса R_0 .

Тензор напряжений дается формулой (33.3), а поле $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ берем из (71.4).

Ввиду поперечности этих полей интеграл сводится к

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{8\pi} \int 2H^2 \mathbf{n} R_0^2 d\Omega$$

(про усреднение в дополнениях лучше напишу)

В результате получим:

$$F_\alpha = -\frac{1}{c^4} \left\{ \frac{1}{15c} \ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{d}_\beta + \frac{2}{3} [\ddot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{m}}]_\alpha \right\}$$

(?? как её применять и какие от этого эффекты??)

19.2.5 Radiation up to the $o(1/c^2)$: Features

О случаях применения квадрупольного излучения

(с опытом все укажу явно)

Применяются, когда дипольный момент равен нулю.

при столкновении одинаковых частиц отсутствует дипольное (а также магнитно-дипольное) излучение, так что надо вычислить квадрупольное.

(подумаю потом про это)

19.2.6 Examples of Radiation

An Application: Pulsars по Тонгу

(потом посмотрю, вроде очень крутое приложение)

Pulsars are lighthouses in the sky, spinning neutron stars continuously beaming out radiation which sweeps past our line of sight once every rotation. They have been observed with periods between 10^{-3} seconds and 8 seconds.

Neutron stars typically carry a very large magnetic field. This arises from the parent star which, as it collapses, reduces in size by a factor of about 10^5 . This squeezes the magnetic flux lines, which gets multiplied by a factor of 10^{10} . The resulting magnetic field is typically around

10^8 Tesla, but can be as high as 10^{11} Tesla. For comparison, the highest magnetic field that we have succeeded in creating in a laboratory is a paltry 100 Tesla or so.

The simplest model of a pulsar has the resulting magnetic dipole moment $\mathbf{m}$ of the neutron star misaligned with the angular velocity. This resulting magnetic dipole radiation creates the desired lighthouse effect. Consider the set-up shown in the picture. We take the pulsar to rotate about the z -axis with frequency Ω . The magnetic moment sits at an angle α relative to the z -axis, so rotates as

$$\mathbf{m} = m_0(\sin(\alpha)\sin(\Omega t)\hat{\mathbf{x}} + \sin(\alpha)\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{y}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{z}})$$

The power emitted (6.25) is then

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{6\pi c^3} m_0^2 \Omega^4 \sin^2 \alpha$$

At the surface of the neutron star, it's reasonable to assume that the magnetic field is given by the dipole moment. In Section 3.3, we computed the magnetic field due to a dipole moment: it is

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{R^3} \right)$$

where R is the radius of the star. This means that $B_{\max} = \mu_0 m_0 / 2\pi R^3$ and the power emitted is

$$\mathcal{P} = \frac{2\pi R^6 B_{\max}^2}{3c^3 \mu_0} \Omega^4 \sin^2 \alpha$$

Because the pulsar is emitting radiation, it must lose energy. And this means it slows down. The rotational energy of a the pulsar is given by

$$E = \frac{1}{2} I \Omega^2$$

where $I = \frac{2}{5} M R^2$ is the moment of inertia of a sphere of mass M and radius R . Equating the power emitted with the loss of rotational kinetic energy gives

$$\mathcal{P} = -\dot{E} = -I\Omega\dot{\Omega}$$

Let's put some big numbers into these equations. In 1054, Chinese astronomers saw a new star appear in the sky. 6500 light years away, a star had gone supernova. It left behind a pulsar which, today, emits large quantities of radiation, illuminating the part of the sky we call the Crab nebula. This is shown in the picture.

The Crab pulsar has mass $M \approx 1.4 M_{\text{Sun}} \approx 3 \times 10^{30}$ kg and radius $R \approx 15$ km. It spins about 30 times a second, so $\Omega \approx 60\pi \text{ s}^{-1}$. It's also seen to be slowing down with $\dot{\Omega} = -2 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2}$. From this information alone, we can calculate that it loses energy at a rate of $\dot{E} = I\Omega\dot{\Omega} \approx -10^{32} \text{ J s}^{-1}$. That's a whopping amount of energy to be losing every second. In fact, it's enough energy to light up the entire Crab nebula. Which, of course, it has to be! Moreover, we can use (6.26) and (6.27) to estimate the magnetic field on the surface of the pulsar. Plugging in the numbers give $B_{\max} \sin \alpha \approx 10^8$ Tesla.

Об исследованиях этих разложений и работе Зельдовича

(интересно, а что там Зельдович писал про это? может быть, тут многое еще есть, что знают про это???)

19.2.7 Electric field at finite temperature

(see books about it. Now, I don't know how to do it)

19.3 Radiation Damping: Formalism and Advanced Properties of Electrodynamics

Обсудим самые типичные примеры излучения.

19.3.1 Radiation Damping: Formalism

(?? вот это может понадобится в задачах!!!)

Суть (?)

(??? качественно откуда это появляется??? пока не могу объяснить, в школе вроде нам говорили, что такого нет)

Theory

В § 65 было показано, что разложение потенциалов поля системы зарядов в ряд по степеням v/c приводит во втором приближении к функции Лагранжа, вполне определяющей (в этом приближении) движение зарядов.

Произведем теперь разложение поля до членов более высокого порядка и выясним, к каким эффектам приводят эти члены в разложении скалярного потенциала

$$\varphi = \int \frac{1}{R} \rho_{t-R/c} dV$$

Член третьего порядка по $1/c$ равен

$$\varphi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int R^2 \rho dV$$

По тем же причинам, что и при выводе (65.3), в разложении векторного потенциала мы должны взять только член второго порядка по $1/c$, т.е.

$$\mathbf{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV$$

Произведем преобразование потенциалов:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f$$

выбрав функцию f таким образом, чтобы скалярный потенциал $\varphi^{(3)}$ обратился в нуль:

$$f = -\frac{1}{6c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R^2 \rho dV$$

Тогда новый векторный потенциал будет равен

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'^{(2)} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV - \frac{1}{6c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \int R^2 \rho dV = \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV - \frac{1}{3c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \mathbf{R} \rho dV \end{aligned}$$

Переходя здесь от интегралов к суммам по отдельным зарядам, для первого слагаемого в правой части получим выражение $-\frac{1}{2} \sum e \mathbf{v}$.

Во втором слагаемом пишем $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, где $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$ имеют обычный смысл (см. §66); тогда $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{v}$, и второе слагаемое принимает вид $\frac{1}{3c^2} \sum e \dot{\mathbf{v}}$.

Таким образом

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{2}{3c^2} \sum e \dot{\mathbf{v}}$$

Соответствующее этому потенциалу магнитное поле равно нулю ($\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}'^{(2)} = 0$), поскольку $\mathbf{A}'^{(2)}$ не содержит явным образом координат.

Электрическое же поле, $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}'^{(2)}/c$, равно

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^3} \cdot \ddot{\mathbf{d}}$$

где d - дипольный момент системы.

Таким образом, члены третьего порядка в разложении поля приводят к появлению дополнительных действующих на заряды сил, не содержащихся в функции Лагранжа (65.7); эти силы зависят от производных по времени от ускорения зарядов.

Во втором слагаемом пишем $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, где $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$ имеют обычный смысл; тогда $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{v}$, и второе слагаемое принимает вид $\frac{1}{3c^2} \sum e \dot{\mathbf{v}}$.

Таким образом

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{2}{3c^2} \sum e \dot{\mathbf{v}}$$

Соответствующее этому потенциалу магнитное поле равно нулю ($\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}'^{(2)} = 0$), поскольку $\mathbf{A}'^{(2)}$ не содержит явным образом координат.

Электрическое же поле, $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}'^{(2)}/c$, равно

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^3} \cdot \ddot{\mathbf{d}}$$

где d - дипольный момент системы.

Таким образом, члены третьего порядка в разложении поля приводят к появлению дополнительных действующих на заряды сил, не содержащихся в функции Лагранжа (65.7); эти силы зависят от производных по времени от ускорения зарядов.

Средняя работа силы над системой зарядов

Рассмотрим систему зарядов, совершающих стационарное движение и вычислим среднюю работу, производимую полем (75.4) за единицу времени.

На каждый заряд e действует сила $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$, т.е.

$$\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}$$

В единицу времени эта сила производит работу, равную $A_1 = \mathbf{f}\mathbf{v}$; полная работа, совершенная над всеми зарядами, равна сумме по зарядам:

$$A = \sum \mathbf{f}\mathbf{v} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}} \sum e \mathbf{v} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}} \dot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{d}}\dot{\mathbf{d}}) - \frac{2}{3c^3} \dot{\mathbf{d}}^2$$

При усреднении по времени первый член исчезает, так что средняя работа оказывается равной

$$\sum \overline{\mathbf{f}\mathbf{v}} = -\frac{2}{3c^3} \overline{\dot{\mathbf{d}}^2}$$

Но стоящее справа выражение есть не что иное, как (взятое с обратным знаком) среднее излучение энергии системой за единицу времени (см. (67.8)).

Таким образом, возникающие в третьем приближении силы $\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}$ описывают обратное действие излучения на заряды. Эти силы носят название торможения излучением или лоренцевых сил трения.

Потеря момента импульса

Одновременно с потерей энергии в излучающей системе зарядов происходит также и потеря момента импульса, скорость который $d\mathbf{M}/dt$, легко вычислить с помощью выражений для сил торможения.

Дифференцируя момент $\mathbf{M} = \sum[\mathbf{r}\mathbf{p}]$ по времени, имеем $\dot{\mathbf{M}} = \sum[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}]$, так как $\sum[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] = \sum m[\mathbf{v}\mathbf{v}] \equiv 0$. Производную по времени от импульса частицы заменяем действующей на нее силой трения (75.5) и находим:

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum[\mathbf{r}\mathbf{f}] = \frac{2}{3c^3} \sum e [\mathbf{r} \ddot{\mathbf{d}}] = \frac{2}{3c^3} [\mathbf{d} \ddot{\mathbf{d}}]$$

Нас интересует среднее по времени значение потери момента импульса при стационарном движении, подобно тому как выше нас интересовала средняя потеря энергии.

Написав

$$[d\ddot{\mathbf{d}}] = \frac{d}{dt}[\mathbf{d}\ddot{\mathbf{d}}] - [\dot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{d}}]$$

и замечая, что полная производная по времени (первый член) при усреднении исчезает, найдем окончательно следующее выражение для средней потери момента импульса излучающей системой:

$$\overline{\frac{d\mathbf{M}}{dt}} = -\frac{2}{3c^3} [\overline{\mathbf{d}\ddot{\mathbf{d}}}]$$

19.3.2 Limits of Applicability of Classical ED by Landau

Парадоксы и противоречия

Описание действия заряда «самого на себя» с помощью силы торможения вообще не является вполне удовлетворительным и содержит в себе противоречия.

Для одной частицы во внешнем поле себя же торможение излучением есть

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}$$

Также всегда можно выбрать такую систему отсчета, в которой она в данный момент времени покоится.

Если вычислять в такой системе дальнейшие члены разложения создаваемого зарядом поля, то легко убедиться в том, что при стремлении к нулю радиусвектора $\mathbf{R}$ от заряда к точке наблюдения все эти члены обращаются в нуль.

Таким образом, в случае одного заряда формула лоренцева сила трения является точным выражением для обратного действия излучения в той системе отсчета, в которой заряд покоится.

Уравнение движения заряда в поле только себя, имеет вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}$$

Это уравнение имеет, кроме тривиального решения $\mathbf{v} = \text{const}$, еще решение, в котором ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ пропорционально $\exp(3mc^3 t/2e^2)$ т. е. неограниченно возрастает со временем.

Это значит, например, что заряд, прошедший через какое-нибудь поле, по выходе из поля должен был бы неограниченно «самоускоряться».

Абсурдность этого результата свидетельствует об ограниченной применимости формулы. Может возникнуть вопрос о том, каким образом электродинамика, удовлетворяющая закону сохранения энергии, может привести к абсурдному результату, в котором свободная частица неограниченно увеличивает свою энергию.

Конечность массы частицы

Корни этой трудности находятся, в бесконечной электромагнитной «собственной массе» элементарных частиц.

(кст, энергию электростатического поля пройду еще раз)

Когда мы пишем в уравнениях движения конечную массу заряда, то мы этим, по существу, приписываем ему формально бесконечную же отрицательную «собственную массу» неэлектромагнитного происхождения, которая вместе с электромагнитной массой приводила бы к конечной массе частицы.

Поскольку вычитание одной из другой двух бесконечностей не является вполне корректной математической операцией, то это и приводит к ряду дальнейших трудностей, в том числе и к указанной здесь.

Уравнение движения частицы с силой торможения

В системе координат, в которой скорость частицы мала, уравнение движения с учетом торможения излучением имеет вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}] + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}$$

По изложенным соображениям, это уравнение применимо только постольку, поскольку сила торможения мала по сравнению с силой, действующей на заряд со стороны внешнего поля.

Для выяснения физического смысла этого условия поступим следующим образом.

В системе отсчета, в которой заряд в данный момент покоится, вторая производная от скорости по времени равна, при пренебрежении силой торможения:

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{mc}[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{H}]$$

Во втором члене подставляем (ограничиваясь той же точностью) $\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}/m$ и получаем:

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e^2}{m^2c}[\mathbf{E}\mathbf{H}]$$

Соответственно этому сила торможения будет состоять из двух членов:

$$f = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}[\mathbf{E}\mathbf{H}]$$

Если ω есть частота движения, то $\dot{\mathbf{E}}$ пропорционально $\omega\mathbf{E}$ и, следовательно, первый член порядка величины $\frac{e^3\omega}{mc^3}E$; второй же - порядка $\frac{e^4}{m^2c^4}E\mathbf{H}$.

Поэтому условие малости сил торможения по сравнению с действующей на заряд внешней силой eE дает, во-первых:

$$\frac{e^2}{mc^3}\omega \ll 1$$

или, вводя длину волны $\lambda \sim c/\omega$:

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2}$$

Таким образом, формула (75.8) для торможения излучением применима только в том случае, если длина падающей на заряд волны велика по сравнению с «радиусом» заряда e^2/mc^2 .

Мы видим, что расстояния порядка e^2/mc^2 опять оказываются той границей, за которой электродинамика приходит в противоречие сама с собой (см. § 37).

Во-вторых, сравнивая второй член в силе торможения с силой eE , находим условие

$$H \ll \frac{m^2 c^4}{e^3}$$

(или $c/\omega_H \gg e^2/mc^2$, где $\omega_H = eH/mc$).

Таким образом, необходимо также, чтобы само поле не было слишком велико.

Поля $\sim m^2 c^4/e^3$ тоже являются границей, за которой классическая электродинамика приводит к внутренним противоречиям. И здесь надо иметь в виду, что в действительности электродинамика становится неприменимой, вследствие квантовых эффектов, уже при значительно меньших полях.

Напомним во избежание недоразумений, что длина волны в (75.11) и величина поля в (75.12) относятся к той системе отсчета, в которой частица в данный момент покоится.

19.3.3 Self-action of a field

(там что Киселев говорил, что частица движется, создает поле, поле действует на неё, меняет её движение. такие задачи мы не рассматривали, мб потом порешаю. Currently, I can't say much about it)

19.3.4 Equivalence Principle in Electrodynamics

Еще раз о принципе эквивалентности by В.Л. Гинзбург, Ю.Н. Ерошенко

Abstract

The formulation of equivalence principle is recalled. The conclusions stemming from this principle for the case of a charge placed in a locally uniform gravitational field or a uniformly accelerated reference system are formulated (this question was discussed earlier, for example, in the note [1]). The authors demonstrate that the criticism, contained in paper [2], of the conventional interpretation of the principle of equivalence in electrodynamics presented in note [1] is groundless.

Принципу эквивалентности (ПЭ) и его роли в физике вообще и в общей теории относительности (ОТО) в частности посвящено огромное число публикаций. В настоящей заметке мы не собираемся сколько-нибудь подробно обсуждать ПЭ, а приведем лишь его формулировку и комментарии к ней из классической книги Паули [3, с. 196]:

"Для бесконечно малой области четырехмерного мира (т.е. для области столь малой, что пространственно-временными изменениями силы тяжести в ней можно пренебречь) всегда существует такая система координат $K_0(X_1, X_2, X_3, X_4)$, в которой сила тяжести не влияет ни на движение материальной точки, ни на любые другие физические процессы. Коротко говоря, в бесконечно малой области мира любое поле тяготения может быть уничтожено с помощью преобразования координат. Местная система координат K_0 может быть мысленно реализована в виде свободно падающего, достаточно малого ящика, на который не действуют никакие внешние силы, кроме силы тяготения, в котором он свободно падает.

Очевидно, что указанное преобразование возможно только потому, что поле тяготения обладает фундаментальным свойством сообщать всем телам одинаковое ускорение, или,

иначе говоря, потому, что тяжелая и инертная массы всегда равны. Это утверждение имеет очень надежный экспериментальный фундамент".

Мы остановились именно на этой формулировке ПЭ потому, что книга [3] была впервые издана еще в 1921 г. Таким образом, всего через несколько лет после завершения в 1915 г. создания ОТО физический смысл и локальный, так сказать, характер ПЭ были вполне ясны достаточно широким кругам физиков.

В литературе иногда различают (см., например, [4]) ньютоновский или слабый принцип эквивалентности (СПЭ) и сильный или эйнштейновский принцип эквивалентности (ЭПЭ). При этом под СПЭ понимают ПЭ в применении только к механике, т.е. утверждение о том, что в гравитационном поле все тела движутся с одинаковым ускорением. Отсюда следует, что для наблюдателя в лифте, свободно падающем в гравитационном поле (такой лифт часто называли лифтом Эйнштейна, сейчас его называли бы спутником), эти тела не будут иметь ускорения. (Мы отвлекаемся от возможных приливных эффектов, обусловленных неоднородностью гравитационного поля; такие эффекты, очевидно, могут быть сделаны сколь угодно малыми при уменьшении размеров лифта.)

Переход к ЭПЭ, совершенный Эйнштейном, заключается в том, что не только механические законы, но и все законы физики, в частности электродинамические, в свободно падающем лифте такие же, как при отсутствии гравитации. Разумеется, приведенная в [3] формулировка ПЭ относится к ЭПЭ.

Поскольку в инертную массу тела вносят свой вклад сильное, электромагнитное и слабое взаимодействия, то экспериментальная проверка равенства инертной и гравитационной масс является проверкой не только СПЭ, но и ЭПЭ (см. [4]). Вклад гравитационного взаимодействия в значение инертной массы также не нарушает универсальности равенства инертной и гравитационной масс (см. [4, с. 162]).

В процессе построения ОТО и позже Эйнштейн использовал различные формулировки ЭПЭ и комментировал их (см. [2] и [5, с. 32]). При этом, однако, его высказывания никогда не противоречили приведенной в [3] формулировке ПЭ (см. выше).

Заметим, наконец, что мы не касаемся в настоящей заметке квантовых явлений. С учетом квантовых эффектов и, конкретно, нулевых колебаний полей в вакууме ПЭ справедлив, но, естественно, лишь при соответствующем выборе состояний вакуума [6].

2. Остановимся на применении ПЭ к заряду e , находящемуся в гравитационном поле или в равноускоренной системе отсчета. Эта задача по ряду причин (в общем, ясным из дальнейшего) привлекла к себе внимание и обсуждается в ряде статей [7 – 10, 1, 2].

Будем рассматривать разные системы отсчета и различные ситуации, рассуждая при этом в известном смысле в рамках классической механики (ньютоновского приближения), когда физически определены понятия об инерциальной системе отсчета, внешнем гравитационном поле с ускорением свободного падения $\mathbf{g}$ и т.д.

Первая из обсуждаемых систем - инерциальная система K без поля тяжести. Физически инерциальная система K может быть реализована где-то в межзвездном пространстве, достаточно далеко от всех масс. Свободный заряд e , находящийся в системе K , разумеется, не излучает. Это особенно ясно, если скорость заряда (относительно системы K) $\mathbf{v} = 0$. Тогда ему и "излучать нечего", его поле есть кулоновское поле. В остальных системах отсчета, которые рассматриваются ниже, скорость заряда в обсуждаемый момент времени также будет считаться равной нулю.

Теперь рассмотрим систему отсчета K_g - инерциальную систему отсчета, в которой имеется гравитационное поле с ускорением $\mathbf{g}$. В интересующей нас ограниченной области пространства поле $\mathbf{g}$ будем считать однородным и постоянным во времени. Система K_g с некоторой погрешностью может быть реализована в сравнительно небольшой области вблизи любой массы, например вблизи поверхности Земли. Свободный заряд в системе K_g будет, очевидно, двигаться, с постоянным ускорением $\mathbf{g}$.

Вопрос об излучении при таком и более общем равноускоренном движении явился объектом длительной дискуссии (см. [1, 3, 7-11] и указанную там литературу). При этом выяснилось, что равноускоренный заряд излучает в том смысле, что поток вектора Пойнтинга через окружающую заряд поверхность отличен от нуля:

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} w^2 \quad (1)$$

где $w^2/c^4 = -w^i w_i$, w^i - четырехмерный вектор ускорения заряда, c - скорость света (подробнее см. [1] и [11, гл. 3]). Если скорость заряда v в момент излучения мала по сравнению со скоростью света c , то $w^2 = (\dot{\mathbf{v}})^2$ и в данном случае в системе K_g поток вектора Пойнтинга

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} g^2 \quad (2)$$

Наконец, рассмотрим систему отсчета K_a - систему без гравитационного поля, но имеющую ускорение $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$ относительно системы K . Свободный заряд, находящийся в системе K_a (в лифте), согласно ПЭ должен вести себя совершенно так же, как в системе K_g , в частности он должен излучать энергию (2).

В [1] упоминается также система K_{ga} , свободно падающая в системе K_g , т.е. обладающая относительно нее ускорением $\mathbf{g}$. Очевидно, система K_{ga} - локальноинерциальная система отсчета и в ней заряд не излучает. Система K_{ga} - это есть система K_0 , упоминаемая в процитированной выше формулировке ПЭ из [3].

Наличие излучения в системе K_a на первый взгляд парадоксально: ведь заряд e относительно инерциальной системы K не ускорен и, казалось бы, не должен излучать.

Этот парадокс, естественно, обсуждается в упомянутой литературе и, в частности, в [1].

Дело здесь в том, что выражение (1) лоренц-ковариантно, т.е. одинаково в любой инерциальной системе. Однако это выражение отнюдь не должно сохраняться и фактически не сохраняется при переходе в неинерциальные системы и, в частности, в равноускоренную систему отсчета K_a .

Ситуация аналогична той, которая, как хорошо известно, имеет место в отношении электромагнитного поля в разных инерциальных системах. Если в системе отсчета K , в которой заряд покоится, присутствует лишь кулоновское поле заряда, то в инерциальных системах K' , равномерно движущихся относительно системы K , имеется также поперечное электрическое поле и магнитное поле. Аналогично, при переходе от системы отсчета к системе K_a поле заряда изменяется, и если в K энергия $P = 0$, то в K_a уже $P \neq 0$.

Еще один парадокс видят в том, что изменением системы отсчета можно "создать излучение" - сделать неравной нулю энергию P . Между тем переход от системы отсчета K к системе K_a не может породить новые частицы: электроны, адроны, фотоны и т.п.

Разрешение этого парадокса состоит в том, что отличие от нуля энергии P отнюдь не эквивалентно наличию фотонов - свободных решений уравнений электромагнитного поля. Подробнее об этом речь идет, например, в [1].

В статье А.А. Логунова, М.А. Мествиришвили и Ю.В. Чугреева [2] сказанное в [1] и выше отрицается. Например, авторы пишут [2]: "... утверждение В.Л. Гинзбурга, что заряд в системе K_a излучает, просто неверно, ... неправильно также утверждение В.Л. Гинзбурга, что заряд в системе K_{ga} не излучает. Ведь если бы это было так, то это означало бы, что излучение можно уничтожить выбором системы отсчета, что физически невозможно".

В целом, по сути дела, А.А. Логунов и др. [2] отрицают справедливость ПЭ или, точнее, эйнштейновского ПЭ, противопоставляя его слабому ПЭ. Так, они пишут [2]: "...

принцип эквивалентности в принятой выше формулировке справедлив для механических процессов и не имеет места для электродинамических. Это означает, что с помощью измерений внутри системы можно установить, является ли система отсчета инерциальной или она свободно падает в однородном поле тяжести". Или то же самое в другом месте [2]: "... инерциальная система отсчета со статическим однородным гравитационным полем физически неэквивалентна равномерно ускоренной системе отсчета без поля тяготения. Следовательно, принцип эквивалентности не выполняется для электромагнитных явлений".

Между тем справедливость ЭПЭ доказана с высокой степенью точности [4]. Например, равенство инертной и гравитационной масс имеет место с точностью, достигающей двенадцатого знака [4, 12]. Но независимо от такого аргумента рассуждения А.А. Логунова и др. [2] не выдерживают критики и сами по себе. О несправедливости отождествления энергии P (см. (1)) с энергией свободного электромагнитного излучения (совокупности фотонов) мы уже говорили. Поэтому возможность создать или уничтожить "излучение" P выбором системы отсчета ничему не противоречит. Ниже прямым расчетом будет показано, что в системе K_a , если перейти к ней

из системы K корректным образом, заряд излучает, причем в точности энергию (2).

Подчеркнем, что мы вводим понятие об излучении и величине P в различных системах отсчета в силу того, что именно эта величина фигурирует в обсуждаемой литературе. В плане же применения ПЭ можно и даже целесообразно было бы ограничиться самими полями. Именно, из ПЭ следует, что электромагнитные поля заряда в системах отсчета K_g и K_a одинаковы. Отсюда уже автоматически следует, что и квадратичные по полю величины P в этих системах отсчета тоже одинаковы.

3. В любой физической теории существует проблема измерений, т.е. вопрос о методах измерения рассматриваемых физических величин, о приборах, с помощью которых проводятся измерения, об условиях сопоставления результатов измерений. Важность проблемы измерений особенно хорошо осознана в квантовой теории. В этом случае обсуждение остается актуальным и занимает видное место в текущей литературе.

Однако квантовой областью дело не ограничивается. Конкретно, когда речь идет об измерении пространственных расстояний и промежутков времени между событиями, нужно уточнять свойства используемых линеек и часов. Так, если сравниваются длины и промежутки времени в двух инерциальных системах отсчета K и K' , движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью, то при получении заключений о сокращении движущихся линеек (стержней) и замедлении движущихся часов линейки и часы в обеих системах считаются одинаковыми. Говорят о жестких или стандартных линейках и стандартных или идеальных часах. Для обеспечения одинаковости линеек и часов в системах K и K' нужно, вообще говоря, иметь возможность переносить эти линейки и часы из одной системы в другую. Но это невозможно без ускорения линеек и часов, они должны быть нечувствительны к ускорению.

Далее, длина линеек и ход часов не должны зависеть от их местоположения в пространстве и во времени. Если эти требования не соблюдаются и, например, пользоваться часами, идущими по-разному в системах K и K' , то преобразования Лоренца и известные следствия из них будут, вообще говоря, несправедливы.

Разумеется, сказанное относится и к нерелятивистской физике и, например, когда пишут преобразования Галилея, часы в системах K и K' тоже считаются одинаковыми. Видимо, поэтому вопрос считается известным и упомянутые требования к линейкам и часам в различных курсах (в частности, в [13]) просто подразумеваются без явного их упоминания. Конечно, так поступать можно, но, как нам кажется, во избежание недоразумений освещение проблемы измерений при изложении частной теории

относительности отнюдь не является излишним. В качестве примера довольно подробного анализа требований, предъявляемых к линейкам и, особенно, к часам в теории относительности, укажем на книгу [14], посвященную "парадоксу близнецов".

В частной теории относительности (в инерциальной системе K или, как говорят, в пространстве Минковского) чаще всего используется декартова система координат $x^i = (ct, x, y, z)$, в которой квадрат интервала (пользуемся обозначениями, принятыми в [13])

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (3)$$

В такой системе упомянутое выше соглашение, касающееся линеек и часов, действительно представляется почти очевидным.

В ОТО используются, вообще говоря, криволинейные координаты $x^i = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, так что

$$ds^2 = g_{ik}(x^i) dx^i dx^k \quad (4)$$

При этом связь между координатами x^i и "истинными" расстоянием и временем, измеряемыми стандартными линейками и часами, не столь очевидно. Этот вопрос освещен, например, в [13, § 84], где показано, что промежутки истинного или собственного времени $d\tau$ в данной точке пространства связаны с dx^0 соотношением

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0. \quad (5)$$

Для расстояния dl между двумя близкими точками имеем

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta \quad (6)$$

В инерциальной системе K мы будем ниже пользоваться декартовыми координатами x^i с интервалом (3). При переходе к равноускоренной системе K_a для сравнения результатов измерений с результатами в системе K нужно выбрать не произвольные, а соответствующие координаты x'^i . Естественно, Эйнштейн ясно понимал это обстоятельство. Так, еще до завершения построения ОТО, в опубликованной в 1912 г. статье [15, с. 189], он замечает:

"Пусть система K (координаты x, y, z)¹ движется равномерно ускоренно в направлении оси X . Это ускорение является равномерным в смысле Борна: это означает, что ускорение начала координат этой системы относительно такой неускоренной системы, по отношению к которой точки системы K покоятся (точнее, имеют бесконечно малую скорость), постоянно. Такая система K согласно принципу эквивалентности в точности эквивалентна некоторой покоящейся системе, в которой действует свободное от масс гравитационное поле определенного вида (массы, создающие это поле, можно представить себе находящимися на бесконечности). Пространственные измерения в системе K осуществляются посредством масштабов, которые при их сравнении друг с другом в состоянии покоя и в определенном месте системы обладают одинаковыми длинами. Все геометрические свойства, равно как и соотношения между координатами x, y, z и другими длинами, должны исследоваться такими масштабами. Эти правила не являются само собой разумеющимися; они содержат в себе некоторые физические предположения, которые иногда могут оказаться и неправильными... Масштабы, равно как и оси координат, следует представлять себе в виде абсолютно твердых стержней. Это можно делать, несмотря на то, что согласно теории относительности абсолютно твердые тела в действительности не могут существовать. В самом деле, абсолютно твердые измерительные стержни можно представить себе состоящими из большого числа тел, не являющихся абсолютно

твердыми; они так связаны между собой, что не передают друг другу давление при остановке каждого из стержней. Время t в системе отсчета K мы будем измерять часами, установленными в пространственных точках системы K так, что измеряемый с их помощью промежуток времени, необходимый для прохождения луча света между какими-либо двумя точками A и B системы, не зависит от момента испускания луча света из $A \dots$ ".

Далее Эйнштейн в той же статье рассматривает также систему K_g с гравитационным полем, но на этом мы здесь останавливаться не будем.

4. Итак, нашей задачей является построение в ускоренной системе отсчета K_a координат, удовлетворяющих указанным выше требованиям. Как мы увидим, к числу таких координат принадлежат координаты $x^i(c\eta, \xi, \chi, \rho)$, описанные, например, в [16, § 18.6] и обычно называемые координатами Мёллера.

Связь координат Мёллера с координатами $x^i = (ct, x, y, z)$, уже использованными выше в инерциальной системе K , такова:

$$ct = \rho \sinh \frac{a\eta}{c} \quad (7)$$

$$x = \xi \quad (8)$$

$$y = \chi \quad (9)$$

$$z = \rho \cosh \frac{a\eta}{c} \quad (10)$$

причем $\rho \geq 0$. В [16] это преобразование введено путем рассмотрения системы K_a как непрерывного перехода между мгновенно сопутствующими системами.

Как легко видеть,

$$ds^2 = g'_{ik} dx'^i dx'^k = \frac{a^2 \rho^2}{c^2} d\eta^2 - d\rho^2 - d\xi^2 - d\chi^2 \quad (11)$$

Согласно (7)-(10) и (6) в координатах Мёллера

$$dl^2 = d\rho^2 + d\xi^2 + d\chi^2, \quad (12)$$

т.е. физический элемент длины совпадает с координатным. Элемент dl не зависит от координат, и измерительные линейки можно считать жесткими (подробнее см., например, в [6, § 2.2]).

Далее, согласно (5) и (11), где $x^0 = c\eta$,

$$d\tau = \frac{a\rho}{c^2} d\eta \quad (13)$$

причем переменная (координатное время) η является собственным временем в точке $\rho = c^2/a$.

Координаты Мёллера, как ясно из их определения (7)-(10), покрывают лишь часть пространства Минковского, в которой $z > c|t|$. В статье [2] это обстоятельство считается каким-то дефектом, ибо якобы "... с физической точки зрения переход в новую систему отсчета всегда должен обеспечивать преобразования всех точек пространства-времени исходной инерциальной системы отсчета". Мы ни в коей мере не согласны с таким утверждением, и фактически в ОТО далеко не всегда рассматриваются системы отсчета, носящие, так сказать, глобальный характер.

¹ Обозначенная здесь через K система отсчета есть, очевидно, наша система K_a .

В интересующем нас случае речь идет по самому смыслу ПЭ о рассмотрении малых областей пространства-времени. Именно в них мы должны установить эквивалентность систем K_a и K_g . К этому можно доба-

вить, что рассмотрение равноускоренного движения во все времена, т.е. на интервале $-\infty < t < \infty$, является совершенно нефизическим, как это обычно и подчеркивается, в частности в [1,11]. Резюмируя, можно сказать, что переход для описания равноускоренной системы K_a к координатам Мёллера (7)-(10) отвечает всем необходимым требованиям ².

Если в системе K_a частица (заряд) покоится, то ее координаты ρ_A, ξ_A и χ_A постоянны, т.е. $d\rho_A = d\xi_A = d\chi_A = 0$. В системе K эта частица совершает гиперболическое движение: для нее $z_A^2 - (ct_A)^2 = \rho_A^2$ (ниже мы индекс A опускаем). Скорость частицы v , ее ускорение и собственное время τ таковы:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dz}{dt} = \frac{\frac{a\rho}{c} \sinh \frac{a\eta}{c} d\eta}{\frac{1}{c} \frac{a\rho}{c} \cosh \frac{a\eta}{c} d\eta} = \\ &= \frac{c \sinh \frac{a\eta}{c}}{\cosh \frac{a\eta}{c}} = \frac{c \frac{ct}{\rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{ct}{\rho}\right)^2}} = \frac{c^2 t}{z} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{c^2 \rho^2}{(\rho^2 + c^2 t^2)^{3/2}} = \frac{c^2 \rho^2}{z^3} \\ \tau &= \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{a\rho}{c^2} \eta \end{aligned} \quad (14)$$

Четырехмерные векторы скорости u^i , ускорения w^i и вектор dw^i/ds для рассматриваемой частицы, выраженные через координаты ct, ξ, χ и ρ , имеют вид

$$\begin{aligned} u^i &= \frac{dx^i}{ds} = \left(\cosh \frac{a\eta}{c}, 0, 0, \sinh \frac{a\eta}{c} \right) \\ w^i &= \frac{du^i}{ds} = \left(\frac{1}{\rho} \sinh \frac{a\eta}{c}, 0, 0, \frac{1}{\rho} \cosh \frac{a\eta}{c} \right) \\ \frac{dw^i}{ds} &= \left(\frac{1}{\rho^2} \cosh \frac{a\eta}{c}, 0, 0, \frac{1}{\rho^2} \sinh \frac{a\eta}{c} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

ибо, например,

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{d(ct)}{\frac{a\rho}{c} d\eta}, \quad w^0 = \frac{d(\cosh \frac{a\eta}{c})}{\frac{a\rho}{c} d\eta}$$

Как известно (см., например, [11]), для равноускоренного движения

$$\frac{dw^i}{ds} + w^k w_k u^i = 0$$

что и следует из (15), поскольку $w^k w_k = -1/\rho^2$. Таким образом, частица, покоящаяся в системе K_a , движется равноускоренно в системе K . Наоборот, если частица покоится в системе K , то в системе K_a при малой скорости она движется равноускоренно (подробнее см. [8]).

5. Перейдем к доказательству того, что заряд, покоящийся в инерциальной системе K и, естественно, в ней не излучающий, в системе K_a излучает. Если в системе K заряд

² Заметим, что в [10] указаны также координаты, обобщающие координаты Мёллера и покрывающие все пространство. }

покоится в точке с координатами $x = y = 0$, $z = c^2/a$, то в этой системе его поле чисто кулоновское, т.е. тензор электромагнитного поля имеет вид (обозначения см. в [13, § 24])³

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{e}{r_0^3}x & -\frac{e}{r_0^3}y & -\frac{e}{r_0^3}\left(z - \frac{c^2}{a}\right) \\ \frac{e}{r_0^3}x & 0 & 0 & 0 \\ \frac{e}{r_0^3}y & 0 & 0 & 0 \\ \frac{e}{r_0^3}\left(z - \frac{c^2}{a}\right) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где

$$r_0^2 = \rho_0^2 + \left(z - \frac{c^2}{a}\right)^2, \quad \rho_0^2 = x^2 + y^2$$

Тензор энергии-импульса поля (см. [13, § 33])

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{il}F_l^k + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm} \right),$$

так что

$$\begin{aligned} 4\pi T^{00} &= \frac{1}{2} \frac{e^2}{r_0^4}, \quad T^{01} = T^{02} = T^{03} = 0, \\ 4\pi T^{12} &= -\frac{e^2}{r_0^6}xy, \\ 4\pi T^{13} &= -\frac{e^2}{r_0^6}x \left(z - \frac{c^2}{a} \right), \\ 4\pi T^{23} &= -\frac{e^2}{r_0^6}y \left(z - \frac{c^2}{a} \right), \\ 4\pi T^{11} &= -\frac{e^2}{r_0^4} \left(\frac{1}{r_0^2}x^2 - \frac{1}{2} \right), \\ 4\pi T^{22} &= -\frac{e^2}{r_0^4} \left(\frac{1}{r_0^2}y^2 - \frac{1}{2} \right), \\ 4\pi T^{33} &= -\frac{e^2}{r_0^2} \left[\frac{1}{r_0^2} \left(z - \frac{c^2}{a} \right)^2 - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Тензор T^{ik} симметричен.

Перейдем в систему K_a с координатами (7)-(10). В этой системе в момент $\eta = 0$ заряд имеет координаты $\xi = \chi = 0$, $\rho = c^2/a$. Его скорость

$$\frac{d\rho}{d\eta} = -\frac{az \sinh \frac{a\eta}{c}}{c \cosh^2 \frac{a\eta}{c}} = -\frac{a\rho t}{z} = 0,$$

а ускорение

$$\frac{d^2\rho}{d\eta^2} = -\frac{a^2\rho}{c^2} = -a.$$

³ Вычисления приводятся в деталях, ибо так поступают авторы критикуемой нами статьи [2], помещенной в журнале, предназначенном для оригинальных работ. В настоящей методической заметке, публикуемой в обзорном журнале, детали представляются тем более уместными.

(Напомним, что в системе K заряд покоится, причем $z = c^2/a$.) Таким образом, в момент $\eta = t = 0$ заряд имеет в системе K_a ускорение $-a$. Так и должно быть в лифте, движущемся с ускорением $a = -g$. (Здесь g ускорение свободного падения в системе K_g .)

Коэффициенты $\partial x'^i / \partial x^l$ тензорного закона преобразования

$$T^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} T^{lm} \quad (18)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(c\eta)}{\partial(ct)} &= \frac{c^2}{a\rho} \cosh \frac{a\eta}{c} \\ \frac{\partial(c\eta)}{\partial z} &= -\frac{c^2}{a\rho} \sinh \frac{a\eta}{c} \\ \frac{d\xi}{dx} &= \frac{d\chi}{dy} = 1 \\ \frac{\partial\rho}{\partial(ct)} &= -\sinh \frac{a\eta}{c} \\ \frac{\partial\rho}{\partial z} &= \cosh \frac{a\eta}{c} \end{aligned} \quad (19)$$

Остальные коэффициенты равны нулю. При этом, конечно, нужно выразить координаты $(c\eta, \xi, \chi, \rho)$ через координаты (ct, x, y, z) , используя связи (7)-(10), из которых следует, что $z^2 - c^2 t^2 = \rho^2$.

С помощью (17)-(19) находим интересующие нас компоненты тензора энергии-импульса в системе K_a :

$$\begin{aligned} T'^{01} &= \frac{c^2}{\rho a} \frac{e^2}{4\pi r_0^6} x \left(z - \frac{c^2}{a} \right) \sinh \frac{a\eta}{c} \\ T'^{02} &= \frac{c^2}{\rho a} \frac{e^2}{4\pi r_0^6} y \left(z - \frac{c^2}{a} \right) \sinh \frac{a\eta}{c} \\ T'^{03} &= \frac{c^2}{\rho a} \frac{e^2}{4\pi r_0^4} \left[\frac{1}{r_0^2} \left(z - \frac{c^2}{a} \right)^2 - 1 \right] \times \\ &\quad \times \cosh \frac{a\eta}{c} \sinh \frac{a\eta}{c} \end{aligned} \quad (20)$$

Найдем теперь поток энергии электромагнитного поля через поверхность сферы

$$\xi^2 + \chi^2 + \left(\rho - \frac{c^2}{a} \right)^2 = (c\eta)^2 \quad (21)$$

в момент времени η . Расчет будем вести с точностью до членов порядка $(a\eta/c)^2$, пренебрегая членами более высокого порядка: $O(a\eta/c)^3$ и т.д. Раскладывая все величины в ряды, имеем

$$\begin{aligned} z - \frac{c^2}{a} &= \rho \cosh \frac{a\eta}{c} - \frac{c^2}{a} = \\ &= \rho - \frac{c^2}{a} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{a\eta}{c} \right)^2, \quad \sinh \frac{a\eta}{c} = \frac{a\eta}{c} \end{aligned}$$

На поверхности сферы (21) с той же точностью получаем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} &= \left\{ \rho + \frac{c^2}{a} - \frac{c^2}{a} \right\}^{-1} = \\
&= \frac{a}{c^2} \left\{ 1 + \frac{a}{c^2} \left(\rho - \frac{c^2}{a} \right) \right\}^{-1} = \\
&= \frac{a}{c^2} \left(1 - \frac{a}{c^2} c\eta \cos \theta \right) \\
r_0^2 &= \xi^2 + \chi^2 + \left(z - \frac{c^2}{a} \right)^2 = \\
&= c^2 \eta^2 + \frac{\rho}{2} \left(\frac{a\eta}{c} \right)^2 c\eta \cos \theta
\end{aligned}$$

где координаты θ и φ введены так, что

$$\begin{aligned}
\xi &= c\eta \sin \theta \cos \varphi, \\
\chi &= c\eta \sin \theta \sin \varphi, \\
\rho - \frac{c^2}{a} &= c\eta \cos \theta.
\end{aligned}$$

Поток вектора Пойнтинга $S^\alpha = cT^{0\alpha}$ через сферу (21)

$$\begin{aligned}
P &= c \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} d\varphi d(\cos \theta) c^2 \eta^2 \{ T'^{01} \sin \theta \cos \varphi + \\
&\quad + T'^{02} \sin \theta \sin \varphi + T'^{03} \cos \theta \}
\end{aligned} \tag{22}$$

причем подынтегральное выражение берется на поверхности сферы (21) в момент времени η , а значения $T'^{0\alpha}$ приведены в (20).

Заметим, что поверхность сферы (21) не совпадает с поверхностью постоянной фазы электромагнитного поля. Дело в том, что координатные скорости света dx^α/dx_0 в точках с $\rho < c^2/a$ и $\rho > c^2/a$ в системе K_a различны. Действительно, при

$$ds^2 = \frac{a^2 \rho^2}{c^2} d\eta^2 - d\rho^2 - d\xi^2 - d\chi^2 = 0$$

скорость

$$\frac{\sqrt{d\rho^2 + d\xi^2 + d\chi^2}}{d\eta} = \frac{a\rho}{c}.$$

Поэтому излучение, испущенное в момент $\eta = 0$, доходит до различных точек сферы не одновременно. Однако, как можно показать, учет этого обстоятельства приводит к поправке следующего порядка малости по сравнению с учитываемым.

Дальнейшие вычисления P согласно (22) совершенно элементарны, но довольно громоздки. Выкладки нами произведены, но приводить их здесь мы считаем нецелесообразным, ибо, как и следовало ожидать, результат находится в соответствии с ПЭ, а именно:

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} a^2 \tag{23}$$

что совпадает с (2), если положить $a^2 = g^2$.

Тот факт, что расчет ведется в пренебрежении членами порядка $O(a\eta/c)^3$ и более высокими, не является каким-то дефектом, ибо в согласии с самим смыслом ПЭ

нас интересуют малые пространственно-временные области, как это уже неоднократно подчеркивалось выше.

Расчет, аналогичный, в принципе, приведенному в [10], позволяет убедиться в том, что в системе K_{ga} , свободно падающей в системе K_g , заряд не излучает, хотя он, конечно, излучает в системе K_g .

Принцип эквивалентности лежит в основе ОТО. Поэтому, естественно, любые расчеты в рамках ОТО не могут противоречить ПЭ. Вместе с тем большая эвристическая сила ПЭ очевидна уже из проведенного рассмотрения излучения заряда в системе K_a . Результат (23), сразу же следующий из ПЭ, получается при использовании аппарата ОТО только в результате хотя и простых, но громоздких расчетов.

6. Приведем еще один пример того, как на основе ПЭ сразу же получается результат, отнюдь не очевидный без использования ПЭ. А именно, рассмотрим в нерелятивистском приближении некоторый объект (твердое тело, атом), движущийся с постоянным ускорением a относительно инерциальной системы отсчета K . Мы хотим описать этот объект в рамках нерелятивистской квантовой механики и, конкретно, выяснить характер движения электрона проводимости в равноускоренном металле [17, 18] или найти сдвиги уровней равноускоренного атома.

Если объект покоится, то для описания его поведения нужно использовать уравнение Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x, y, z) \right\} \Psi \quad (24)$$

где $U(x, y, z)$ - потенциальная энергия электрона проводимости, электрона в атоме и т.п. Уравнение Шрёдингера (24) написано в инерциальной системе отсчета, что обычно даже не оговаривается. В условиях, когда тело или атом движутся ускоренно (для определенности, в направлении оси z с постоянным ускорением a), в (24) нужно заменить

$$U(x, y, z) \text{ на } U\left(x, y, z - \frac{a}{2}t^2\right). \quad (25)$$

Перейдем в равноускоренную систему отсчета (связанную с телом, ядром атома и т.п.) путем преобразования

$$t' = t, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - \frac{a}{2}t^2 \quad (26)$$

Вводя новую волновую функцию

$$\Psi = \Psi' \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[mat'z' + \frac{1}{6}ma^2t'^3 \right] \right\} \quad (27)$$

для Ψ' из (24), (25) имеем

$$i\hbar \frac{\partial \Psi'}{\partial t'} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta' + U(x', y', z') + maz' \right\} \Psi' \quad (28)$$

Таким образом, для функции Ψ' получается такое же уравнение, как и в инерциальной системе, но с добавлением потенциальной энергии maz' . Но этот результат сразу же следует [18] из ПЭ, ибо в однородном гравита-

ционном поле с ускорением $g = -a$ потенциальная энергия как раз равна maz' . Такого же типа потенциал имеет место и в однородном электрическом поле. Поэтому выяснение влияния ускорения на ход атомных часов сводится к использованию известных результатов, касающихся штарк-эффекта в атомах.

7. Нам остается разъяснить, почему в статье А.А. Логунова и др. [2] получен результат, противоречащий ПЭ. В [2], как и выше, рассматривается заряд, покоящийся в инерциальной системе K , и вычисляется его излучение в некоторой неинерциальной системе отсчета K_N , которая считается равноускоренной. Далее, путем, аналогичным изложенному выше, доказываем, что в системе K_N заряд не излучает. Это действительно справедливо. Однако все дело в том, что система K_N радикально отличается от описанной выше системы K_a , которая отвечает равноускоренному движению и фигурирует при обсуждении ПЭ.

В самом деле, в [2] переходят к системе K_N с координатами

$$\eta = t, \quad \xi = x, \quad \chi = y, \quad \rho = z - c\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + t^2}. \quad (29)$$

Во втором порядке по at/c координаты (29) соответствуют преобразованию Галилея

$$\eta = t, \quad \xi = x, \quad \chi = y, \quad \rho = z - \frac{c^2}{a} - \frac{at^2}{2} + O\left(\frac{at}{c}\right)^3 \quad (30)$$

Ясно, что при таком преобразовании релятивистские эффекты порядка $(v/c)^2$, т.е. порядка $(at/c)^2$ отсутствуют. Между тем все излучение (23) порядка $(a/c)^2$. Поэтому в системе K_a и пришлось вести расчет релятивистски, несмотря на сколь угодно малую скорость заряда. Кстати, учет релятивистских законов преобразования нужен уже при сколь угодно малых скоростях и, например, при рассмотрении прецессии Томаса [19].

Система отсчета K_N не является жесткой, поскольку для физического элемента длины dl имеем (см. (6))

$$dl^2 = d\xi^2 + d\chi^2 + d\rho^2 + g^2 t^2 d\eta d\rho \quad (31)$$

т.е. dl зависит от времени.

Этот факт сразу же ясен из (30). Так, пусть концы стержня, покоящегося в K_N , имеют в этой системе координаты ρ_1 и ρ_2 . Тогда в каждый момент времени t длина стержня $\rho_2 - \rho_1 = z_2 - z_1$, где z_2 и z_1 - координаты концов стержня в системе K . Но это означает, что в системе K отсутствует лоренцево сокращение длины стержня, покоящегося в системе K_N , и, следовательно, в системе K_N длина стержня непостоянна: она зависит от времени и при $t > 0$ увеличивается со временем. Таким образом, систему K_N при обсуждении ПЭ нельзя сравнивать с системой K_g .

Резюмируя, можно сказать, что содержащаяся в статье [2] критика заметки одного из авторов [1] совершенно необоснованна. Никаких ошибок в заметке [1] мы не обнаружили. Что же касается утверждения А.А. Логунова и др. [2] о несправедливости принципа эквивалентности в электродинамике, то оно неверно.

19.4 Radiation: Basic Models

19.4.1 Radiation Damping: Examples

Время падения двух зарядов друг на друга при эллиптическом движении (?!!!)

(очень интересная задача!! а кст раньше разве мы не решили уже её? но там торможение излучением вроде не предполагалось?)

Определить время, в течение которого два притягивающихся заряда, совершающих эллиптическое движение (со скоростью, малой в сравнении со скоростью света) и теряющие энергию вследствие излучения, «упадут» друг на друга.

Предполагая относительную потерю энергии за один оборот малой, мы можем положить производную по времени от энергии равной средней интенсивности излучения (определенной в задаче 1\$70):

$$\frac{d|\mathcal{E}|}{dt} = \frac{(2|\mathcal{E}|)^{3/2}\mu^{5/2}\alpha^3}{3c^3M} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left(3 - \frac{2|\mathcal{E}|M^2}{\mu\alpha^2} \right)$$

где $\alpha = |e_1 e_2|$.

Наряду с энергией частицы теряется момент количества движения.

Потеря момента в единицу времени дается формулой (75.7); подставляя в нее выражение (70.1) для d и замечая, что $\mu\mathbf{r} = -\alpha\mathbf{r}/r^3$ и $\mathbf{M} = \mu[\mathbf{r}\mathbf{v}]$, находим

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2\alpha}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{\mathbf{M}}{r^3}$$

Это выражение усредняем по периоду движения.

Учитывая медленность изменения $\mathbf{M}$, в правой стороне равенства достаточно усреднить лишь r^{-3} ; это среднее значение вычисляется точно так, как вычислялось в задаче 1 \$ 70 среднее значение от r^{-4} .

В результате находим для средней потери момента в единицу времени следующее выражение:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{2\alpha(2\mu|\mathcal{E}|)^{3/2}}{3c^3M^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2$$

(знак среднего, как и в (1), опускаем).

Разделив (1) на (2), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d|\mathcal{E}|}{dM} = -\frac{\mu\alpha^2}{2M^3} \left(3 - 2\frac{|\mathcal{E}|M^2}{\mu\alpha^2} \right)$$

интегрируя которое, найдем:

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu\alpha^2}{2M^2} \left(1 - \frac{M^3}{M_0^3} \right) + \frac{|\mathcal{E}_0|}{M_0} M$$

Постоянная интегрирования выбрана таким образом, чтобы при $M = M_0$ было $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, где M_0 и $\mathcal{E}_0$ - начальные значения момента и энергии частиц.

«Падению» частиц друг на друга соответствует $M \rightarrow 0$.

Из (3) видно, что при этом, как и следовало, $\mathcal{E} \rightarrow -\infty$.

Заметим, что произведение $|\mathcal{E}|M^2$ стремится к $\mu\alpha^2/2$ и из формулы (70.3) видно, что эксцентриситет $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. по мере сближения частиц орбита приближается к окружности.

Подставляя (3) в (2), определяем производную dt/dM , выраженную как функция от M , после чего интегрирование по dM в пределах от M_0 до нуля дает время падения:

$$t_{\text{пад}} = \frac{c^3 M_0^5}{\alpha \sqrt{2} |\mathcal{E}_0| \mu^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^{-2} \left(\sqrt{\mu\alpha^2} + \sqrt{2M_0^2 |\mathcal{E}_0|} \right)^{-2}$$

О случаях применения торможения излучением (!!!)

(с опытом все укажу явно)

How to fix classical electrodynamics for a little scales?

(????? I don't know, I don't remember if from QFT at all. an open question for me)

19.4.2 Low-frequency braking radiation

Рассмотрим низкочастотный «хвост» спектрального распределения тормозного излучения: область частот, малых по сравнению с той частотой (обозначим ее ω_0), в области которой сосредоточена основная часть излучения:

$$\omega \ll \omega_0$$

При этом будем предполагать у зарядов любые скорости.
(?? зачем это)

Theory

В нерелятивистском случае $\omega_0 \sim 1/\tau$, где τ - порядок величины продолжительности столкновения; в ультрарелятивистском случае ω_0 пропорциональна квадрату энергий излучающей частицы.

В интеграле

$$\mathbf{H}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H} e^{i\omega t} dt$$

поле излучения $\mathbf{H}$ заметно отлично от нуля только в течение промежутка времени порядка $1/\omega_0$.

Поэтому при соблюдении условия (69.1) мы можем считать, что под интегралом $\omega t \ll 1$, так что можно заменить $e^{i\omega t}$ единицей; тогда

$$\mathbf{H}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H} dt$$

Подставляя сюда $\mathbf{H} = [\ddot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]/c$ и производя интегрирование по времени получим:

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{c} [(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \mathbf{n}]$$

где $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$ - изменение векторного потенциала поля, создаваемого сталкивающимися частицами, за время столкновения.

Полное излучение (с частотой ω) за время столкновения получится подстановкой (69.2) в $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_\omega|^2 R_0^2 d\omega$:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{R_0^2}{4c\pi^2} [(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \mathbf{n}]^2 d\omega$$

Для векторного потенциала можно воспользоваться его выражением в форме Лиенара-Вихерта (66.4), и мы получим:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left\{ \sum e \left(\frac{[\mathbf{v}_2 \mathbf{n}]}{1 - \frac{1}{c} \mathbf{n} \mathbf{v}_2} - \frac{[\mathbf{v}_1 \mathbf{n}]}{1 - \frac{1}{c} \mathbf{n} \mathbf{v}_1} \right) \right\}^2 d\omega$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ - скорости частицы до и после рассеяния, а сумма берется по обеим сталкивающимся частицам.

Обратим внимание на то, что коэффициент при $d\omega$ оказывается не зависящим от частоты.

Другими словами, при малых частотах (условие (69.1)) спектральное распределение излучения не зависит от частоты, т.е. $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega}/d\omega$ стремится к постоянному пределу при $\omega \rightarrow 0$.

Если скорости сталкивающихся частиц малы по сравнению со скоростью света, то (69.4) переходит в

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left(\sum e [\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \mathbf{n}] \right)^2 d\omega d\Omega$$

Это выражение соответствует дипольному излучению, векторный потенциал которого дается формулой (67.4).

Интересный случай применения полученных формул представляет излучение, возникающее при испускании новой заряженной частицы (например, при вылете β -частицы из ядра).

При этом процесс надо рассматривать как мгновенное изменение скорости частицы от нуля до ее заданного значения (ввиду симметрии формулы (69.5) по отношению к перестановке $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ возникающее в этом процессе излучение совпадает с излучением, которое сопровождало бы обратный процесс мгновенную остановку частицы).

Существенно, что поскольку «время» данного процесса $\tau \rightarrow 0$, то условию (69.1) фактически удовлетворяют все вообще частоты.

Спектральное распределение полного излучения, возникающего при испускании заряженной частицы, движущейся со скоростью v

Определить спектральное распределение полного излучения, возникающего при испускании заряженной частицы, движущейся со скоростью v .

Согласно формуле (69.4) (в которой полагаем $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1 = 0$), имеем:

$$d\mathcal{E}_{\omega} = d\omega \frac{e^2 v^2}{4\pi^2 c^3} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2} 2\pi \sin \theta d\theta$$

Вычисление интеграла приводит к результату

$$d\mathcal{E}_{\omega} = \frac{e^2}{\pi c} \left(\frac{c}{v} \ln \frac{c+v}{c-v} - 2 \right) d\omega$$

При $v \ll c$ эта формула переходит в

$$d\mathcal{E}_{\omega} = \frac{2e^2 v^2}{3\pi c^3} d\omega$$

что можно получить и непосредственно из (69.5).

19.4.3 Radiation from the Coulomb interaction

Обсудим дипольное излучение системы из двух заряженных нерелятивистских частиц.
(в механике разложения ниже укажу тоже!!)
(добавлю также это в статью про закон кулона)

Свойства системы двух частиц при эллиптическом движении и кулоновском взаимодействии

Равномерное движение системы как целого (т.е. движение ее центра инерции) не представляет интереса, так как не приводит к излучению; поэтому мы должны рассматривать только относительное движение частиц. Выберем начало координат в центре инерции. Тогда дипольный момент системы $\mathbf{d} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2$ напишется в виде

$$\mathbf{d} = \frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} = \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \mathbf{r}$$

где индексы 1 и 2 относятся к обеим частицам, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ есть радиус-вектор между ними, а $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ - приведенная масса.

Начнем с излучения, сопровождающего эллиптическое движение двух притягивающихся по закону Кулона частиц. Это движение типично описывается как движение частицы с массой μ по эллипсу, уравнение которого в полярных координатах есть

$$1 + \varepsilon \cos \varphi = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{r}$$

где большая полуось a и эксцентриситет ε равны $a = \frac{\alpha}{2|\mathcal{E}|}$, $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2|\mathcal{E}|M^2}{\mu\alpha^2}}$, где $\mathcal{E}$ это полная энергия частиц (без энергии покоя!), отрицательная при финитном движении; $M = \mu r^2 \dot{\varphi}$ - момент количества движения; α - постоянная закона Кулона: $\alpha = |e_1 e_2|$.

Зависимость координат от времени может быть записана в виде параметрических уравнений

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \xi), \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\xi - \varepsilon \sin \xi)$$

Одному полному обороту по эллипсу соответствует изменение параметра ξ от нуля до 2π ; период движения равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}$$

Определим компоненты Фурье дипольного момента.

Ввиду периодичности движения речь идет о разложении в ряд Фурье. Поскольку дипольный момент пропорционален радиус-вектору r , то задача сводится к вычислению компонент Фурье от координат $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$.

Зависимость x и y от времени определяется параметрическими уравнениями

$$x = a(\cos \xi - \varepsilon), \quad y = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \xi, \quad \omega_0 t = \xi - \varepsilon \sin \xi$$

Здесь введена частота

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu a^3}} = \frac{(2|\mathcal{E}|)^{3/2}}{\alpha \mu^{1/2}}$$

Вместо компонент Фурье от координат удобнее вычислять компоненты Фурье от скоростей, воспользовавшись тем, что $\dot{x}_n = -i\omega_0 n x_n$, $\dot{y}_n = -i\omega_0 n y_n$. Имеем:

$$x_n = \frac{\dot{x}_n}{-i\omega_0 n} = \frac{i}{\omega_0 n T} \int_0^T e^{i\omega_0 n t} \dot{x} dt$$

Но $\dot{x} dt = dx = -a \sin \xi d\xi$; переходя от интегрирования по dt к интегрированию по $d\xi$, имеем, таким образом:

$$x_n = -\frac{ia}{2\pi n} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \varepsilon \sin \xi)} \sin \xi d\xi$$

Аналогичным образом находим:

$$y_n = \frac{ia\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2\pi n} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \varepsilon \sin \xi)} \cos \xi d\xi = \frac{ia\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2\pi n \varepsilon} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \varepsilon \sin \xi)} d\xi$$

(при переходе от первого интеграла ко второму в подынтегральном выражении пишем $\cos \xi \equiv \left(\cos \xi - \frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}$; тогда интеграл от первого члена берется и притом тождественно обращается в нуль).

Запишем эти выражения через функцию Бесселя целочисленного порядка n , то есть через $J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\xi - x \sin \xi)} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\xi - x \sin \xi) d\xi$.

В результате окончательно получаем следующие выражения для искомых компонент Фурье:

$$x_n = \frac{a}{n} J'_n(n\varepsilon), \quad y_n = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{n\varepsilon} J_n(n\varepsilon)$$

где штрих у функции Бесселя обозначает дифференцирование по ее аргументу.

(??? почему это в механике у меня не написано??)

Интенсивность излучения двигающихся по эллипсу кулоновских частиц

Выражение для интенсивности монохроматических компонент излучения получается подстановкой x_n и y_n в формулу

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3} \mu^2 \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 (|x_n|^2 + |y_n|^2)$$

(где-то выше она была выведена, потом еще раз посмотрю.)

Подставляя a и ω_0 через характеристики частиц, Получим окончательно:

$$I_n = \frac{64n^2 \mathcal{E}^4}{3c^3 \alpha^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left[J_n'^2(n\varepsilon) + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} J_n^2(n\varepsilon) \right]$$

Выпишем, в частности, асимптотическую формулу для интенсивности очень высоких гармоник (большие n) при движении по близкой к параболе орбите ($\varepsilon \approx 1$). Для этого используем асимптотическую при $n \gg 1$, $1 - \varepsilon \ll 1$ формулу через функцию Эйри Φ : $J_n(n\varepsilon) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{n}\right)^{1/3} \Phi \left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} (1 - \varepsilon^2) \right]$.

Подстановка её дает:

$$I_n = \frac{64 \cdot 2^{2/3} n^{2/3} \mathcal{E}^4}{3\pi c^3 \alpha^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left\{ (1 - \varepsilon^2) \Phi^2[\Xi] + \left(\frac{2}{n}\right)^{2/3} \Phi'^2[\Xi] \right\}$$

где аргумент $\Xi = \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} (1 - \varepsilon^2)$.

Или, этот результат может быть выражен также и через функции Макдональда K_ν :

$$I_n = \frac{64 n^2 \mathcal{E}^4}{9\pi^2 c^3 \alpha^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \{ K_{1/3}^2[\Theta] + K_{2/3}^2[\Theta] \} (1 - \varepsilon^2)^2.$$

где аргумент $\Theta = \frac{n}{3} (1 - \varepsilon^2)^{3/2}$.

(про них в дополнениях ещё укажу. и тут раскрою, что за они?? пока Макдональда функции не усвоены. тут просто понимаю, что так можно и всё. мб проделаю ручками это разок.)

Свойства системы двух частиц при движении по гиперболе и кулоновском взаимодействии

(???? почему Ландау пишет как ниже, что по притягиваются - значит гиперболе??? механика, видно, слабая у меня.)

Рассмотрим столкновение двух притягивающихся заряженных частиц. Их относительное движение описывается как движение частиц с массой μ по гиперболе

$$1 + \varepsilon \cos \varphi = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{r}$$

где $a = \frac{\alpha}{2\mathcal{E}}$, $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}M^2}{\mu\alpha^2}}$, теперь $\mathcal{E} > 0$).

Зависимость r от времени определяется параметрическими уравнениями

$$r = a(\varepsilon \operatorname{ch} \xi - 1), \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\varepsilon \operatorname{sh} \xi - \xi)$$

где параметр ξ пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Для координат x, y имеем:

$$x = a(\varepsilon - \operatorname{ch} \xi), \quad y = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \operatorname{sh} \xi$$

Вычисление компонент Фурье (речь идет теперь о разложении в интеграл Фурье) производится в точности аналогично предыдущему случаю.

В результате получаем:

$$x_\omega = \frac{\pi a}{\omega} H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu\varepsilon), \quad y_\omega = -\frac{\pi a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\omega\varepsilon} H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)$$

где $H_{i\nu}^{(1)}$ - функция Ганкеля 1-го рода ранга $(i\nu)$, и введено обозначение $\nu = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha/\mu a^3}} = \frac{\alpha\omega}{\mu v_0^2}$, где v_0 - относительная скорость частиц на бесконечности; энергия $\mathcal{E} = \mu v_0^2/2$. При вычислении использована известная формула $\int_{-\infty}^{\infty} e^{p\xi - ix \operatorname{sh} \xi} d\xi = i\pi H_p^{(1)}(ix)$

(проделаю потом это разок)

Интенсивность излучения двигающихся по гиперболе кулоновских частиц

Подставляя $d\mathcal{E}_\omega = \frac{4\omega^4\mu^2}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 (|x_\omega|^2 + |y_\omega|^2) \frac{d\omega}{2\pi}$, наши фурье-компоненты $x_\omega = \frac{\pi a}{\omega} H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu\varepsilon)$, и $y_\omega = -\frac{\pi a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\omega\varepsilon} H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)$, получим

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{\pi\mu^2\alpha^2\omega^2}{6c^3\mathcal{E}^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left\{ \left[H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu\varepsilon) \right]^2 - \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} \left[H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon) \right]^2 \right\} d\omega$$

(мб комментарий добавлю потом про это)

«Эффективное излучение» при рассеянии параллельного пучка

Большой интерес представляет «эффективное излучение» при рассеянии пучка параллельно движущихся частиц (см. §68) (???).

Для его вычисления умножаем $d\mathcal{E}_\omega$ на $2\pi\rho d\rho$ и интегрируем по всем ρ от нуля до бесконечности.

Интегрирование по $d\rho$ заменяем интегрированием по $d\varepsilon$ (в пределах от 1 до ∞), воспользовавшись тем, что $2\pi\rho d\rho = 2\pi a^2 \varepsilon d\varepsilon$; это соотношение получается из определений (70.12) (??????), в которых момент M и энергия $\mathcal{E}$ связаны с прицельным расстоянием ρ и скоростью v_0 . Посредством $M = \mu\rho v_0$, $\mathcal{E} = \frac{\mu v_0^2}{2}$.

Получающийся интеграл берется с помощью формулы $z \left[Z_p'^2 + \left(\frac{p^2}{z^2} - 1 \right) Z_p^2 \right] = \frac{d}{dz} (z Z_p Z_p')$, где $Z_p(z)$ - любое решение уравнения Бесселя порядка p^1).

Имея в виду, что при $\varepsilon \rightarrow \infty$ функция Ганкеля $H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)$ обращается в нуль, получим в результате следующую формулу:

$$d\mathcal{K}_\omega = \frac{4\pi^2\alpha^3\omega}{3c^3\mu v_0^5} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left| H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \right| H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu) d\omega$$

«Эффективное излучение» при рассеянии параллельного пучка при малых частотах

Рассмотрим особо предельные случаи малых и больших частот.
(тут общие формулы напомним)

В определяющем функцию Ганкеля интеграле $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu(\xi - \text{sh } \xi)} d\xi = i\pi H_{i\nu}(i\nu)$ существенна только та область значений переменной интегрирования ξ , в которой экспонента имеет порядок величины единицы.

При малых частотах ($\nu \ll 1$) существенна поэтому область больших ξ .

Но при больших ξ имеем $\text{sh } \xi \gg \xi$.

Таким образом, приближенно

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \approx -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu \text{sh } \xi} d\xi = H_0^{(1)}(i\nu)$$

Аналогичным образом найдем, что

$$H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu) \approx H_0^{(1)'}(i\nu)$$

Воспользовавшись, наконец, известным из теории функций Бесселя приближенным выражением при малых x :

$$iH_0^{(1)}(ix) \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}$$

где $\gamma = e^C$, где C - постоянная Эйлера; $\gamma = 1,781 \dots$), получим следующее выражение для эффективного излучения при малых частотах:

$$d\kappa_{\omega} = \frac{16\alpha^2}{3v_0^2 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \ln \left(\frac{2\mu v_0^3}{\gamma \omega \alpha} \right) d\omega \quad \omega \ll \frac{\mu v_0^3}{\alpha}$$

Оно зависит от частоты логарифмически.

«Эффективное излучение» при рассеянии параллельного пучка при больших частотах

При больших частотах ($\nu \gg 1$) в интеграле (70.20) существенны, напротив, малые ξ .

Соответственно этому разлагаем экспоненту подынтегрального выражения по степеням ξ и имеем приближенно:

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \approx -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{i\nu}{6} \xi^3 \right) d\xi = -\frac{2i}{\pi} \text{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{i\nu}{6} \xi^3 \right) d\xi \right\}$$

Этот интеграл подстановкой $i\nu\xi^3/6 = \eta$ приводится к Γ -функции, и в результате получается

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \approx -\frac{i}{\pi\sqrt{3}} \left(\frac{6}{\nu} \right)^{1/3} \Gamma \left(\frac{1}{3} \right)$$

Аналогичным образом найдем:

$$H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu) \approx \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \left(\frac{6}{\nu} \right)^{2/3} \Gamma \left(\frac{2}{3} \right)$$

Наконец, by using $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$, получим для эффективного излучения при больших частотах:

$$d\mathcal{K}_\omega = \frac{16\pi\alpha^2}{3^{3/2}v_0^2c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 d\omega \quad \text{при } \omega \gg \frac{\mu v_0^3}{\alpha}$$

т.е. выражение, не зависящее от частоты.

Тормозное излучение отталкивающихся частиц

Перейдем теперь к тормозному излучению при столкновении двух отталкивающихся частиц по закону $U = \alpha/r$ при $\alpha > 0$.

Движение происходит по гиперболе $-1 + \varepsilon \cos \varphi = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{r}$,

$$x = a(\varepsilon + \operatorname{ch} \xi), \quad y = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \operatorname{sh} \xi, \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}} |(\varepsilon \operatorname{sh} \xi + \xi)|$$

α и ε - как раньше.

Все вычисления для этого случая непосредственно приводятся к произведенным выше, так что нет необходимости производить их заново.

Действительно, интеграл для компоненты Фурье $x_\omega = \frac{ia}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu(\varepsilon \operatorname{sh} \xi + \xi)} \operatorname{sh} \xi d\xi$

подстановкой $\xi \rightarrow i\pi - \xi$ приводится к такому же интегралу для случая притяжения, умноженному на $-e^{-\pi\nu}$; то же самое имеет место для y_ω .

Таким образом, выражения для компонент Фурье x_ω , y_ω в случае отталкивания отличаются от соответствующих выражений для случая притяжения множителями $e^{-\pi\nu}$. В формулах же для излучения появятся, следовательно, лишние множители $e^{-2\pi\nu}$.

В частности, для малых частот получается прежняя формула (70.21) (так как при $\nu \ll 1$ $e^{-2\pi\nu} \approx 1$).

Для больших частот эффективное излучение имеет вид

$$d\mathcal{K}_\omega = \frac{16\pi\alpha^2}{3^{3/2}v_0^2c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \exp\left(-\frac{2\pi\omega\alpha}{\mu v_0^3}\right) d\omega, \quad \omega \gg \frac{\mu v_0^3}{\alpha}$$

Оно убывает экспоненциально с увеличением частоты.

полная средняя интенсивность излучения при эллиптическом движении двух притягивающихся зарядов

Докажем, что полная средняя интенсивность излучения при эллиптическом движении двух притягивающихся зарядов есть:

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I dt = \frac{2^{3/2}}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{\mu^{5/2} \alpha^3 |\mathcal{E}|^3 / 2}{M^5} \left(3 - \frac{2|\mathcal{E}|M^2}{\mu\alpha^2} \right)$$

С выражением для дипольного момента $\mathbf{d} = \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \mathbf{r}$ имеем для полной интенсивности излучения:

$$I = \frac{2\mu^2}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{2\alpha^2}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{1}{r^4}$$

где мы воспользовались уравнением движения $\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\alpha \mathbf{r}/r^3$.

Координату $\mathbf{r}$ выражаем через φ согласно уравнению орбиты $1 + \varepsilon \cos \varphi = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{r}$, а интегрирование по времени с помощью равенства $dt = \mu r^2 d\varphi / M$ заменяем интегрированием по углу φ (от 0 до 2π).

В результате получаем для средней интенсивности:

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I dt = \frac{2^{3/2}}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{\mu^{5/2} \alpha^3 |\mathcal{E}|^3 / 2}{M^5} \left(3 - \frac{2|\mathcal{E}| M^2}{\mu \alpha^2} \right)$$

(проделаю потом. в чем разница с тем, что было выше???)

Излучение $\Delta \mathcal{E}$ при столкновении двух заряженных частиц

Определить полное излучение $\Delta \mathcal{E}$ при столкновении двух заряженных частиц.

В случае притяжения траекторией является гипербола (70.11), а в случае отталкивания — (70.23).

Асимптоты гиперболы образуют с ее осью угол φ_0 , определяемый из $\pm \cos \varphi_0 = 1/\varepsilon$, а угол отклонения частиц (в системе координат, в которой центр инерции покоится) есть $\chi = |\pi - 2\varphi_0|$.

Вычисление производится так же, как в задаче 1 (интеграл по $d\varphi$ берется в пределах между $-\varphi_0$ и φ_0).

В результате находим в случае притяжения:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\mu^3 v_0^5}{3c^3 \alpha} \operatorname{tg}^3 \frac{\chi}{2} \left[(\pi + \chi) \left(1 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\chi}{2} \right) + 6 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \right] \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2$$

в случае отталкивания:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\mu^3 v_0^5}{3c^3 \alpha} \operatorname{tg}^3 \frac{\chi}{2} \left[(\pi - \chi) \left(1 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\chi}{2} \right) - 6 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \right] \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2$$

В обоих случаях под χ понимается положительный угол, определяемый из соотношения

$$\operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} = \frac{\mu v_0^2 \rho}{\alpha}$$

При лобовом столкновении отталкивающихся зарядов переход к пределу $\rho \rightarrow 0$, $\chi \rightarrow \pi$ дает:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{8\mu^3 v_0^5}{45c^3 \alpha} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2$$

полное эффективное излучение при рассеянии потока частиц в кулоновском поле отталкивания

Определить полное эффективное излучение при рассеянии потока частиц в кулоновском поле отталкивания. То есть величину

$$\varkappa = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty I dt \cdot 2\pi \rho d\rho = \frac{2\alpha^2}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{r^4} dt \cdot \rho d\rho$$

Интегрирование по времени заменяем интегрированием по dr вдоль траектории заряда, написав $dt = dr/v_r$, где радиальная скорость $v_r = \dot{r}$ выражается через r по формуле

$$v_r = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left[\mathcal{E} - \frac{M^2}{2\mu r^2} - U(r) \right]} = \sqrt{v_0^2 - \frac{\rho^2 v_0^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{\mu r}}$$

Интегрирование по dr производится в пределах от бесконечности до ближайшего к центру расстояния $\dot{r}_0 = r_0(\rho)$ (точка, в которой $v_r = 0$) и затем от r_0 снова к бесконечности; это сводится к удвоенному интегралу от r_0 до ∞ .

Вычисление двойного интеграла удобно производить, переменив порядок интегрирования - сначала до $d\rho$, а затем по dr .

В результате получим:

$$\kappa = \frac{8\pi}{9} \frac{\alpha \mu v_0}{c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2$$

(проделаю это потом)

Угловое распределение полного излучения при пролете одного заряда мимо другого

Определить угловое распределение полного излучения при пролете одного заряда мимо другого, если скорость настолько велика (хотя и мала по сравнению со скоростью света), что отклонение от прямолинейности движения можно считать малым.

Угол отклонения мал, если кинетическая энергия $\mu v^2/2$ велика по сравнению с потенциальной энергией, порядок величины которой есть α/ρ ($\mu v^2 \gg \alpha/\rho$).

Выберем плоскость движения в качестве плоскости xy с началом координат в центре инерции и с осью x вдоль направления скорости.

В первом приближении траектория есть прямая $x = vt, y = \rho$.

В следующем приближении уравнения движения дают:

$$\mu \ddot{x} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{x}{r} \approx \frac{\alpha v t}{r^3}, \quad \mu \ddot{y} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{y}{r} \approx \frac{\alpha \rho}{r^3}$$

причем

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \approx \sqrt{\rho^2 + v^2 t^2}$$

С помощью формулы (67.7) имеем:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}} = d\omega \frac{\mu^2}{4\pi c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 - (\ddot{x}n_x + \ddot{y}n_y)^2] dt$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении $d\omega$.

Выражая подынтегральное выражение через t и производя интегрирование, получим:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}} = \frac{\alpha^2}{32vc^3\rho^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 (4 - n_x^2 - 3n_y^2) d\omega$$

19.4.4 Overview of Other Radiation Mechanisms and Phenomena in Electrodynamics

(потом пропишу указания на возможные другие излучения, которые в ЭД прописаны. мб суть их в паре формул тоже добавлю.)

19.4.5 Applications of Radiation: An Overview

(people are sending EM waves everyday in wifi, in TV, so on. so there are a lot of important things to review and write, how does these application relate to the basic formulas before???)

19.5 Scattering: Formalism

(где бы написать про рассеяние других полей, гравитационных, дираковских?? хз????)

19.5.1 Scattering of Free Particles

Типичная теория рассеяния - рассеяние свободными зарядами, обсудим это подробно.

Суть теории рассеяния в электродинамике

(так пока и не усвоил!! также тут укажу, как до этого догадаться с нуля.)

Параметры задач рассеяния

Плоская волна электромагнитных колебаний, падая на покоящийся заряд, вызывает его вынужденные колебания, в результате чего он начинает излучать, только за это излучение и составляет рассеянную волну. Дифференциальное сечение рассеяния определяется как отношение интенсивности излучения волн вынужденных колебаний, проходящих площадь с заданным телесным углом, к потоку энергии, падающей на заряд в среднем за период колебаний:

$$d\sigma \equiv \frac{1}{\langle S_0 \rangle} d\mathfrak{J}$$

где поток энергии падающей волны считается по формуле Пойнтинга, $S_0 = \frac{c}{4\pi} \mathcal{E}_0 \times \mathcal{H}_0$.

Размерность дифференциального сечения легко определить, если принять во внимание, что интенсивность - это энергия в единицу времени, а падающий поток - это энергия в единицу времени на единичную площадь:

$$[\sigma] = \frac{[E]}{[t]} / \frac{[E]}{[t][r]^2} = [r]^2$$

т.е. сечение рассеяния имеет размерность площади.

Рассеяние квазиупругим диполем

Суть вывода

Решаем уравнение

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathcal{E}_0,$$

где учтена сила радиационного трения, сила упругого взаимодействия диполя с решеткой, а также внешнее электромагнитное поле. Методом фурье находим из $\ddot{\mathbf{d}}(t) = e\ddot{\mathbf{r}}(t)$

$$d(\omega) = -\frac{e^2}{m} \mathcal{E}_0(\omega) \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Далее по $\mathfrak{J}_{(d)} = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{d}}|^2$ находим

$$d^2 \mathfrak{J}(\omega) = \frac{c}{4\pi} \frac{e^4}{m^2 c^4} \mathcal{E}_0^2(\omega) \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \sin^2 \psi d \cos \theta d\phi,$$

делим на $S_0 = \frac{c}{4\pi} \mathcal{E}_0^2(\omega)$, интегрируем по углам, получаем

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

или в случае отсутствия диссипации и силы упругости

$$\sigma_{\text{free}} = \frac{8\pi}{3}$$

Вывод

Рассмотрим уравнение движения свободного покоящегося заряда под воздействием поля электромагнитной волны

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathcal{H}$$

которое при $v \ll c$ сводится к

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathcal{E}$$

так что несмотря на то, что электрическое и магнитное поля в волне одинаковы по модулю, можно пренебречь вкладом магнитного поля и проводить нерелятивистское рассмотрение.

Если заряд закрепить с помощью сил упругости, то в свободном виде он будет совершать колебания с собственной частотой ω_0 :

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = 0$$

В самом деле, величина

$$\mathbf{F}_{\text{elastic}} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$$

есть не что иное как сила упругости, пропорциональная смещению. Если есть диссипация, т.е. сила трения ¹, то скорость частицы будет экспоненциально затухать ²:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad \text{а} \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 e^{-\gamma t}$$

где коэффициент затухания γ имеет размерность обратного времени, т.е. частоты. В итоге, уравнение движения с учетом силы упругости, силы трения и внешней силы электрического поля примет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathcal{E}_0$$

что представляет собой уравнение для квазиупругого диполя, если поместить неподвижный заряд — в начало координат ³. Применим преобразование Фурье:

$$\mathbf{r}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathbf{r}(\omega), \quad \mathbf{r}^*(\omega) = \mathbf{r}(-\omega)$$

Тогда дифференциальное уравнение становится алгебраическим, поскольку

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \longrightarrow -i\omega \mathbf{r}(\omega)$$

так что

$$[(-i\omega)^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2] \mathbf{r}(\omega) = \frac{e}{m} \mathcal{E}_0(\omega)$$

Решение

$$\mathbf{r}(\omega) = \frac{e}{m} \mathcal{E}_0(\omega) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

удовлетворяет условию вещественности. Фурье-образ второй производной по времени дипольного момента равен

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = e\ddot{\mathbf{r}}(t) \longrightarrow -\frac{e^2}{m} \mathcal{E}_0(\omega) \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Отсюда, с учетом выражения для электрического и магнитного полей в волновой зоне

$$|\mathcal{E}| = |\mathcal{H}| = \frac{1}{c^2 r} |\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}| = \frac{1}{c^2 r} |\ddot{\mathbf{d}}| \sin \psi$$

и потока энергии в рассеянной волне

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} |\mathcal{E}|^2$$

получаем интенсивность излучения $d^2\mathfrak{J} = |\mathbf{S}| r^2 d\Omega$:

$$d^2\mathfrak{J}(\omega) = \frac{c}{4\pi} \frac{e^4}{m^2 c^4} \mathcal{E}_0^2(\omega) \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \sin^2 \psi d\cos\theta d\phi$$

Здесь ψ - угол между вектором электрического поля и волновым вектором излученной волны, а θ и ϕ - стандартные углы в полярных координатах для волнового вектора уходящей волны.

Ясно, что такая формула справедлива, только если вектор электрического поля ориентирован вдоль определенной оси (на рис. 9.1 волновой вектор падающей волны направлен вдоль оси z , электрическое поле - вдоль оси x), т.е. когда падающая волна линейно поляризована. Тогда

$$\sin^2 \psi = 1 - \cos^2 \psi$$

причем $\cos \psi$ задает проекцию волнового вектора рассеянной волны на ось электрического поля:

$$\cos \psi = \sin \theta \cos \phi$$

так что распределение интенсивности излучения по углам -

$$d^2\mathfrak{J}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^4}{m^2 c^3} \mathcal{E}_0^2(\omega) \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \times \\ (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) d\cos\theta d\phi$$

Поток энергии в падающей волне

$$S_0 = \frac{c}{4\pi} \mathcal{E}_0^2(\omega)$$

и, в итоге, дифференциальное сечение рассеяния линейно поляризованной электромагнитной волны на квазиупругом диполе

$$\frac{d^2\sigma}{d\cos\theta d\phi} = \frac{e^4}{m^2 c^4} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi)$$

Величина

$$r_e \equiv \frac{e^2}{mc^2}$$

имеет размерность длины и называется электромагнитным радиусом. В самом деле, определение можно переписать в виде

$$\frac{e^2}{r_e} = mc^2$$

т.е. электромагнитный радиус частицы - это такой радиус, на котором электростатическая энергия частицы равна ее массе покоя. Для электрона $r_e \approx 2.8 \cdot 10^{-13}$ см.

Интегрируя (9.3) по углу ϕ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= 2\pi r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right) \\ &= \pi r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} (1 + \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

И наконец, после интегрирования по $\cos \theta$ находим полное сечение:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

Для свободной частицы, т.е. когда диссипация и сила упругости равны нулю, $\gamma = \omega_0 = 0$, полное сечение является постоянным, независящим от частоты падающей волны:

$$\sigma_{\text{free}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

есть сечение Томсона. В общем случае поведение полного сечения имеет характерный профиль: - на частотах, много больших ω_0 , сечение асимптотически стремится к сечению свободной частицы, - на частотах, близких к нулю, сечение стремится к нулю:

$$\sigma \approx \sigma_{\text{free}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

рэлеевское рассеяние. Тут “синий” край спектра рассеивается существенно сильнее “красного”, так что небо имеет голубой цвет рассеянного в атмосфере солнечного света. При частотах, близких к ω_0 , сечение имеет резонансный характер с шириной, определяемой параметром диссипации.

Рассеяние света произвольной поляризации

В случае произвольной поляризации света угловое распределение интенсивности задается угловой зависимостью магнитного поля

$$\mathcal{H}^2 \sim (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}})^2 \sim (\mathbf{n} \times \mathcal{E}_0)^2 \sim (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_\perp)^2$$

где учтено, что $\mathcal{E} \sim \boldsymbol{\epsilon}_\perp$. Рассмотрим естественно поляризованный свет. Выбирая ось z вдоль волнового вектора падающей волны $\mathbf{k}_0$, перечислим свойства вектора поляризации $\boldsymbol{\epsilon}_\perp$ для естественного света:

1. единичная нормировка:

$$\boldsymbol{\epsilon}_\perp = a_x \mathbf{e}_1 + a_y \mathbf{e}_2, \quad |a_x|^2 + |a_y|^2 = 1$$

2. поперечность:

$$\boldsymbol{\epsilon}_\perp \cdot \mathbf{k}_0 = 0$$

3. равновероятность обеих поперечных поляризаций:

$$\langle |a_x|^2 \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle |a_y|^2 \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle a_x a_y \rangle = 0$$

Эти свойства позволяют нам вычислить тензор поляризации естественного света

$$\Pi^{\alpha\beta} = \langle \epsilon_\perp^\alpha \epsilon_\perp^{*\beta} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1^\alpha \mathbf{e}_1^\beta + \mathbf{e}_2^\alpha \mathbf{e}_2^\beta)$$

Исходя из этого выражения, тензор поляризации можно переписать в не зависящим от выбора базиса виде:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} - \mathbf{q}_\alpha \mathbf{q}_\beta), \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{k}_0}{k_0}$$

(???? про это лучше еще подумать!!!)

Отметим, что такое же выражение для тензора поляризаций фотона получается усреднением по двум поперечным поляризациям фотона, записанным в виде

$$\Pi^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\lambda}^{\alpha} \epsilon_{\lambda}^{*\beta}$$

если учесть условия нормировки и поперечности

$$\Pi_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\lambda} \cdot \epsilon_{\lambda}^* = 1, \quad \Pi_{\alpha\beta} q^{\alpha} = 0$$

что, по своему смыслу, отвечает усреднению единичного вектора на окружности. Тогда

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\perp})^2 \rangle &= \epsilon_{\mu\nu\alpha} n_{\nu} \epsilon_{\mu\nu'\beta} n_{\nu'} \langle \epsilon_{\perp}^{\alpha} \epsilon_{\perp}^{*\beta} \rangle = \epsilon_{\mu\nu\alpha} n_{\nu} \epsilon_{\mu\nu'\beta} n_{\nu'} \Pi_{\alpha\beta} = \\ &= (\delta_{\nu\nu'} \delta_{\alpha\beta} - \delta_{\nu\beta} \delta_{\alpha\nu'}) n_{\nu} n_{\nu'} \Pi_{\alpha\beta} = \mathbf{n}^2 \Pi_{\alpha\alpha} - n_{\alpha} n_{\beta} \Pi_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Далее

$$n^2 = 1, \quad \Pi_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}(3 - 1) = 1$$

и

$$n_{\alpha} n_{\beta} \Pi_{\alpha\beta} = n_{\alpha} n_{\beta} \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} - \mathbf{q}_{\alpha} \mathbf{q}_{\beta}) = \frac{1}{2} (\mathbf{n}^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q})^2)$$

так что

$$\langle (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\perp})^2 \rangle = \frac{1}{2} (1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q})^2) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$

где мы ввели угол θ между волновыми векторами падающей и рассеянной волн. Формула (9.7) решает задачу об угловой зависимости сечения рассеяния естественного света на квазиупругом диполе. Что касается полного сечения, то для линейно поляризованного света мы усреднили по углу ϕ величину

$$\sin^2 \psi = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi \quad \text{а} \quad 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$

что в точности совпадает с формой распределения, полученной для естественно поляризованного света, и, следовательно, полные сечения для рассеяния линейно и естественно поляризованного света совпадают.

Теория рассеяния по Ландау

(мб тут что-то оригинальное еще остается, так что выгружу на всякий случай. плюс тут задачи.)

О случаях применения

хз

сечение рассеяния эллиптически поляризованной волны свободным зарядом

1. Определить сечение рассеяния эллиптически поляризованной волны свободным зарядом.

Поле волны имеет вид $\mathbf{E} = \mathbf{A} \cos(\omega t + \alpha) + \mathbf{B} \sin(\omega t + \alpha)$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ - взаимно перпендикулярные векторы (см. §48). Аналогично выводу, проделанному в тексте, находим:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{[\mathbf{A}\mathbf{n}']^2 + [\mathbf{B}\mathbf{n}']^2}{A^2 + B^2} d\Omega.$$

сечение рассеяния линейно поляризованной волны осциллятором

2. Определить сечение рассеяния линейно поляризованной волны зарядом, совершающим (под влиянием некоторой упругой силы) малые колебания (так называемым осциллятором).

Уравнение движения заряда в падающей на него волне $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha)$ есть

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

где ω_0 - частота его свободных колебаний. Для вынужденных колебаний имеем отсюда:

$$\mathbf{r} = \frac{e \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Определяя отсюда $\ddot{\mathbf{d}}$, находим:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin^2 \theta d\Omega$$

(θ — угол между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}'$).

сечение рассеяния света электрическим диполем-ротатором

3. Определить полное сечение рассеяния света электрическим диполем, представляющим собой в механическом отношении ротатор. Частота волны ω предполагается большой по сравнению с частотой Ω_0 свободного вращения ротатора.

При условии $\omega \gg \Omega_0$ собственным вращением ротатора можно пренебречь и рассматривать только вынужденное вращение под влиянием момента сил $[\mathbf{dE}]$, действующего на него со стороны рассеиваемой волны. Уравнение этого движения: $J\dot{\Omega} = [\mathbf{dE}]$, где J - момент инерции ротатора, а Ω - угловая скорость вращения. Изменение же вектора дипольного момента при его вращении без изменения абсолютной величины дается формулой $\dot{\mathbf{d}} = [\Omega \mathbf{d}]$. Из этих двух уравнений находим (опуская член, квадратичный по малой величине Ω):

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{1}{J} [[\mathbf{dE}]\mathbf{d}] = \frac{1}{J} \{ \mathbf{E}d^2 - (\mathbf{E}\mathbf{d})\mathbf{d} \}$$

Предполагая все ориентации диполя в пространстве равновероятными и усредняя $\ddot{\mathbf{d}}^2$ по ним, получим в результате полное сечение в виде

$$\sigma = \frac{16\pi d^4}{9c^4 J^2}.$$

4. Определить коэффициент деполаризации рассеянного света при рассеянии естественного света свободным зарядом. **Решение.** Из соображений симметрии очевидно, что две некогерентные поляризованные компоненты рассеянного света (см. §50) будут поляризованы линейно: одна в плоскости рассеяния (плоскость, проходящая через падающий и рассеянный лучи), а другая - перпендикулярно к этой плоскости. Интенсивности этих компонент определяются составляющими поля падающей волны в плоскости рассеяния ($\mathbf{E}_{\parallel}$) и перпендикулярно к ней ($\mathbf{E}_{\perp}$) и, согласно (78.3), пропорциональны соответственно $[\mathbf{E}_{\parallel} \mathbf{n}']^2 = E_{\parallel}^2 \cos^2 \vartheta$ и $[\mathbf{E}_{\perp} \mathbf{n}']^2 = E_{\perp}^2$ (ϑ - угол рассеяния). Поскольку для естественного падающего света $\overline{E_{\parallel}^2} = \overline{E_{\perp}^2}$, то коэффициент деполаризации (см. примечание на с. 162)

$$\rho = \cos^2 \vartheta$$

Рассеянного движущимся зарядом частота

5. Определить частоту (ω') света, рассеянного движущимся зарядом.

В системе координат, где заряд покоится, частота света при рассеянии не меняется ($\omega = \omega'$). В инвариантной форме это соотношение можно написать в виде

$$k'_i u'^i = k_i u^i,$$

где u^i – 4-скорость заряда. Отсюда без труда получаем:

$$\omega' \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right) = \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right),$$

где θ и θ' – углы, составляемые падающей и рассеянной волной с направлением движения (v – скорость заряда).

Угловое распределение рассеяния линейно поляризованной волны зарядом, движущимся с произвольной скоростью v в направлении распространения волны

6. Определить угловое распределение рассеяния линейно поляризованной волны зарядом, движущимся с произвольной скоростью v в направлении распространения волны.

Скорость частицы $\mathbf{v}$ перпендикулярна к полям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ падающей волны, а потому перпендикулярна и к приобретаемому частицей ускорению $\mathbf{w}$. Интенсивность рассеяния определяется формулой (73.14), в которой ускорение $\mathbf{w}$ надо выразить через поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ согласно формуле, полученной в задаче к §17. Разделив интенсивность dI на вектор Пойнтинга падающей волны, найдем следующее выражение для сечения рассеяния:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \sin \theta \cos \varphi\right)^6} \left[\left(1 - \frac{v}{c} \sin \theta \cos \varphi\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cos^2 \theta \right] d\Omega,$$

где теперь θ и φ – полярный угол и азимут направления $\mathbf{n}'$ относительно системы координат с осью z вдоль направления $\mathbf{E}$ и осью x вдоль $\mathbf{v}$ ($\cos(\mathbf{n}', \mathbf{E}) = \cos \theta$, $\cos(\mathbf{n}', \mathbf{v}) = \sin \theta \cos \varphi$).

движение заряда под влиянием средней силы, действующей на него со стороны рассеиваемой им волны

7. Определить движение заряда под влиянием средней силы, действующей на него со стороны рассеиваемой им волны.

Сила (78.8), а потому и скорость рассматриваемого движения направлены вдоль распространения падающей волны (ось x). Во вспомогательной системе отсчета K_0 , в которой заряд покоится (напоминаем, что речь идет о движении, усредненном по периоду малых колебаний), действующая на него сила равна $\sigma \bar{W}_0$, а приобретаемое им под влиянием этой силы ускорение

$$w_0 = \frac{\sigma}{m} \bar{W}_0$$

(индекс нуль относится к величинам в системе отсчета K_0). Преобразование же к исходной системе отсчета K (в которой заряд движется со скоростью v) осуществляется формулой, полученной в задаче к §7, и формулой (47.7) и дает:

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} = \frac{\bar{W}_0 \sigma}{m} \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$\frac{\bar{W}\sigma}{mc}t = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \cdot \frac{2-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}} - \frac{2}{3},$$

чем и определяется в неявном виде скорость $v = dx/dt$ как функция времени (постоянная интегрирования выбрана так, что $v = 0$ при $t = 0$).

сечение рассеяния линейно поляризованной волны осциллятором, с учетом торможения излучением

8. Определить сечение рассеяния линейно поляризованной волны осциллятором, с учетом торможения излучением.

Уравнение движения заряда в падающей волне пишем в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\mathbf{d}}$$

В силе торможения можно подставить приближенно $\ddot{\mathbf{d}} = -\omega_0^2 \dot{\mathbf{r}}$; тогда получим:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

где $\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3} \omega_0^2$. Отсюда находим:

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

Сечение рассеяния:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

Рассеяние Релея по Тонгу

(думаю, это важно тоже понимать, потом посмотрю. мб в оптике это будет.)

Rayleigh scattering describes the scattering of light off a neutral atom or molecule. Unlike in the case of Thomson scattering, the centre of mass of the atom does not accelerate. Instead, as we will see in Section 7.1.1, the atom undergoes polarisation

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$$

We will present a simple atomic model to compute the proportionality constant in Section 7.5.1, where we will show that it takes the form (7.29),

$$\alpha = \frac{q^2/m}{-\omega^2 + \omega_0^2 - i\gamma\omega}$$

Here ω_0 is the natural oscillation frequency of the atom while ω is the frequency of incoming light. For many cases of interest (such as visible light scattering off molecules in the atmosphere), we have $\omega_0 \gg \omega$, and we can approximate α as a constant,

$$\alpha \approx \frac{q^2}{\omega_0^2 m}$$

We can now compute the time-average power radiated in this case. It's best to use the version of Larmor's formula involving the electric dipole (6.19), since we can just substitute in the results above. We have

$$\overline{\mathcal{P}}_{\text{radiated}} = \frac{\mu_0 \alpha^2 E_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

In this case, the cross-section for Rayleigh scattering is given by

$$\sigma = \frac{\overline{\mathcal{P}}_{\text{radiated}}}{\mathcal{S}_{\text{incident}}} = \frac{\mu_0^2 q^4}{6\pi m^2 c^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 = \frac{8\pi r_q^2}{3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

We see that the cross-section now has more structure. It increases for high frequencies, $\sigma \sim \omega^4$ or, equivalently, for short wavelengths $\sigma \sim 1/\lambda^4$. This is important. The most famous example is the colour of the sky. Nitrogen and oxygen in the atmosphere scatter short-wavelength blue light more than the long-wavelength red light. This means that the blue light from the Sun gets scattered many times and so appears to come from all regions of the sky. In contrast, the longer wavelength red and yellow light gets scattered less, which is why the Sun appears to be yellow. (In the absence of an atmosphere, the light from the Sun would be more or less white). This effect is particularly apparent at sunset, when the light from the Sun passes through a much larger slice of atmosphere and, correspondingly, much more of the blue light is scattered, leaving behind only red.

19.5.2 How in general to describe scattering of not electromagnetic waves?

(GW, scalar particles. how this formalism is applicable to it?)

19.6 Other Topics of Scattering Theory

19.6.1 Scattering of Low-Frequency Waves

Суть

(вроде как частный случай предыдущего)

Вывод формул

Рассеяние электромагнитных волн системой зарядов отличается от рассеяния одним (неподвижным) зарядом прежде всего тем, что благодаря наличию собственного движения зарядов в системе частота рассеянного излучения может быть отличной от частоты падающей волны. Именно, в спектральное разложение рассеянного излучения входят, наряду с частотой ω падающей волны, также и частоты ω' , отличающиеся от ω на любую из собственных частот движения рассеивающей системы. Рассеяние с изменением частоты называют некогерентным (или комбинационным) в противоположность когерентному рассеянию без изменения частоты.

Предполагая поле падающей волны слабым, мы можем представить плотность тока в виде $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}'$, где $\mathbf{j}_0$ - плотность тока в отсутствие внешнего поля, а $\mathbf{j}'$ - изменение тока под влиянием падающей волны. Соответственно этому векторный потенциал (и другие величины) поля системы тоже будут иметь вид $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}'$, где $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}'$ определяются точками $\mathbf{j}_0$ и $\mathbf{j}'$; потенциал $\mathbf{A}'$ описывает рассеянную системой волну. Рассмотрим рассеяние волны, частота ω которой мала по сравнению со всеми собственными частотами системы. Рассеяние будет состоять как из когерентной, так и из некогерентной части, но мы будем рассматривать здесь только когерентное рассеяние.

Для вычисления поля рассеянной волны, при достаточно малой частоте ω , всегда можно пользоваться тем разложением запаздывающих потенциалов, которое было произведено в §67 и §71, даже если скорости частиц в системе и не малы по сравнению со скоростью света. Действительно, для законности указанного разложения интеграла

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0} \oint \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\mathbf{n}'}{c}} dV$$

необходимо лишь, чтобы время $\mathbf{r}\mathbf{n}'/c \sim a/c$ было мало по сравнению со временем $\sim 1/\omega$; при достаточно малых ω ($\omega \ll c/a$) это условие выполняется независимо от величины скоростей частиц в системе. Первые члены разложения дают:

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c^2 R_0} \left\{ [\ddot{\mathbf{d}}'\mathbf{n}'] + [[\ddot{\mathbf{m}}'\mathbf{n}']\mathbf{n}'] \right\},$$

где $\mathbf{d}', \mathbf{m}'$ - части дипольного и магнитного моментов системы, которые создаются падающим на систему рассеиваемым излучением. Следующие члены разложения содержат производные по времени более высокого порядка, чем второго, и мы их опускаем.

Компонента $\mathbf{H}'_\omega$ спектрального разложения поля рассеянной волны с частотой, равной частоте падающего излучения, определится этой же формулой, в которой надо вместо всех величин подставить их компоненты Фурье: $\ddot{\mathbf{d}}'_\omega = -\omega^2 \mathbf{d}'_\omega$, $\ddot{\mathbf{m}}'_\omega = -\omega^2 \mathbf{m}'_\omega$. Тогда получаем:

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{\omega^2}{c^2 R_0} \{ [\mathbf{n}'\mathbf{d}'_\omega] + [\mathbf{n}'[\mathbf{m}'_\omega\mathbf{n}']] \}.$$

Следующие члены разложения поля дали бы величины, пропорциональные более высокой степени малой частоты. Если скорости всех частиц в системе малы ($v \ll c$), то в (79.1) можно пренебречь вторым членом по сравнению с первым, поскольку магнитный момент содержит отношение v/c . Тогда

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{1}{c^2 R_0} \omega^2 [\mathbf{n}'\mathbf{d}'_\omega]$$

Если полный заряд системы равен нулю, то при $\omega \rightarrow 0$ $\mathbf{d}'_\omega$ и $\mathbf{m}'_\omega$ стремятся к постоянным пределам (если бы сумма зарядов была отлична от нуля, то при $\omega = 0$, т. е. в постоянном поле, система начала бы двигаться как целое). Поэтому при малых ω ($\omega \ll v/a$) можно считать $\mathbf{d}'_\omega$ и $\mathbf{m}'_\omega$ не зависящими от частоты, так что поле рассеянной волны пропорционально квадрату частоты. Интенсивность же ее, следовательно, пропорциональна ω^4 . Таким образом, при рассеянии волн с малой частотой сечение когерентного рассеяния пропорционально четвертой степени частоты падающего излучения ¹⁾.

О случаях применения

хз

19.6.2 Scattering of High-Frequency Waves

Суть

хз

Вывод формул

Рассмотрим теперь рассеяние волн системой зарядов в обратном случае, когда частота ω волны велика по сравнению с основными собственными частотами системы. Последние имеют порядок величины $\omega_0 \sim v/a$, так что ω должно удовлетворять условию $\omega \gg \omega_0 \sim \frac{v}{a}$. (80.1) Кроме того, мы будем предполагать, что скорости зарядов в системе малы ($v \ll c$).

Согласно условию (80.1) период движения зарядов в системе велик по сравнению с периодом волны. Поэтому в течение промежутков времени порядка периода волны движение зарядов в системе можно считать равномерным. Это значит, что при рассмотрении рассеяния коротких волн можно не учитывать взаимодействия зарядов в системе друг с другом, т. е. их можно считать свободными.

Таким образом, при вычислении скорости $\mathbf{v}'$, приобретаемой зарядом в поле падающей волны, мы можем рассматривать каждый заряд системы в отдельности и писать для него уравнение движения в виде

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$$

где $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$ - волновой вектор падающей волны. Радиус-вектор заряда является, конечно, функцией времени. В показателе экспоненциального множителя с правой стороны этого уравнения скорость изменения первого члена со временем велика по сравнению со скоростью изменения второго (первая равна ω , а вторая - порядка $kv \sim v\omega/c \ll \omega$). Поэтому при интегрировании уравнений движения можно считать в правой их части $\mathbf{r}$ постоянным. Тогда

$$\mathbf{v}' = -\frac{e}{i\omega m} \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$$

Для векторного потенциала рассеянной волны (на больших расстояниях от системы) имеем согласно (79.1) :

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0} \sum (e\mathbf{v}')_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{n}'}{c}}$$

где сумма берется по всем зарядам системы. Подставляя сюда (80.2), находим:

$$\mathbf{A}' = -\frac{1}{icR_0\omega} e^{-i\omega(t - \frac{R_0}{c})} \mathbf{E}_0 \sum \frac{e^2}{m} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$$

где сумма берется по всем зарядам системы. Подставляя сюда (80.2), находим:

$$\mathbf{A}' = -\frac{1}{icR_0\omega} e^{-i\omega(t - \frac{R_0}{c})} \mathbf{E}_0 \sum \frac{e^2}{m} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ есть разность между волновым вектором рассеянной $\mathbf{k}' = \omega\mathbf{n}'/c$ и волновым вектором $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$ падающей волн ¹⁾. Значение суммы в (80.3) должно браться в момент времени $t' = t - R_0/c$, так как изменением $\mathbf{r}$ за время $\mathbf{r}\mathbf{n}'/c$ можно пренебречь ввиду предполагаемой малости скоростей частиц (индекс t' , как обычно, для краткости опускаем). Абсолютная величина вектора $\mathbf{q}$ равна

$$q = 2\frac{\omega}{c} \sin \frac{\vartheta}{2}$$

где ϑ - угол рассеяния. При рассеянии на атоме (или молекуле) в сумме в (80.3) можно пренебречь членами, соответствующими ядрам, ввиду большой величины их масс по сравнению с массами электронов. Ниже мы будем иметь в виду именно этот случай,

соответственно чему вынесем множитель e^2/m за знак суммы, понимая в нем под e и m заряд и массу электрона.

Для поля $\mathbf{H}'$ рассеянной волны находим согласно (66.3):

$$\mathbf{H}' = \frac{[\mathbf{E}_0 \mathbf{n}']}{c^2 R_0} e^{-i\omega(t - \frac{R_0}{c})} \frac{e^2}{m} \sum e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$$

Поток энергии в элемент телесного угла в направлении $\mathbf{n}'$ равен

$$\frac{c|\mathbf{H}'|^2}{8\pi} R_0^2 d\Omega = \frac{e^4}{8\pi c^3 m^2} [\mathbf{n}' \mathbf{E}_0]^2 \left| \sum e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right|^2 d\Omega.$$

Разделив это на поток энергии $c|\mathbf{E}_0|^2/8\pi$ падающей волны и вводя угол θ между направлением поля $\mathbf{E}$ падающей волны и направлением рассеяния, находим окончательно сечение рассеяния в виде

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left| \sum e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \right|^2 \sin^2 \theta d\Omega.$$

Черта обозначает усреднение по времени, т. е. усреднение по движению зарядов в системе; оно производится ввиду того, что рассеяние наблюдается в промежутки времени, большие по сравнению с периодом движения зарядов в системе.

Для длины волны падающего излучения из условия (80.1) следует неравенство $\lambda \ll ac/v$. Что же касается относительной величины λ и a , то возможны оба предельных случая $\lambda \gg a$ и $\lambda \ll a$. В обоих этих случаях общая формула (80.6) значительно упрощается.

При $\lambda \gg a$ в выражении (80.6) $qr \ll 1$, поскольку $q \sim 1/\lambda, r \sim a$. Заменяя соответственно этому $e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ единицей, имеем:

$$d\sigma = Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega$$

т. е. рассеяние пропорционально квадрату числа Z электронов в атоме. Перейдем к случаю $\lambda \ll a$. В квадрате суммы в (80.6) наряду с равными единице квадратами модуля каждого из членов имеются произведения вида $e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}$. При усреднении по движению зарядов, т. е. по их взаимным расположениям в системе, разности $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ пробегают значения в интервале порядка a . Поскольку $q \sim 1/\lambda, \lambda \ll a$, то экспоненциальный множитель $e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}$ является в этом интервале быстро осциллирующей функцией, и его среднее значение обращается в нуль. Таким образом, при $\lambda \ll a$ сечение рассеяния равно

$$d\sigma = Z \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega$$

т. е. пропорционально первой степени атомного номера. Заметим, что эта формула неприменима при малых углах рассеяния ($\vartheta \sim \lambda/a$), так как в этом случае $q \sim \vartheta/\lambda \sim 1/a$ и показатель q невелик по сравнению с единицей.

Для определения сечения когерентного рассеяния мы должны выделить ту часть поля рассеянной волны, которая имеет частоту ω .

Выражение (80.5) для поля зависит от времени через множитель $e^{-i\omega t}$ и, кроме того, от времени зависит также сумма $\sum e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$. Эта последняя зависимость и приводит к тому, что в поле рассеянной волны содержатся наряду с частотой ω еще и другие (хотя в близкие к ней) частоты. Та часть поля, которая обладает частотой ω (т. е. зависит от времени только посредством множителя $e^{-i\omega t}$), получится, очевидно, если усреднить по времени сумму $\sum e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$. Соответственно этому выражение для сечения когерентного рассеяния

$d\sigma_{\text{ког}}$ отличается от полного сечения $d\sigma$ тем, что вместо среднего значения квадрата модуля суммы в нем стоит квадрат модуля среднего значения суммы:

$$d\sigma_{\text{ког}} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left|\overline{\sum e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}}\right|^2 \sin^2 \theta d\Omega.$$

Полезно заметить, что это среднее значение суммы есть (с точностью до коэффициента) не что иное, как пространственная компонента Фурье от среднего распределения $\rho(\mathbf{r})$ плотности электрического заряда в атоме:

$$\overline{\sum e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}} = \int \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} dV = \rho_{\mathbf{q}}.$$

При $\lambda \gg a$ мы можем снова заменить $e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ единицей, так что

$$d\sigma_{\text{ког}} = Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \theta d\Omega.$$

Сравнивая это с полным сечением (80.7), мы видим, что $d\sigma_{\text{ког}} = d\sigma$, т. е. все рассеяние является когерентным.

Если же $\lambda \ll a$, то при усреднении в (80.9) все члены суммы (как средние значения быстро осциллирующих функций времени) исчезают, так что $d\sigma_{\text{ког}} = 0$. Таким образом, в этом случае рассеяние целиком некогерентно.

О случаях применения

хз

19.6.3 Other Types of Scattering in Electrodynamics

(кст, а что там вообще есть?)

(мб укажу, как рассеяние тензорных полей других рангов считать, пока не до этого.)

О рассеяниях в кристаллооптике

(там Мандельштама-Брилюэна есть и многие другие, уже писал их, тут укажу, в чем их суть.)

20 Optics: Basics

Приведем основы оптики, связывающие её с теорией поля.

(неделю еще развиваться в оптике, чтобы я смог нормально её написать. Пока что лучше вообще не читать это.)

20.1 Fundamentals of Optics

Приведем полевые основы оптики.

(тут много важных идей будет, ну а сама теория по оптике - в записи по ней, точно не в этой записи.)

20.1.1 How Exactly Optics Follows from Maxwell Equations?

(??? write it??)

В оптике у нас может быть фазовая скорость более скорости света, а в теории поля, разрешаем ли мы это?

(хотелось с формулами бы ответить про это. пока не занимался этим вопросом, не актуально.)

20.1.2 Geometrical Optics: Basics

обзор оптики и мотивация

Посмотрим на основные законы оптики вкратце.

(формулы и пояснения)

Оптика соответствует предельному случаю малых длин волн, $\lambda \rightarrow 0$.

суть перехода в геометрическую оптику

Вводим понятие лучей - линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением распространения волны.

Связь перехода в геометрическую оптику и перехода квантовой механики в классическую

(то, что Киселев рассказывал, впишу потом, пока не так понял.)

Theory

Плоская волна отличается тем свойством, что направление ее распространения и амплитуда везде одинаковы.

произвольные электромагнитные волны этим свойством, конечно, не обладают.

однако часто электромагнитные волны, не являющиеся плоскими, тем не менее таковы, что их можно рассматривать как плоские в каждом небольшом участке пространства.

для этого необходимо, чтобы амплитуда и направление волны почти не менялись на протяжении расстояний порядка длины волны.

если выполнено это условие, то можно ввести так называемые волновые поверхности, во всех точках которых фаза волны в данный момент времени одинакова (для плоской волны это - плоскости, перпендикулярные к направлению ее распространения).

в каждом небольшом участке пространства можно говорить о направлении распространения волны, нормальном к волновой поверхности.

при этом можно ввести понятие лучей - линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением распространения волны.

изучение законов распространения волн в этом случае составляет предмет геометрической оптики.

геометрическая оптика рассматривает, следовательно, распространение электромагнитных волн, в частности света, как распространение лучей, совершенно отвлекаясь при этом от их волновой природы.

другими словами, геометрическая

Оптика соответствует предельному случаю малых длин волн, $\lambda \rightarrow 0$.

Переход в геометрическую оптику

Займемся теперь выводом основного уравнения геометрической оптики - уравнения, определяющего направление лучей.

Пусть f есть любая величина, описывающая поле волны (любая из компонент $\mathbf{E}$ Или $\mathbf{H}$). В плоской монохроматической волне f имеет вид

$$f = ae^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t+\alpha)} = a \exp [i(-k_i x^i + \alpha)]$$

(мы опускаем знак Re ; везде подразумевается вещественная часть).

Напишем выражение для поля в виде

$$f = ae^{i\psi}$$

В случае, когда волна не плоская, но геометрическая оптика применима, амплитуда a является, вообще говоря, функцией координат

и времени, а фаза ψ , называемая также эйконалом, не имеет простого вида, как в (53.1).

Существенно,

что эйконал ψ является большой величиной.

Это видно уже из того, что он меняется на 2π на протяжении длины волны, а геометрическая оптика соответствует пределу $\lambda \rightarrow 0$. В малых участках пространства и интервалах времени эйконал ψ можно разложить в ряд; с точностью до членов первого порядка имеем:

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + t \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

(начало координат и начало отсчета времени выбраны в рассматриваемом участке пространства и интервале времени; значения производных берутся в начале координат).

Сравнивая это выражение с (53.1), мы можем написать:

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \equiv \text{grad } \psi, \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

В соответствии с тем, что в каждом небольшом участке пространства (и в небольших интервалах времени) волну можно рассматривать как плоскую.

В четырехмерном виде соотношения (53.3) напишутся как

$$k_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x^i}$$

где k_i - волновой 4-вектор.

Мы видели в § 48, что компоненты 4-вектора k^i связаны соотношением $k_i k^i = 0$.

Подставляя сюда (53.4), находим уравнение:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = 0$$

Это уравнение, называемое уравнением эйконала, является основным уравнением геометрической оптики.

Уравнение эйконала можно вывести также и непосредственным предельным переходом $\lambda \rightarrow 0$ в волновом уравнении.

Поле f удовлетворяет Волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x^i} = 0$$

Подставляя сюда $f = ae^{i\psi}$, находим:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x^i} e^{i\psi} + 2i \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} e^{i\psi} + i f \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x^i} - \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} f = 0$$

Но эйконал ψ , как было выше указано, есть большая величина; поэтому можно пренебречь здесь тремя первыми членами по сравнению с четвертым, и мы приходим снова к уравнению (53.5).

Укажем еще некоторые соотношения, которые, правда, в применении к распространению света в пустоте приводят лишь к заранее очевидным результатам.

Существенно,

что в своей общей форме эти выводы применимы и к распространению света в материальных средах.

Из формы уравнения эйконала вытекает замечательная аналогия между геометрической оптикой и механикой материальных частиц.

Движение материальной частицы определяется уравнением Гамильтона-Якоби (16.11).

Это уравнение, как и уравнение эйконала, является уравнением в частных производных первого порядка и второй степени.

Как известно, действие S связано с импульсом $\mathbf{p}$ и функцией Гамильтона $\mathcal{H}$ частицы соотношениями

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

Сравнивая эти формулы с формулами (53.3), мы видим, что волновой вектор волны играет в геометрической оптике роль импульса частицы в механике, а частота - роль функции Гамильтона, т.е. энергии частицы.

Абсолютная величина k волнового вектора связана с частотой посредством формулы $k = \omega/c$.

Это соотношение аналогично соотношению $p = \mathcal{E}/c$ между импульсом и энергией частицы с массой, равной нулю, и скоростью, равной скорости света.

Для частиц имеют место уравнения Гамильтона

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}$$

Ввиду указанной аналогии мы можем непосредственно написать подобные уравнения для лучей:

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$$

В пустоте $\omega = ck$, так что $\dot{\mathbf{k}} = 0$, $\mathbf{v} = c\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ - единичный вектор вдоль направления распространения), т.е., как и следовало, в пустоте лучи являются прямыми линиями, вдоль которых свет распространяется со скоростью c .

Аналогия между волновым вектором волны и импульсом частицы в особенности ясно проявляется в следующем обстоятельстве.

Рассмотрим волну, представляющую собой наложение монохроматических волн с частотами, лежащими в некотором небольшом интервале и занимающую некоторую конечную область пространства (так называемый волновой пакет).

Вычислим 4-импульс поля этой волны, воспользовавшись формулой (32.6) с тензором энергии-импульса (48.15) (для каждой монохроматической компоненты).

Заменяя в этой формуле k^i некоторым его средним значением, получим выражение вида

$$P^i = Ak^i$$

где коэффициент пропорциональности A между двумя 4-векторами P^i и k^i есть некоторый скаляр.

В трехмерном виде это соотношение дает:

$$\mathbf{P} = A\mathbf{k}, \quad \mathcal{E} = A\omega$$

Таким образом, мы видим, что импульс и энергия волнового пакета преобразуются от одной системы отсчета к другой соответственно как волновой вектор и частота.

Продолжая аналогию, можно установить для геометрической оптики принцип, аналогичный принципу наименьшего действия в механике.

Однако его при этом нельзя будет написать в гамильтоновой форме, $\delta \int L dt = 0$, так как оказывается невозможным ввести для лучей функцию, аналогичную функции Лагранжа для частиц.

Действительно, функция Лагранжа L частицы связана с функцией Гамильтона $\mathcal{H}$ посредством $L = \mathbf{p} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} - \mathcal{H}$.

Заменяя функцию Гамильтона частотой ω а импульс - волновым вектором $\mathbf{k}$, мы должны были бы написать для функции Лагранжа в оптике $\mathbf{k} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} - \omega$.

Но это выражение равно нулю, поскольку $\omega = ck$.

Невозможность введения функции Лагранжа для лучей видна, впрочем, и непосредственно из указанного выше обстоятельства, что распространение лучей аналогично движению частиц с массой, равной нулю.

Если волна обладает определенной постоянной частотой ω , то зависимость ее поля от времени определяется множителем вида $e^{-i\omega t}$.

Поэтому для эйконала такой волны мы можем написать:

$$\psi = -\omega t + \psi_0(x, y, z)$$

где ψ_0 - функция только от координат.

Уравнение эйконала (53.5) принимает теперь вид

$$(\text{grad } \psi_0)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Волновые поверхности являются поверхностями постоянного эйконала, т.

е.

семейством поверхностей вида $\psi_0(x, y, z) = \text{const}$.

Лучи же в каждой точке нормальны к соответствующей волновой поверхности; их направление определяется градиентом $\nabla \psi_0$.

принцип наименьшего действия Мопертюи

Как известно, в случае, когда энергия постоянна, принцип наименьшего действия частицы можно написать также и в виде так называемого принципа Мопертюи:

$$\delta S = \delta \int \mathbf{p} d\mathbf{l} = 0$$

где интегрирование производится по траектории частицы между заданными ее положениями.

Импульс предполагается при этом выраженным как функция от энергии и координат частицы.

Аналогичный принцип для лучей называется принципом Ферма.

В этом случае мы можем написать по аналогии:

$$\delta \psi = \delta \int \mathbf{k} d\mathbf{l} = 0$$

В пустоте $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$, и мы получаем ($\mathbf{n} d\mathbf{l} = dl$):

$$\delta \int dl = 0$$

что и соответствует прямолинейному распространению лучей.

20.1.3 Intensity

обзор и мотивация

Theory

Таким образом, в геометрической оптике световую волну можно рассматривать как пучок лучей.

Лучи,

сами по себе определяют лишь направление распространения света в каждой точке; остается вопрос о распределении интенсивности света в пространстве.

Выделим на какой-либо из волновых поверхностей рассматриваемого пучка бесконечно малый элемент.

Из дифференциальной геометрии известно, что всякая поверхность имеет в каждой своей точке два, вообще говоря, различных главных радиуса кривизны.

Пусть ac и bd (рис.

7) - элементы главных кругов кривизны, проведенные на данном элементе волновой поверхности.

Тогда лучи, проходящие через точки a и c , пересекутся друг с другом в соответствующем центре кривизны O_1 , а лучи, проходящие через b и d , пересекутся в другом центре кривизны O_2 .

При данных углах раствора лучей, исходящих из O_1 и O_2 , длины отрезков ac и bd пропорциональны соответствующим радиусам кривизны R_1 и R_2 (т.

е.

длинам O_1O и O_2O); площадь элемента поверхности пропорциональна произведению длин ac и bd , т.

е.

пропорциональна R_1R_2 .

Другими словами, если рассматривать элемент волновой поверхности, ограниченный определенным рядом лучей, то при движении вдоль них площадь этого элемента будет меняться пропорционально R_1R_2 .

С другой стороны, интенсивность, т.

е.

плотность потока энергии, обратно пропорциональна площади поверхности, через которую проходит данное количество световой энергии.

Таким образом, мы приходим к выводу, что интенсивность

$$I = \frac{\text{const}}{R_1R_2}$$

Эту формулу надо понимать следующим образом.

На каждом данном луче (AB на рис.

7) существуют определенные точки O_1 и O_2 , являющиеся центрами кривизны всех волновых поверхностей, пересекающих данный луч.

Расстояния OO_1 и OO_2 от точки O пересечения волновой поверхности с лучом до точек O_1 и O_2 являются радиусами кривизны R_1 и R_2 волновой поверхности в точке O .

Таким образом, формула (54.1) определяет интенсивность света в точке O на данном луче как функцию от расстояний до определенных точек на этом луче.

Подчеркнем, что эта формула непригодна для сравнения интенсивностей в разных точках одной и той же волновой поверхности.

Поскольку интенсивность определяется квадратом модуля поля, то для изменения самого поля вдоль луча мы можем написать:

$$f = \frac{\text{const}}{\sqrt{R_1 R_2}} e^{ikR}$$

где в фазовом множителе e^{ikR} под R может подразумеваться как R_1 , так и R_2 ; величины e^{ikR_1} и e^{ikR_2} отличаются друг от друга только постоянным (для данного луча) множителем, поскольку разность $R_1 - R_2$, расстояние между обоими центрами кривизны, постоянна.

Если оба радиуса кривизны волновой поверхности совпадают, то (54.1) и (54.2) имеют вид

$$I = \frac{\text{const}}{R^2}, \quad f = \frac{\text{const}}{R} e^{ikR}$$

Это имеет место, в частности, всегда в тех случаях, когда свет испускается точечным источником (волновые поверхности являются тогда Концентрическими сферами, а R - расстоянием до источника света).

Из (54.1) мы видим, что интенсивность обращается в бесконечность в точках $R_1 = 0, R_2 = 0$, т.

е.

в центрах кривизны волновых Поверхностей.

Применяя это ко всем лучам в пучке, находим, что интенсивность света в данном пучке обращается в бесконечность, вообще говоря, на двух поверхностях - геометрическом месте всех центров Кривизны волновых поверхностей.

Эти поверхности носят название каустик.

В частном случае пучка лучей со сферическими волновыми Поверхностями обе каустики сливаются в одну точку (фокус).

Отметим, что, согласно известным из дифференциальной геометрии свойствам геометрического места центров кривизны семейства поверхностей, лучи касаются каустики.

Надо иметь в виду, что (при выпуклых волновых поверхностях) центры кривизны волновых поверхностей могут оказаться лежащими не на самих лучах, а на их продолжениях за оптическую систему, от которой они исходят.

В таких случаях говорят о мнимых каустиках (или мнимых фокусах).

Интенсивность света при этом нигде не обращается в бесконечность.

Что касается обращения интенсивности в бесконечность, то в действительности, разумеется, интенсивность в точках каустики делается

большой, но остается конечной (см.

задачу к §59).

Формальное обращение в бесконечность означает, что приближение геометрической оптики становится во всяком случае неприменимым вблизи каустик.

С этим же обстоятельством связано и то, что изменение фазы вдоль луча может определяться формулой (54.2) только на участках луча, не включающих в себя точек его касания с каустиками.

Ниже (в § 59) будет показано, что в действительности при прохождении мимо каустики фаза поля уменьшается на $\pi/2$.

Это значит, что если на участке луча до его касания первой каустики поле пропорционально множителю e^{ikx} (x - координата вдоль луча), то после прохождения мимо каустики поле будет пропорционально $e^{i(kx-\pi/2)}$.

То же самое произойдет вблизи точки касания второй каустики, и за этой точкой поле будет пропорционально $e^{i(kx-\pi)}$

20.1.4 Eikonal and Penetration of Light into a Medium

(I'll rewrite it!!!)

обзор и мотивация

Theory

Идущий в пустоте луч света, попадая в какое-либо прозрачное материальное тело, имеет по выходе из этого тела направление, вообще говоря, отличное от первоначального.

Это изменение направления зависит, конечно, от конкретных свойств тела и от его формы.

Оказывается,

возможным вывести некоторые общие законы, относящиеся к изменению направления лучей света при прохождении через произвольные материальные тела.

При этом предполагается только, что для лучей, распространяющихся внутри рассматриваемого тела, имеет место геометрическая оптика.

Такие прозрачные тела, через которые пропускают лучи света, мы будем называть, как это принято, оптическими системами.

В силу указанной в § 53 аналогии между распространением лучей и движением частицы, те же общие законы справедливы и для изменения направления движения частиц, двигавшихся сначала прямолинейно в пустоте, затем проходящих через какое-нибудь электромагнитное поле и снова выходящих из этого поля в пустоту.

Для определенности мы будем,

ниже говорить о распространении лучей света.

Мы видели, что уравнение эйконала, определяющее распространение лучей, может быть написано (для света с определенной частотой) в виде (53.11).

Ниже мы будем для удобства обозначать посредством ψ эйконал ψ_0 , деленный на постоянную величину ω/c .

Тогда основное уравнение геометрической оптики будет иметь вид

$$(\nabla\psi)^2 = 1$$

Каждое решение этого уравнения описывает собой определенный пучок лучей, причем направление луча, проходящего через данную точку пространства, определяется градиентом ψ в этой точке.

Для наших целей,

такое описание недостаточно, поскольку мы ищем общие соотношения, определяющие прохождение через оптические системы не какого-либо одного определенного пучка лучей, а соотношения, относящиеся к любым лучам.

Поэтому мы должны пользоваться эйКоналом, взятым в таком виде, в котором он описывал бы все вообще возможные лучи света, т.

е.

лучи, проходящие через любую пару точек в пространстве.

В обычной своей форме эйконал $\psi(\mathbf{r})$ есть фаза луча из некоторого пучка, проходящего через точку г.

Теперь же мы должны ввести эйконал как функцию $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ координат двух точек $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

радиус-векторы начальной и конечной точек луча).

Через всякую пару точек $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ можно провести луч, и $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ есть разность фаз (или, как говорят, оптическая длина пути) этого луча между точками $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$.

Ниже мы будем везде подразумевать под $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ радиус-векторы точек на луче соответственно до и после его прохождения через оптическую систему.

Если в $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ один из радиус-векторов, скажем $\mathbf{r}'$, считать заданным, то ψ как функция от $\mathbf{r}$ будет описывать определенный пучок лучей, а именно пучок лучей, проходящих через точку $\mathbf{r}'$.

Тогда ψ должно удовлетворять уравнению (55.1), в котором дифференцирование производится по компонентам $\mathbf{r}$.

Аналогично, считая $\mathbf{r}$ заданным, находим еще одно уравнение для $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, так что

$$(\nabla\psi)^2 = 1, \quad (\nabla'\psi)^2 = 1$$

Направление луча определяется градиентом его фазы.

Поскольку $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ есть разность фаз в точках $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$, то направление луча в точке $\mathbf{r}'$ определяется вектором $\mathbf{n}' = \partial\psi/\partial\mathbf{r}'$, а в точке $\mathbf{r}$ - вектором $\mathbf{n} = -\partial\psi/\partial\mathbf{r}$.

Из (55.2) видно, что векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ единичные:

$$\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}'^2 = 1$$

Четыре вектора $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{n}, \mathbf{n}'$ связаны между собой некоторым соотношением, поскольку два из них ($\mathbf{n}, \mathbf{n}'$) являются производными по двум другим ($\mathbf{r}, \mathbf{r}'$) от некоторой функции ψ .

Что касается самой функции ψ , то она удовлетворяет дополнительным условиям - уравнениям (55.2).

Для нахождения соотношения между $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{r}, \mathbf{r}'$ удобно ввести вместо ψ другую величину, на которую бы не налагалось никаких дополнительных условий (т.

е.

которая не должна была бы удовлетворять каким-либо дифференциальным уравнениям).

Это можно сделать следующим образом.

В функции ψ независимыми переменными являются $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, так что для дифференциала $d\psi$ имеем:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}d\mathbf{r} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'}d\mathbf{r}' = -\mathbf{n}d\mathbf{r} + \mathbf{n}'d\mathbf{r}'$$

Произведем теперь преобразование Лежандра к независимым переменным $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ вместо $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, т.

е.

напишем:

$$d\psi = -d(\mathbf{n}\mathbf{r}) + \mathbf{r}d\mathbf{n} + d(\mathbf{n}'\mathbf{r}') - \mathbf{r}'d\mathbf{n}'$$

откуда, вводя функцию

$$\chi = \mathbf{n}'\mathbf{r}' - \mathbf{n}\mathbf{r} - \psi$$

имеем:

$$d\chi = -\mathbf{r}d\mathbf{n} + \mathbf{r}'d\mathbf{n}'$$

Функцию χ называют угловым эйконалом; как видно из (55.5), независимыми переменными в нем являются $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$.

На χ не налагается уже никаких дополнительных условий.

Действительно, уравнения (55.3) представляют собой теперь лишь условия, относящиеся к независимым переменным, показывающие, что из трех компонент n_x, n_y, n_z вектора $\mathbf{n}$ (и аналогично для $\mathbf{n}'$) только две являются независимыми.

Мы будем ниже в качестве независимых переменных пользоваться компонентами n_y, n_z, n'_y, n'_z , и тогда

$$n_x = \sqrt{1 - n_y^2 - n_z^2}, \quad n'_x = \sqrt{1 - n'^2_y - n'^2_z}$$

Подставляя эти выражения в

$$d\chi = -x dn_x - y dn_y - z dn_z + x' dn'_x + y' dn'_y + z' dn'_z$$

находим для дифференциала $d\chi$:

$$d\chi = -\left(y - \frac{n_y}{n_x}x\right) dn_y - \left(z - \frac{n_z}{n_x}x\right) dn_z + \left(y' - \frac{n'_y}{n'_x}x'\right) dn'_y + \left(z' - \frac{n'_z}{n'_x}x'\right) dn'_z$$

Отсюда находим окончательно следующие уравнения:

$$y - \frac{n_y}{n_x}x = -\frac{\partial\chi}{\partial n_y}, \quad z - \frac{n_z}{n_x}x = -\frac{\partial\chi}{\partial n_z}$$

$$y' - \frac{n'_y}{n'_x}x' = \frac{\partial\chi}{\partial n'_y}, \quad z' - \frac{n'_z}{n'_x}x' = \frac{\partial\chi}{\partial n'_z}$$

определяющие искомое общее соотношение между $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{r}, \mathbf{r}'$.

Функция χ характеризует конкретные свойства тел, через которые проходят лучи (или свойства поля - в случае движения заряженных частиц).

При заданных значениях $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ каждая из двух пар уравнений (55.6) изображает собой прямую линию.

Эти прямые являются не чем иным, как лучами до и после прохождения через оптическую систему.

Таким образом, уравнения (55.6) непосредственно определяют ход лучей по обе стороны оптической системы.

20.1.5 Limits of Geometrical Optics

(ух, как же тут всё сыро!!)

Monochromatic Limits of Geometrical Optics

По определению плоской монохроматической волны ее амплитуда везде и всегда одинакова.

Такая волна бесконечна по всем направлениям в пространстве и существует на протяжении всего времени от $-\infty$ до $+\infty$.

Всякая же волна с не везде и не всегда постоянной амплитудой может быть лишь более или менее монохроматической.

Мы займемся теперь выяснением вопроса о степени немонохроматичности волн.

Рассмотрим электромагнитную волну с амплитудой, являющейся в каждой точке пространства функцией времени.

Пусть ω_0 есть некоторая средняя частота волны.

Тогда поле волны (например электрическое) в данной точке имеет вид $\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}$.

Это поле, не являющееся, Конечно, само монохроматическим, можно, разложить на монохроматические компоненты, т.е. в интеграл Фурье.

Амплитуда компоненты этого разложения с частотой ω пропорциональна интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_0(t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt$$

Множитель $e^{i(\omega - \omega_0)t}$ является периодической функцией, среднее значение которой равно нулю.

Если бы $\mathbf{E}_0$ было вообще постоянным, то интеграл был бы в точности равен нулю при всех $\omega \neq \omega_0$.

Если же $\mathbf{E}_0(t)$ переменен, но почти не меняется на протяжении промежутков времени порядка $1/|\omega - \omega_0|$, то интеграл почти равен нулю, тем точнее, чем медленнее меняется $\mathbf{E}_0$.

Для того чтобы интеграл был заметно отличен от нуля, необходимо, чтобы $\mathbf{E}_0(t)$ заметно менялось на протяжении промежутка времени порядка $1/|\omega - \omega_0|$.

Обозначим посредством Δt порядок величины промежутка времени, в течение которого амплитуда волны в данной точке пространства заметно меняется.

Из приведенных соображений следует теперь, что наиболее отличающиеся от ω_0 частоты, входящие в спектральное разложение этой волны с заметными интенсивностями, определяются из условия $1/|\omega - \omega_0| \sim \Delta t$.

Если обозначить посредством $\Delta\omega$ интервал частот (вокруг средней частоты ω_0) в спектральном разложении, то, следовательно, имеет место соотношение $\Delta\omega\Delta t \sim 1$. Мы видим, что действительно волна тем более монохроматична (т.е. $\Delta\omega$ тем меньше), чем больше Δt , т.е. чем медленнее меняется в каждой точке пространства ее амплитуда.

Соотношения, аналогичные (58.1), легко вывести и для волнового вектора.

Пусть $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - порядки величин расстояний вдоль осей x, y, z , на которых заметно меняется амплитуда волны.

В данный момент времени поле волны как функция от координат имеет вид

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}$$

где $\mathbf{k}_0$ - некоторое среднее значение волнового вектора.

Совершенно аналогично выводу (58.1) можно найти интервал $\Delta\mathbf{k}$ значений, имеющих в разложении рассматриваемой волны в интеграл Фурье:

$$\Delta k_x \Delta x \sim 1, \quad \Delta k_y \Delta y \sim 1, \quad \Delta k_z \Delta z \sim 1$$

Рассмотрим, в частности, волну, излучавшуюся в течение некоторого конечного интервала времени.

Обозначим посредством Δt порядок величины этого интервала.

Амплитуда в данной точке пространства во всяком случае заметно изменяется за время Δt , в течение которого волна успеет целиком пройти через эту точку.

На основании соотношения (58.1) мы можем теперь сказать, что «степень немонахроматичности» такой волны $\Delta\omega$ во всяком случае не может быть меньше, чем $1/\Delta t$ (но может, конечно, быть и больше):

$$\Delta\omega \geq \frac{1}{\Delta t}$$

Аналогично, если $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - порядки величины размеров волны в пространстве, то для интервалов значений компонент волнового вектора, входящих в разложение волны, находим:

$$\Delta k_x \geq \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta k_y \geq \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta k_z \geq \frac{1}{\Delta z}$$

Из этих формул следует, что если мы имеем пучок света конечной ширины, то направление распространения света в таком пучке не может быть строго постоянным.

Направляя ось x по направлению (среднему) света в пучке, мы получаем:

$$\theta_y \geq \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}$$

где θ_y - порядок величины отклонения пучка от среднего направления в плоскости xy , λ - длина волны.

С другой стороны, формула (58.5) дает ответ на вопрос о предельной резкости оптических изображений.

Пучок света, все лучи которого согласно геометрической оптике должны были бы пересечься в одной точке, в действительности дает изображение не в виде точки, а в виде некоторого пятна.

Для ширины Δ этого пятна имеем согласно (58.5)

$$\Delta \sim \frac{1}{k\theta} \sim \frac{\lambda}{\theta}$$

где θ - угол раствора пучка.

Эту формулу можно применить не только к изображению, но и к предмету.

Именно, можно утверждать, что при наблюдении исходящего из светящейся точки пучка света эту точку нельзя отличить от тела размера λ/θ .

Соответственно этому формула (58.6) определяет предельную разрешающую силу микроскопа.

Минимальное значение Δ , достигающееся при $\theta \sim 1$, есть λ , в полном согласии с тем, что пределы геометрической оптики определяются длиной волны света.

порядок величины наименьшей ширины светового пучка

Найти порядок величины наименьшей ширины светового пучка, получающегося от параллельного пучка света на расстоянии l от диафрагмы.

Обозначив размер отверстия диафрагмы через d , имеем из (58.5) для угла отклонения лучей («угла дифракции») значение $\sim \lambda/d$, откуда ширина пучка порядка $d + \frac{\lambda}{d} l$.

Наименьшее значение этой величины $\sim \sqrt{\lambda l}$.

20.1.6 Phenomena of Diffraction

введение и постановка задачи

Законы геометрической оптики строго точны лишь в идеальном случае, когда длину волны можно рассматривать как бесконечно малую.

Чем хуже выполнено это условие, тем сильнее проявляются отклонения от геометрической оптики.

Явления, наблюдающиеся в результате этих отклонений, носят название явлений дифракции.

Дифракцию можно наблюдать, например, если на пути распространения света находятся препятствия - непрозрачные тела (будем называть их экранами) произвольной формы или, например,

если свет проходит через отверстия в непрозрачных экранах.

Если бы законы геометрической оптики строго выполнялись, то за экранами находились бы области тени, резко отграниченные от областей, куда свет попадает.

Дифракция же приводит к тому, что вместо резкой границы между светом и тенью получается довольно сложная картина распределения интенсивности света.

Эти явления дифракции тем сильнее выражены,

чем меньше размеры экранов и отверстий в них или чем больше длина волны.

задача теории дифракции заключается в том, чтобы при данном расположении и форме тел (и расположении источников света) определить распределение света, т.

е.

электромагнитное поле во всем пространстве.

Точное разрешение этой задачи возможно только путем решения волнового уравнения с соответствующими граничным и условиями на поверхности тел,

зависящими еще к тому же и от оптических свойств материала.

такое решение обычно представляет большие математические трудности.

однако во многих случаях оказывается достаточным приближенный метод решения задачи о распределении света вблизи границы между светом и тенью.

этот метод применим в случаях слабого отклонения от геометрической оптики.

тем самым предполагается,

во-первых, что все размеры велики по сравнению с длиной волны (это относится как к размерам экранов или отверстий в них, так и к расстояниям от тел до точек испускания и наблюдения света);

во-вторых, рассматриваются лишь небольшие отклонения света от направления лучей, определяемых геометрической оптикой.

Рассмотрим какой-нибудь экран с отверстием, через которое проходит свет от данных источников.

Будем обозначать посредством u любую из компонент поля **Е** или **Н**.

при этом под u мы будем подразумевать поле как функцию только от координат, т.

е.

без множителя $e^{-i\omega t}$, определяющего зависимость от времени.

нашей задачей является определение интенсивности света, т.

е.

поля u в любой точке наблюдения P за экраном.

при приближенном решении этой задачи в случаях, когда отклонения от геометрической оптики малы, можно считать,

что в точках отверстия поле таково, каким оно было бы при отсутствии вообще какого-либо экрана.

другими словами, значения поля здесь те, которые следуют из геометрической оптики.

во всех же точках, находящихся непосредственно за экраном, поле можно положить равным нулю.

при этом, очевидно, свойства самого экрана (материала, из которого он сделан) вообще не играют роли.

очевидно также, что в рассматриваемых случаях для дифракции существенна только форма края отверстия и не существенна форма непрозрачного экрана.

принцип Гюйгенса-Френеля

проведем какую-нибудь поверхность, закрывающую отверстие в экране и ограниченную его краями.

эту поверхность разобьем на участки с площадью df , малые по сравнению с размерами отверстия, но большие по сравнению с длиной волны света.

мы можем тогда рассматривать каждый из этих участков, до которых дошла световая волна, так, как будто бы он сам делается источником световой волны, распространяющейся во все стороны от этого участка.

поле в точке p мы будем рассматривать как результат наложения полей,

исходящих из всех участков df поверхности, закрывающей отверстие (так называемый принцип Гюйгенса).

Поле, создаваемое участком df в точке P , пропорционально значению u поля в самом участке df (напоминаем, что поле $B df$ мы предполагаем таким, каким оно было бы при отсутствии экрана).

Кроме того, оно пропорционально проекции df_n площади df на плоскость, перпендикулярную к направлению $\mathbf{n}$ луча, пришедшего из источника света в df .

Это следует из того, что какой бы формой ни обладал участок df , через него будут проходить одинаковые лучи, если только его проекция df_n будет неизменной, а потому и его действие на поле в точке P будет одинаковым.

Таким образом, поле, создаваемое в точке P участком df , пропорционально $u df_n$.

Далее, надо еще учесть изменение амплитуды и фазы волны при ее распространении от df к точке P .

Закон этого изменения определяется формулой (54.3).

Поэтому $u df_n$ надо умножить еще на $\frac{1}{R} e^{ikR}$ (где R - расстояние от df до P , а k - абсолютная величина волнового вектора света),

и мы находим, что искомое поле равно

$$au \frac{e^{ikR}}{R} df_n$$

где a есть неизвестная пока постоянная.

Полное же поле в точке P , являющееся результатом наложения полей, создаваемых всеми df ,

есть

$$u_P = a \int \frac{u e^{ikR}}{R} df_n,$$

где интеграл распространен по поверхности, ограниченной краем отверстия.

Этот интеграл в рассматриваемом приближении не зависит, Конечно, от формы этой поверхности.

Формула (59.1) применима, очевидно, и к дифракции не от отверстия на экране, а от экрана, вокруг которого свет может свободно распространяться.

В этом случае поверхность интегрирования в (59.1) простирается во все стороны от края экрана.

Для определения постоянной a рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x ; волновые поверхности параллельны Плоскости yz .

Пусть u есть значение поля в плоскости yz .

Тогда В точке P , которую мы выберем на оси x , Поле равно $u_P = u e^{ikx}$.

С другой стороны, поле в точке P можно определить исходя из формулы (59.1), выбрав в качестве поверхности интегрирования, например, Плоскость yz .

При этом ввиду малости угла дифракции в интеграле

существенны только точки плоскости yz , близкие к началу координат, Т.

е.

точки, в которых $y, z \ll x$ (x - координата точки P).

ТоГДа

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx x + \frac{y^2 + z^2}{2x}$$

и (59.1) даст:

$$u_P = au \frac{e^{ikx}}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{y^2}{2x}} dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{z^2}{2x}} dz$$

где u - постоянная (поле в плоскости yz); в множителе $1/R$ можно положить $R \approx x = \text{const}$. Стоящие здесь интегралы подстановкой $y = \xi \sqrt{2x/k}$ приводятся к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \xi^2 d\xi + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \xi^2 d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + i)$$

и мы получаем: $u_P = aue^{ikx\frac{2i\pi}{k}}$.

С другой стороны, $u_P = ue^{ikx}$ и, следовательно, $a = \frac{k}{2\pi i}$.

Подставляя это в (59.1), находим окончательное решение поставленной задачи в виде

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n$$

При выводе формулы (59.

2) источник света предполагался,

по существу,

точечным,

а самый свет - строго монохроматическим.

Случай реального протяженного источника,

испускающего некогерентный свет,

не нуждается,

в особом исследовании.

Вследствие полной независимости (некогерентности) света,

испускаемого различными точками источника,

и некогерентности различных спектральных компонент испускаемого света суммарный результат дифракции сводится просто к сумме распределений интенсивности,

получающихся от дифракции каждой из независимых компонент света.

изменение фазы волны при прохождении луча через каустику

(как кстати это проверить? почему вообще это происходит?)

Применим формулу

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n$$

для решения вопроса об изменении фазы при прохождении луча через точку его касания с каустикой.

Выберем в качестве поверхности интегрирования в (59.

2) Какую-либо волновую поверхность и будем определять поле u_P в точке P ,

лежащей на некотором данном луче на расстоянии x от точки его пересечения с выбранной волновой поверхностью (эту точку выберем в качестве начала координат O ,

а в качестве плоскости yz - плоскость,

Касательную к волновой поверхности в точке O).

При интегрировании в (59.

2) существенен только небольшой участок волновой поверхности вблизи точки O .

Если плоскости xy и xz выбраны совпадающими с главными плоскостями кривизны волновой поверхности в точке O ,

то вблизи этой точки уравнение поверхности есть

$$X = \frac{y^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2}$$

где R_1 и R_2 - радиусы кривизны.

Расстояние же R от точки волновой поверхности с координатами X, y, z до точки P с координатами $x, 0, 0$ есть

$$R = \sqrt{(x-X)^2 + y^2 + z^2} \approx x + \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{z^2}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Вдоль волновой поверхности поле u можно считать постоянным; то же касается множителя $1/R$.

Поскольку мы интересуемся только изменением фазы волны, то коэффициент опускаем и пишем просто:

$$u_P \sim \frac{1}{i} \int e^{ikR} df_n \approx \frac{e^{ikx}}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} \right)} dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{z^2}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2} \right)} dz$$

Центры кривизны волновой поверхности лежат на рассматриваемом луче в точках $x = R_1$ и $x = R_2$; это и есть точки касания

лучом обеих каустик.

Пусть $R_2 < R_1$. При $x < R_2$ коэффициенты при i в показателях подынтегральных выражений в обоих интегралах положительны, и каждый из этих интегралов содержит множитель $1+i$.

Поэтому на участке луча до касания первой каустики имеем $u_P \sim e^{ikx}$. При $R_2 < x < R_1$, т.

е.

на отрезке луча между двумя точками касания, интеграл по dy содержит множитель $1+i$, а интеграл по dz - множитель $1-i$, так что их произведение вовсе не содержит i .

Таким образом имеем здесь: $u_P \sim -ie^{ikx} = e^{i(kx-\pi/2)}$, т.

е.

при прохождении луча вблизи первой каустики фаза дополнительно меняется на $-\pi/2$.

Наконец, при $x > R_1$ имеем $u_P \sim -e^{ikx} = e^{i(kx-\pi)}$, т.

е.

при прохождении вблизи второй каустики фаза еще раз меняется на $-\pi/2$.

интенсивность света вблизи каустики

Определим распределение интенсивности света вблизи точки касания луча с каустикой. Для решения задачи пользуемся формулой (59.

2), производя в ней интегрирование по какой-либо волновой поверхности, достаточно удаленной от рассматриваемой точки касания луча с каустикой.

На рис.

10 ab есть сечение этой волновой поверхности, а $a'b'$ - сечение каустики; $a'b'$ есть эволюта кривой ab .

Мы интересуемся распределением интенсивности вблизи точки O касания луча QO с каустикой; длина D отрезка QO луча предполагается достаточно большой.

Посредством x обозначим расстояние от точки O вдоль нормали к каустике, причем будем считать положительными значения x для точек, лежащих на нормали по направлению к центру кривизны.

Подынтегральное выражение в (59.2) есть функция от расстояния R от произвольной точки Q' на волновой поверхности до точки P .

По известному свойству эволюты сумма длины отрезка $Q'O'$ касательной в точке O' , и длины дуги OO' равна длине QO касательной в точке O .

Для близких друг к другу точек O и O' имеем $OO' = \theta\rho$ (ρ - радиус кривизны каустики в точке O).

Поэтому длина $Q'O' = D - \theta\rho$.

Расстояние же $Q'O$ (по прямой) равно приближенно (угол θ предполагается малым):

$$Q'O \approx Q'O' + \rho \sin \theta = D - \theta \rho + \rho \sin \theta \approx D - \frac{\rho \theta^3}{6}$$

Наконец, расстояние $R = Q'P$ равно $R \approx Q'O - x \sin \theta \approx Q'O - x\theta$, т.

е.

$$R \approx D - x\theta - \frac{1}{6}\rho\theta^3$$

Подставляя это выражение в (59.2), найдем:

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx\theta - \frac{ik\rho}{6}\theta^3} d\theta = 2 \int_0^{\infty} \cos \left(kx\theta + \frac{k\rho}{6}\theta^3 \right) d\theta$$

(медленно меняющийся множитель $1/D$ в подынтегральном выражении не существен по сравнению с экспоненциальным множителем, и мы считаем его постоянным).

Вводя новую переменную интегрирования $\xi = (k\rho/2)^{1/3}\theta$, получим:

$$u_P \sim \Phi \left(x \sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}} \right)$$

где $\Phi(t)$ есть так называемая функция Эйри.

Для интенсивности $I \sim |u_P|^2$ НапиШем:

$$I = 2A \left(\frac{2k^2}{\rho} \right)^{1/6} \Phi^2 \left(x \sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}} \right)$$

(о выборе постоянного множителя см. ниже).

При больших положительных значениях x имеем отсюда асимптотическую формулу

$$I \approx \frac{A}{2\sqrt{x}} \exp \left(-\frac{4x^{3/2}}{3} \sqrt{\frac{2k^2}{\rho}} \right)$$

т.

е.

интенсивность экспоненциально убывает (область «тени»).

При больших же по абсолютной величине отрицательных значениях x имеем:

$$I \approx \frac{2A}{\sqrt{-x}} \sin^2 \left[\frac{2(-x)^{3/2}}{3} \sqrt{\frac{2k^2}{\rho}} + \frac{\pi}{4} \right]$$

т.

е.

интенсивность быстро осциллирует; усредненное по этим осцилляциям Значение равно

$$\bar{I} = \frac{A}{\sqrt{-x}}$$

Отсюда выясняется смысл постоянной A - она определяет интенсивность вдали от каустики,

которая получилась бы из геометрической оптики без учета явлений дифракции.

Наибольшее значение, равное 0,949, функция $\Phi(t)$ имеет при $t = -1,02$; соответственно этому наибольшая интенсивность достигается при $x(2k^2/\rho)^{1/3} = -1,02$ и равна

$$I = 2,03Ak^{1/3}\rho^{-1/6}$$

(в самой же точке касания луча с каустикой, $x = 0$, имеем $I = 0,89Ak^{1/3}\rho^{-1/6}$, так как $\Phi(0) = 0,629$).

Таким образом, вблизи каустики интенсивность пропорциональна $k^{1/3}$,

т.

е.

$\lambda^{-1/3}$ (λ - длина волны).

При $\lambda \rightarrow 0$ интенсивность, как и следовало (ср.

\$54), стремится к бесконечности.

Теперь обсудим, зачем это нужно???

где используется это понимание???

тут можно подумать еще про это, пока совершенно не понимаю.

связь принципа Гюйгенса с интегралом по траекториям

обсудим это отдельно.

тут также сложно то, что интеграл по траекториям для поля мы ведь пишем, а не для частицы, так что пока я просто не знаю.

Из принципа Г-Ф следует формула:

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n$$

А в интеграле по траекториям имеем формулу:

смысл происходящего в методе Гюйгенса-Френеля

как вообще так получается, что волна, идущая в одну сторону дает вклад в другую?

почему он работает?

как связан с волновым уравнением?

то есть они оба - решения задачи, но почему?

обсудим тут это.

точное решение граничной задачи

обсудим вкратце, как точно решать наше волновое уравнение, чтобы в этом ориентироваться.

(тут отсылка к УМФ, где такие задачи отдельно обсуждаются. пока не до этого, не разобрался)

20.1.7 Fresnel Diffraction

Theory

если источник света и точка p , в которой мы ищем интенсивность света, находятся на конечном расстоянии от экрана, то для определения интенсивности в точке p играет роль лишь небольшой участок волновой поверхности, по которой происходит интегрирование в (59.2), - участок, лежащий вблизи прямой, соединяющей источник с точкой p .

действительно, поскольку отклонения от геометрической оптики слабы, то интенсивность света, приходящего в P из различных точек волновой поверхности, очень быстро падает по мере удаления от указанной прямой.

дифракционные явления, в которых играют роль лишь небольшие участки волновой поверхности, носят название дифракции Френеля.

Рассмотрим дифракцию Френеля от какого-нибудь экрана.

Благодаря указанному свойству при этом играет роль (при заданной точке P) только небольшой участок края экрана.

Но на достаточно малых участках край экрана можно всегда считать прямолинейным.

Ниже под краем экрана будет поэтому подразумеваться именно такой небольшой прямолинейный участок.

Выберем в качестве плоскости xy Плоскость, проходящую через Источник света Q (рис.

11) и через линию края экрана.

Перпендикулярную к ней плоскость xz выбираем так, чтобы она прошла через точку Q и точку наблюдения P , в которой мы ищем значение интенсивности света.

Наконец, начало координат O выбираем на линии края экрана, После чего положение всех трех осей вполне определено.

Расстояние от источника света Q до начала координат пусть будет D_q . x -Координату точки наблюдения P обозначим как D_p , а ее z -Координату, т.

е.

расстояние до плоскости xy , - как d .

Согласно геометрической оптике свет мог бы попасть только в точки, лежащие над Плоскостью xy ; область же под плоскостью xy есть область, где согласно геометрической оптике была бы тень (область геометрической тени).

Мы определим теперь распределение интенсивности света за экраном вблизи границы геометрической тени, т.

е.

при малых (по сравнению с D_p и D_q) значениях d .

Отрицательное d означает, что точка P находится в области геометрической тени.

В качестве поверхности интегрирования в (59.2) выберем полуПлоскость, проходящую через линию края экрана перпендикулярно к плоскости xy .

Координаты x и y точек этой поверхности связаны друг с другом соотношением $x = y \operatorname{tg} \alpha$ (α - угол между линией края экрана и осью y), а координата z положительна.

Поле волны, исходящей из источника Q , на расстоянии R_q от него пропорционально множителю $\exp(ikR_q)$.

Поэтому поле u на поверхности интегрирования пропорционально

$$u \sim \exp \left[ik \sqrt{y^2 + z^2 + (D_q + y \operatorname{tg} \alpha)^2} \right]$$

В интеграле (59.2) для R надо теперь подставить

$$R = \sqrt{y^2 + (z - d)^2 + (D_p - y \operatorname{tg} \alpha)^2}$$

В подынтегральном выражении медленно изменяющиеся множители не существенны по сравнению с экспоненциальным.

Поэтому мы можем считать $1/R$ постоянным, а вместо df_n писать $dydz$.

Мы находим тогда.

что поле в точке P

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \exp \left[ik \sqrt{(D_q + y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(D_p - y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + (z - d)^2} \right] dy dz$$

Как мы уже говорили, в точку P попадает свет главным образом из точек Плоскости интегрирования, близких к O .

Поэтому в интеграле (60.1) играют роль малые (по сравнению с D_q и D_p) значения y и z .

Мы можем написать:

$$\sqrt{(D_q + y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + z^2} \approx D_q + \frac{y^2 + z^2}{2D_q} + y \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sqrt{(D_p - y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + (z - d)^2} \approx D_p + \frac{y^2 + (z - d)^2}{2D_p} - y \operatorname{tg} \alpha$$

Подставим это в (60.1).

Поскольку нас интересует поле только как функция от расстояния d , то постоянный множитель $\exp[ik(D_p + D_q)]$ опускаем; интеграл по dy тоже дает выражение, не содержащее d , которое мы также опустим.

Мы находим тогда:

$$u_P \sim \int_0^{\infty} \exp \left[ik \left(\frac{1}{2D_q} z^2 + \frac{1}{2D_p} (z - d)^2 \right) \right] dz$$

Это выражение можно написать и в таком виде:

$$u_P \sim \exp \left[ik \frac{d^2}{2(D_p + D_q)} \right] \int_0^{\infty} \exp \left[ik \frac{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q} \right) z - \frac{d}{D_p} \right]^2}{\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}} \right] dz. \quad (60.2)$$

Интенсивность света определяется квадратом поля, т.

е.

квадратом модуля $|u_P|^2$.

Поэтому для нахождения интенсивности стоящий перед интегралом множитель не существен, так как при умножении на сопряженное выражение он дает единицу.

Очевидной подстановкой интеграл приводится к виду

$$u_P \sim \int_{-w}^{\infty} e^{in^2} d\eta$$

где

$$w = d \sqrt{\frac{kD_q}{2D_p(D_q + D_p)}}$$

Таким образом, интенсивность I в точке P равна

$$I = \frac{I_0}{2} \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-w}^{\infty} e^{in^2} d\eta \right|^2 = \frac{I_0}{2} \left[\left(C(w^2) + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(S(w^2) + \frac{1}{2} \right)^2 \right]$$

где

$$C(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \cos \eta^2 d\eta, \quad S(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \sin \eta^2 d\eta$$

- так называемые интегралы Френеля.

Формула (60.5) решает поставленную задачу, определяя интенсивность света как функцию от d

I_0 есть интенсивность в освещенной области в точках, достаточно удаленных от края тени, т.е.

при $w \gg 1$ (в пределе $w \rightarrow \infty$ имеем $C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}$)

Области геометрической тени соответствуют отрицательные w .

Легко выяснить асимптотический вид функции $I(w)$ при больших по абсолютной величине отрицательных значениях w .

Для этого поступим следующим образом.

Интегрируя по частям, имеем:

$$\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta = -\frac{1}{2i|w|} e^{iw^2} + \frac{1}{2i} \int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2} \frac{d\eta}{\eta^2}$$

Интегрируя в правой части равенства еще раз по частям и продолжая этот процесс, получим ряд по степеням $1/|w|$:

$$\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta = e^{iw^2} \left(-\frac{1}{2i|w|} + \frac{1}{4|w|^3} - \dots \right)$$

Хотя бесконечный ряд такого вида и не является сходящимся, но ввиду того, что при больших $|w|$ величина его последовательных членов быстро падает, уже первый его член дает хорошее представление стоящей слева функции при достаточно больших $|w|$ (ряды такого рода называются асимптотическими).

Таким образом, для интенсивности $I(w)$ (60.5) получим следующую асимптотическую формулу, пригодную для больших отрицательных значений w :

$$I = \frac{I_0}{4\pi w^2}$$

Мы видим, что в области геометрической тени, вдали от ее края интенсивность стремится к нулю обратно пропорционально квадрату расстояния от края тени.

Рассмотрим теперь положительные значения w , т.

е.

область выше плоскости xy .

Пишем:

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta^2} d\eta - \int_{-\infty}^{-w} e^{i\eta^2} d\eta = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_w^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta$$

При достаточно больших w можно воспользоваться асимптотическим представлением стоящего в правой части равенства интеграла, и мы будем иметь

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \approx (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2iw} e^{iw^2}$$

Подставляя это выражение в (60.5), получим:

$$I = I_0 \left[1 + \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{\sin \left(w^2 - \frac{\pi}{4} \right)}{w} \right]$$

Таким образом, в освещенной области, вдали от края тени, интенсивность имеет неограниченный ряд максимумов и минимумов, так что отношение I/I_0 колеблется в обе стороны от единицы.

Размах этих Колебаний уменьшается с ростом w обратно пропорционально расстоянию от края геометрической тени, а места максимумов и минимумов постепенно сближаются друг с другом.

При небольших w функция $I(w)$ имеет качественно тот же характер (рис. 12).

В области геометрической тени интенсивность спадает монотонно при удалении от границы тени (на самой этой границе $I/I_0 = \frac{1}{4}$).

При положительных w интенсивность имеет чередующиеся максимумы и минимумы.

В первом, наибольшем из максимумов, $I/I_0 = 1,37$

20.1.8 Fraunhofer Diffraction

Theory

Особый интерес для физических применений имеют дифракционные явления, возникающие при падении на экраны плоскопараллельного пучка лучей.

В результате дифракции пучок теряет параллельность и появляется свет, распространяющийся в направлениях, отличных от первоначального.

Поставим задачу об определении распределения по направлениям интенсивности дифрагированного света на больших расстояниях позади экрана (такая постановка вопроса отвечает так называемой дифракции Фраунгофера).

При этом мы снова ограничиваемся случаем малых отклонений от геометрической оптики, т.

е.

предполагаем малыми углы отклонения от первоначального направления лучей (углы дифракции).

Поставленную задачу можно было бы решить, исходя из общей формулы (59.2) переходя в ней к пределу бесконечно удаленных

от экрана источника света и точки наблюдения.

Характерной особенностью рассматриваемого случая является при этом то обстоятельство, что в интеграле, определяющем интенсивность дифрагированного света, существенна вся волновая поверхность, по которой производится интегрирование (в противоположность случаю дифракции Френеля, в котором играли роль лишь участки волновой поверхности вблизи края экранов

Проще,

рассмотреть поставленный вопрос заново, не прибегая к помощи общей формулы (59.2).

Обозначим посредством u_0 то поле позади экранов, которое имелось бы при строгом соблюдении геометрической оптики.

Оно представляет собой плоскую волну, в поперечном сечении которой,

имеются участки (отвечающие «тени» непрозрачных экранов) с равным нулю полем.

Обозначим посредством S ту часть плоскости поперечного сечения, на которой поле u_0 отлично от нуля; поскольку каждая такая плоскость является волновой поверхностью плоской волны, то $u_0 = \text{const}$ вдоль всей площади S .

В действительности, волна с ограниченной площадью поперечного сечения не может быть строго плоской (см. §58).

В ее пространственное разложение Фурье входят компоненты с волновыми векторами различных направлений, что и является источником дифракции.

Разложим поле u_0 в двумерный интеграл Фурье по координатам y, z в плоскости поперечного сечения волны.

Для компонент Фурье имеем:

$$u_{\mathbf{q}} = \iint_S u_0 e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} dy dz$$

где $\mathbf{q}$ - постоянный вектор в плоскости yz ; интегрирование производится фактически лишь по той части S плоскости yz , на которой u_0 отлично от нуля.

Если $\mathbf{k}$ есть волновой вектор падающей волны, то компоненте поля $u_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ отвечает волновой вектор $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$.

Таким образом, вектор $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ определяет изменение волнового вектора света при дифракции.

Поскольку абсолютные значения $k = k' = \omega/c$,

то малые углы дифракции θ_y, θ_z в плоскостях xy и xz , связаны с составляющими вектора $\mathbf{q}$ соотношениями

$$q_y = \frac{\omega}{c} \theta_y, \quad q_z = \frac{\omega}{c} \theta_z$$

При малом отклонении от геометрической оптики компоненты разложения поля u_0 можно считать совпадающими с компонентами истинного поля дифрагированного света, так что формула (61.1) решает поставленную задачу.

Распределение интенсивности дифрагированного света определяется квадратом $|u_{\mathbf{q}}|^2$ как функцией вектора $\mathbf{q}$.

Количественная связь с интенсивностью падающего света устанавливается формулой

$$\iint u_0^2 dy dz = \iint |u_{\mathbf{q}}|^2 \frac{dq_y dq_z}{(2\pi)^2}$$

(ср. (49.8)).

Отсюда видно, что относительная интенсивность дифракции в элемент телесного угла $do = d\theta_y d\theta_z$ дается величиной

$$\frac{|u_{\mathbf{q}}|^2}{u_0^2} \frac{dq_y dq_z}{(2\pi)^2} = \left(\frac{\omega}{2\pi c} \right)^2 \left| \frac{u_{\mathbf{q}}}{u_0} \right|^2 do$$

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера от двух экранов, являющихся «дополнительными» по отношению друг к другу: первый экран имеет отверстия там, где второй непрозрачен, и наоборот.

Обозначим посредством $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ поле света, дифрагировавшего на этих экранах (при одинаковом в обоих случаях падающем свете).

Поскольку $u_{\mathbf{q}}^{(1)}$

и $u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ выражаются интегралами (61.1), взятыми по площадям отверстий в экранах, а отверстия в обоих экранах дополняют друг друга до целой плоскости, то сумма $u_{\mathbf{q}}^{(1)} + u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ есть компонента Фурье поля, получающегося при отсутствии экранов, т.е. просто падающего света.

Но падающий свет представляет собой строго плоскую волну с определенным направлением распространения, поэтому $u_{\mathbf{q}}^{(1)} + u_{\mathbf{q}}^{(2)} = 0$ при всяком отличном от нуля $\mathbf{q}$.

Таким образом, имеем $u_{\mathbf{q}}^{(1)} = -u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ ИЛИ, для соответствующих интенсивностей,

$$|u_{\mathbf{q}}^{(1)}|^2 = |u_{\mathbf{q}}^{(2)}|^2 \quad \text{при } \mathbf{q} \neq 0$$

Это значит, что дополнительные экраны дают одинаковые распределения интенсивности дифрагированного света (так называемый принцип Бабинне).

Упомянем здесь об одном интересном следствии принципа Бабинне.

Рассмотрим какое-нибудь черное тело, т.

е.

тело, полностью поглощающее весь падающий на него свет.

Согласно геометрической оптике при освещении такого тела за ним образовалась бы область геометрической тени, площадь сечения которой была бы равна площади сечения тела в направлении, перпендикулярном к направлению падения света.

Наличие дифракции приведет,

к частичному отклонению света

от первоначального направления.

В результате на большом расстоянии позади тела тени не будет, а наряду со светом, распространяющимся в первоначальном направлении, будет также и некоторое количество света, распространяющегося под небольшими углами к своему первоначальному направлению.

Легко определить интенсивность этого, как говорят, рассеянного света.

Для этого замечаем, что согласно принципу Бабинне количество света, отклонившегося вследствие дифракции на рассматриваемом теле, равно количеству света, отклоняющегося при дифракции от прорезанного в непрозрачном экране отверстия, форма и площадь которого совпадают с формой и площадью поперечного сечения тела.

Но при дифракции Фраунгофера от отверстия происходит отклонение всего проходящего через отверстие света.

Отсюда следует, что полное количество света, рассеянного на черном теле, равно количеству света, падающего на его поверхность и поглощаемого им.

простейшая дифракция Фраунгофера на бесконечной параллельной щели

Определить дифракцию Фраунгофера при нормальном падении плоской волны на бесконечную щель (ширины $2a$) с параллельными краями, прорезанную в непрозрачном экране.

Выберем плоскость щели в качестве плоскости yz с осью z вдоль длины щели (рис. 13 представляет разрез экрана).

При нормальном падении света плоскость щели является одной из волновых поверхностей, которую мы возьмем в качестве поверхности интегрирования в (61.1).

Ввиду бесконечности длины щели свет отклоняется только в плоскости xy (интеграл (61.1) обращается в нуль при $q_z \neq 0$).

Поэтому разложение поля u_0 должно производиться лишь по координате y :

$$u_q = u_0 \int_{-a}^a e^{-iqy} dy = \frac{2u_0}{q} \sin qa$$

Интенсивность дифрагированного света в интервале углов $d\theta$ есть

$$dI = \frac{I_0}{2a} \left| \frac{u_q}{u_0} \right|^2 \frac{dq}{2\pi} = \frac{I_0}{\pi a k} \frac{\sin^2 ka\theta}{\theta^2} d\theta$$

где $k = \omega/c$, а I_0 - полная интенсивность света, падающего на щель.

$dI/d\theta$ как функция угла дифракция имеет вид, изображенный на рис.

14.

При увеличении θ в ту или другую сторону от $\theta = 0$ интенсивность пробегает ряд максимумов с быстро убывающей высотой.

Максимумы разделены в точках $\theta = n\pi/ka$ (n - целые числа) минимумами, в которых интенсивность обращается в нуль.

простейшая дифракция Фраунгофера на решетке

То же при дифракции от решетки, то есть плоского экрана с прорезанным в нем рядом одинаковых параллельных щелей (ширина щели $2a$, ширина непрозрачного экрана между соседними щелями $2b$, число щелей N).

Выберем плоскость решетки в качестве плоскости yz с осью z , параллельной щелям.

Дифракция снова происходит лишь в плоскости xy , и интегрирование в (61.1) дает:

$$u_q = u'_q \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2inqd} = u'_q \frac{1 - e^{-2iNqd}}{1 - e^{-2iqd}}$$

где $d = a + b$, а u'_q есть результат интегрирования по одной щели.

Воспользовавшись результатами задачи 1, получим:

$$dI = \frac{I_0 a}{N\pi} \left(\frac{\sin Nqd}{\sin qd} \right)^2 \left(\frac{\sin qa}{qa} \right)^2 dq = \frac{I_0}{N\pi a k} \left(\frac{\sin Nk\theta d}{\sin k\theta d} \right)^2 \frac{\sin^2 ka\theta}{\theta^2} d\theta$$

(I_0 — полная интенсивность света, проходящего через все щели).

При большом числе щелей ($N \rightarrow \infty$) эту формулу можно написать в ином виде.

При значениях $q = \pi n/d$ (n - целое число) dI/dq имеет максимумы; вблизи такого максимума (т.

е.

при $qd = n\pi + \varepsilon$, ε мало)

$$dI = I_0 a \left(\frac{\sin qa}{qa} \right)^2 \frac{\sin^2 N\varepsilon}{\pi N\varepsilon^2} d\varepsilon$$

Но при $N \rightarrow \infty$ имеет место формула ¹⁾

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 Nx}{\pi Nx^2} = \delta(x)$$

Поэтому вблизи каждого максимума имеем:

$$dI = I_0 \frac{a}{d} \left(\frac{\sin qa}{qa} \right)^2 \delta(\varepsilon) d\varepsilon$$

т.

е.

максимумы обладают, в пределе, бесконечно малой шириной, а полная интенсивность света в n -м максимуме есть

$$I^{(n)} = I_0 \frac{d}{\pi^2 a} \frac{\sin^2(n\pi a/d)}{n^2}$$

распределение интенсивности по направлениям на круглом отверстии радиуса a дается Бесселями

Определить распределение интенсивности по направлениям при дифракции света, падающего в нормальном направлении на круглое отверстие радиуса a .

Введем цилиндрические координаты z, r, φ с осью z , проходящей через центр отверстия перпендикулярно к его плоскости.

Очевидно, что дифракция симметрична относительно оси z , так что вектор q имеет лишь радиальную компоненту $q_r = q = k\theta$.

Отсчитывая угол φ от направления q и интегрируя в (61.1) по плоскости отверстия, находим:

$$u_q = u_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-iqr \cos \varphi} r d\varphi dr = 2\pi u_0 \int_0^a J_0(qr) r dr$$

где J_0 - функция Бесселя нулевого порядка.

С помощью известной формулы

$$\int_0^a J_0(qr) r dr = \frac{a}{q} J_1(aq)$$

имеем отсюда:

$$u_q = \frac{2\pi u_0 a}{q} J_1(aq)$$

и согласно (61.4) находим окончательно интенсивность света, дифрагировавшего в элемент телесного угла d :

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(ak\theta)}{\pi\theta^2} d\theta$$

где I_0 - полная интенсивность света, падающего на отверстие.

20.2 Optics: Other Well-known Properties and Models

Приведем все отсылки к другим теориям по оптике.

(все остальное и это подробно - в записи про оптику, тут лишь суть)

20.2.1 Overview of Typical Phenomena of Optics

(поймем тут, что вообще в записи по оптике, тоже очень полезно для введения, думаю.)

появление квантовой оптики

(мб напишу, как к ней перейти, пока не особо в этом есть потребность.)

20.2.2 Thin beams of rays (???)

(говно тема, так что вдали, мб поразбираю, но куда правильнее плюнуть на нее)

обзор и мотивация

Theory

При рассмотрении прохождения пучков лучей через оптические системы особый интерес представляют пучки, все лучи которых пересекаются в одной точке (так называемые гомоцентрические пучки).

Гомоцентрический пучок лучей после прохождения через оптическую систему, вообще говоря, перестает быть гомоцентрическим, т.

е.

после прохождения через тела лучи не собираются вновь в какойнибудь одной точке.

Только в особых случаях лучи, исходящие из светящейся точки, после прохождения через оптическую систему вновь 1).

пересекаются все в одной точке - изображении светящейся точки

Можно показать (см.

§ 57), что единственный случай, когда все гомоцентрические пучки остаются после прохождения через оптическую систему строго гомоцентрическими, есть тождественное отображение, т.

е.

случай, когда изображение отличается от предмета только его переносом, поворотом или зеркальным отражением как целого.

Таким образом, никакая оптическая система не может дать вполне резкое изображение предмета (обладающего конечными размерами), за исключением только тривиального случая тождественного изображения 2).

Возможно лишь приближенное, не вполне резкое осуществление нетождественного изображения протяженных предметов.

Наиболее важным случаем приближенного перехода гомоцентрических пучков в гомоцентрические же являются достаточно тонкие пучки (т.

е.

пучки с малым углом раствора), идущие вблизи определенной (для данной оптической системы) линии.

Эта линия называется оптической осью системы.

Необходимо при этом отметить, что даже бесконечно узкие пучки лучей (в трехмерном пространстве) в общем случае не являются гомоцентрическими; мы видели (рис.

7), что и в таком пучке различные лучи пересекаются в различных точках (это явление называется астигматизмом).

Исключение представляют те точки волновой поверхности, в которых оба ее главных радиуса кривизны равны друг другу, - вблизи такой точки малый участок поверхности можно рассматривать как сферический и соответствующий тонкий пучок лучей является гомоцентрическим.

Будем рассматривать оптические системы, обладающие аксиальной симметрией 3).

Ось симметрии такой системы является в то же время ее оптической осью.

Действительно, волновая поверхность пучка

лучей, идущего вдоль этой оси, тоже имеет аксиальную симметрию; Поверхности же вращения имеют в точках своего пересечения с осью симметрии два равных друг другу радиуса кривизны.

Поэтому тонкий пучок, идущий в этом направлении, остается гомоцентрическим.

Для нахождения общих количественных соотношений, определяющих отображения с помощью тонких пучков, проходящих через аксиально-симметричные оптические системы, воспользуемся уравнениями (55.6), определив предварительно вид функции χ в рассматриваемом случае.

Поскольку пучки лучей тонкие и идут вблизи оптической оси, то векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ для каждого пучка направлены почти вдоль этой оси.

Если выбрать оптическую ось в качестве оси x , то компоненты n_y, n_z, n'_y, n'_z будут малы по сравнению с единицей.

Что касается Компонент n_x, n'_x , то $n_x \approx 1$, а n'_x может быть приближенно равным $+1$ или -1 .

В первом случае лучи продолжают идти почти в прежнем направлении, попадая в пространство по другую сторону оптической системы, которую в этом случае называют линзой.

Во втором случае лучи изменяют направление на почти противоположное; такая оптическая система называется зеркалом.

Воспользовавшись малостью n_y, n_z, n'_y, n'_z , разложим угловой эйконал $\chi(n_y, n_z, n'_y, n'_z)$ в ряд и ограничимся первыми членами.

В силу аксиальной симметрии всей системы χ должно быть инвариантно по отношению к поворотам системы координат вокруг оптической оси.

Отсюда видно, что членов первого порядка, пропорциональных первым степеням y и z - компонент векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$, в разложении χ не может быть, - эти члены не обладали бы требуемой инвариантностью.

Из членов второго порядка требуемым свойством обладают квадраты $\mathbf{n}^2, \mathbf{n}'^2$ и скалярное произведение $\mathbf{nn}'$.

Таким образом, с точностью до членов второго порядка угловой эйконал для аксиально-симметричной оптической системы имеет вид

$$\chi = \text{const} + \frac{g}{2} (n_y^2 + n_z^2) + f (n_y n'_y + n_z n'_z) + \frac{h}{2} (n_y'^2 + n_z'^2)$$

где f, g, h - постоянные.

Мы будем рассматривать сейчас для определенности случай линзы, В связи с чем положим $n'_x \approx 1$; для зеркал, как будет ниже указано, все формулы имеют аналогичный вид.

Подставляя теперь выражение (56.1) в общие уравнения (55.6), находим:

$$\begin{aligned} n_y(x - g) - f n'_y &= y, & f n_y + n'_y(x' + h) &= y' \\ n_z(x - g) - f n'_z &= z, & f n_z + n'_z(x' + h) &= z' \end{aligned}$$

Рассмотрим гомоцентрический пучок, исходящий из точки x, y, z ; точка x', y', z' пусть будет той, в которой пересекаются все лучи

пучка после прохождения через линзу.

Если бы первая и вторая пары уравнений (56.2) были независимы, то эти четыре уравнения при заданных x, y, z, x', y', z' определили бы одну определенную систему значений n_y, n_z, n'_y, n'_z , т.

е.

всего только один из лучей, выходящих из точки x, y, z , прошел бы через точку x', y', z' .

Для того чтобы все лучи, выходящие из x, y, z , прошли через x', y', z' , необходимо, следовательно, чтобы уравнения (56.2) не были независимы, т.

е.

чтобы одна пара этих уравнений была следствием другой.

Необходимым для такой зависимости условием является, очевидно, пропорциональность Коэффициентов одной пары уравнений коэффициентам другой пары.

Таким образом, должно быть

$$\frac{x - g}{f} = -\frac{f}{x' + h} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

в частности,

$$(x - g)(x' + h) = -f^2$$

Полученные уравнения определяют искомую зависимость координат точки изображения от координат предмета при отображении с помощью тонких пучков.

Точки $x = g, x' = -h$ на оптической оси называются главными фокусами оптической системы.

Рассмотрим пучки лучей, параллельных Оптической оси.

Точка испускания такого луча находится, очевидно, в бесконечности на Оптической оси, т.

е.

$$x = \infty.$$

Из (56.3) Видно, что В этом случае $x' = -h$.

Таким образом, параллельный пучок лучей после прохождения через оптическую систему пересекается в главном фокусе.

Наоборот, пучок лучей, исходящий из главного фокуса, становится после прохождения через систему параллельным.

В уравнениях (56.3) координаты x и x' отсчитываются от одного и того же начала координат, лежащего на оптической оси.

Удобнее,

отсчитывать координаты предмета и изображения от разных начал координат, выбрав их соответственно в главных фокусах.

В качестве положительного направления отсчета координат выберем направление от соответствующего фокуса в сторону, направленную по ходу луча.

Обозначая новые координаты предмета и изображения большими буквами, имеем:

$$X = x - g, \quad X' = x' + h, \quad Y = y, \quad Y' = y', \quad Z = z, \quad Z' = z'$$

Уравнения отображения (56.3) и (56.4) принимают в новых обозначениях вид

$$XX' = -f^2$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = \frac{f}{X} = -\frac{X'}{f}$$

Величину f называют главным фокусным расстоянием системы.

Отношение Y'/Y называется боковым увеличением.

Что касается продольного увеличения, то, поскольку координаты не просто пропорциональны друг другу, его следует писать в дифференциальном виде, сравнивая элемент длины предмета (в направлении оси) с элементом длины изображения.

Из (56.5) пишем для продольного увеличения:

$$\left| \frac{dX'}{dX} \right| = \frac{f^2}{X^2} = \left(\frac{Y'}{Y} \right)^2$$

Мы видим отсюда, что даже для бесконечно малых предметов нельзя получить геометрически подобного изображения.

Продольное увеличение никогда не равно поперечному (за исключением тривиального случая тождественного отображения).

Пучок, вышедший из точки $X = f$ на оптической оси, пересекается вновь в точке $X' = -f$ на той же оси; эти две точки называются главными.

Из уравнений (56.2) ($n_y X - f n'_y = Y$, $n_z X - f n'_z = Z$) видно, что в этом случае ($X = f$, $Y = Z = 0$) имеют место равенства $n_y = n'_y$, $n_z = n'_z$.

Таким образом, всякий луч, выходящий из главной точки, пересекает вновь оптическую ось в другой главной точке в направлении, параллельном первоначальному.

Если координаты предмета и его изображения отсчитывать от главных точек (а не от главных фокусов), то для этих координат ξ и ξ' имеем:

$$\xi' = X' + f, \quad \xi = X - f$$

Подставляя это в (56.5), легко получаем уравнение отображения в виде

$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} = -\frac{1}{f}$$

Можно показать, что у оптических систем с малой толщиной (например, у зеркала, узкой линзы) обе главные точки почти совпадают.

В этом случае в особенности удобно уравнение (56.8), так как в нем ξ и ξ' отсчитываются тогда практически от одной и той же точки.

Если фокусное расстояние положительно, то предметы, находящиеся спереди (по ходу луча) от фокуса ($X > 0$), отображаются прямо ($Y'/Y > 0$); такие оптические системы называются собирательными.

Если же $f < 0$, то при $X > 0$ имеем $Y'/Y < 0$, т.

е.

предмет отображается обратным образом; такие системы называются рассеивающими.

Существует один предельный случай отображения, который не содержится в формулах (56.8), - это случай, когда все три коэффициента f, g, h делаются бесконечными (т.

е.

оптическая система имеет бесконечное фокусное расстояние и ее главные фокусы находятся в бесконечности).

Переходя в уравнении (56.4) к пределу бесконечных f, g, h , находим:

$$x' = \frac{h}{g}x + \frac{f^2 - gh}{g}$$

Поскольку представляет интерес только тот случай, когда предмет и его изображение находятся на конечных расстояниях от оптической системы, то f, g, h должны стремиться к бесконечности так, чтобы отношения $h/g, (f^2 - gh)/g$ были конечными.

Обозначая их соответственно посредством α^2 и β , имеем: $x' = \alpha^2 x + \beta$.

Для двух других координат мы имеем теперь из уравнения (56.7):

$$\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \pm \alpha$$

Наконец, отсчитывая снова координаты x и x' от разных начал координат, соответственно от произвольной точки на отражаемой оси и от изображения этой точки, получаем окончательно уравнения отображения в простом виде:

$$X' = \alpha^2 X, \quad Y' = \pm \alpha Y, \quad Z' = \pm \alpha Z$$

Таким образом, продольные и поперечные увеличения постоянны (но не равны друг другу).

Рассмотренный случай отображения называется телескопическим.

Все выведенные нами для линз формулы (56.5) – (56.9) в равной мере применимы и к зеркалам, и даже к оптическим системам без аксиальной симметрии, если только отображение осуществляется тонкими пучками лучей, идущими вблизи оптической оси.

При этом всегда Отсчет x -Координат предмета и изображения должен производиться вдоль оптической оси от соответствующих точек (главных фокусов или Главных точек) по направлению распространения луча.

Надо иметь В виду при этом, что у оптических систем, не обладающих аксиальной симметрией, направления оптической оси впереди и позади системы не лежат на одной прямой.

20.2.3 Lenses, Grating

здесь же задачи

две оптических системы, вторая в фокусе первой

Определить фокусное расстояние для отображения с помощью двух аксиально-симметричных оптических систем с совпадающими оптическими осями.

Пусть f_1 и f_2 - фокусные расстояния обеих систем.

Для каждой системы в отдельности имеем:

$$X_1 X'_1 = -f_1^2, \quad X_2 X'_2 = -f_2^2$$

Поскольку изображения, даваемые первой системой, являются предметом для второй, то, обозначая посредством l расстояние между задним главным фокусом первой системы и передним фокусом второй, имеем $X_2 = X'_1 - l$; выражая X'_2 через X_1 , находим:

$$X'_2 = \frac{X_1 f_2^2}{f_1^2 + l X_1}$$

ИЛИ

$$\left(X_1 + \frac{f_1^2}{l}\right) \left(X'_2 - \frac{f_2^2}{l}\right) = -\left(\frac{f_1 f_2}{l}\right)^2$$

откуда видно, что главные фокусы составной системы находятся в точках $X_1 = -f_1^2/l$, $X'_2 = f_2^2/l$, а фокусное расстояние равно

$$f = -\frac{f_1 f_2}{l}$$

(для выбора знака в этом выражении надо написать соответствующее уравнение для поперечного увеличения).

В случае, если $l = 0$, фокусное расстояние $f = \infty$, т.

е.

составная система дает телескопическое отображение.

В этом случае имеем: $X'_2 = X_1 (f_2/f_1)^2$, т.

е.

параметр α в общей формуле (56.9) равен $\alpha = f_2/f_1$.

магнитная линза

Определить фокусное расстояние «магнитной линзы» для заряженных частиц, представляющей собой продольное однородное магнитное поле в участке длины l .

При движении в магнитном поле кинетическая энергия частицы сохраняется; поэтому уравнение Гамильтона-Якоби для укороченного действия $S_0(\mathbf{r})$ (полное действие $S = -\mathcal{E}t + S_0$) есть

$$\left(\nabla S_0 - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 = p^2$$

где

$$p^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - m^2 c^2 = \text{const.}$$

Воспользовавшись формулой (19.4) для векторного потенциала однородного магнитного поля,

выбирая ось x вдоль направления последнего и рассматривая ее как оптическую ось аксиально-симметричной оптической системы,

получим уравнение Гамильтона-Якоби в виде

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + \frac{e^2}{4c^2} H^2 r^2 = p^2$$

где r - расстояние от оси x , а S_0 - функция от x и r .

Для тонких пучков частиц, распространяющихся вблизи оптической оси, координата r мала,

соответственно чему ищем S_0 в виде ряда по степеням r .

Первые два члена этого ряда:

$$S_0 = px + \frac{1}{2}\sigma(x)r^2$$

где $\sigma(x)$ удовлетворяет уравнению

$$p\sigma'(x) + \sigma^2 + \frac{e^2}{4c^2} H^2 = 0$$

В области 1 перед линзой имеем:

$$\sigma^{(1)} = \frac{p}{x - x_1}$$

где $x_1 < 0$ - постоянная.

Это решение соответствует свободному пучку частиц, разлетающихся по прямым лучам из точки $x = x_1$ на оптической оси в области 1.

Действительно, свободному движению частицы с импульсом p в направлении от точки $x = x_1$ соответствует действие

$$S_0 = p\sqrt{r^2 + (x - x_1)^2} \approx p(x - x_1) + \frac{pr^2}{2(x - x_1)}$$

Аналогично, в области 2 позади линзы пишем:

$$\sigma^{(2)} = \frac{p}{x - x_2}$$

где постоянная x_2 представляет собой координату изображения точки x_1 .

В области же 3 внутри линзы решение уравнения (3):

$$\sigma^{(3)} = \frac{eH}{2c} \text{ctg} \left(\frac{eH}{2cp} x + C \right)$$

где C - произвольная постоянная.

Постоянные C и x_2 (при заданном x_1) определяются условиями непрерывности $\sigma(x)$ при $x = 0$ и $x = l$:

$$-\frac{p}{x_1} = \frac{eH}{2c} \operatorname{ctg} C, \quad \frac{p}{l - x_2} = \frac{eH}{2c} \operatorname{ctg} \left(\frac{eH}{2cp} l + C \right)$$

Исключая из этих равенств постоянную C , получим:

$$(x_1 - g)(x_2 + h) = -f^2$$

где

$$g = -\frac{2cp}{eH} \operatorname{ctg} \frac{eHl}{2cp}, \quad h = g + l, \quad f = \frac{2cp}{eH \sin \frac{eHl}{2cp}}$$

(и как формулу использовать???)

20.2.4 Wide beam mapping (???)

(говно тема, так что вдали, мб поразбираю, но куда правильнее плюнуть на нее)

обзор и мотивация

Theory

Рассмотренное в предыдущем параграфе отображение предметов с Помощью тонких пучков лучей является приближенным; оно тем точнее (т.

е.

резче), чем уже эти пучки.

Перейдем теперь к вопросу об отображении предметов пучками лучей произвольной ширины.

В противоположность отображению предметов тонкими пучками, Которое можно осуществить с любой оптической системой, обладающей аксиальной симметрией, отображение широкими пучками возможно только с помощью определенным образом построенных оптических систем.

Даже с этим ограничением возможно, как уже указывалось В §56, отображение далеко не всех точек пространства.

Дальнейшие выводы основаны на следующем существенном замечании.

Пусть все лучи, выходящие из некоторой точки O и проходящие через оптическую систему, вновь пересекаются в некоторой другой точке O' .

Легко видеть, что оптическая длина пути ψ одинакова для всех этих лучей.

Действительно, вблизи каждой из точек O, O' волновые поверхности для пересекающихся в них лучей являются сферами с центрами, соответственно в O и O' и в пределе, при приближении к O и O' , вырождаются в эти точки.

Но волновые поверхности являются поверхностями постоянной фазы, и поэтому изменения фазы вдоль разных лучей между точками их пересечения двух определенных волновых поверхностей одинаковы.

Из сказанного следует, что одинаковы (для разных лучей) и полные изменения фазы между точка O и O' .

Выясним условия, необходимые для осуществления отображения широкими пучками малого отрезка прямой; изображение представляет собой при этом тоже малый отрезок прямой.

Выберем направления этих отрезков за направления осей (назовем их ξ и ξ') с началами O и O' в каких-либо соответствующих друг другу точках предмета и изображения.

Пусть ψ есть оптическая длина пути для лучей, выходящих из O и приходящих в O' .

Для лучей, выходящих из бесконечно близкой к O точки с координатой $d\xi$ и сходящихся в точке изображения с координатой $d\xi'$, оптическая длина пути есть $\psi + d\psi$, где

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\psi}{\partial\xi'}d\xi'$$

Введем «увеличение» при отображении

$$\alpha_\xi = \frac{d\xi'}{d\xi}$$

как отношение длины $d\xi'$ элемента изображения к длине отображаемого элемента $d\xi$.

В силу малости отображаемого отрезка увеличение α можно считать величиной, постоянной вдоль его длины.

Написав так же, как обычно, $\partial\psi/\partial\xi = -n_\xi$, $\partial\psi/\partial\xi' = n'_\xi n_\xi$, n'_ξ .

косинусы углов между направлениями луча и соответственно осями ξ и ξ'), получим:

$$d\psi = (\alpha_\xi n'_\xi - n_\xi) d\xi$$

Как и для всякой пары соответствующих друг другу точек предмета и изображения, оптическая длина пути $\psi + d\psi$ должна быть одинаковой для всех лучей, выходящих из точки с координатой $d\xi$ и приходящих в точку $d\xi'$.

Отсюда получаем условие:

$$\alpha_\xi n'_\xi - n_\xi = \text{const.}$$

Это и есть искомое условие, которому должен удовлетворять ход лучей в оптической системе при отображении широкими пучками малого отрезка прямой.

Соотношение (57.1) должно выполняться для всех лучей, выходящих из точки O .

Применим теперь полученное условие к отображению с помощью аксиально-симметричной оптической системы.

Начнем с отображения отрезка прямой, лежащего на оптической оси системы (ось x); из соображений симметрии очевидно, что изображение будет тоже лежать на оси.

Луч, идущий вдоль оптической оси ($n_x = 1$), в силу аксиальной симметрии системы не меняет своего направления при прохождении через нее, т.

е.

$$n'_x = 1.$$

Отсюда следует, что const B (57.1) равна в рассматриваемом случае $\alpha_x - 1$, и мы можем переписать (57.1) в виде

$$\frac{1 - n_x}{1 - n'_x} = \alpha_x$$

Обозначая посредством θ и θ' углы, образуемые лучами с оптической осью в точках предмета и изображения, имеем:

$$1 - n_x = 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad 1 - n'_x = 2 \sin^2 \frac{\theta'}{2}$$

Таким образом, получим условие отображения в виде

$$\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta'}{2}} = \text{const} = \sqrt{\alpha_x}$$

Далее, рассмотрим отображение малого участка плоскости, перпендикулярной к оптической оси аксиально-симметричной системы; изображение будет, очевидно, тоже перпендикулярно к этой оси.

Применяя (57.1) к любому отрезку, лежащему в отображенной плоскости, ПОЛУЧИМ:

$$\alpha_r \sin \theta' - \sin \theta = \text{const}$$

где θ и θ' - по-прежнему углы между лучом и оптической осью.

Для лучей, вышедших из точки пересечения изображаемой плоскости в силу симметрии, и $\theta' = 0$.

Поэтому $\text{const} = 0$, и мы получаем условие отображения в виде

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \text{const} = \alpha_r$$

Что касается отображения широкими пучками трехмерных предметов, то легко видеть, что оно невозможно даже при малом объеме тела, поскольку условия (57.2) и (57.3) несовместимы друг с другом.

21 Other topics in electrodynamics

(тут то, что пока не совсем разобрал, но что точно - связано с ЭД полей.)
(some of them will be in the section of just formalism of field theory)

21.1 Motion of a Particle in Electromagnetic Field

Опишем взаимодействия полей с частицами и явления, с этим связанные.

(типичные задачи теории поля - на движение. так что прорешаю постепенно, просто это не так актуально.)

21.1.1 Equation of Motion of a Particle in a Field

(в 1ю часть снесу также)

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в электромагнитном поле есть

$$\left(\text{grad } S - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi \right)^2 + m^2 c^2 = 0.$$

Оно получается заменой в функции Гамильтона обобщенного импульса $\mathbf{P}$ на $\partial S / \partial \mathbf{r}$, а самого $\mathcal{H}$ - на $-\partial S / \partial t$.

(?? что-нибудь про его решения потом допишу)

(тут дальше будут формулы)

Переход от 4-векторного формализма в 3-х векторный

Перепишем уравнение движения заряженной частицы, выбрав в качестве параметра координатное время t

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{e}{c} F_{ij} \frac{dx^j}{dt}.$$

Для тензора электромагнитного поля используем следующую параметризацию с помощью двух 3-векторов 5:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{\alpha 0} = E_\alpha, \quad F_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B^\gamma$$

Исследуем сначала компоненту номер $i = 0$ (временную компоненту) этого уравнения

$$\frac{dp_0}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}_{\text{ч.}}}{dt} = \frac{e}{c} F_{0j} \frac{dx^j}{dt} = \frac{e}{c} \underbrace{F_{00}}_0 \frac{dx^0}{dt} + \frac{e}{c} F_{0\beta} \underbrace{\frac{dx^\beta}{dt}}_{v^\beta} = \frac{e}{c} F_{0\beta} v^\beta.$$

Мы получили уравнение баланса энергии частицы

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{ч.}}}{dt} = e \underbrace{F_{\beta 0}}_{E_\beta} v^\beta = e(\mathbf{E}, \mathbf{v}).$$

Исследуем теперь пространственную часть уравнения $i = \alpha$

$$\begin{aligned} \frac{dp_\alpha}{dt} &= \frac{e}{c} F_{\alpha j} \frac{dx^j}{dt} = \frac{e}{c} F_{\alpha 0} \underbrace{\frac{dx^0}{dt}}_c + \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} \underbrace{\frac{dx^\beta}{dt}}_{v^\beta} \\ \frac{dp_\alpha}{dt} &= \frac{e}{c} F_{\alpha j} \frac{dx^j}{dt} = \frac{e}{c} F_{\alpha 0} \underbrace{\frac{dx^0}{dt}}_c + \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} \underbrace{\frac{dx^\beta}{dt}}_{v^\beta} \\ \frac{dp_\alpha}{dt} &= e \underbrace{F_{\alpha 0}}_{E_\alpha} + \frac{e}{c} \underbrace{F_{\alpha\beta}}_{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B^\gamma} v^\beta = eE_\alpha + \frac{e}{c} \underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} v^\beta B^\gamma}_{[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_\alpha}. \end{aligned}$$

Мы получили выражение для силы Лоренца, действующей на частицу во внешнем электромагнитном поле

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Также мы убедились, что действительно e имеет смысл заряда, $\mathbf{E}$ - электрическое поле, а $\mathbf{B}$ - магнитное.

Действие для заряженной частицы в ЭМ поле

(во вторую часть перенесу)

Член в действии, описывающий взаимодействие частицы с полем, должен содержать как величины, характеризующие частицу, так и величины, характеризующие поле.

Свойства частицы в отношении ее взаимодействия с электромагнитным полем определяются всего одним параметром - так называемым зарядом частицы e , который может быть как положительной, так и отрицательной (или равной нулю) величиной.

(в это просто нужно поверить, потом мы добавлю хотя бы какое-то обоснование. пока не до размышлений про это.)

Эти величины входят в действие в виде члена $\left(-\frac{e}{c} \int_a^b A_i dx^i\right)$, где функции A_i берутся в точках мировой линии частицы. Множитель $1/c$ введен здесь для удобства. Таким

образом, действие для заряда в электромагнитном поле имеет вид

$$S = \int_a^b \left(-mcds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right)$$

Или, через пространственные компоненты 4-вектора (A^i трехмерный вектор $\mathbf{A}$, называемый векторным потенциалом поля, и временная компонента - скалярный потенциал $A^0 = \varphi$) как:

$$S = \int_a^b \left(-mcds + \frac{e}{c} \mathbf{A} d\mathbf{r} - e\varphi dt \right)$$

или, через интегрирование по времени, с помощью введения скорости частицы $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi \right) dt$$

Функция Лагранжа заряда в электромагнитном поле

Функция Лагранжа для заряда в электромагнитном поле есть подынтегральное выражение в действии:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi$$

Это выражение отличается от функции Лагранжа свободной частицы членами $\frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi$, которые описывают взаимодействие заряда с полем.

Производная $\partial L / \partial \mathbf{v}$ есть обобщенный импульс частицы; обозначим его посредством $\mathbf{P}$, через обычный импульс $\mathbf{p}$ есть:

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

Для малых скоростей, т.е. в классической механике, функция Лагранжа переходит в

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi$$

В этом приближении

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

(? что-нибудь еще нужно знать про неё?? хз пока)

Функция Гамильтона заряда в электромагнитном поле

Функция Гамильтона есть

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\varphi$$

Функцию Гамильтона частицы в поле находится как $\mathcal{H} = \mathbf{v} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L$. Эта формула дает:

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi$$

(потом подумаю, как интуитивно догадаться до перехода ниже? мб ранее где-то такой переход был? пока не актуально тут задумываться)

Для записи окончательного вида функции Гамильтона, то есть через обобщенный импульс, заметим, что можно выразить $\mathcal{H} - e\varphi$ и $\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ через массу и скорость а дальше сложить, получим соотношение

$$\left(\frac{\mathcal{H} - e\varphi}{c}\right)^2 = m^2 c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2,$$

из которого найдется функция Гамильтона:

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\varphi$$

Для малых скоростей функция Гамильтона:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi$$

Вывод уравнений движения заряда в поле

Точные условия, которым должен удовлетворять заряд для того, чтобы он мог считаться в указанном смысле малым, будут выяснены в дальнейшем

(пар 75 (????? какие кст???)). Ниже мы будем считать это условие выполненным.

Уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле имеют вид:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e \operatorname{grad} \varphi + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{A}]$$

Получим их из варьирования действия, т.е. из уравнений Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$ для L определяется формулой (16.4).

Производная $\partial L / \partial \mathbf{v}$ есть обобщенный импульс частицы (16.5).

Далее пишем:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \equiv \nabla L = \frac{e}{c} \operatorname{grad} \mathbf{A} \mathbf{v} - e \operatorname{grad} \varphi$$

Но по известной формуле векторного анализа

$$\operatorname{grad} \mathbf{a} \mathbf{b} = (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a} + [\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}] + [\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}]$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ - любые два вектора.

Применяя эту формулу к $\mathbf{A} \mathbf{v}$ и помня, что дифференцирование по $\mathbf{r}$ производится при постоянном $\mathbf{v}$, находим:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{A}] - e \operatorname{grad} \varphi$$

Уравнения Лагранжа, следовательно, имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{A}] - e \operatorname{grad} \varphi$$

Но полный дифференциал $\frac{d\mathbf{A}}{dt} dt$ складывается из двух частей: из из-

менения $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} dt$ векторного потенциала со временем в данной точке пространства и из изменения при переходе от одной точки пространства к другой на расстояние $d\mathbf{r}$.

Эта вторая часть равна $(d\mathbf{r} \nabla) \mathbf{A}$.

Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A}$$

Подставляя это в предыдущее уравнение, получаем:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e \operatorname{grad} \varphi + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{A}]$$

Это и есть уравнение движения частицы в электромагнитном поле.

Слева стоит производная от импульса частицы по времени.

Следовательно, выражение в правой части (17.2) есть сила, действующая на заряд в электромагнитном поле.

Мы видим, что эта сила состоит из двух частей.

Первая часть (первый и второй члены в правой части (17.2)) не зависит от скорости частицы.

Вторая часть (третий член) зависит от этой скорости: пропорциональна величине скорости и перпендикулярна к ней.

Силу первого рода, отнесенную к заряду, равному единице, называют напряженностью электрического поля; обозначим ее посредством $\mathbf{E}$.

Итак, по определению,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$$

Множитель при скорости, точнее при $\mathbf{v}/c$, в силе второго рода, действующей на единичный заряд, называют напряженностью магнитного поля; обозначим ее через $\mathbf{H}$.

Итак, по определению,

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

Если в электромагнитном поле $\mathbf{E} \neq 0$, а $\mathbf{H} = 0$, то говорят об электрическом поле; если же $\mathbf{E} = 0$, а $\mathbf{H} \neq 0$, то поле называют магнитным.

В общем случае электромагнитное поле является наложением полей электрического и магнитного.

Отметим, что $\mathbf{E}$ представляет собой полярный, а $\mathbf{H}$ - аксиальный вектор.

Уравнения движения заряда в электромагнитном поле можно теперь написать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]$$

Стоящее справа выражение носит название лоренцевой силы.

Первая ее часть - сила, с которой действует электрическое поле на заряд, не зависит от скорости заряда и ориентирована по направлению поля $\mathbf{E}$.

Вторая часть - сила, оказываемая магнитным полем на заряд, - пропорциональна скорости заряда и направлена перпендикулярно к этой скорости и к направлению магнитного поля.

Для скоростей, малых по сравнению со скоростью света, импульс $\mathbf{p} \approx m\mathbf{v}$, и уравнение движения $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]$ переходит в

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]$$

Выведем еще уравнение, определяющее изменение кинетической энергии частицы 1) со временем, т.е. производную

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Легко убедиться, что

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = \mathbf{v} \frac{d\mathbf{p}}{dt};$$

подставляя $d\mathbf{p}/dt$ из $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]$ и замечая, что $[\mathbf{v}\mathbf{H}]\mathbf{v} = 0$, имеем

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v}.$$

То есть изменение кинетической энергии со временем есть работа, произведенная полем над частицей (в единицу времени).

Из (17.7) видно, что эта работа равна произведению скорости заряда на силу, с которой действует на него электрическое поле.

Работа поля за время dt , т.е. при перемещении заряда на $d\mathbf{r}$, равна $e\mathbf{E}d\mathbf{r}$.

Подчеркнем, что работу над зарядом производит только электрическое поле; магнитное поле не производит работы над движущимся в нем зарядом, ведь сила магнитного поля всегда перпендикулярна к скорости частицы.

Об обращении времени (?)

(? не читал, потому что не так актуально)

Уравнения механики инвариантны по отношению к перемене знака у времени, т.е. по отношению к замене будущего прошедшим. Другими словами, в механике оба направления времени эквивалентны.

Это значит, что если согласно уравнениям механики возможно какое-нибудь движение, то возможно и обратное движение, при котором система проходит те же состояния в обратном порядке.

Легко видеть, что то же самое имеет место и в электромагнитном поле в теории относительности.

При этом, вместе с заменой t на $-t$ надо изменить знак магнитного поля.

Действительно, легко видеть, что уравнения движения $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]$ не меняются, если произвести замену

$$t \rightarrow -t, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{H}.$$

При этом, согласно (17.3)-(17.4), скалярный потенциал не меняется, а векторный меняет знак:

$$\varphi \rightarrow \varphi, \quad \mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$$

Таким образом, если в электромагнитном поле возможно некоторое движение, то возможно и обратное движение в поле с обратным направлением $\mathbf{H}$.

Ускорение частицы через ее скорость и напряженности электрического и магнитного полей

Выразить ускорение частицы через ее скорость и напряженности электрического и магнитного полей.

Подставляем в уравнение движения $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]$ $\mathbf{p} = \mathbf{v}\mathcal{E}_{\text{кин}}/c^2$, а $d\mathcal{E}_{\text{кин}}/dt$ выражаем согласно (17.7).

В результате найдем:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}] - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E}) \right\}$$

Описание влияния заряда на поле

хз пока, как это влияние учитывать

Уравнения движения частицы в гравитационном и электромагнитном полях

(укажу на это и разные мелочи пропишу. пока лишь заготовки.)

уравнения движения заряженной частицы в гравитационном и электромагнитном полях получаются заменой в (23, 4) 4-ускорения du^i/ds на Du^i/ds :

$$mc \frac{Du^i}{ds} \equiv mc \left(\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l \right) = \frac{e}{c} F^{ik} u_k$$

(!!! тут очень хочу пример. и тут много тренироваться пока что нужно.)

О движении с учетом излучения и рассеяния

(?? если там какая-то волна еще есть, которая излучается или на которой происходит рассеяние, как будет иначе выглядеть модель движения частицы?? тут опишу.)

Решение движения частиц по М.Г. Иванову (???)**О случаях применения (?!?)**

(Насколько метод матричной экспоненты часто применяется?!?!?)

21.1.2 Motion in a Coulomb Field

Обсудим подробно релятивистское описание движение частицы в Кулоновском поле. Это самая простейшая задача, о которой только можно задуматься, изучив постоянное электрическое поле.

(?? кст, киселев заготовки про это делал, у него хорошо написано)

(мб вставлю параграф с итоговыми всем свойствами. пока не уверен, что он нужен)

Энергия частицы в центральном поле

Рассмотрим движение частицы с массой m и зарядом e в поле, создаваемом другим зарядом e' , который будем неподвижным.

Задача сводится к исследованию движения заряда e в центрально-симметричном электрическом поле с потенциалом $\varphi = e'/r$.

Введем параметр $\alpha = ee'$, запишем полную энергию частицы:

$$\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r} = c\sqrt{p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r},$$

где в конце учтено, что в полярных координатах как известно из механики, (??? !!)

$$p^2 = \frac{M^2}{r^2} + p_r^2$$

где p_r - радиальная компонента импульса, а M - постоянный момент импульса частицы.

О приближении частицы к центру

Вопрос о том, может ли частица при своем движении приближаться сколь угодно близко к центру, решается тупо рассматриванием формулы с общей энергией. (? да?)

Прежде всего очевидно, что это во всяком случае невозможно, если заряды e и e' отталкиваются, т.е. e и e' - одного знака.

Далее, в случае притяжения (e и e' имеют различные знаки) неограниченное приближение к центру невозможно, если $Mc > |\alpha|$; действительно, в этом случае первый член в (39.1) всегда больше второго, и при $r \rightarrow 0$ правая сторона этого равенства стремилась бы к бесконечности.

Напротив, если $Mc < |\alpha|$, то при $r \rightarrow 0$ это выражение может оставаться конечным (при этом,

разумеется, стремится к бесконечности p_r).

Таким образом, если

$$Mc < |\alpha|$$

то частица при своем движении «падает» на притягивающий ее заряд, - в противоположность тому, что в нерелятивистской механике в кулоновском поле такое падение вообще невозможно (за исключением только случая $M = 0$, когда частица e летит прямо на частицу e').

Уравнения движения в кулоновском поле

Полное определение движения заряда в кулоновском поле получим из действия, которое найдем из уравнения Гамильтона-Якоби, выбрав полярные координаты r, φ в плоскости движения:

$$-\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\alpha}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + m^2 c^2 = 0$$

Ищем S в виде $S = -\mathcal{E}t + M\varphi + f(r)$, где $\mathcal{E}$ и M - постоянные энергия и момент импульса движущейся частицы, подставляя, находим:

$$S = -\mathcal{E}t + M\varphi + \int \sqrt{\frac{1}{c^2} \left(\mathcal{E} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2 c^2} \cdot dr$$

(? дальше еще потренируюсь немного)

Траектория определяется уравнением $\partial S / \partial M = \text{const}$.

Интегрирование приводит к следующим результатам для траектории:

а) если $Mc > |\alpha|$:

$$(c^2 M^2 - \alpha^2) \frac{1}{r} = c \sqrt{(M\mathcal{E})^2 - m^2 c^2 (M^2 c^2 - \alpha^2)} \times \cos \left(\varphi \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2 M^2}} \right) - \mathcal{E} \alpha$$

б) если $Mc < |\alpha|$:

$$(\alpha^2 - c^2 M^2) \frac{1}{r} = \pm c \sqrt{(M\mathcal{E})^2 + m^2 c^2 (\alpha^2 - M^2 c^2)} \times \text{ch} \left(\varphi \sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2 M^2} - 1} \right) + \mathcal{E} \alpha$$

в) если $Mc = |\alpha|$:

$$\frac{2\mathcal{E}\alpha}{r} = \mathcal{E}^2 - m^2 c^4 - \varphi^2 \left(\frac{\mathcal{E}\alpha}{cM} \right)^2$$

(?) Постоянная интегрирования заключена в произвольном выборе начала отсчета угла φ .

В б) выбор знака перед корнем несуществен, так как тоже связан с выбором начала отсчета угла φ под знаком $\cos$.

Описание траектории

(пока не читал, не до этого)

Изображаемая этим уравнением траектория в случае притяжения ($\alpha < 0$) лежит целиком при конечных значениях r (финитное движение), если $\mathcal{E} < mc^2$.

Если же $\mathcal{E} > mc^2$, то r может обращаться в бесконечность (движение инфинитно).

Финитному движению соответствует в нерелятивистской механике движение по замкнутым орбитам (эллипсам).

В релятивистской же механике траектория никогда не может быть замкнутой из (39.4) видно, что при изменении угла φ на 2π расстояние r от центра не возвращается к исходному значению.

Вместо эллипсов мы имеем здесь орбиты в виде незамкнутых розеток.

Таким образом, в то время как в нерелятивистской механике финитное движение в кулоновском поле происходит по замкнутым орбитам, в релятивистской механике кулоново поле теряет это свое свойство.

В (39.5) перед корнем должен быть выбран Знак $+$ при $\alpha < 0$ и знак $-$ при $\alpha > 0$ (другой выбор знаков соответствовал бы измененному знаку перед корнем в (39.1)).

При $\alpha < 0$ траектории (39.5) и (39.6) представляют собой спирали с радиусом r , стремящимся к нулю при $\varphi \rightarrow \infty$.

Время же, в течение которого происходит падение заряда в начало координат, конечно.

Убедиться в этом можно, замечая, что зависимость координаты от времени определяется равенством $\partial S / \partial \mathcal{E} = \text{const}$; подставляя сюда (39.3), увидим, что время определяется интегралом, сходящимся при $r \rightarrow 0$

Сравнение с нерелятивистским описанием (??)

(потом сравню, как-то пока не так оба подхода усвоены. вставлю потом в пар-ф выше)

21.1.3 Motion in a Constant Electromagnetic Field

(потом)

Theory

Рассмотрим движение заряда e в однородном постоянном электрическом поле $\mathbf{E}$. Направление поля примем за ось x . Движение будет, очевидно, происходить в одной плоскости, которую выберем за плоскость xy . Тогда уравнения движения $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]$ примут вид

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0$$

(точка над буквой обозначает дифференцирование по t), откуда

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0$$

Начало отсчета времени мы выбрали в тот момент, когда $p_x = 0$; p_0 есть импульс частицы в этот момент.

Кинетическая энергия частицы (энергия без потенциальной энергии в поле) равна $\mathcal{E}_{\text{кин}} = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$. Подставляя сюда (20.1), находим в нашем случае:

$$\mathcal{E}_K = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2 + (ceEt)^2} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}$$

где $\mathcal{E}_0$ - энергия при $t = 0$. Согласно (9.8) скорость частицы $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/\mathcal{E}_{\text{кин}}$. Для скорости $v_x = \dot{x}$ имеем, следовательно:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}_{\text{кин}}} = \frac{c^2 e E t}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}$$

Интегрируя, находим:

$$x = \frac{1}{eE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}$$

(постоянную интегрирования полагаем равной нулю) (?). Для определения y имеем:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{\mathcal{E}_{\text{кин}}} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}},$$

откуда

$$y = \frac{p_0 c}{eE} \operatorname{Arsh} \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}.$$

Уравнение траектории находим, выражая из (20.4) t через y и подставляя в (20.3). Это дает:

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \operatorname{ch} \frac{eEy}{p_0 c}$$

Таким образом, заряд движется в однородном электрическом поле по цепной линии.

Если скорость частицы $v \ll c$, то можно положить $p_0 = mv_0$, $\mathcal{E}_0 = mc^2$; разлагая (20.5) по степеням $1/c$, получим, с точностью до членов высшего порядка:

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2 + \text{const}$$

т. е. заряд движется по параболе, - результат, хорошо известный из классической механики.

(?? еще раз потом свежим взглядом посмотрю на это!!!)

О применениях

хз

21.1.4 Movement in a magnetic field 1

Движение в постоянном поле

Рассмотрим теперь движение заряда e в однородном магнитном поле $\mathbf{H}$. Направление поля выберем за ось z .

Уравнения движения

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}]$$

мы перепишем в другом виде, подставив вместо импульса

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E} \mathbf{v}}{c^2}$$

где $\mathcal{E}$ - энергия частицы, которая в магнитном поле постоянна.

Уравнения движения приобретают тогда вид

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}]$$

или, в компонентах,

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0$$

где мы ввели обозначение

$$\omega = \frac{ecH}{\mathcal{E}}$$

Умножим второе из уравнений (21.2) на i и сложим с первым:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y)$$

откуда

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t}$$

где a - комплексная постоянная.

Ее можно написать в виде $a = v_{0t}e^{-i\alpha}$, где v_{0t} и α вещественны.

Тогда

$$v_x + iv_y = v_{0t}e^{-i(\omega t + \alpha)}$$

и, отделяя действительную и мнимую части, находим:

$$v_x = v_{0t} \cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v_{0t} \sin(\omega t + \alpha)$$

Постоянные v_{0t} и α определяются начальными условиями, α есть начальная фаза; что же касается v_{0t} , то из (21.4) видно, что

$$v_{0t} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

т.

е.

v_{0t} есть скорость частицы в плоскости xy , остающаяся при движении постоянной.

Из (21.4) находим, интегрируя еще раз:

$$x = x_0 + r \sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r \cos(\omega t + \alpha)$$

где

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\mathcal{E}}{ecH} = \frac{cp_t}{eH}$$

(p_t — проекция импульса на плоскость xy).

Из третьего уравнения (21.2) находим: $v_z = v_{0z}$ и

$$z = z_0 + v_{0z}t$$

Из (21.5) и (21.7) видно, что заряд движется в однородном магнитном поле по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля и с радиусом r , определяемым (21.6).

Скорость частицы при этом постоянна по величине.

В частном случае, когда $v_{0z} = 0$, т.

е.

заряд не имеет скорости вдоль поля, он движется по окружности в плоскости, перпендикулярной к полю.

Величина ω , как видно из формул, есть циклическая частота вращения частицы в плоскости, перпендикулярной к полю.

Если скорость частицы мала, то мы можем приближенно положить $\mathcal{E} = mc^2$.

Тогда частота ω превращается в

$$\omega = \frac{eH}{mc}$$

Движение в медленно меняющемся поле

Предположим теперь, что магнитное поле, оставаясь однородным, медленно изменяется по величине и направлению.

Выясним, как меняется при этом движение заряженной частицы.

Как известно, при медленном изменении условий движения остаются постоянными так называемые адиабатические инварианты.

Поскольку движение в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, периодически, то адиабатическим инвариантом является интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{P}_t d\mathbf{r}$$

взятый по полному периоду движения, в данном случае по окружности ($\mathbf{P}_t$ — проекция обобщенного импульса на указанную плоскость) ¹⁾ Подставляя $\mathbf{P}_t = \mathbf{p}_t + \frac{e}{c}\mathbf{A}$, имеем:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{p}_t d\mathbf{r} + \frac{e}{2\pi c} \oint \mathbf{A} d\mathbf{r}$$

В первом члене замечаем, что $\mathbf{p}_t$ постоянно по абсолютной величине и направлено по $d\mathbf{r}$; ко второму применяем теорему Стокса и заменяем $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$:

$$I = r p_t - \frac{e}{2c} H r^2$$

где r — радиус орбиты ²⁾.

Подставляя в это равенство выражение для r (21.6), находим:

$$I = \frac{c p_t^2}{2eH}$$

Отсюда видно, что при медленном изменении H поперечный импульс p_t меняется пропорционально $\sqrt{H}$.

Этот результат можно применить и к другому случаю — когда частица движется по винтовой линии в постоянном, но не вполне однородном магнитном поле (поле мало меняется на расстояниях, сравнимых с радиусом и шагом винтовой орбиты).

Такое движение можно рассматривать как движение по круговой орбите, смещающейся с течением времени, а по отношению к этой орбите поле как бы меняется со временем, оставаясь однородным.

Тогда можно утверждать, что поперечная (по отношению к направлению поля) компонента импульса меняется по закону $p_t = \sqrt{CH}$, где C — постоянная, а H — заданная функция координат.

С другой стороны, как и при движении во всяком постоянном магнитном поле, энергия частицы (а с нею и квадрат ее импульса p^2) остается постоянной.

Поэтому продольная компонента импульса меняется по закону

$$p_l^2 = p^2 - p_t^2 = p^2 - CH(x, y, z)$$

Поскольку всегда должно быть $p_l^2 \geq 0$, то отсюда видно, что проникновение частицы в области достаточно сильного поля ($CH > p^2$) оказывается невозможным.

При движении в направлении увеличивающегося поля радиус винтовой траектории убывает пропорционально p_t/H (т.е. пропорционально $1/\sqrt{H}$), а ее шаг — пропорционально p_l .

При достижении границы, на которой p_l обращается в нуль, частица отражается от нее: продолжая вращаться в прежнем направлении, она начинает двигаться против градиента поля.

Неоднородность поля приводит также и к другому явлению медленному поперечному смещению (дрейфу) ведущего центра винтовой траектории частицы (так называют в этой связи центр круговой орбиты); этому вопросу посвящена задача 3 к следующему параграфу.

Заряженный пространственный осциллятор в магнитном поле

Определить частоты колебаний заряженного пространственного осциллятора, находящегося в постоянном однородном магнитном поле; собственная частота колебаний осциллятора (при отсутствии поля) равна ω_0 .

Уравнения вынужденных колебаний осциллятора в магнитном поле (направленном вдоль оси z) имеют вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eH}{mc} \dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{eH}{mc} \dot{x}, \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Умножая второе уравнение на i и складывая с первым, получаем:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -i \frac{eH}{mc} \dot{\xi}$$

где $\xi = x + iy$.

Отсюда находим, что частоты колебаний осциллятора в плоскости, перпендикулярной к полю, равны

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{eH}{mc} \right)^2} \pm \frac{eH}{2mc}$$

Если поле H мало, то эта формула переходит в

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{eH}{2mc}$$

Колебания вдоль направления поля остаются неизменными.

(где применяется эта задача??)

21.1.5 Movement in a magnetic field 2

(там много его теории остается про это)

Theory by Kiselev

В однородном магнитном поле движение частицы является периодическим в поперечной плоскости к магнитному полю, так как магнитное поле не совершает работы, а уравнения движения

$$m\gamma \dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{H}$$

имеют решение в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$, где сохраняющаяся продольная компонента скорости $\mathbf{v}_\parallel = \mathbf{h}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{h})$ направлена вдоль единичного вектора $\mathbf{h} = \mathcal{H}/\mathcal{H}$, а поперечная компонента $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel$ получается прямым интегрированием уравнения движения

$$\mathbf{v}_\perp = \omega \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{h}, \quad \omega = \frac{e\mathcal{H}}{mc\gamma}$$

Легко связать радиус орбиты с поперечным импульсом, поскольку период движения

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r_\perp}{v_\perp}$$

так что

$$p_{\perp} = m\gamma v_{\perp} = \frac{e}{c} \mathcal{H} r_{\perp}$$

В слабонеоднородном поле, например, радиус обращения $r_{\perp}$ много меньше характерного расстояния, на котором поле меняется существенно, т.е. на величину, порядка самого поля. Поэтому возникает малый параметр отношения радиуса $r_{\perp}$ к длине неоднородности, и траектория может быть рассмотрена сначала в ведущем приближении как периодическая с последующим учетом поправок первого порядка малости. Следовательно, было бы актуально рассмотреть характерные свойства как периодического движения, так и поправок к нему.

Периодическое движение

Рассмотрим периодическое движение механической системы. Пусть T - период движения, тогда периодичность динамической переменной $q(t)$ и сопряженного к ней импульса p означает, что

$$q(t+T) = q(t), \quad p(t+T) = p(t)$$

Определим новую переменную, зависящую от параметра a :

$$q_a(t, a) = q(t + aT)$$

Тогда вариация действия

$$\Delta S = \int_0^1 da \frac{dS}{da} = S(1) - S(0)$$

но в силу периодичности движения (7.3)

$$q_a(t, 0) = q_a(t, 1) = q(t)$$

так что действие при $a = 1$ и $a = 0$ вычисляется на одной и той же траектории, и

$$\Delta S \equiv 0$$

В классической механике согласно теореме Нётер производная действия по параметру имеет вид

$$\frac{dS}{da} = \int dt \frac{d}{dt} \left(p \frac{\partial q}{\partial a} - H \frac{\partial t}{\partial a} \right)$$

но, поскольку в данном случае время не преобразуется

$$\frac{\partial t_a}{\partial a} = 0$$

вариация равна

$$\Delta S = \int_0^1 da \frac{dS}{da} = \int_0^1 da \int dt \frac{d}{dt} p \frac{\partial q}{\partial a} = \int dt \frac{d}{dt} \int_0^1 p \frac{\partial q}{\partial a} da$$

в то время как интеграл

$$\mathcal{I} = \int_0^1 p \frac{\partial q}{\partial a} da = \int_0^T p \frac{dq}{d\tau} d\tau, \quad \tau = aT$$

является интегралом по периоду

$$\mathcal{I} = \oint p \, dq$$

а нулевое значение изменения действия

$$\Delta S = \int dt \frac{d}{dt} \mathcal{I} = 0$$

означает, что

$$\mathcal{I} = \oint p \, dq - \text{инвариант.}$$

Этот инвариант называется адиабатическим, так как его сохранение связано с неизменностью фазового объема частицы, определяющего энтропию системы, и коль скоро она сохраняется, то и вариация параметров движения является адиабатической.

В самом деле, рассмотрим случай одномерного движения¹ и введем для переменных фазового объема более привычные обозначения (только в этом разделе!):

$$(p, q) \equiv (x, y)$$

и линейный элемент однопараметрической траектории

$$dL = (dx, dy)$$

Тогда для вектора F с компонентами

$$F = (F_x, F_y)$$

имеет место теорема Стокса:

$$\oint F \, dL = \int dx \, dy \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

где интеграл берется по поверхности, ограниченной замкнутой кривой. В нашем случае, очевидно,

$$F = (F_x, F_y) = (0, p), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial p} = 1$$

и

$$\mathcal{I} = \int dp \, dq$$

т.е., действительно, инвариант - фазовый объем системы, а его логарифм задает энтропию, и сохранение этого инварианта означает "адиабатичность" процесса.

Вычислим адиабатический инвариант периодического движения частицы в постоянном магнитном поле:

$$\mathcal{I} = \oint \mathcal{P} d\mathbf{r}$$

где $\mathcal{P}$ - сопряженный к координате импульс, т.е. обобщенный импульс заряженной частицы в поле $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathcal{A}$$

где $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ - импульс частицы. Подставляя

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}_\perp dt = \frac{1}{m\gamma} \mathbf{p}_\perp dt$$

во-первых, для кинетического вклада с сохраняющимся поперечным импульсом найдем

$$\mathcal{I}_1 = \oint \mathbf{p} d\mathbf{r} = p_{\perp}^2 \frac{T}{m\gamma}$$

где период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi mc\gamma}{e\mathcal{H}}$$

так что

$$\mathcal{I}_1 = 2\pi \frac{cp_{\perp}^2}{e\mathcal{H}}$$

Во-вторых, вклад поля

$$\mathcal{I}_2 = \frac{e}{c} \oint \mathcal{A} d\mathbf{r} = \frac{e}{c} \int \text{rot } \mathcal{A} d^2\Sigma$$

где элемент площади задается площадью треугольника, заштрихованного частицей при движении по окружности:

$$d^2\Sigma = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{v}_{\perp} dt = -\frac{1}{2} \mathcal{H} r_{\perp} v_{\perp} dt$$

и с учетом

$$\text{rot } \mathcal{A} = \mathcal{H}$$

найдем вклад, обусловленный полем, а именно, поток магнитного поля через поверхность, ограниченную орбитой частицы,

$$\mathcal{I}_2 = -\frac{e}{2c} \mathcal{H} r_{\perp} v_{\perp} T$$

и подставляя

$$r_{\perp} = \frac{cp_{\perp}}{e\mathcal{H}}$$

получаем

$$\mathcal{I}_2 = -\frac{e}{2c} \mathcal{H} \frac{cp_{\perp}}{e\mathcal{H}} \frac{p_{\perp}}{m\gamma} \frac{2\pi mc\gamma}{e\mathcal{H}} = -\pi \frac{cp_{\perp}^2}{e\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} \mathcal{I}_1$$

Суммируя,

$$\mathcal{I} = \pi \frac{cp_{\perp}^2}{e\mathcal{H}}$$

Таким образом, адиабатический инвариант периодического движения частицы в плоскости, перпендикулярной постоянному магнитному полю, определяется комбинацией $p_{\perp}^2/\mathcal{H}$.

Заметим, что адиабатический инвариант равен взятому с обратным знаком потоку магнитного поля через площадь внутри описываемой зарядом окружности

$$\mathcal{I} = -\frac{e}{c} \int \mathcal{H} d^2\Sigma$$

так что усиление поля и, следовательно, потока через единичную площадь приводит, в силу сохранения инварианта, к уменьшению площади круга.

Теорема Адемолло-Гатто

Рассмотрим вопрос о том, что происходит с адиабатическим инвариантом периодического движения, если эта периодичность слабо нарушается малым возмущением параметров системы. Значение термина «слабо» физически определяется приближением, в котором параметр за время периода движения можно считать постоянным, но он все же существенно изменяется за интервал времени, много больший периода. Ответом на поставленный вопрос служит теорема Адемолло-Гатто, которая применима не только к адиабатическому инварианту периодического движения, но и, вообще, к инвариантам, построенным при вариации действия по параметру исходной симметрии системы, так что проведенное ниже рассмотрение можно дословно повторить и для упомянутых инвариантов, заменяя термин «периодический» на «инвариантный».

Теорема Адемолло-Гатто. Если к исходному действию S_0 , приводящему к периодическому движению и, следовательно, к адиабатическому инварианту $\mathcal{I}$, добавлено возмущение с малым параметром λ , так что полное действие

$$S = S_0 + \lambda \int V(q, \dot{q}) dt$$

то инвариант, по-прежнему, сохраняется с точностью до членов второго порядка малости по λ :

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Ход мысли. В самом деле, разложим решение уравнения с возмущением λV по малому параметру λ с точностью до членов второго порядка малости:

$$q(t, \lambda) \approx q_0(t) + \lambda \delta \bar{q}_0(t) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

где

$$q_0(t) = q(t, 0), \quad \delta \bar{q}_0(t) = \left. \frac{\partial q(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}$$

и главный вклад $q_0(t)$ берется при $\lambda = 0$, т.е. он является периодическим, в отличие от $\delta \bar{q}_0(t)$, который уже может нарушать периодичность. Аналогично можно поступить и с возмущением

$$\lambda V = \lambda V_0 + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

так что V_0 зависит только от главного вклада $q_0(t)$, т.е. является периодической функцией. Вводя, как и в предыдущем разделе, параметр a на периодической траектории q_0 найдем, что с точностью до членов второго порядка малости действие

$$S = S_0|_{\lambda=0} + \int \left. \frac{\delta S_0}{\delta q} \right|_{\lambda=0} \lambda \delta \bar{q}_0 dt + \lambda \int V_0 dt + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Первое слагаемое в точности совпадает с выражением для действия без возмущения, и оно зависит только от периодических функций. Второе слагаемое равно нулю в силу уравнений движения при $\lambda = 0$ (вариационный принцип):

$$\left. \frac{\delta S_0}{\delta q} \right|_{\lambda=0} = 0$$

Третье слагаемое - также периодическая функция по a с периодом 1. Поэтому с точностью до членов второго порядка малости по λ

$$\int_0^1 da \frac{dS}{da} = \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Повторяя вывод для адиабатического инварианта, теперь заключаем, что он сохраняется с точностью до членов второго порядка малости возмущения.

Из приведенного рассуждения ясно, что при введении возмущения, вообще говоря, и динамическая переменная и сопряженный ей импульс становятся функциями, зависящими от параметра возмущения λ , но построенный из них инвариант - фазовый объем - остается сохраняющейся величиной с точностью до членов второго порядка малости.

Заряженная частица в неоднородном магнитном поле

Рассмотрим движение частицы в постоянном во времени, но неоднородном магнитном поле в случае, когда эта неоднородность мала [10]. Физический смысл такого определения малой неоднородности означает, что применимо приближение, когда движение в ведущем порядке описывается движением частицы в постоянном поле, а неоднородность является возмущением. Таким образом, ясно, что поле имеет слабую неоднородность, если характерный масштаб неоднородности L много больше, чем радиус орбиты частицы в постоянном однородном магнитном поле $r_{\perp}$:

$$L \gg r_{\perp}$$

Под масштабом L мы понимаем расстояние, на котором изменение поля вдоль силовой линии l сравнимо с самим полем:

$$\left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l} \right| L \sim \mathcal{H}$$

Напомним основные характеристики движения частицы в постоянном и однородном магнитном поле: - Энергия частицы сохраняется, так как работу совершает только электрическое поле, которое в нашем случае равно нулю. - Продольная скорость частицы вдоль вектора магнитного поля сохраняется:

$$v_{\parallel} = \text{const.}$$

- Поперечная скорость частицы (здесь $\mathbf{u}_{\perp}$), в плоскости, ортогональной к вектору магнитного поля, связана с координатой

$$\mathbf{u}_{\perp} = \omega \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} = \frac{\mathcal{H}}{H}$$

где частота вращения частицы с зарядом e и энергией E

$$\omega = \frac{e c \mathcal{H}}{E}$$

а радиус орбиты -

$$r_{\perp} = \frac{c p_{\perp}}{e \mathcal{H}}$$

- Частица характеризуется адиабатическим инвариантом

$$\mathcal{I} \sim \frac{p_{\perp}^2}{\mathcal{H}}$$

Найдем магнитный момент частицы, периодически движущейся в поперечной к полю плоскости ($v_{\parallel}$). По определению,

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} e \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{u}_{\perp}$$

так что

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \frac{e\omega}{2c} \mathbf{r}_\perp \times (\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{h}) = \langle \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \rangle = \\ &= \frac{e\omega}{2c} [\mathbf{r}_\perp (\mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{h} r_\perp^2] = \langle \mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{h} = 0 \rangle = -\mathbf{h} \frac{e\omega}{2c} r_\perp^2\end{aligned}$$

Подставляя выражения для радиуса орбиты и частоты, находим

$$\boldsymbol{\mu} = -\mathbf{h} \frac{e^2 \mathcal{H}}{2mc^2 \gamma} \frac{p_\perp^2 c^2}{e^2 \mathcal{H}^2}$$

и, в итоге,

$$\boldsymbol{\mu} = -\mathbf{h} \frac{p_\perp^2}{\mathcal{H}} \frac{1}{2m\gamma}$$

Поскольку гамма-фактор частицы, движущейся в магнитном поле, является постоянным

$$\gamma = \text{const.}$$

а величина

$$\frac{p_\perp^2}{\mathcal{H}} - \text{адиабатический инвариант}$$

для квазипериодического движения, заключаем, что и модуль магнитного момента частицы - адиабатический инвариант, т.е. он сохраняется при движении частицы в слабо неоднородном магнитном поле (!). Обратим внимание также на то, что магнитный момент направлен против поля вне зависимости от знака заряда частицы. При этом, конечно, нет прецессии магнитного момента вокруг оси магнитного поля, поскольку магнитный момент и поле параллельны.

Применяемое нами приближение малой неоднородности позволяет нам рассматривать частицу как волчок, обладающий магнитным моментом, на который действует выведенная нами в предыдущем разделе сила, возникающая за счет неоднородности. Тогда, с учетом энергии взаимодействия волчка с магнитным полем уравнения движения Эйлера-Лагранжа в первом порядке малости по отношению $r_\perp / L$ примут вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{H}_0 + (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathcal{H}_0$$

где магнитное поле берется в центре волчка $\mathcal{H} \approx \mathcal{H}_0 + (\mathbf{r}_\perp \cdot \nabla) \mathcal{H}_0$, так что в дальнейшем мы будем опускать знак ведущего приближения $\mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{H}$ для краткости записи, имея также ввиду, что в используемом приближении эти величины все равно совпадают ⁴. Скорость мы представим в виде суммы трех вкладов

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_\perp + \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$$

где, по определению, $\mathbf{u}_\perp$ удовлетворяет уравнению движения частицы в постоянном однородном магнитном поле, приведенному выше, так что

$$m\gamma \frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{u}_\perp \times \mathcal{H}$$

а продольная скорость

$$\mathbf{v}_\parallel = v_\parallel \mathbf{h}$$

в то время как $\mathbf{v}_\perp$ учитывает возможные отклонения скорости частицы от $\mathbf{u}_\perp$ в поперечном направлении за счет влияния неоднородности поля. Тогда подстановка разложения скорости в уравнение движения и учет уравнения для $\mathbf{u}_\perp$, очевидно, дает

$$m\gamma \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp) = \frac{e}{c} \mathbf{v}_\perp \times \mathcal{H} + (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathcal{H} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{H}_0 + (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathcal{H}_0$$

где магнитное поле берется в центре волчка $\mathcal{H} \approx \mathcal{H}_0 + (\mathbf{r}_\perp \cdot \nabla) \mathcal{H}_0$, так что в дальнейшем мы будем опускать знак ведущего приближения $\mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{H}$ для краткости записи, имея также ввиду, что в используемом приближении эти величины все равно совпадают⁴. Скорость мы представим в виде суммы трех вкладов

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_\perp + \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$$

где, по определению, $\mathbf{u}_\perp$ удовлетворяет уравнению движения частицы в постоянном однородном магнитном поле, приведенному выше, так что

$$m\gamma \frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{u}_\perp \times \mathcal{H}$$

а продольная скорость

$$\mathbf{v}_\parallel = v_\parallel \mathbf{h}$$

в то время как $\mathbf{v}_\perp$ учитывает возможные отклонения скорости частицы от $\mathbf{u}_\perp$ в поперечном направлении за счет влияния неоднородности поля. Тогда подстановка разложения скорости в уравнение движения и учет уравнения для $\mathbf{u}_\perp$, очевидно, дает

$$m\gamma \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp) = \frac{e}{c} \mathbf{v}_\perp \times \mathcal{H} + (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathcal{H} \iff$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp) = \omega \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{h} + \frac{1}{m\gamma} (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathcal{H}$$

Как видим, по построению скорость $\mathbf{u}_\perp$ не вошла в итоговое уравнение (мы учли также, что $\mathbf{v}_\parallel \times \mathcal{H} = 0$). Пренебрежем ускорением скорости поперечного движения, т.е. положим

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_\perp \approx 0$$

так как в рамках нашего приближения в правой стороне уравнения движения (7.25) стоит величина порядка

$$v_\perp \omega \sim v_\perp \frac{\mathbf{u}_\perp}{r_\perp}$$

в то время как характерное время изменения добавочной поперечной скорости определяется временем прохождения расстояния L :

$$\tau_L \sim \frac{L}{v_\perp}$$

так что для производной поперечной компоненты

$$\frac{d}{dt} v_\perp \sim \frac{v_\perp}{\tau_L} \sim v_\perp \frac{v_\perp}{L} \sim v_\perp \frac{v_\perp r_\perp}{L} \ll v_\perp \frac{v_\perp}{r_\perp}$$

Поэтому даже в случае, когда добавочная поперечная скорость сравнима с основной, $v_\perp \sim \mathbf{u}_\perp$, учет ускорения добавочной поперечной скорости в левой части (7.25) являлся бы эффектом превышения точности приближения, так что зануление этого ускорения вполне правомерно. Вычислим теперь

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_\parallel = \frac{d}{dt} (v_\parallel \mathbf{h}) = \mathbf{h} \frac{d}{dt} v_\parallel + v_\parallel \frac{d}{dt} \mathbf{h} = \mathbf{h} \dot{v}_\parallel + v_\parallel \dot{\mathbf{h}}$$

где точкой сверху мы обозначили, как обычно, производную по времени. Производная по времени у единичного касательного вектора к силовой линии ⁵ магнитного поля $\mathbf{h}$ возникает вследствие того, что мы берем этот вектор в точке траектории частицы, которая движется вдоль силовой линии, так что

$$\dot{\mathbf{h}} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial r_\alpha} \dot{r}_\alpha = \langle \dot{\mathbf{r}} = v_{\parallel} \mathbf{h} \rangle = v_{\parallel} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}$$

где мы пренебрегли добавочной поперечной скоростью $v_{\perp}$. Таким образом ⁶,

$$\dot{v}_{\parallel} = h \dot{v}_{\parallel} + v_{\parallel}^2 (\mathbf{h} \cdot \nabla) h$$

Физический смысл величины $(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}$ легко показать, если рассмотреть бесконечно малый сдвиг вдоль силовой линии на длину dl :

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{h} dl) \approx \mathbf{h}(\mathbf{r}_0) + (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} dl$$

так что величина $(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}$ представляет собой изменение единичного вектора скорости $\mathbf{h}$ при сдвиге вдоль траектории, т.е. ускорение единичного вектора скорости. Это ускорение обычно записывают в виде ⁷

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} = \kappa \mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}}{\varrho}$$

где $\kappa = 1/\varrho$ - кривизна траектории; ϱ - радиус кривизны; $\mathbf{n}$ - единичный вектор нормали к траектории, который направлен к центру кривизны. Введем также вектор бинормали

$$\mathbf{b} = \mathbf{h} \times \mathbf{n}$$

который дополняет касательную и нормаль к траектории до ортогонального базиса в трехмерном пространстве.

Распишем последний член в правой части уравнения (7.25) с учетом того, что магнитный момент направлен против магнитного поля, $\boldsymbol{\mu} = -\hbar \boldsymbol{\mu}$,

$$(\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathcal{H} = -\mu (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathcal{H} = -\mu (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \mathcal{H} =$$

$$= -\mu \mathcal{H} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} - \mu \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathcal{H}$$

Тогда уравнение (7.25) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \dot{v}_{\parallel} + v_{\parallel}^2 (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} &= \omega \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{h} - \frac{\mu}{m\gamma} \mathcal{H} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \\ &\quad - \frac{\mu}{m\gamma} \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathcal{H} \end{aligned}$$

Вычислим векторное произведение обеих частей равенства (7.26) с вектором $\mathbf{h}$ и учтем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \times \mathbf{h} &= 0, \quad \mathbf{h} \times (\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{h}) = \mathbf{v}_{\perp} \\ \mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} &= \kappa \mathbf{h} \times \mathbf{n} = \kappa \mathbf{b} \end{aligned}$$

В итоге, получим

$$v_{\parallel}^2 \kappa \mathbf{b} = \omega \mathbf{v}_{\perp} - \frac{\mu \mathcal{H}}{m\gamma} \kappa \mathbf{b}$$

Подставляя

$$\mu = \frac{p_{\perp}^2}{2m\gamma \mathcal{H}}, \quad p_{\perp} = m\gamma u_{\perp}$$

находим

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\kappa}{\omega} \mathbf{b} \left(v_\parallel^2 + \frac{\mathbf{u}_\perp^2}{2} \right)$$

Таким образом, добавочная, как говорят, дрейфовая, поперечная скорость направлена по бинормали к силовой линии магнитного поля. Из этой же формулы, между прочим, видно, что по порядку величины

$$v_\perp \sim \frac{\omega_\parallel}{\omega} \sqrt{v_\parallel^2 + \frac{\mathbf{u}_\perp^2}{2}}$$

где мы ввели характерную частоту движения на масштабе неоднородности

$$\omega_\parallel \sim \frac{\sqrt{v_\parallel^2 + \frac{\mathbf{u}_\perp^2}{2}}}{\varrho}$$

Поскольку рассмотрение проводилось в приближении, когда период обращения частицы вокруг силовой линии магнитного поля много меньше характерного времени смещения на длину порядка масштаба неоднородности поля,

$$\omega_\parallel \ll \omega$$

что еще раз подтверждает сделанные в ходе вывода формулы для скорости дрейфа приближения, основанные на малости этой скорости (например, при вычислении производной по времени единичного вектора $\mathbf{h}$, касательного к силовой линии).

Умножая далее уравнение (7.26) скалярно на вектор $\mathbf{h}$ и принимая во внимание зануление вкладов за счет нормали и бинормали к силовой линии, находим

$$\dot{v}_\parallel = -\frac{\mu}{m\gamma} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathcal{H} = -\frac{\mathbf{u}_\perp^2}{2\mathcal{H}} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathcal{H}$$

Вспоминая, что производная поля по времени определяется движением частицы вдоль силовой линии,

$$\dot{\mathcal{H}} = v_\parallel (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathcal{H}$$

получаем

$$v_\parallel \dot{v}_\parallel = -\frac{\mathbf{u}_\perp^2}{2\mathcal{H}} \dot{\mathcal{H}} \quad \Leftrightarrow \quad v_\parallel dv_\parallel = -\frac{\mathbf{u}_\perp^2}{2\mathcal{H}} d\mathcal{H}$$

Отсюда следует, что при движении частицы в область, где магнитное поле возрастает, ее продольная скорость монотонно уменьшается. Вспоминая, что энергия частицы в магнитном поле сохраняется, и пренебрегая малой скоростью поперечного дрейфа, заключаем, что

$$v_\parallel^2 + \frac{\mathbf{u}_\perp^2}{2} = \text{const.}, \quad \frac{\mathbf{u}_\perp^2}{\mathcal{H}} \quad - \text{адиабатический инвариант,}$$

так что движение в область растущего магнитного поля сопровождается ростом скорости квазипериодического вращения и уменьшением скорости продольного движения вдоль силовой линии вплоть до нулевого значения. Поскольку при этом величина ускорения в продольном направлении $\dot{v}_\parallel$ определяется адиабатическим инвариантом и отлична от нуля, $v_\parallel$ меняет знак, и частица приобретает скорость в направлении уменьшения поля, т.е. имеет место эффект отражения частицы от области с большими значениями магнитного поля: эффект магнитного зеркала.

Таким образом, движение частицы в слабо неоднородном магнитном поле имеет три компоненты: - быстрое вращение вокруг силовой линии магнитного поля с частотой ω и скоростью $\mathbf{u}_\perp$ с сохранением адиабатического инварианта $\mathbf{u}_\perp^2/\mathcal{H} = \text{const.}$; - движение вдоль силовой линии со скоростью $v_\parallel$ в границах, которые определяются отражением от областей с большим значением магнитного поля: магнитное зеркало; - дрейф в направлении бинормали к силовой линии магнитного поля со скоростью $v_\perp$.

21.1.6 Motion in electric and magnetic fields

Theory

Наконец, рассмотрим движение заряда в случае одновременного наличия однородных и постоянных электрического и магнитного полей.

Мы ограничимся при этом нерелятивистским случаем, когда скорость заряда $v \ll c$, и потому его импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$; как мы увидим ниже, для этого необходимо, чтобы электрическое поле было мало по сравнению с магнитным.

Направление $\mathbf{H}$ выберем за ось z , а плоскость, проходящую через векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$, за плоскость yz .

Тогда уравнения движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]$$

напишутся в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c}\dot{y}H \\ m\ddot{y} &= eE_y - \frac{e}{c}\dot{x}H, \\ m\ddot{z} &= eE_z \end{aligned}$$

Из третьего уравнения видно, что вдоль оси z заряд движется равномерно-ускоренно, т. е.

$$z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t$$

Умножая второе из уравнений (22.1) на i и складывая с первым, находим:

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) + i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) = i\frac{e}{m}E_y$$

($\omega = eH/mc$).

Интеграл этого уравнения, где $\dot{x} + i\dot{y}$ рассматривается как неизвестное, равен сумме интеграла этого же уравнения без правой части и частного интеграла уравнения с правой частью.

Первый из них есть $ae^{-i\omega t}$, второй равен $eE_y/m\omega = cE_y/H$.

Таким образом,

$$\dot{x} + i\dot{y} = ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{H}$$

Постоянная a , вообще говоря, комплексная.

Написав ее в виде $a = be^{i\alpha}$ с вещественными b и α , мы видим, что поскольку a умножается на $e^{-i\omega t}$, то, выбирая соответствующим образом начало отсчета времени, мы можем придать фазе α любое значение.

Выберем ее так, чтобы a было вещественно.

Тогда, отделяя в $\dot{x} + i\dot{y}$ мнимую и вещественную части, находим:

$$\dot{x} = a \cos \omega t + c \frac{E_y}{H}, \quad \dot{y} = -a \sin \omega t$$

При этом в момент времени $t = 0$ скорость направлена по оси x .

Мы видим, что компоненты скорости частицы являются периодическими функциями времени; их средние значения равны

$$\bar{\dot{x}} = \frac{cE_y}{H}, \quad \bar{\dot{y}} = 0$$

Эту среднюю скорость движения заряда в скрещенных электрическом и магнитном полях часто называют скоростью электрического дрейфа $\mathbf{v}_E$ ее направление перпендикулярно к обоим полям и не зависит от знака заряда.

В векторном виде ее можно записать как

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{c[\mathbf{E}\mathbf{H}]}{H^2}$$

Все формулы этого параграфа применимы, если скорость частиц мала по сравнению со скоростью света; мы видим, что для этого требуется, в частности, чтобы электрическое и магнитное поля удовлетворяли условию

$$\frac{E_y}{H} \ll 1$$

абсолютные же величины E_y и H могут быть произвольными.

Интегрируя еще раз уравнения (22.3) и выбирая постоянные интегрирования так, чтобы при $t = 0$ было $x = y = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{\omega} \sin \omega t + \frac{cE_y}{H} t \\ y &= \frac{a}{\omega} (\cos \omega t - 1) \end{aligned}$$

Рассматриваемые как параметрические уравнения кривой, эти уравнения определяют собой так называемую трохойду.

В зависимости от того, больше или меньше абсолютная величина a , чем абсолютная величина cE_y/H , проекция траектории частицы на плоскость xy имеет вид, изображенный соответственно на рис. 6, а и 6, б. Если $a = -cE_y/H$, то (22.6) переходит в

$$\begin{aligned} x &= \frac{cE_y}{\omega H} (\omega t - \sin \omega t) \\ y &= \frac{cE_y}{\omega H} (1 - \cos \omega t) \end{aligned}$$

т.е. проекция траектории на Плоскость xy является циклоидой.
(рис добавлю потом)

релятивистское движение заряда в параллельных однородных электрическом и магнитном полях

(?? а нерел движение какое кст??)

Определить релятивистское движение заряда в параллельных однородных электрическом и магнитном полях.

Магнитное поле не влияет на движение вдоль совместного направления $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (ось z), которое происходит, следовательно, под действием одного лишь электрического поля; поэтому согласно § 20 находим:

$$z = \frac{\mathcal{E}_{\text{кин}}}{eE}, \quad \mathcal{E}_{\text{кин}} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}$$

Для движения в плоскости xy имеем уравнения:

$$\dot{p}_x = \frac{e}{c} H v_y, \quad \dot{p}_y = -\frac{e}{c} H v_x$$

или

$$\frac{d}{dt}(p_x + ip_y) = -i \frac{eH}{c} (v_x + iv_y) = -\frac{ieHc}{\mathcal{E}_{\text{кин}}} (p_x + ip_y)$$

Отсюда

$$p_x + ip_y = p_t e^{-i\varphi}$$

где p_t - постоянное значение проекции импульса на плоскость xy , а вспомогательная величина φ введена согласно соотношению

$$d\varphi = eHc \frac{dt}{\mathcal{E}_{\text{кин}}}$$

откуда

$$ct = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \operatorname{sh} \frac{E}{H} \varphi$$

Далее имеем:

$$p_x + ip_y = p_t e^{-i\varphi} = \frac{\mathcal{E}_{\text{кин}}}{c^2} (\dot{x} + i\dot{y}) = \frac{eH}{c} \frac{d(x + iy)}{d\varphi}$$

откуда

$$x = \frac{cp_t}{eH} \sin \varphi, \quad y = \frac{cp_t}{eH} \cos \varphi$$

Формулы (1)-(2) вместе с формулой

$$z = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \operatorname{ch} \frac{E}{H} \varphi$$

определяют в параметрическом виде движение частицы.

Траектория представляет собой винтовую линию с радиусом cp_t/eH и монотонно возрастающим шагом, по которой частица движется с убывающей угловой скоростью $\dot{\varphi} = eHc/\mathcal{E}_{\text{кин}}$ и стремящейся к c скоростью вдоль оси z .

Релятивистское движение во взаимно перпендикулярных и равных по величине электрическом и магнитном полях

Определить релятивистское движение заряда во взаимно перпендикулярных и равных по величине электрическом и магнитном полях

Выбирая ось z вдоль направления $\mathbf{H}$, а ось y - в направлении $\mathbf{E}$ и полагая $E = H$, напомним уравнения движения:

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{e}{c} E v_y, \quad \frac{dp_y}{dt} = eE \left(1 - \frac{v_x}{c}\right), \quad \frac{dp_z}{dt} = 0$$

и, как их следствие, уравнение (17.7):

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt} = eE v_y$$

Из этих уравнений имеем:

$$p_z = \text{const}, \quad \mathcal{E}_{\text{кин}} - cp_x = \text{const} \equiv \alpha$$

Используя также равенство

$$\mathcal{E}_{\text{кин}}^2 - c^2 p_x^2 = (\mathcal{E}_{\text{кин}} + cp_x)(\mathcal{E}_{\text{кин}} - cp_x) = c^2 p_y^2 + \varepsilon^2$$

$$\left(\text{где } \varepsilon^2 = m^2 c^4 + c^2 p_z^2 = \text{const} \right), \text{ находим:}$$

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} + cp_x = \frac{1}{\alpha} (c^2 p_y^2 + \varepsilon^2)$$

и затем:

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} = \frac{\alpha}{2} + \frac{c^2 p_y^2 + \varepsilon^2}{2\alpha},$$

$$p_x = -\frac{\alpha}{2c} + \frac{c^2 p_y^2 + \varepsilon^2}{2\alpha c}.$$

Далее пишем:

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} \frac{dp_y}{dt} = eE \left(\mathcal{E}_{\text{кин}} - \frac{\mathcal{E}_{\text{кин}} v_x}{c} \right) = eE (\mathcal{E}_{\text{кин}} - cp_x) = eE\alpha$$

откуда

$$2eEt = \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \right) p_y + \frac{c^2}{3\alpha^2} p_y^3$$

Для определения траектории в уравнениях

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2 p_x}{\mathcal{E}_{\text{кин}}}, \dots$$

переходим к переменной p_y согласно $dt = \mathcal{E}_{\text{кин}} dp_y / eE\alpha$, после чего интегрирование приводит к формулам

$$x = \frac{c}{2eE} \left(-1 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \right) p_y + \frac{c^3}{6\alpha^2 eE} p_y^3$$

$$y = \frac{c^2}{2\alpha eE} p_y^2, \quad z = \frac{p_z c^2}{eE\alpha} p_y$$

Формулы (1)-(2) полностью определяют в параметрическом виде (параметр p_y) движение частицы.

Обратим внимание на то, что наиболее быстро возрастает скорость движения в направлении, перпендикулярном $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (ось x).

скорость дрейфа ведущего центра орбиты (??!!)

Определить скорость дрейфа ведущего центра орбиты нерелятивистской заряженной частицы в квазиродном постоянном магнитном поле (H. Alfven, 1940)

Предположим сначала, что частица движется по круговой орбите, т.е. ее скорость не имеет продольной (вдоль поля) составляющей.

Представим уравнение траектории частицы в виде $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) + \zeta(t)$, где $\mathbf{R}(t)$ - радиус-вектор ведущего центра (медленно меняющаяся функция времени), а $\zeta(t)$ - быстро осциллирующая величина, изображающая вращательное движение вокруг ведущего центра.

Усредним действующую на частицу силу $\frac{e}{c}[\mathbf{rH}(\mathbf{r})]$ по периоду осцилляционного (кругового) движения (ср.

I §30) Входящую в нее функцию $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ разложим по степеням ζ :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{R}) + (\zeta \nabla) \mathbf{H}(\mathbf{R})$$

При усреднении члены первого порядка по осциллирующей величине $\zeta(t)$ обращаются в нуль, а член второго порядка приводит к появлению дополнительной силы

$$\mathbf{f} = \frac{e}{c} [\overline{\dot{\zeta}(\zeta \nabla) \mathbf{H}}]$$

Для кругового движения

$$\dot{\zeta} = \omega[\zeta \mathbf{n}], \quad \zeta = \frac{v_{\perp}}{\omega}$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении $\mathbf{H}$; частота $\omega = eH/mc$; $v_{\perp}$ - скорость частицы в ее круговом движении.

Среднее значение произведений компонент вектора ζ , вращающегося в плоскости (перпендикулярной к $\mathbf{n}$):

$$\overline{\zeta_{\alpha}\zeta_{\beta}} = \frac{1}{2}\zeta^2\delta_{\alpha\beta}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ - единичный тензор в этой плоскости.

В результате получим:

$$\mathbf{f} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2H}[[\mathbf{n}\nabla]\mathbf{H}]$$

В силу уравнений $\text{div } \mathbf{H} = 0, \text{rot } \mathbf{H} = 0$, которым удовлетворяет постоянное поле $\mathbf{H}(\mathbf{R})$, имеем:

$$[[\mathbf{n}\nabla]\mathbf{H}] = -\mathbf{n} \text{div } \mathbf{H} + (\mathbf{n}\nabla)\mathbf{H} + [\mathbf{n} \text{rot } \mathbf{H}] = (\mathbf{n}\nabla)\mathbf{H} = H(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{n} + \mathbf{n}(\mathbf{n}\nabla H)$$

Нас интересует поперечная (по отношению к $\mathbf{n}$) сила, приводящая к смещению орбиты; она равна

$$f = -\frac{mv_{\perp}^2}{2}(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{n} = \frac{mv_{\perp}^2}{2\rho}\nu$$

где ρ - радиус кривизны силовой линии поля в данной точке, а ν - единичный вектор, направленный от центра кривизны к этой точке

Случай, когда частица обладает также и продольной (вдоль $\mathbf{n}$) скоростью $v_{\parallel}$, сводится к предыдущему, если перейти к системе отсчета, вращающейся вокруг мгновенного центра кривизны силовой линии (траектории ведущего центра) с угловой скоростью $v_{\parallel}/\rho$.

В этой системе частица не имеет продольной скорости, но появляется дополнительная поперечная сила центробежная сила, равная $\nu mv_{\parallel}^2/\rho$.

Таким образом, полная поперечная сила

$$\mathbf{f}_{\perp} = \nu \frac{m}{\rho} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right)$$

Эта сила эквивалентна постоянному электрическому полю с напряженностью $f_{\perp}/e$.

Согласно (22.4) она вызывает дрейф ведущего центра орбиты со скоростью

$$\mathbf{v}_d = \frac{1}{\omega\rho} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) [\nu\mathbf{n}]$$

Знак этой скорости зависит от знака заряда.

МФТИ.Иванов.25.

Движение в скрещенных полях. Найти движение релятивистской частицы массы m и заряда e в перпендикулярных электрическом и магнитном полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. а) В случае $E > B$ б) В случае $E = B$ в) В случае $E < B$. г) Определить траекторию в при $E \ll B$ в нерелятивистском случае.

Уравнения движения частицы в 4-мерном виде

$$\frac{du^i}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^i_j u^j.$$

Для постоянного однородного поля тензор F^i_j - постоянная матрица. Таким образом,

$$u^i(\tau) = \exp\left(\frac{e\tau}{mc} F^i_j\right) u^j(0) = \left[\delta^i_j + \frac{e\tau}{mc} F^i_j + \frac{1}{2} \left(\frac{e\tau}{mc}\right)^2 F^i_k F^k_j + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{e\tau}{mc}\right)^n (F^n)^i_j + \dots \right] u^j(0).$$

Выберем систему координат так, что $\mathbf{E} \uparrow y, \mathbf{B} \uparrow z$. Тогда

$$F^i_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ E & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^2)^i_j = F^i_k F^k_j = \begin{pmatrix} E^2 & -EB & 0 & 0 \\ EB & -B^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^2 - B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(F^3)^i_j = F^i_k F^k_l F^l_j = (E^2 - B^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ E & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (E^2 - B^2) F^i_j.$$

Мы видим, что в особом случае $E = B$ ряд для экспоненты обрывается после 2-й степени.

$$\exp\left(\frac{e\tau}{mc} F^i_j\right) = \delta^i_j + \frac{e\tau}{mc} F^i_j + \frac{1}{2} \left(\frac{e\tau}{mc}\right)^2 F^i_k F^k_j$$

$$u^i(\tau) = \left(\delta^i_j + \frac{e\tau}{mc} F^i_j + \frac{1}{2} \left(\frac{e\tau}{mc}\right)^2 F^i_k F^k_j\right) u^j(0),$$

$$x^i(\tau) = \left(\tau \delta^i_j + \frac{e\tau^2}{2mc} F^i_j + \frac{\tau^3}{6} \left(\frac{e}{mc}\right)^2 F^i_k F^k_j\right) u^j(0) + x^i(0).$$

В других случаях определим генераторы, через которые удобно писать матричные экспоненты.

При $E > B$

$$a^i_j = \frac{F^i_j}{\sqrt{E^2 - B^2}} = (a^3)^i_j$$

$$\exp\left(\frac{e\tau}{mc} F^i_j\right) = \delta^i_j + a^i_j \operatorname{sh}\left(\sqrt{E^2 - B^2} \frac{e\tau}{mc}\right) + (a^2)^i_j \left(\operatorname{ch}\left(\sqrt{E^2 - B^2} \frac{e\tau}{mc}\right) - 1\right).$$

$$u^i(\tau) = \left(\delta^i_j + a^i_j \operatorname{sh}\left(\sqrt{E^2 - B^2} \frac{e\tau}{mc}\right) + (a^2)^i_j \left(\operatorname{ch}\left(\sqrt{E^2 - B^2} \frac{e\tau}{mc}\right) - 1\right)\right) u^j(0),$$

$$x^i(\tau) = \left(\tau \delta^i_j + a^i_j \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{E^2 - B^2} \frac{e\tau}{mc}\right) - 1}{\sqrt{E^2 - B^2} \frac{e}{mc}} + (a^2)^i_j \left(\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{E^2 - B^2} \frac{e\tau}{mc}\right)}{\sqrt{E^2 - B^2} \frac{e}{mc}} - \tau\right)\right) u^j(0) + x^i(0),$$

При $E < B$

$$b^i_j = \frac{F^i_j}{\sqrt{B^2 - E^2}} = -(b^3)^i_j.$$

$$\exp\left(\frac{e\tau}{mc} F^i_j\right) = \delta^i_j + b^i_j \sin\left(\sqrt{B^2 - E^2} \frac{e\tau}{mc}\right) - (b^2)^i_j \left(\cos\left(\sqrt{B^2 - E^2} \frac{e\tau}{mc}\right) - 1\right).$$

$$u^i(\tau) = \left(\delta^i_j + b^i_j \sin\left(\sqrt{B^2 - E^2} \frac{e\tau}{mc}\right) - (b^2)^i_j \left(\cos\left(\sqrt{B^2 - E^2} \frac{e\tau}{mc}\right) - 1\right)\right) u^j(0),$$

$$x^i(\tau) = \left(\tau \delta^i_j - b^i_j \frac{\cos\left(\sqrt{B^2 - E^2} \frac{e\tau}{mc}\right) - 1}{\sqrt{B^2 - E^2} \frac{e}{mc}} - (b^2)^i_j \left(\frac{\sin\left(\sqrt{B^2 - E^2} \frac{e\tau}{mc}\right)}{\sqrt{B^2 - E^2} \frac{e}{mc}} - \tau\right)\right) u^j(0) + x^i(0),$$

Собственные числа и векторы

Для матрицы F^i_j легко найти собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{E^2 - B^2}.$$

Соответствующие собственные векторы

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} B \\ E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_{3,4} = \begin{pmatrix} E \\ B \\ \pm\sqrt{E^2 - B^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $E \neq B$ мы получаем 4 линейно независимых собственных вектора. Нормированный (по Минковскому) базис собственных векторов:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{E^2 - B^2}} \begin{pmatrix} B \\ E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{-2(E^2 - B^2)}} \begin{pmatrix} E \\ B \\ \pm\sqrt{E^2 - B^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(h_1, h_1) = (h_2, h_2) = 1, \quad (h_3, h_3) = (h_4, h_4) = 0, \quad (h_3, h_4) = 1.$$

Векторы $h_{3,4}$ имеют нулевой квадрат. Через эти векторы мы можем построить проекторы на их направления

$$(P_1)^i{}_j = (h_1)^i (h_1)_j, \quad (P_2)^i{}_j = (h_2)^i (h_2)_j, \quad (P_3)^i{}_j = (h_3)^i (h_4)_j, \quad (P_4)^i{}_j = (h_4)^i (h_3)_j.$$

$$F^i{}_j = \sum_{k=1}^4 \lambda_k (P_k)^i{}_j.$$

Поскольку проекторы взаимно коммутируют, матричную экспоненту от $F^i{}_j$ можно представить как произведение матричных экспонент отдельных слагаемых данной суммы. Особый случай $E = B$ При $E = B$ три собственных вектора сливаются $\lambda_{3,4} = \lambda_2 = 0$, $h_{3,4} = h_2$. В этом случае матрица не может быть диагонализирована, но может быть приведена к жордановой форме с жордановой клеткой 3×3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Такая матрица при возведении в третью степень обнуляется. Это свойство не зависит от выбранного базиса и выводится из того, что $F^3 = 0$. Вместо собственных векторов мы можем найти присоединённые. Присоединённый вектор 1-го порядка

$$j_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F j_1 = h_2 + \underbrace{\lambda}_0 j_1.$$

Присоединённый вектор 2-го порядка

$$j_2 = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F j_2 = j_1 + \underbrace{\lambda}_0 j_2$$

Случай $E > B$

Случай $E > B$ сводится к случаю $B = 0$ при помощи преобразования Лоренца по оси x

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \vartheta & -\text{sh } \vartheta & 0 & 0 \\ -\text{sh } \vartheta & \text{ch } \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{th } \vartheta = \frac{B}{E}.$$

Плоскость, натянутая на собственные векторы $h_{3,4}$, оказывается плоскостью $t' - y'$. Эта замена координат - переход к движущейся со скоростью $(c\frac{B}{E}, 0, 0)$ системе отсчёта (преобразование Лоренца). При этом

$$E \rightarrow E' = \sqrt{E^2 - B^2}, \quad B \rightarrow B' = 0.$$

При $B' = 0$ матричная экспонента (3.9.4) - преобразование Лоренца для скорости $\text{th } \frac{eE'\tau}{mc}$, направленной по оси y' .

Случай $E < B$

Случай $E < B$ сводится к случаю $E = 0$ при помощи преобразования Лоренца по оси x

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \vartheta & -\text{sh } \vartheta & 0 & 0 \\ -\text{sh } \vartheta & \text{ch } \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{th } \vartheta = \frac{E}{B}.$$

Плоскость, натянутая на собственные векторы $h_{3,4}$ оказывается плоскостью $x' - y'$. Эта замена координат - переход к движущейся со скоростью $(c\frac{E}{B}, 0, 0)$ системе отсчёта (преобразование Лоренца). При этом

$$E \rightarrow E' = 0, \quad B \rightarrow B' = \sqrt{B^2 - E^2}.$$

При $E' = 0$ матричная экспонента (3.9.5) - поворот на угол $\text{th } \frac{eB'\tau}{mc}$, вокруг оси z' .

Случай $E \ll B$, нерелятивистская частица

В системе отсчёта, движущейся со скоростью $(c\frac{E}{B}, 0, 0)$ ($c\frac{E}{B} \ll c$), мы имеем нерелятивистскую частицу в однородном магнитном поле, направленном по оси z . По оси z скорость частицы постоянна, а в плоскости $x - y$ частица равномерно движется по окружности (частота вращения $\frac{eB}{mc}$, скорость зависит от начальных условий). При переходе в исходную систему отсчёта в нерелятивистском пределе заменяем преобразование Лоренца на преобразование Галилея, в результате на круговое движение в плоскости $x - y$ накладывается движение с постоянной скоростью дрейфа $(c\frac{E}{B}, 0, 0)$. В зависимости от соотношения скорости вращения и скорости дрейфа получаются следующие кривые

(тут фото разных циклоид)

Ответ

Задача 25. Движение в скрещенных полях. Уравнения движения частицы в 4-мерном виде $\frac{du^i}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^i_j u^j$. Для постоянного однородного поля тензор F^i_j - постоянная матрица. Таким образом,

$$u^i(\tau) = \exp\left(\frac{e\tau}{mc} F^i_j\right) u^j(0) = \left[\delta^i_j + \frac{e\tau}{mc} F^i_j + \frac{1}{2} \left(\frac{e\tau}{mc}\right)^2 F^i_k F^k_j + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{e\tau}{mc}\right)^n (F^n)^i_j + \dots \right] u^j(0).$$

Выберем систему координат так, что $\mathbf{E} \uparrow y, \mathbf{B} \uparrow z$. Тогда

$$F_{jj}^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ E & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^2)^i_j = F^i_k F^k_j = \begin{pmatrix} E^2 & -EB & 0 & 0 \\ EB & -B^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^2 - B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(F^3)^i_j = F^i_k F^k_l F^l_j = (E^2 - B^2) F^i_j.$$

Мы видим, что при $E = B$ ряд для экспоненты обрывается после 2-й степени. В других случаях определим генераторы, через которые удобно писать матричные экспоненты:

$$E > B: \quad a_j^i = \frac{F_j^i}{\sqrt{E^2 - B^2}} = (a^3)^i_j, \quad E < B: \quad b_j^i = \frac{F_{jj}^i}{\sqrt{B^2 - E^2}} = -(b^3)^i_j.$$

21.1.7 Some Typical Models of Motion of Particles

(по идее тут подготовка к задачам будет. мб перекину это в каталог, ибо как теория это почти не нужно.)

ЛЛ2-? Сила на стенку от плоской волны (??)

(??? пропишу как силу через поток энергии найти!!! $f_\alpha = -\sigma_{\alpha\beta} N_\beta$)

Сила $\mathbf{f}$, действующую на стенку, от которой отражается с коэффициентом отражения R падающая на нее плоская электромагнитная волна это сила светового давления, нормальная компонента которой имеет вид:

$$f_N = W(1 + R) \cos^2 \theta,$$

а тангенциальная:

$$f_t = W(1 - R) \sin \theta \cos \theta$$

Действительно, найти эту силу можно из потока импульса через эту площадь, ведь она есть вектор

$$f_\alpha = -\sigma_{\alpha\beta} N_\beta - \sigma'_{\alpha\beta} N_\beta,$$

где $\mathbf{N}$ - вектор нормали к поверхности стенки, а $\sigma_{\alpha\beta}$ и $\sigma'_{\alpha\beta}$ - компоненты тензоров напряжений падающей и отраженной волн.

(!! про тензор напряжений потом напишу, он важен)

Учитывая $T^{xx} = -\sigma_{xx} = W$, получим:

$$\mathbf{f} = W\mathbf{n}(\mathbf{Nn}) + W'\mathbf{n}'(\mathbf{Nn}')$$

По определению коэффициента отражения имеем: $W' = RW$.

Введя также угол падения θ (и равный ему же угол отражения) и переходя к компонентам, найдем нормальную силу (световое давление)

$$f_N = W(1 + R) \cos^2 \theta$$

и тангенциальную силу

$$f_t = W(1 - R) \sin \theta \cos \theta$$

ЛЛ2-? Движение заряда в поле плоской электромагнитной волны методом Гамильтона-Якоби

(перенесу про часть с движениями в полях, тут оставлю заготовки про это)

Методом Гамильтона-Якоби определим движение заряда в поле плоской электромагнитной волны. Уравнение Гамильтона-Якоби в четырехмерной форме есть:

$$g^{ik} \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} + \frac{e}{c} A_i \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^k} + \frac{e}{c} A_k \right) = m^2 c^2$$

Тот факт, что поле представляет собой плоскую волну, означает, что A^i являются функциями одной независимой переменной, которую можно представить в виде $\xi = k_i x^i$, где k^i - постоянный 4-вектор с равным нулю квадратом, $k_i k^i = 0$.

(???) Потенциалы подчиним лоренцеву условию

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{dA^i}{d\xi} k_i = 0$$

для переменного поля волны это условие эквивалентно равенству $A^i k_i = 0$.

(???) Ищем решение уравнения Г-Я в виде

$$S = -f_i x^i + F(\xi)$$

где $f^i = (f^0, \mathbf{f})$ - постоянный вектор, удовлетворяющий условию $f_i f^i = m^2 c^2$ где $S = -f_i x^i$ есть решение уравнения Гамильтона-Якоби для свободной частицы с 4-импульсом $p^i = f^i$. Тогда

$$\frac{e^2}{c^2} A_i A^i - 2\gamma \frac{dF}{d\xi} - \frac{2e}{c} f_i A^i = 0$$

где постоянная $\gamma = k_i f^i$.

Определив отсюда F , получим:

$$S = -f_i x^i - \frac{e}{c\gamma} \int f_i A^i d\xi + \frac{e^2}{2\gamma c^2} \int A_i A^i d\xi$$

(?? дальше какая-то идея, до которой я не дошел ещё)

Переходя к трехмерным обозначениям с фиксированной системой отсчета, выберем направление распространения волны в качестве оси x .

Тогда $\xi = ct - x$, а постоянная $\gamma = f^0 - f^1$.

Обозначив двухмерный вектор f_y, f_z через κ , получим из условия $f_i f^i = (f^0)^2 - (f^1)^2 - \kappa^2 = m^2 c^2$:

$$f^0 + f^1 = \frac{m^2 c^2 + x^2}{\gamma}$$

Выберем потенциалы в калибровке, в которой $\varphi = 0$, а $\mathbf{A}(\xi)$ лежит в плоскости yz .

После этого выражение (2) примет вид

$$S = \kappa \mathbf{r} - \frac{\gamma}{2} (ct + x) - \frac{m^2 c^2 + \kappa^2}{2\gamma} \xi + \frac{e}{c\gamma} \int \kappa \mathbf{A} d\xi - \frac{e^2}{2\gamma c^2} \int \mathbf{A}^2 d\xi$$

(в Г-Я в механике потом пропишу что ниже, пока хз)

Для определения движения приравняем производные $\partial S / \partial x, \partial S / \partial \gamma$ некоторым новым постоянным, которые можно обратить в нуль соответствующим выбором начала координат и начала отсчета времени.

Таким образом получим параметрические формулы (ξ - параметр):

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{\gamma} x_y \xi - \frac{e}{c\gamma} \int A_y d\xi, \\z &= \frac{1}{\gamma} x_z \xi - \frac{e}{c\gamma} \int A_z d\xi \\x &= \frac{1}{2} \left(\frac{m^2 c^2 + x^2}{\gamma^2} - 1 \right) \xi - \frac{e}{c\gamma^2} \int x \mathbf{A} d\xi + \frac{e^2}{2\gamma^2 c^2} \int \mathbf{A}^2 d\xi, \\ct &= \xi + x\end{aligned}$$

Обобщенный импульс $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$ и энергия $\mathcal{E}$ определяются дифференцированием действия по координатам и времени; это дает:

$$\begin{aligned}p_y &= x_y - \frac{e}{c} A_y, \\p_z &= x_z - \frac{e}{c} A_z \\p_x &= -\frac{\gamma}{2} + \frac{m^2 c^2 + x^2}{2\gamma} - \frac{e}{c\gamma} x \mathbf{A} + \frac{e^2}{2\gamma c^2} \mathbf{A}^2; \\\mathcal{E} &= (\gamma + p_x) c\end{aligned}$$

Если усреднить эти величины по времени, то члены с первой степенью периодической функции $\mathbf{A}(\xi)$ обратятся в нуль.

(?? что ниже - вообще не въехал)

Пусть система отсчета выбрана таким образом, что в ней частица в среднем покоится, т.е. ее средний импульс равен нулю, тогда

$$\kappa = 0, \quad \gamma^2 = m^2 c^2 + \frac{e^2}{c^2} \overline{\mathbf{A}^2}$$

Тогда окончательные формулы для определения движения примут вид

$$\begin{aligned}x &= \frac{e^2}{2\gamma^2 c^2} \int (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}) d\xi, & y &= -\frac{e}{c\gamma} \int A_y d\xi, & z &= -\frac{e}{c\gamma} \int A_z d\xi, \\ct &= \xi + \frac{e^2}{2\gamma^2 c^2} \int (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}) d\xi \\p_x &= \frac{e^2}{2\gamma c^2} (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}), & p_y &= -\frac{e}{c} A_y, & p_z &= -\frac{e}{c} A_z \\\mathcal{E} &= c\gamma + \frac{e^2}{2\gamma c} (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2})\end{aligned}$$

(?? и что с этими формулами делать???)

ЛЛ2-? Движение заряда в поле плоской электромагнитной волны другими способами(?)

(потренируюсь - пойму, что тут получается, а что нет. мб в часть про движение потом перенесу. Пока мне не очевидно, почему другие методы не рассматриваем. Потом попробую другие подходы, посмотрю, что они дадут. Пока хз.)

ЛЛ2-? Движение заряда в поле линейно поляризованной волны

(по сути упрощаем формулы из прошлого раздела, потом в другое место перенесу)

Определим движение заряда в поле плоской монохроматической линейно поляризованной волны. Выбирая направление поля $\mathbf{E}$ в волне в качестве оси y , пишем:

$$E_y = E = E_0 \cos \omega \xi, \quad A_y = A = -\frac{cE_0}{\omega} \sin \omega \xi$$

($\xi = t - x/c$).

Задача уже была решена выше, просто воспользуемся готовыми формулами:

(3)-(4) (вставлю их потом!!) задачи 2§47

Поэтому имеем в системе отсчета, в которой частица в среднем покоится следующее параметрическое (параметр $\eta = \omega \xi$) представление движения:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{e^2 E_0^2 c}{8\gamma^2 \omega^3} \sin 2\eta, & y &= -\frac{eE_0 c}{\gamma \omega^2} \cos \eta, & z &= 0 \\ t &= \frac{\eta}{\omega} - \frac{e^2 E_0^2}{8\gamma^2 \omega^3} \sin 2\eta, & \gamma^2 &= m^2 c^2 + \frac{e^2 E_0^2}{2\omega^2} \\ p_x &= -\frac{e^2 E_0^2}{4\gamma \omega^2} \cos 2\eta, & p_y &= \frac{eE_0}{\omega} \sin \eta, & p_z &= 0 \end{aligned}$$

Заряд движется в плоскости xy по симметричной 8-образной кривой с продольной осью вдоль оси y . Периоду движения отвечает изменение параметра η от 0 до 2π .

(потом подумаю про интерпретации, пока тут не знаю.)

ЛЛ2-? Движение заряда в поле поляризованной по кругу волны

(также в часть про движения частиц добавлю её)

Определим движение заряда в поле поляризованной по кругу волны, в которой поле имеет вид:

$$\begin{aligned} E_y &= E_0 \cos \omega \xi, & E_z &= E_0 \sin \omega \xi \\ A_y &= -\frac{cE_0}{\omega} \sin \omega \xi, & A_z &= \frac{cE_0}{\omega} \cos \omega \xi. \end{aligned}$$

(? тут решу потом, по идее это формулы выше)

Движение определяется формулами:

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= -\frac{ecE_0}{\gamma \omega^2} \cos \omega t, & z &= -\frac{ecE_0}{\gamma \omega^2} \sin \omega t, \\ p_x &= 0, & p_y &= \frac{eE_0}{\omega} \sin \omega t, & p_z &= -\frac{eE_0}{\omega} \cos \omega t, \\ \gamma^2 &= m^2 c^2 + \frac{c^2 E_0^2}{\omega^2} \end{aligned}$$

Таким образом, заряд движется в плоскости yz по окружности радиуса $ecE_0/\gamma\omega^2$ с постоянным по величине $p = eE_0/\omega$ импульсом; направление импульса $\mathbf{p}$ в каждый момент противоположно направлению магнитного поля $\mathbf{H}$ волны.

(?? интересно потом подумать будет про это, пока не актуально)

Особенности движения релятивистской частицы в скрещенных однородных полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, $\mathbf{y}$

Рассмотреть особенности движения релятивистской частицы с зарядом e , и массой m в скрещенных однородных полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, угол между которыми равен θ .

(белоусов предлагает рассмотреть, потом посмотрю.)

Траектория в перпендикулярных полях

Определить координаты $\mathbf{r}$ и время t заряженной частицы в лабораторной системе отсчета как функции собственного времени τ при ее движении в постоянных однородных электрическом и магнитном полях, перпендикулярных друг другу. В начальный момент времени частица находилась в начале координат и имела энергию $\mathcal{E}_0$ и импульс $\mathbf{p}_0$.

Траектория в параллельных полях

Определить траекторию движения заряженной частицы во взаимно перпендикулярных и равных друг другу однородных электрическом и магнитном полях. Найти кинетическую энергию частицы ($T = \mathcal{E} - mc^2$) как функцию собственного времени τ при движении ее в постоянных однородных электрическом и магнитном полях, параллельных друг другу $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$. В начальный момент времени частица покоилась в начале координат.

Время торможения в однородном электрическом поле (!!)

Найти время торможения $t_{\text{торм}}$ и длину пробега l до остановки релятивистской заряженной частицы с зарядом e , массой m и начальной энергией $\mathcal{E}_0$ в тормозящем однородном электрическом поле $\mathbf{E}$, параллельном начальной скорости частицы.

Запишем уравнение, определяющее изменение энергии частицы в трехмерной форме:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -|e|(\mathbf{E}\mathbf{v}) = -|e|Ec\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2}$$

или, что то же самое:

$$\frac{\mathcal{E}d\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{E}^2 - (mc^2)^2}} = -|e|cEdt$$

Поскольку $mc^2 \leq \mathcal{E} \leq \varepsilon_0$, то для полного времени торможения получаем

$$t_{\text{торм}} = \frac{1}{|e|cE} \sqrt{\varepsilon_0^2 - (mc^2)^2} \simeq \frac{T_0}{|e|cE}$$

где $T_0 = \varepsilon_0 - mc^2$ - начальная кинетическая энергия частицы. В однородном поле сила, действующая на частицу, постоянна, поэтому ее работа по торможению частицы до полной остановки, равная кинетической энергии частицы, есть

$$|e|El = T_0, \quad \text{откуда} \quad l = \frac{T_0}{|e|E}.$$

Этот очевидный результат также полезно получить из уравнений движения. Поскольку $\mathbf{E} \parallel z$, а импульс имеет отличную от нуля только z -компоненту, имеем

$$\frac{dp}{dt} = -|e|E, \quad p(t) = p_0 - |e|Et$$

откуда получаем уравнение

$$v = \frac{dz}{dt} = c \frac{p_0 - |e|Et}{\sqrt{(mc)^2 + (p_0 - |e|Et)^2}}.$$

Проинтегрировав данное уравнение в пределах $0 \leq t \leq t_{\text{торм}}$, находим необходимое выражение для $l = z(t_{\text{торм}}) - z(0)$.

21.1.8 Other about Motion in Fields

о магнитных зеркалах

(киселев упоминал, так что пропишу про это тоже что-то. пока не знаю, но помню, что такое что-то есть)

О применениях моделей движущихся зарядов

Обсудим, все различные возможности, которые открываются после того, как мы научились описывать движения частиц в полях.

(возможно, их будет много (?))

модель диэлектрической проницаемости из решений диффура

(сперва обсуждение этой модели)

вроде как очень даже часто от нее видим отклонения, но об этом уже в записи про ЭСС или твердого тела

(та теория про применение Крамерса-Кронига)

21.2 Selected Applications of Electrodynamics

21.2.1 Radio and Wi-Fi

(I'll write about it, since they are very important applications)

21.2.2 Electromagnetic Phenomena in Nature: An Overview

(подробно - в отдельной записи про них.)

21.3 Other Topics of Theoretical Electrodynamics

21.3.1 Quantization of Electromagnetic Field

What is a quantization and why we need it?

(a very important question)

Суть

Вывод

(тут теорию потом вставляю, нужно будет - раскрою эту тему, мб у Шмидта посмотрю, пока не до этого.)

21.3.2 ED in a Curved Space-time 1 [SEE SPECIAL NOTE ABOUT IT]

Обсудим подробно уравнения электродинамики в искривленном пространстве-времени, приведем способы их решения и примеры.

(потом в 1ю часть суть добавлю. Уменьшил раздел, потому что малопопулярный он, не за чем в оглавлении он.)

(по идее в начале этой части достаточное введение, чтобы нормально во всем разобраться тут. за счет низкой актуальности, ставлю сюда это.)

[FIRST I'LL WRITE IN THE SEPARATE NOTE, THEN I'LL COPY IT HERE. CURRENTLY, I AM NOT SURE THAT BELOW THERE IS A GOOD THEORY, SO DON'T REED IT]

Why does one need electrodynamics in a Cureved Space-time?

I'll write here the true answer.

- This is a fundamental question.

And this is a big motivation, actually. For a little applications, one could just take some equations and use them without understanding. But here, one needs to think much more, so it is a good fundamental question.

(elaborate)

- (????? what are the astrophysical applications and motivation of it???? I don't know yet.)

Построение и свойства уравнений в искривленном пространстве

Уравнения Максвелла в ковариантном виде в терминах $F_{\mu\nu}$

Уравнения Максвелла в искривленном пространстве получаются обобщением случая плоского пространства на случай кривого.

Напишем первую пару. Тензор электромагнитного поля должен быть $F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k}$, ведь он был $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$. Но в силу симметрии символов Кристоффеля $F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$, так что связь F_{ik} с потенциалом A_i не меняется. Поэтому первая пара уравнений Максвелла такая же, как в плоском пространстве:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0,$$

(?? пока не понимаю еще эту симметрию кристоффелей, потом подумаю.)

Для того чтобы написать вторую пару уравнений Максвелла, надо догадаться, что в криволинейных координатах 4-вектор тока имеет вид:

$$j^i = \frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^i}{dx^0}$$

Это можно понять, просто выведя выражение тока через объем и разделив на инвариантный объем.

(??? это не глубоко понимаю, подумаю лучше потом.)

Пространственный малый объем, построенный на элементах пространственных координат dx^1, dx^2, dx^3 , есть $\sqrt{\gamma}dV$, где γ - определитель пространственного метрического тензора, а $V \equiv dx^1 dx^2 dx^3$. Введем плотность зарядов ρ согласно определению $de = \rho \sqrt{\gamma}dV$, где de - заряд, находящийся в элементе объема $\sqrt{\gamma}dV$. Умножив это равенство с обеих сторон на dx^i , имеем:

$$dedx^i = \rho dx^i \sqrt{\gamma} dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}} \sqrt{-g} d\Omega \frac{dx^i}{dx^0},$$

где была использована формула $(-g = \gamma g_{00})$.

Произведение $\sqrt{-g}d\Omega$ есть инвариантный элемент 4-объема, так что 4-вектор тока определяется выражением

$$j^i = \frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^i}{dx^0}$$

величины dx^i/dx^0 - скорости изменения координат со «временем» x^0 - сами не составляют 4-вектора!

Компонента j^0 4-вектора тока, умноженная на $\sqrt{g_{00}}/c$, есть пространственная плотность зарядов. Для точечных зарядов плотность ρ выражается суммой δ -функций аналогично формуле плоскому случаю. Разве что надо уточнить определение этих функций в случае криволинейных координат. Мы будем понимать $\delta(\mathbf{r})$ по-прежнему как произведение $\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$ вне зависимости от геометрического смысла координат x^1, x^2, x^3 ; тогда равен единице интеграл по dV (а не по $\sqrt{\gamma}dV$): $\int \delta(\mathbf{r})dV = 1$. С таким определением δ -функций плотность зарядов

$$\rho = \sum_a \frac{e_a}{\sqrt{\gamma}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

а 4-вектор тока

$$j^i = \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \frac{dx^i}{dx^0}$$

(??? пока эти рассуждения не усвоены, подумаю про них позже.)

Сохранение заряда выражается уравнением непрерывности, которое отличается от $j^i_{;i} = 0$ лишь заменой обычных производных ковариантными:

$$j^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} j^i) = 0$$

Аналогичным образом обобщается вторая пара уравнений Максвелла $F^i_{;k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$; заменяя в них обычные производные ковариантными, находим:

$$F^i_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} F^i_k) = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

Наконец, уравнения движения заряженной частицы в гравитационном и электромагнитном полях получаются заменой в $mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^i_k u^k$ 4-ускорения du^i/ds на Du^i/ds :

$$mc \frac{Du^i}{ds} = mc \left(\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l \right) = \frac{e}{c} F^i_k u^k$$

(?? подумаю про все это потом)

Уравнения Максвелла в ковариантном виде в терминах $A_{\mu\nu}$

Уравнения Максвелла в искривленном пространстве в 3-мерной форме

Уравнения Максвелла в заданном гравитационном поле в трехмерной форме в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \mathbf{B}) & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \mathbf{D}) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{s} \end{aligned}$$

где $\mathbf{s}$ - вектор с компонентами $s^\alpha = \rho dx^\alpha/dt$, $x^0 = ct$ и rot , grad важно понимать имеено в искривленном виде.

Докажем это.

Введем 3-векторы $\mathbf{E}, \mathbf{D}$ и антисимметричные 3-тензоры $B_{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\beta}$ согласно определениям

$$E_\alpha = F_{0\alpha}, \quad B_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} \\ D^\alpha = -\sqrt{g_{00}}F^{0\alpha}, \quad H^{\alpha\beta} = \sqrt{g_{00}}F^{\alpha\beta}.$$

(??? !! обсуждение, почему у нас такие величины - в отдельной главе вначале, и это очень важно!!)

Введенные указанным образом величины не независимы.

Раскрывая равенства

$$F_{0\alpha} = g_{0l}g_{\alpha m}F^{lm}, \quad F^{\alpha\beta} = g^{\alpha l}g^{\beta m}F_{lm},$$

используя трехмерный метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + hg_{\alpha}g_{\beta}$, где $g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}$ и $h = g_{00}$, а также формулы $\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}$ и $g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta}g_\beta = -g^{0\alpha}$, получим:

$$D_\alpha = \frac{E_\alpha}{\sqrt{h}} + g^\beta H_{\alpha\beta}, \quad B^{\alpha\beta} = \frac{H^{\alpha\beta}}{\sqrt{h}} + g^\beta E^\alpha - g^\alpha E^\beta.$$

(?!!! это у меня не вышло, спрошу того, кто разбирается, как это вывести?? или еще раз попробую это вывести.)

Введем векторы $\mathbf{B}, \mathbf{H}$, дуальные тензорам $B_{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\beta}$, согласно определению

$$B^\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}e^{\alpha\beta\gamma}B_{\beta\gamma}, \quad H_\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}e_{\alpha\beta\gamma}H^{\beta\gamma}$$

где знак минус введен для того, чтобы в галилеевых координатах векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ совпадали с обычной напряженностью магнитного поля.

(эти определения выше следует буду обсуждать в разделе про ввод параметров)

Тогда полученные тождества можно записать в виде

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{h}} + [\mathbf{H}\mathbf{g}], \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{h}} + [\mathbf{g}\mathbf{E}]$$

(это тоже не очень получилось вывести, потом переделаю и спрошу у кого-то про это.)

Вводя определения $E_\alpha = F_{0\alpha}, B_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}, D^\alpha = -\sqrt{g_{00}}F^{0\alpha}, H^{\alpha\beta}$ в $\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0$, получим уравнения:

$$\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial B_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = 0 \\ \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^0} + \frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial E_\beta}{\partial x^\alpha} = 0$$

или, перейдя к дуальным величинам B_α, H^α :

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\mathbf{B})$$

где $x^0 = ct$ и rot, grad важно понимать имеено в искривленном виде.

(это потом раскрою, как конкретно???)

Аналогичным образом из $\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}F^{ik}) = -\frac{4\pi}{c}j^i$ находим уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{\gamma}D^\alpha) = 4\pi\rho \\ \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\sqrt{\gamma}H^{\alpha\beta}) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^0}(\sqrt{\gamma}D^\alpha) = -4\pi\rho\frac{dx^\alpha}{dx^0},$$

или в трехмерных векторных обозначениях:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \mathbf{D}) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{s}\end{aligned}$$

где $\mathbf{s}$ - вектор с компонентами $s^\alpha = \rho dx^\alpha / dt$.

Уравнение непрерывности $j^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} j^i) = 0$ есть в трехмерной форме:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \rho) + \operatorname{div} \mathbf{s} = 0$$

О схожести электродинамики в искривленном пространстве с электродинамикой в материальных средах (??)

(подробно обсудим эту аналогию! она важная, как мне кажется, но пока не особо разбираюсь.)

Обратим внимание на аналогию (конечно, чисто формальную) уравнений Максвелла в искривленном пространстве в 3-мерной форме с уравнениями для электромагнитного поля в материальных средах.

В частности, в статическом гравитационном поле в членах с производными по времени выпадает $\sqrt{\gamma}$, а связь (4) сводится к $\mathbf{D} = \mathbf{E}/\sqrt{h}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}/\sqrt{h}$.

Качественное описание электродинамики в искривленном пространстве (??)

Качественно имеется следующая картина.

В отношении своего воздействия на электромагнитное поле статическое гравитационное поле играет роль среды с электрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon = \mu = 1/\sqrt{h}$.

(? всё?)

Иллюстративное решение уравнений Максвелла в искривленном пространстве в 3-мерной форме

Обсудим способы решения электродинамики в искривленном пространстве.

Иллюстративное решение уравнений Максвелла в искривленном пространстве в 4-мерной форме

(тут иллюстрация, как с ним работать)

Уравнения электродинамики в искривленном пространстве по F. Cabral и F. S. N. Lobo

Maxwell's inhomogeneous equations

We will consider electromagnetic fields on this curved spacetime background without taking into consideration the influence of the electromagnetic fields on spacetime geometry. To explore the physical applications we will consider the usual field equations derived from the action principle, which assume implicitly local, linear, homogeneous and isotropic constitutive relations (2.41).

The Faraday tensor previously introduced in Eq. (2.36) has the following components

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

where the last equality follows from the fact that the spacetime manifold is torsionless, i.e., the anti-symmetric part of the connection is zero. Note that following the formalism introduced in the first section, $F_{\mu\nu}$ are the components of the Faraday 2-form $\mathbf{F}$ and A_λ are the components of the electromagnetic potential 1-form $\mathbf{A}$. On the other hand, we saw that the electric field $\mathbf{E}$ is related to lines being a natural line integrand and therefore is represented by a 1-form (a covector) in the 3-dimensional space, while the magnetic field $\mathbf{B}$ is related to surfaces being represented by a 2-form with components B_{jk} that can be mapped to the (contravariant) components of a vector density B^i which are natural surface integrands. Therefore, we introduce the following definitions

$$\begin{aligned} F_{0k} &= \frac{1}{c} \partial_t A_k - \partial_k A_0 \equiv \frac{E_k}{c} \\ F_{jk} &= \partial_j A_k - \partial_k A_j \equiv -B_{jk} = -\epsilon_{ijk} B^i \end{aligned}$$

The spacetime metric and its inverse are used to lower or raise indices and so we have

$$F^{\mu\nu} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta}, \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu.$$

The well-known Maxwell equations, which follow from the action in Eq. (2.47) (with the appropriate source term) and from a Bianchi identity (2.36), and given by

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad \nabla_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0,$$

are compatible with charge conservation and magnetic flux conservation. Very importantly, the inhomogeneous equations above implicitly assume local, linear, homogeneous and isotropic constitutive relations. If we change these relations, we get a different set of field equations, with new predictions. This set of 8 equations includes the influence of spacetime geometry coming from the covariant derivative

$$\nabla_\mu F^{\lambda\nu} = \partial_\mu F^{\lambda\nu} + \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda F^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu F^{\lambda\alpha}$$

and from the fact that the (inverse) metric is used to raise indices according to Eq. (3.6). Recall that the general expression for the divergence of an antisymmetric tensor $\Theta^{\alpha\beta}$ in (pseudo) Riemann spacetime is given by

$$\nabla_\mu \Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \Theta^{\mu\nu})$$

In fact, after contracting μ with λ , the third term in Eq. (3.8) vanishes, since the (symmetric) connection is contracted with the components of an anti-symmetric tensor and on the other hand, for (pseudo) Riemann manifolds we can use the following relation $\Gamma_{k\varepsilon}^\varepsilon = \partial_k(\log(\sqrt{-g}))$, where a contraction is assumed in ε . Therefore, the inhomogeneous equations are given by

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu,$$

or, (?? почему не берем производную от F??? пока верю)

$$g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \partial_\mu F_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} \left[\partial_\mu (g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu}) + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) \right] = \mu_0 j^\nu$$

and more explicitly, in terms of the electric and magnetic components, we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \partial_\mu E_j (g^{0\mu} g^{j\nu} - g^{j\mu} g^{0\nu}) + \frac{1}{c} E_j \left[\partial_\mu (g^{0\mu} g^{j\nu} - g^{j\mu} g^{0\nu}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) (g^{0\mu} g^{j\nu} - g^{j\mu} g^{0\nu}) \right] \\ - \partial_\mu B^k g^{m\mu} g^{n\nu} \epsilon_{kmn} - B^k \epsilon_{kmn} \left[\partial_\mu (g^{m\mu} g^{n\nu}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) (g^{m\mu} g^{n\nu}) \right] = \mu_0 j^\nu. \end{aligned}$$

Case $\nu = 0$ gives the extended Gauss law in curved spacetime

$$\begin{aligned} \partial_\mu E_j (g^{0\mu} g^{j0} - g^{j\mu} g^{00}) + E_j \left[\partial_\mu (g^{0\mu} g^{j0} - g^{j\mu} g^{00}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) (g^{0\mu} g^{j0} - g^{j\mu} g^{00}) \right] \\ - \partial_\mu B^k g^{m\mu} g^{n0} \epsilon_{kmn} - B^k \epsilon_{kmn} \left[\partial_\mu (g^{m\mu} g^{n0}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) (g^{m\mu} g^{n0}) \right] = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

(???? и вот вообще есть ли смысл писать это в таком развернутом виде???? думаю, скорее нет, пока не знаю.)

The same result can be obtained from Eq. (2.33) via Eq. (2.42). This equation generalizes Gauss' law and when compared with Maxwell's theory in Minkowski spacetime, it predicts new electromagnetic phenomena in the presence of sufficiently strong gravitational fields. In particular, in the absence of charge densities, even static magnetic fields can in principle induce an electric field. The presence of magnetic fields in Gauss' law disappear for vanishing off-diagonal time-space metric components. In fact, these correspond to the components of the gravitomagnetic potential defined in the weak field (linear) approximation of gravity (see [25]). Therefore, there is an electromagnetic coupling via gravitomagnetic effects. In the absence of such terms, $g^{0j} = g^{j0} = 0$, we get

$$- (g^{jk} g^{00}) \partial_k E_j - E_j \left[\partial_k (g^{jk} g^{00}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k (\sqrt{-g}) g^{jk} g^{00} \right] = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

and for a diagonal metric, Gauss' law can be recast into the form

$$-g^{kk} g^{00} \partial_k E_k + E_k \gamma^k(\mathbf{x}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

with

$$\gamma^k(\mathbf{x}) \equiv - \left(g^{kk} g^{00} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k (\sqrt{-g}) + \partial_k (g^{kk} g^{00}) \right)$$

and where no contraction is assumed in Eq. (3.16). From Eq. (3.15) we see that for Minkowski spacetime the usual Gauss law is clearly recovered. More interesting is the fact that for geometries where the functions $\gamma^k(\mathbf{x})$ are non-vanishing, the electric field in vacuum will necessarily be non-uniform, i.e., spacetime curvature will introduce an inevitable spatial variability in the electric field. In fact, suppose that in a given coordinate system the electric field has a single component E_j , then in vacuum we have $\gamma^j \neq 0$, which implies $\partial_j E_j \neq 0$.

We now consider the case where $\nu = i = 1, 2, 3$ in Eq. (3.11) which corresponds to the extended or generalized Maxwell-Ampère law in curved spacetime. We get

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \partial_\mu E_j (g^{0\mu} g^{ji} - g^{j\mu} g^{0i}) + \frac{1}{c} E_j \left[\partial_\mu (g^{0\mu} g^{ji} - g^{j\mu} g^{0i}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) (g^{0\mu} g^{ji} - g^{j\mu} g^{0i}) \right] \\ - \partial_\mu B_{mn} g^{m\mu} g^{ni} - B_{mn} \left[\partial_\mu (g^{m\mu} g^{ni}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) (g^{m\mu} g^{ni}) \right] = \mu_0 j^i, \end{aligned}$$

and for the case where $g^{0j} = g^{j0} = 0$, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \partial_t E_j (g^{00} g^{ji}) - \partial_j B_{mn} g^{mj} g^{ni} + \frac{1}{c^2} E_j \left[\partial_t (g^{00} g^{ji}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_t (\sqrt{-g}) (g^{00} g^{ji}) \right] \\ - B_{mn} \left[\partial_j (g^{mj} g^{ni}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j (\sqrt{-g}) (g^{mj} g^{ni}) \right] = \mu_0 j^i. \end{aligned}$$

Finally the case of a diagonal metric becomes

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \partial_t E_i (g^{00} g^{ii}) - \partial_j B_{ji} g^{jj} g^{ii} + \frac{1}{c^2} E_i \left[\partial_t (g^{00} g^{ii}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_t (\sqrt{-g}) (g^{00} g^{ii}) \right] \\ - B_{ji} \left[\partial_j (g^{jj} g^{ii}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j (\sqrt{-g}) (g^{jj} g^{ii}) \right] = \mu_0 j^i \end{aligned}$$

which may be written in the following form

$$\epsilon_{ijk} g^{ii} g^{jj} \partial_j B^k + \frac{1}{c^2} g^{00} g^{ii} \partial_t E_i + \epsilon_{ijk} \sigma^{jii} B^k + \frac{1}{c} E_i \xi^{ii} = \mu_0 j^i,$$

where the Einstein summation convention is applied in this expression only for j and k while the index i is fixed by the right hand side and

$$\begin{aligned} \sigma^{jii}(\mathbf{x}) &\equiv g^{jj} g^{ii} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j (\sqrt{-g}) + \partial_j (g^{jj} g^{ii}), \\ \xi^{ii}(\mathbf{x}) &\equiv g^{00} g^{ii} \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_t (\sqrt{-g}) + \frac{1}{c} \partial_t (g^{00} g^{ii}) \end{aligned}$$

Again no contraction is assumed in the above expression for σ^{jii} .

While in Gauss' law the electromagnetic coupling disappears for a diagonal metric, in the Maxwell-Ampère law this coupling is always present. In fact, the two terms containing the electric field are intertwined. Although for stationary geometries the term proportional to the electric field vanishes ($\xi^{ii} = 0$), while the usual term with the time derivative can still be present (for that to happen a time varying charge density in Gauss' law is sufficient), the opposite is not true. That is, for dynamical time varying geometries, these two terms come together since a non-stationary spacetime will necessarily induce a time varying electric field via Gauss' law. Accordingly, gravi- tational waves are expected to produce a direct effect in magnetic fields. As in the case of Gauss' law, new predictions emerge due to curved spacetime geometry. For vanishing currents the presence of an electric field can be a source of magnetic fields, with an extra contribution to Maxwell's displacement current induced by spacetime dynamics, coming from the functions ξ^{ii} .

These functions vanish for a stationary spacetime but might have an important contribution for strongly varying gravitational waves (high frequencies). Correspondingly, the MaxwellAmpère law can be rewritten in the following form

$$\epsilon_{ijk} \partial_j \bar{B}^{iijjk} = \mu_0 (j^i + j_D^i)$$

where

$$j^i \equiv \sqrt{-g} j^i, \quad j_D^i \equiv -\epsilon_0 \sqrt{-g} (g^{00} g^{ii} \partial_t E_i + c E_i \xi^{ii}),$$

and

$$\bar{B}^{iijjk} \equiv g^{ii} g^{jj} \sqrt{-g} B^k$$

Homogeneous equations

Explicitly, the homogeneous equations are given by

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \\ &- F_{\beta\lambda} \Gamma_{[\gamma\alpha]}^\lambda - F_{\alpha\lambda} \Gamma_{[\beta\gamma]}^\lambda - F_{\gamma\lambda} \Gamma_{[\alpha\beta]}^\lambda = 0 \end{aligned}$$

Therefore, for torsionless manifolds, as is the case of a spacetime with Riemann geometry, these equations give the usual Faraday law ($\partial_t B^i = -\epsilon^{ijk} \partial_j E_k$) and the Gauss law for magnetism ($\partial_j B^j = 0$), which are unaffected by spacetime geometry as long as spacetime torsion is zero.

Equations for the potential and electromagnetic waves

Let us review the inhomogeneous equations in terms of the electromagnetic potential. We start with the following expression

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu - ([\nabla_\mu, \nabla_\lambda] A^\mu + \nabla_\lambda \nabla_\mu A^\mu) g^{\lambda\nu}$$

and since $[\nabla_\mu, \nabla_\lambda] A^\alpha = R_{\varepsilon\mu\lambda}^\alpha A^\varepsilon$, where $R_{\varepsilon\mu\lambda}^\alpha$ and $R_{\varepsilon\mu}^\mu = R_{\varepsilon\lambda}$ are the components of the Riemann and $R_{\varepsilon\mu\lambda}^\mu \equiv R_{\varepsilon\lambda}$ are the components of the Riemann and Ricci tensors respectively, we get the following Maxwell equation

$$\nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu - g^{\lambda\nu} R_{\varepsilon\lambda} A^\varepsilon - \nabla^\nu (\nabla_\mu A^\mu) = \mu_0 j^\nu$$

For potentials satisfying the Lorentz condition (in curved spacetime) $\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^\mu) = 0$ we get

$$\nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu - g^{\lambda\nu} R_{\varepsilon\lambda} A^\varepsilon = \mu_0 j^\nu.$$

Using the expression for the (generalized) Laplacian in pseudo-Riemann manifolds, $\nabla_\mu \nabla^\mu \psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda \psi)$ we arrive at

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\lambda}) \partial_\lambda A^\nu - g^{\lambda\nu} R_{\varepsilon\lambda} A^\varepsilon = \mu_0 j^\nu,$$

which in vacuum is a generalized Proca-like equation with variable (spacetime dependent) effective mass induced by the curved geometry. The second term in Eq. (3.32) can also be written in terms of the Levi-Civita connection, through the formula $g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\lambda})$, valid in pseudo-Riemann geometry. In usual Procalike wave equations there is no such term dependent on the first derivative of the (massive) vector field. Similiar terms appear for wave phenomena with longitudinal modes. For a diagonal metric in vacuum we get,

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\mu}) \partial_\mu A^\nu - g^{\nu\nu} R_{\varepsilon\nu} A^\varepsilon = 0$$

with no contraction assumed in ν .

In general, and contrary to electromagnetism in Minkowski spacetime, the equations for the components of the electromagnetic 4 potential are coupled even in the Lorentz gauge. Notice also that for Ricci-flat spacetime, the term containing the Ricci tensor vanishes. Naturally, the vacuum solutions of GR are examples of such cases. New electromagnetic phenomena are expected to be measurable, for gravitational fields where the geometry dependent terms in Eq. (3.32) are significant.

We now consider the appropriate gauge-invariant expressions describing electromagnetic waves. Using Eq. (3.10), the vacuum field equations are given by

$$\begin{aligned} \nabla_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) F^{\mu\nu} = 0, \\ \nabla_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} &= 0, \end{aligned}$$

which are gauge invariant. If we consider the Maxwell-Ampère law in vacuum ($\nu = i$) and derive it with respect to time and then using the Faraday law and also Gauss' law in vacuum ($\nu = 0$), one arrives at the following generalized (gauge invariant) wave equation for a diagonal metric

$$\begin{aligned} g^{ii} \left(\frac{g^{00}}{c^2} \partial_{tt}^2 E_i + \partial^k \partial_k E_i \right) &= a^{ii} \partial_t E_i + \tilde{b}^{kii} \partial_k E_i \\ &+ \bar{b}^{kii} \partial_i E_k + \beta^{kki} \partial_k E_k + c^{ii} E_i + c_2^{ki} E_k + m^{kkii} \partial_k B_{ki} + n^{kii} B_{ki}. \end{aligned}$$

Here there is no contraction on the index i (only on k), while the coefficients which depend on spacetime geometry are given by the following expressions (without applying the Einstein summation convention)

$$\begin{aligned}
 a^{ii} &\equiv -\frac{1}{c} \left[2\partial_t (g^{00} g^{ii}) + \frac{g^{00} g^{ii}}{\sqrt{-g}} \partial_t (\sqrt{-g}) \right] \\
 \tilde{b}^{kii} &\equiv - \left[\partial_k (g^{kk} g^{ii}) + \frac{g^{kk} g^{ii}}{\sqrt{-g}} \partial_k (\sqrt{-g}) \right] \\
 \bar{b}^{kii} &\equiv g^{ii} g_{00} \gamma^k + \left[\partial_k (g^{kk} g^{ii}) + \frac{g^{kk} g^{ii}}{\sqrt{-g}} \partial_k (\sqrt{-g}) \right] \\
 c^{ii} &\equiv - \left[\frac{1}{c} \partial_{tt}^2 (g^{00} g^{ii}) + \frac{1}{c} \partial_t \left[g^{00} g^{ii} \left(\frac{\partial_t (\sqrt{-g})}{\sqrt{-g}} \right) \right] \right] \\
 n^{kii} &\equiv \partial_k \partial_t (g^{ii} g^{kk}) + \partial_t \left(\frac{\partial_k (\sqrt{-g})}{\sqrt{-g}} g^{ii} g^{kk} \right) \\
 c_2^{ki} &\equiv g^{ii} \partial_i (g_{00} \gamma^k), \\
 m^{kkii} &\equiv \partial_t (g^{ii} g^{kk}),
 \end{aligned}$$

and γ^k is given by Eq. (3.16). We therefore get coupled electromagnetic waves where the coupling is induced by the non-flat and dynamical character of spacetime geometry. The right-hand-side (rhs) of the wave equation vanishes in flat spacetime. Notice that the magnetic terms are present for time varying geometries and therefore, one expects gravitational waves to couple the electric and magnetic wave dynamics with measurable consequences. This coupling is likely to affect polarization and interference patterns, but requires further research.

A similar expression can be obtained deriving the Faraday law with respect to time and then using the Maxwell-Ampère and (magnetic) Gauss laws. Nevertheless, while Maxwell's equations in vacuum, and in Minkowski spacetime, have a complete symmetry regarding the electric and magnetic fields, here since $d\mathbf{F} = 0$ is independent from the metric structure while $d \star \mathbf{F} = 0$ is not, the fundamental difference results since $\partial_m B^m = 0$, while in general $\partial_k E^k \neq 0$.

Assuming a diagonal metric we see that such a wave equation for the magnetic field components is also coupled to the electric field, for non-stationary metric,

$$\frac{g^{00}}{c^2} \partial_{tt}^2 B^j + \partial^k \partial_k B^j = \tilde{\eta}_1^{jm} E_m + \tilde{\eta}_2 \partial_t B^j + \tilde{\alpha}^k \partial_k B^j + \tilde{\delta}_k^{jj} \partial_j B^k + \tilde{c} B^j + \tilde{c}_k^j B^k,$$

with coefficients

$$\begin{aligned}
 \tilde{\eta}_1^{jm} &= g^{00} \epsilon^{jkm} \partial_k (g_{00} g_{mm} \xi^{mm}), \quad \tilde{\eta}_2 = -g_{nn} \xi^{nn} \\
 \tilde{\alpha}^k &= - (g^{00} \partial_k (g_{00} g^{kk}) + \sigma^{mmk} g_{mm}) \\
 \tilde{\delta}_k^{jj} &= g^{00} \partial_k (g_{00} g^{jj}), \\
 \tilde{c} &= -g^{00} \partial_k (\sigma^{mmk} g_{00} g_{mm}) \\
 \tilde{c}_k^j &= g^{00} \partial_k (\sigma^{mmj} g_{00} g_{mm})
 \end{aligned}$$

where ξ^{mm} is given by Eq. (3.22) and the Einstein summation convention is only applied in $\tilde{\eta}_2, \tilde{c}$ and $\tilde{c}_k^j$.

For a stationary (or static) spacetime, both wave equations become decoupled since $a^{ii} = c^{ii} = m^{kkii} = n^{kii} = 0$ in (3.36) and $\tilde{\eta}_1^{jm} = \tilde{\eta}_2 = 0$ in Eq. (3.37), leading to

$$\begin{aligned}
 g^{ii} \left(\frac{g^{00}}{c^2} \partial_{tt}^2 E_i + \partial^k \partial_k E_i \right) &= \tilde{b}^{kii} \partial_k E_i + \bar{b}^{kii} \partial_i E_k + \beta^{kki} \partial_k E_k + c_2^{ki} E_k \\
 \frac{g^{00}}{c^2} \partial_{tt}^2 B^j + \partial^k \partial_k B^j &= \tilde{\alpha}^k \partial_k B^j + \tilde{\delta}_k^{jj} \partial_j B^k + \tilde{c} B^j + \tilde{c}_k^j B^k
 \end{aligned}$$

We can see from these equations that for stationary geometries the wave equations for the electric and magnetic fields are decoupled, but in each case there is a coupling between different components, which suggests polarization effects. By careful comparison between these two equations, or between Eqs. (3.36) and (3.37), we also see mentioned, is essentially rooted in the fact that generally the magnetic field is divergenceless, contrary to the electric field.

example

As an example, let us consider the case where the electric field has a single component E_j (where j is fixed). This could happen, for example, for a linearly polarized wave or for a general polarization where the symmetries allow a curvilinear coordinate system to follow the field, so that in such system it would have a single component, for example, $\mathbf{E} = E_\varphi(z)$. In such case, from (3.38) we get in Fourier space

$$g^{jj} \left(\frac{-w^2}{c^2} g^{00} \tilde{E}_j + \partial^k \partial_k \tilde{E}_j \right) = \left(\tilde{b}^{jjj} + \bar{b}^{jjj} + \beta^{jjj} \right) \partial_j \tilde{E}_j + c_2^{jj} \tilde{E}_j$$

therefore

$$g^{jj} \partial^k \partial_k \tilde{E}_j - \left(\tilde{b}^{jjj} + \bar{b}^{jjj} + \beta^{jjj} \right) \partial_j \tilde{E}_j - \left(g^{jj} \frac{w^2}{c^2} g^{00} + c_2^{jj} \right) \tilde{E}_j = 0$$

for each mode, where $\tilde{E}_j = \tilde{E}_j(x^1, x^2, x^3, w)$ is the Fourier transform of E_j . The above equation resembles a generalized time independent Schrodinger equation or a generalized Laplace equation with corrections induced by spacetime geometry. Recall that here j is fixed, with no contraction, and only k is a summation index. For a wave travelling along the x axis, we get

$$g^{jj} \partial_{xx}^2 \tilde{E}_j - \left(\tilde{b}^{jjj} + \bar{b}^{jjj} + \beta^{jjj} \right) \partial_j \tilde{E}_j - \left(g^{jj} \frac{w^2}{c^2} g^{00} + c_2^{jj} \right) \tilde{E}_j = 0$$

So the equations for the cases of transversal or (hypothetical) longitudinal modes become

$$\begin{aligned} g^{jj} \partial_{xx}^2 \tilde{E}_j - \left(g^{jj} \frac{w^2}{c^2} g^{00} + c_2^{jj} \right) \tilde{E}_j &= 0 \\ g^{xx} \partial_{xx}^2 \tilde{E}_x - \left(\tilde{b}^{xxx} + \bar{b}^{xxx} + \beta^{xxx} \right) \partial_x \tilde{E}_x \\ &\quad - \left(g^{xx} \frac{w^2}{c^2} g^{00} + c_2^{xx} \right) \tilde{E}_x = 0 \end{aligned}$$

respectively (where $j = y, z$). By introducing the variables $Y_1 \equiv \tilde{E}$, $Y_2 \equiv \partial_x \tilde{E}$, these equations can be put in the form of a linear non-autonomous dynamical system (with one degree of freedom) according to

$$\partial_x \vec{Y} = \mathbf{A} \vec{Y}$$

where in the first case,

$$A_{11} = A_{22} = 0, \quad A_{12} = 1, \quad A_{21} = \frac{w^2}{c^2} g^{00} + c_2^{jj} g_{jj}$$

with ($j = y, z$), while in the second system

$$\begin{aligned} A_{11} &= 0, \quad A_{22} = \left(\tilde{b}^{xxx} + \bar{b}^{xxx} + \beta^{xxx} \right) g_{xx} \\ A_{12} &= 1, \quad A_{21} = \frac{w^2}{c^2} g^{00} + c_2^{xx} g_{xx} \end{aligned}$$

This leads to the following expressions for the eigenvalues

$$\lambda = \pm \sqrt{A_{21}}, \quad \lambda = \frac{A_{22} \pm \sqrt{A_{22}^2 + 4A_{21}}}{2}$$

respectively.

The system in Eq. (3.45) is non-autonomous, in general, and becomes autonomous if the direction of propagation of the waves has a correspondence with a spacetime isometry (as there is a killing vector along that direction). In such a scenario, the theory of dynamical systems can easily provide the qualitative behaviour of the dynamics. For transversal modes, depending on the background spacetime, we will get real eigenvalues with opposite signs or purely imaginary eigenvalues. Therefore, the dynamics is that of a (global) phase space with a saddle fixed point at $(0,0)$, which corresponds to a decaying f with no oscillations, or a purely periodic behaviour around a center fixed point at $(0,0)$. For the longitudinal modes the system predicts a richer behaviour around the $(0,0)$ fixed point, depending on the geometry, with physical acceptable solutions corresponding to purely oscillatory ($A_{22} = 0, A_{22}^2 + 4A_{21} < 0$), decaying and oscillatory decaying behaviour.

We therefore expect new phenomena associated with electromagnetic waves in the presence of a background gravitational field. In particular, the wave equations presented here can be applied to different geometries such as the spacetime outside a spherical gravitating mass (Schwarzschild solution of GR) and the corresponding linear (weak field) limit, for the time-independent case and gravitational waves with (+) polarization, for the time dependent scenario. It is natural to expect an effect in the polarization of electromagnetic waves induced by the curvature of (pseudo) Riemann spacetime (see also [12]). We see that in Eqs. (3.38) and (3.39), that due to the time-independent character of spacetime geometry, the wave equation has no electromagnetic coupling, nevertheless, the last three terms in the rhs of Eq. (3.38) and the second and fourth terms in the rhs of Eq. (3.39) imply a coupling between the dynamics of the different field components. As previously mentioned, this fact suggests polarization effects induced by the spacetime geometry. What about other effects? Are there any predicted longitudinal modes besides the transversal modes characterizing electromagnetic waves in flat Minkowski spacetime? These longitudinal modes in vector (a^k) wave equations appear whenever $\partial_k a^k \neq 0$, and in fact, in usual electromagnetism such terms would appear if the electric and magnetic fields in vacuum weren't divergenceless. Accordingly, in curved spacetime, $\partial_k E^k \neq 0$, which manifests in the terms containing the first derivatives of the electric field in Eq. (3.38). These longitudinal modes seem to be a prediction of electromagnetic wave dynamics in curved spacetime. It turns out that if harmonic waves with constant amplitudes are solutions to the wave equations then, in general, electromagnetic waves are no longer purely transversal. This can be proven by following the method which is often used to show the transversal character of waves in flat spacetime. Consider a harmonic wave given by

$$E_i = E_{0i} e^{-ik^\mu x_\mu}$$

We then have,

$$\begin{aligned} k^\mu x_\mu &= g_{00}wt + g_{0m}(k^0 x^m + k^m ct) + g_{rs}k^r x^s \\ k^\mu k_\mu &= 0, \end{aligned} \quad (3.48)$$

and for a general curved spacetime we will allow the components of the wave four-vector to be spacetime dependent $[k^\mu = k^\mu(x^m, t)]$. This can be understood by considering any two spacetime points, (x_1^m, t_1) and (x_2^m, t_2) , along the light path such that the sine and cosine

functions are equal. This periodicity implies that

$$w = \frac{2\pi}{\tau}, \quad \sqrt{k^j k_j} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{00}} dt, \quad \lambda = \int_{X_1}^{X_2} \sqrt{g_{kk}} dx^k$$

and therefore, in general, the period and the wavelength will depend on the spacetime point at which they are computed. Consequently

$$\begin{aligned} \partial_t (k^\mu x_\mu) &= (\partial_t g_{00}) wt + g_{00} w + \partial_t (g_{0m}) (k^0 x^m + k^m ct) \\ &\quad + g_{0m} k^m c + \partial_t (g_{rs}) k^r x^s + (\partial_t k^\mu) x_\mu, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \partial_j (k^\mu x_\mu) &= (\partial_j g_{00}) wt + \partial_j (g_{0m}) (k^0 x^m + k^m ct) + g_{0j} k^0 \\ &\quad + \partial_j (g_{rs}) k^r x^s + g_{rj} k^r + (\partial_j k^\mu) x_\mu. \end{aligned}$$

For simplicity and without a significant loss of generality, let us consider a diagonal metric. In this case, we have

$$\begin{aligned} \partial_t (k^\mu x_\mu) &= (\partial_t g_{00}) wt + g_{00} w + (\partial_t g_{rr}) k^r x^r \\ &\quad + g_{00} t \partial_t w + g_{rr} x^r \partial_t k^r, \\ &\quad wt + (\partial_j g_{rr}) k^r x^r + g_{jj} k^j \end{aligned}$$

Now, Gauss' law (3.15) gives

$$g^{jj} \partial_j E_j = g_{00} \gamma^j E_j$$

On the other hand, for the harmonic electromagnetic wave, we have

$$\partial_j E_j = -i \partial_j (k^\mu x_\mu) E_j$$

and therefore,

$$\begin{aligned} g_{00} \gamma^j E_j &= -i [(\partial_j g_{00}) wt + (\partial_j g_{rr}) k^r x^r + g_{jj} k^j \\ &\quad + g_{00} t \partial_j w + g_{rr} x^r \partial_j k^r] g^{jj} E_j \end{aligned}$$

This implies the following

$$\begin{aligned} k^j E_j &= -i g_{00} \gamma^j E_j - [(\partial_j g_{00}) wt + (\partial_j g_{rr}) k^r x^r \\ &\quad + g_{00} t \partial_j w + g_{rr} x^r \partial_j k^r] g^{jj} E_j \end{aligned}$$

and consequently $k^j E_{0j} = - [i g_{00} \gamma^j + g^{jj} ((\partial_j g_{00}) wt + (\partial_j g_{rr}) k^r x^r + g_{00} t \partial_j w + g_{rr} x^r \partial_j k^r)] E_{0j}$ zero, these expressions imply that

$$\text{Re} (k^j E_j) = f(t, x^m) \neq 0.$$

For example, consider a harmonic wave propagating in the z direction ($k_x = k_y = 0$). Maxwell's equations merely imply that

$$\begin{aligned} k^z E_{0z} &= - \frac{(i g_{00} \gamma^x + g^{xx} ((\partial_x g_{00}) wt + \partial_x (g_{zz}) k^z z + g_{00} t \partial_x w + g_{zz} z \partial_x k^z)) E_{0x}}{(1 + (\partial_z g_{zz}) z g^{zz})} \\ &\quad - \frac{(i g_{00} \gamma^y + g^{yy} ((\partial_y g_{00}) wt + (\partial_y g_{zz}) k^z z + g_{00} t \partial_y w + g_{zz} z \partial_y k^z)) E_{0y}}{(1 + (\partial_z g_{zz}) z g^{zz})} \\ &\quad - \frac{(i g_{00} \gamma^z + g^{zz} ((\partial_z g_{00}) wt + g_{00} t \partial_z w + g_{zz} z \partial_z k^z)) E_{0z}}{(1 + (\partial_z g_{zz}) z g^{zz})} \end{aligned}$$

which, in general, is non-zero. Thus, one could in principle have a harmonic wave with a non-vanishing E_{0z} (longitudinal component) without transgressing the mathematical-physics of Maxwell's theory in Riemann spacetime.

If the frequency w is known, the real part of the previous equation provides a differential equation for k^z providing an important application for rigorous cosmological redshift calculations which considers electrodynamics in curved spacetime,

$$\chi^j \partial_j \bar{k}^z + \chi \bar{k}^z + \Lambda = 0$$

where $\bar{k}_z \equiv \text{Re}(k^z)$ and the factors χ^j, χ, Λ depend on the spacetime metric, the frequency and the amplitudes are taken from Eq. (3.62).

In general, the harmonic wave is not a plane transversal wave ($k^j E_j \neq 0$) and one predicts longitudinal modes very naturally. Therefore not only the deflection of light and gravitational redshift but also other effects are expected to result from the interaction of light and gravity (curved spacetime) such as polarization effects and the appearance of longitudinal modes.

For the sake of completeness, we present the expression for electromagnetic waves in the more general case without restricting to a diagonal metric. This can then be applied to axially symmetric spacetimes (as for the geometry outside a rotating mass in the weak field and slow rotation regime), as well to gravitational waves. In the first case, we usually have $g^{j0} \neq 0, g^{jk} = 0$ for $j \neq k$, while in the second case $g^{j0} = 0, g^{jk} \neq 0$ for $j \neq k$. The wave equation is obtained by deriving Eq. (3.17) with respect to time and using the Faraday law, and one obtains

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\Sigma}^{0ji}}{c^2} \partial_{tt}^2 E_j - g^{mk} g^{ni} (\partial_k \partial_n E_m - \partial_k \partial_m E_n) - (\partial_n E_m - \partial_m E_n) \left[\frac{1}{c} \partial_t (g^{m0} g^{ni}) + \bar{\sigma}^{mni} \right] + (\partial_t \bar{\Sigma}^{kji}) \partial_k E_j \\ + \bar{\Sigma}^{kji} \partial_t \partial_k E_j - \frac{g^{m0} g^{ni}}{c} \partial_t (\partial_n E_m - \partial_m E_n) + \partial_t E_j \left(\frac{1}{c^2} \partial_t \bar{\Sigma}^{0ji} + \frac{1}{c} \bar{\xi}^{ji} \right) + \frac{(\partial_t \bar{\xi}^{ji})}{c} E_j \\ - \epsilon_{mnj} \left[\partial_t (g^{mk} g^{ni}) \partial_k B^j + (\partial_t \bar{\sigma}^{mni}) B^j \right] = 0 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}^{0ji} &= g^{00} g^{ji} - g^{j0} g^{0i}, \quad \bar{\Sigma}^{kji} = g^{0k} g^{ji} - g^{jk} g^{0i}, \\ \bar{\xi}^{ji} &= \partial_\mu (g^{0\mu} g^{ji} - g^{j\mu} g^{0i}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) (g^{0\mu} g^{ji} - g^{j\mu} g^{0i}), \\ \bar{\sigma}^{mni} &= \partial_\mu (g^{m\mu} g^{ni}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) (g^{m\mu} g^{ni}). \end{aligned}$$

As one can see, this wave equation, although linear is much more complicated and should include a richer set of electromagnetic wave phenomena. Note that in principle, the terms containing the first derivatives of the electric field can be developed using Gauss' law, which from Eq. (3.13) can be written as follows

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}^{kj0} \partial_k E_j &= -\bar{\gamma}^j E_j + g^{m0} g^{n0} c \partial_t B_{mn} \\ &+ g^{mj} g^{n0} c \partial_j B_{mn} + \bar{\sigma}^{mn0} c B_{mn}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

with $\bar{\Sigma}^{kj0}, \bar{\gamma}^j$ and $\bar{\sigma}^{mn0}$, obtained by replacing i with 0 in $\bar{\Sigma}^{kji}, \bar{\xi}^{ji}$ and $\bar{\sigma}^{mni}$, respectively.

Формализм в двух словах

(в первую часть скорее всего перенесу это)

Приведем очень коротко формализм электродинамики. We will be using a (+ - - -) signature.

Recall that in the pre-metric formalism of electrodynamics,

the charge conservation provides the inhomogeneous field equations while the magnetic flux conservation is given in the homogeneous equations [23-27].

The field equations are then given by

$$d\mathbf{F} = 0, \quad d\mathbf{G} = \mathbf{J}.$$

Note that these are general, coordinate free, covariant equations and there is no need for an affine or metric structure of spacetime.

$\mathbf{J}$ is the charge current density 3 -form; $\mathbf{G}$ is the 2 -form representing the electromagnetic excitation,

$\mathbf{F}$ is the Faraday 2 -form,

so that $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$,

where $\mathbf{A}$ is the electromagnetic potential 1-form; the operator d stands for exterior derivative.

The constitutive relations (usually assumed to be linear, local, homogeneous and isotropic) between $\mathbf{G}$ and $\mathbf{F}$,

$$\mathbf{G} \longleftrightarrow \star \mathbf{F}$$

provide the metric structure via the Hodge star operator $\star$, which introduce the conformal part of the metric and maps k -forms to $(n - k)$ -forms, with n the dimension of the spacetime manifold.

On these foundations, the electromagnetic field equations on the background of a general (pseudo) Riemann spacetime manifold can be obtained.

In the tensor formalism we get

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad \partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0,$$

where we have used in the inhomogeneous equations the general expression for the divergence of anti-symmetric tensors in pseudo-Riemann geometry, $\nabla_\mu \Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \Theta^{\mu\nu})$.

The homogeneous equations are independent from the metric (and connection) due to the torsionless character of Riemann geometry. We introduce the definitions

$$F_{0k} = \frac{1}{c} \partial_t A_k - \partial_k A_0 \equiv \frac{E_k}{c},$$

$$F_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j \equiv -\epsilon_{ijk} B^i,$$

where ϵ_{ijk} is the totally antisymmetric 3 -dimensional Levi-Civita (pseudo) tensor,

B^i is a vector density (a natural surface integrand) and E_k is a co-vector (a natural line integrand).

Then,

the homogeneous equations are the usual Faraday and magnetic Gauss laws

$$\partial_t B^i + \epsilon^{ijk} \partial_j E_k = 0, \quad \partial_j B^j = 0,$$

Неоднородные же уравнения представляют собой обобщенные уравнения Гаусса и Ампера:

$$\partial_k E_j (g^{0k} g^{j0} - g^{jk} g^{00}) - \partial_\mu B^k c g^{m\mu} g^{n0} \epsilon_{kmn} + E_j \gamma^j - B^k c \epsilon_{kmn} \sigma^{mn0} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{1}{c} \partial_\mu E_j (g^{0\mu} g^{ji} - g^{j\mu} g^{0i}) - \epsilon_{kmn} \partial_\mu B^k g^{m\mu} g^{ni} + E_j \xi^{ji} - B^k \epsilon_{kmn} \sigma^{mni} = \mu_0 j^i$$

где

$$\gamma^j \equiv \left[\partial_k (g^{0k} g^{j0} - g^{jk} g^{00}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k (\sqrt{-g}) (g^{0k} g^{j0} - g^{jk} g^{00}) \right]$$

$$\sigma^{mn\beta} \equiv [\partial_\mu (g^{m\mu} g^{n\beta}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) (g^{m\mu} g^{n\beta})]$$

$$\xi^{ji} \equiv \frac{1}{c} \left[\partial_\mu (g^{0\mu} g^{ji} - g^{j\mu} g^{0i}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) (g^{0\mu} g^{ji} - g^{j\mu} g^{0i}) \right]$$

One sees clearly, that new electromagnetic phenomena are expected due to the presence of extra electromagnetic couplings induced by spacetime curvature.

In particular, the magnetic terms in the Gauss law are only present for non-vanishing off-diagonal time-space components g^{0j} , which in linearized gravity correspond to the gravito-magnetic potentials.

These terms are typical of axially symmetric geometries (see [22, 28]).

For diagonal metrics, the inhomogeneous equations, the Gauss and Maxwell Ampère laws, can be recast into the following forms

$$\begin{aligned} -g^{kk}g^{00}\partial_k E_k + E_k\gamma^k &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \epsilon_{ijk}g^{ii}g^{jj}\partial_j B^k + \frac{1}{c^2}g^{00}g^{ii}\partial_t E_i + \epsilon_{ijk}\sigma^{jii}B^k + E_i\xi^{ii} &= \mu_0 j^i \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \gamma^k(\mathbf{x}) &\equiv - \left[g^{kk}g^{00}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_k(\sqrt{-g}) + \partial_k(g^{kk}g^{00}) \right] \\ \sigma^{jii}(\mathbf{x}) &\equiv g^{jj}g^{ii}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j(\sqrt{-g}) + \partial_j(g^{jj}g^{ii}) \\ \xi^{ii}(\mathbf{x}) &\equiv g^{00}g^{ii}\frac{1}{c^2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_t(\sqrt{-g}) + \frac{1}{c^2}\partial_t(g^{00}g^{ii}), \end{aligned}$$

где Einstein summation convention is applied in Eq. (2.13) only for j and k while the index i is fixed by the right hand side.

Also, no contraction is assumed in Eq. (2.14) nor in the expression for σ^{jii} .

New electromagnetic effects induced by the spacetime geometry include an inevitable spatial variability (non-uniformity) of electric fields whenever we have non-vanishing geometric functions γ^k , electromagnetic oscillations (therefore waves) induced by gravitational radiation and also additional electric contributions to Maxwell's displacement current in the generalized Maxwell-Ampère law.

This last example becomes clearer by re-writing Eq. (2.13) in the form

$$\epsilon_{ijk}\partial_j\bar{B}^{iijjk} = \mu_0(j^i + j_D^i)$$

where $j^i \equiv \sqrt{-g}j^i$ and

$$\begin{aligned} J_D^i &\equiv -\varepsilon_0\sqrt{-g}(g^{00}g^{ii}\partial_t E_i + c^2 E_i \xi^{ii}) \\ &= -\varepsilon_0\partial_t(\sqrt{-g}g^{00}g^{ii}E_i) \end{aligned}$$

is the generalized Maxwell displacement current density and

$$\bar{B}^{iijjk} \equiv g^{ii}g^{jj}\sqrt{-g}B^k$$

Again no summation convention is assumed for the index i in Eqs. (2.17) and (2.18).

The functions ξ^{ii} vanish for stationary spacetimes but might have an important contribution for strongly varying gravitational waves (high frequencies), since they depend on the time derivatives of the metric.

Analogously, Eq. (2.12) can be written as

$$\partial_k \tilde{E}^k = \frac{\varrho}{\varepsilon_0},$$

where

$$\tilde{E}^j \equiv -g^{jj}g^{00}\sqrt{-g}E_j, \quad \varrho \equiv \sqrt{-g}\rho$$

These are physical, observable effects of spacetime geometry in electromagnetic fields expressed in terms of the extended Gauss and Maxwell-Ampère laws which help the comparison with the usual inhomogeneous equations in Minkowski spacetime, making clearer the physical interpretations of such effects.

Finally, we review the field equations in terms of the electromagnetic 4-potential which in vacuum are convenient to study electromagnetic wave phenomena.

From the definition of the Faraday tensor and Eq. (2.3), we get

$$\nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu - g^{\lambda\nu} R_{\epsilon\lambda} A^\epsilon - \nabla^\nu (\nabla_\mu A^\mu) = \mu_0 j^\nu,$$

where $R_{\epsilon\lambda}$ is the Ricci tensor.

Using the expression for the (generalized) Laplacian in pseudo-Riemann manifolds,

$\nabla_\mu \nabla^\mu \psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda \psi)$, and assuming the Generalized Lorenz gauge ($\nabla_\mu A^\mu = 0$) in vacuum, we arrive at

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\lambda}) \partial_\lambda A^\nu - g^{\lambda\nu} R_{\epsilon\lambda} A^\epsilon = 0$$

For a diagonal metric, we get

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\mu}) \partial_\mu A^\nu - g^{\nu\nu} R_{\epsilon\nu} A^\epsilon = 0$$

with no contraction assumed in ν .

In general, and contrary to electromagnetism in Minkowski spacetime, the equations for the components of the electromagnetic 4 potential are coupled even in the (generalized) Lorenz gauge.

Notice also that for Ricci-flat spacetimes, the term containing the Ricci tensor vanishes.

Naturally, the vacuum solutions of GR are examples of such cases.

New electromagnetic phenomena are expected to be measurable, for gravitational fields where the geometric dependent terms in Eq. (2.23) are significant.

This completes the main axiomatic (foundational) formalism of electrodynamics in the background of curved (pseudo-Riemann) spacetime.

Charge conservation and the Lorentz force

(??? ВОТ ЭТО СОВСЕМ ПЛОХО УСВОИЛ ПОКА ЧТО!)

Charge conservation in curved spacetime

We saw that charge conservation alone implies the inhomogeneous equations. In the tensor formalism charge conservation requires the spacetime connection due to the covariant derivative. Charge conservation in components have then an explicit dependence on the geometry. In fact, from $d\mathbf{J} = 0$, we get

$$\nabla_{[\mu} J_{\alpha\beta\gamma]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_\nu j^\nu = 0,$$

therefore, according to

$$\partial_t \rho + \partial_k j^k = -(\Gamma_{\mu 0}^\mu \rho c + \Gamma_{\mu k}^\mu j^k),$$

even if there is no electric current, a non-static spacetime will induce a time variability in the charge density

$$\partial_t \rho = -\Gamma_{\mu 0}^\mu \rho c = -\partial_t (\log(\sqrt{-g})) \rho,$$

and therefore

$$\rho(\mathbf{x}) = K \frac{1}{\sqrt{g}}$$

where K is an integration constant.

More specifically, if the integration is performed from t_0 to t we get

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_0 \sqrt{\frac{g_0}{g(t)}},$$

where ρ_0 is the initial charge density which might be a function of space coordinates for initially non-uniform charge distributions and g_0 is the determinant of the initial metric. This time variability will not be due to the motion of charges in currents but rather to the deformation of spacetime geometry. Therefore, again we expect possible measurable effects of gravitational waves in electrodynamics. The passage of a gravitational wave with Weyl curvature will distort shapes while preserving volumes. It is natural to expect a measurable effect on initially static charge distributions. It also seems natural to expect that the electric field lines (initially static) generated by such charge distributions will also follow the deformations of spacetime, according to Gauss' law.

Lorentz force in curved spacetime

We now consider the motion of a charged test particle under the influence of electromagnetic fields in a curved background spacetime. The equation of motion is given by

$$m \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

where $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u}$ is the covariant derivative of the particle's 4 velocity $\mathbf{u}$ with respect to itself and $\mathbf{f}$ is the electromagnetic force 4-vector. In the absence of electromagnetic fields, the particle follows the auto-parallel geodesics $\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = 0$ which, as previously mentioned, coincide with the extremal geodesics in the spacetime of GR (the same is not true if torsion is present with an extra term coming from the symmetric part of the contorsion tensor). The above equation reads

$$m (\dot{u}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda u^\alpha u^\beta) = q F_\nu^\lambda u^\nu = q F_{\mu\nu} g^{\mu\lambda} u^\nu$$

When $\lambda = 0$ this equation gives the rate of change of the particle's energy as measured by a local observer, while the other three equations give the spatial components of the generalized Lorentz force. In any case, it is clear that the gravitational field has its influence because the geometry of spacetime (in this case, the metric) couples directly to the particle's 4 -velocity as well as to the electromagnetic field. In principle, this equation can be used to test metric theories of gravity and for GW detection. Consider for example the following simple application. For a given background metric we could compute the required experimental conditions, including the appropriate charge and current densities, such that the resulting electromagnetic fields are tuned to compensate the second term in Eq. (3.72), i.e.,

$$F_{\mu\nu} g^{\mu\lambda} u^\nu = \frac{m}{q} \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda u^\alpha u^\beta \Rightarrow F_{\mu\nu} g^{\mu\lambda} = \frac{m}{q} \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda u^\alpha$$

In these conditions a particle would follow a straight path as if it were moving in a (pseudo) Euclidean spacetime. This local antigravity effect is testable, in principle, and is model dependent since the gravitational equations determine the background geometry. A more complete treatment would require the full Einstein-Maxwell equations (or similar systems), since if the Maxwell fields are strong enough to compensate gravity locally, then we should no longer disregard the back-reaction of these fields on spacetime geometry. Nevertheless, as an approximation we can still use the Maxwell equations for a specific fixed background geometry.

The fields can be tuned to the local geometry according to,

$$F_{\varepsilon\nu} = \frac{m}{q} g_{\varepsilon\lambda} \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda u^\alpha$$

Inserting this expression in the inhomogeneous Maxwell equations, the corresponding charge-current sources generating the required fields are given by

$$j^\sigma = \mu_0^{-1} \frac{m}{q} \left[g^{\varepsilon\gamma} g^{\nu\sigma} \partial_\gamma (g_{\varepsilon\lambda} \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda u^\alpha) + g_{\varepsilon\lambda} \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda u^\alpha \left[\partial_\gamma (g^{\varepsilon\gamma} g^{\nu\sigma}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\gamma (\sqrt{-g}) g^{\varepsilon\gamma} g^{\nu\sigma} \right] \right]$$

Considering, for simplicity, a diagonal metric, the electric and magnetic fields needed to balance gravity locally are

$$F_{j0} = -\frac{1}{c} E_j = \frac{m}{q} g_{jj} \Gamma_{\alpha 0}^j u^\alpha$$

respectively, where the only contraction is of respectively, where the only contraction is on α . For example, suppose that in some reference frame a charge density distribution generates a single electric field. Assuming a diagonal metric, the required charge density might in principle be tuned to the local geometry according to

$$\rho = \frac{\varepsilon_0 m}{q} u^\alpha [g^{kk} g^{00} \partial_k (g_{kk} \Gamma_{\alpha 0}^k) - g_{kk} \Gamma_{\alpha 0}^k \gamma^k]$$

Here a sum over k is assumed and m, q and u^α are fixed parameters. This expression is compatible with the electric field expression in Eq. (3.76) for all j . Therefore, it gives the charge density required to maintain constant all u^j components of the 3-velocity for the test object under the influence of both gravity and an electric field. If a magnetic field is present, such electric conditions are

necessary but not sufficient according to the magnetic expressions in Eq. (3.77). In that case, we get

$$j^i = -\frac{1}{\mu_0} \frac{m}{q} u^\alpha [g^{ii} g^{jj} \partial_j (g_{ii} \Gamma_{\alpha j}^i) + g_{ii} \sigma^{ij} \Gamma_{\alpha j}^i]$$

Notice that the expressions for the compensating fields (3.77) were replaced inside Maxwell's inhomogeneous equations, consequently, we derived the necessary charge and current densities such that the anti-gravity could be achieved for a test body moving inside the charge and current distributions. Such applications could be implemented if the charge and current distributions were those of a charged fluid (as in the case of a plasma) in the presence of a gravitational field. If the conditions for the charge and current densities are satisfied locally at each point of the plasma where the test object is moving, then it will experience no gravity. This opens the possibility for a future technology in which the motion of the object could be controlled by controlling the local charge and current densities of the plasma surrounding the object. In particular, whenever the fields are higher than those expressed in Eq. (3. upward component.

21.3.3 ED in a Curved Space-time 2 [SEE SPECIAL NOTE ABOUT IT]

[FIRST I'LL WRITE IN THE SEPARATE NOTE, THEN I'LL COPY IT HTERE]

Примеры электродинамики в искривленном пространстве

Создадим заготовки моделей электродинамики в искривленном пространстве для различных задач.

(подробные решения этих моделей - в других записях. постараюсь много примеров рассмотреть, не зря же столько теории про уравнения вставил!!!)

Об уравнениях электродинамики в случае гравитационной волны

(пропишу решение этой задачи потом. мб сделаю большим разделом, пока так. мб отдельная статья про это будет потом)

As mentioned in the Introduction, GWs have been recently detected by the LIGO team using laser interferometry [1]. Another method that has been carried over the last decade to detect GWs is that of pulsar timing arrays. Nevertheless, it is crucial to keep exploring different routes towards GW detection and its applications to astrophysics and cosmology. Due to the huge distances in the Cosmos, any GW reaching Earth should have an extremely low amplitude. Therefore, the linearisation of gravity is usually applied which allows to derive the wave equations. It is a perturbative approach which is background dependent and its common to consider a Minkowski background. In any case, the GW can be seen as a manifestation of propagating spacetime geometry perturbations.

In principle, the passage of a GW in a region with electromagnetic fields will have a measurable effect. To compute this we have to consider Maxwell's equations on the perturbed background of a GW. We shall consider a GW as a perturbation of Minkowski spacetime given by $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, with $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$, so that

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

where the perturbation corresponds to a wave travelling along the z axis, i.e.,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dz^2 - [1 - f_+(z - ct)] dx^2 - [1 + f_+(z - ct)] dy^2 + 2f_\times(z - ct) dx dy,$$

and $(+)$ and $(\times)$ refer to the two independent polarizations characteristic of GWs in GR.

This metric is a solution of Einstein's field equations in the linear approximation, in the so-called TT (Transverse-Traceless) Lorenz Gauge. For this metric, we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_z (\sqrt{-g}) &= \frac{f_\times (\partial_z f_\times) + f_+ (\partial_z f_+)}{f_\times^2 + f_+^2 - 1} \\ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_t (\sqrt{-g}) &= \frac{f_\times (\partial_t f_\times) + f_+ (\partial_t f_+)}{f_\times^2 + f_+^2 - 1} \end{aligned}$$

These quantities will be useful further on.

(потренируюсь тут!!!)

Уравнения Максвелла в сферически симметричном пространстве-времени

в статье про них есть заготовки про это

Пример уравнений Гаусса в искривленном пространстве как доказательство нахождения в них магнитного поля

(очень крутой пример напишу, ибо кто угодно сказал бы, что там только ЭП, а вот, явно приведу в какой-то метрике закон Гаусса, где МП.)

Другие темы электродинамики в искривленном пространстве

Приведем обзор возможных других уравнений электродинамики, которые рассмотрим подробнее в других разделах.

Об уравнениях Эйнштейна-Максвелла

такие тоже есть, пропишем четко связь

21.3.4 Quantum Correction to Electromagnetic Field

(сперва пишу КЭД, потом сюда суть напишу, как и в каких случаях добавлять. если вообще так можно. если нельзя - напишу, почему.)

Метод добавления

(пока хз)

О случаях добавления квантовых поправок (???!!!)

(говорят, что если у нас имеются малые возмущения, то их следует добавлять. пока не знаю, как и почему?????)

21.3.5 Interaction of the Electromagnetic and Gravitational Fields (???)

Суть воздействия

говорят, раз ЭМ поле имеет ТЭИ, то оно может искажать пространство вокруг себя (?)

21.3.6 Some Nonstandard Configurations of the Electromagnetic Field

(пока этим заниматься я не буду)

Flying magnetic donut pulses

Nikitas papasimakes статья 2018,

(помню, что такое есть, будет нужно - прочитаю, допишу, мб сделаю разделом)

(if it would be useful, I would create a special section, but I don't think so)

21.3.7 Electrodynamics as a Particular Case of More General Theory 1

(пока тут пишу, буду заниматься - сделаю отдельным разделом)

Теории с нелокальным внешним источником (???)

(Если взять нелокальный внешний источник? Можно ли получить релятивистски-инвариантную теорию поля? Если можно, то каким образом? пока не смотрел)

О теориях с магнитными зарядами

(пока хз, что это такое)

(белоусов даже предлагает её решать (1.4.3), потом мб посмотрю)

Модифицировать первую пару уравнений Максвелла, включив в нее плотность магнитных зарядов (магнитных монополей) ρ_m и плотность тока магнитных монополей $\mathbf{j}_m$ таким образом, чтобы для них выполнялось уравнение непрерывности. Решить задачу 1.4.2 для модифицированных уравнений.

высшие мультипольные моменты как симметрии (???)

а что если в качестве симметрий будут не только заряды но и высшие мультипольные моменты в теореме Нетер

(это очень современно, есть работы 2020 года на это и до сих пор некоторые теории даже не квантованы).

Последний вопрос вообще приводит к нетривиальной топологической квантовой теории поля в физике твердого тела (типа фрактонных возбуждений и т.п.). Володя это в свое время (в прошлом году) исследовал.

а будут ли теории с сохраняющимися высшими мультиполями релятивистскими (это прям совсем очевидно и даже ничего не нужно знать, чтобы ответить)?

Электродинамика как $SU(2)$ теория

(Киселев упоминал, плохо запомнил, потом посмотрю. вроде тут токи у нас через нерелятивистские спиноры выражаются.)

Электродинамика как $SO(3)$ теория

(Киселев упоминал, плохо запомнил, потом посмотрю.)

**21.3.8 Electrodynamics as a Particular Case of More General Theory
2**

(there are a lot of them)

Электродинамика как частный случай теории Борна-Инфельда

(раскрою потом)

Электродинамика как частный случай теории Черна-Саймонса

(раскрою потом)

Электродинамика как частный случай квантовой электродинамики

(про этот переход ранее много параграфов, которые на него указывают. в первой части указана суть этого перехода.)

Обсудим подробно переход к квантовой электродинамике.

Part VI

Typical Gravity

(see my special note for now. Reminder to look again at theory below and delete all useless abstract formulas. there is a note on gravity and latter sections in it for these ideas!!!!)

22 Fundamentals of General Relativity

22.1 Nature of Gravity in a Nutshell

Обсудим подробно природу гравитации.

(пока пишу в записи про гравитацию, потом сюда перенесу суть, тут очень много вопросов)

22.1.1 Experiments Underpinning the Understanding of the Nature of Gravity

(тут мысленные и реальные)

Мысленный эксперимент с физикой в ускоряющейся ракете

Допустим, мы сидим в корабле в космосе и он ускоряется. Допустим мы уронили яблоко. Мы понимаем, что на самом деле это корабль ускоряется, а яблоко на самом деле покоится.

А теперь представим, что у нас есть плоская сетка, созданная из малых из частиц. Эта сетка тоже будет падать на пол корабля. Эта сетка - по сути это иллюстрация самого пространства.

Поэтому если свет у нас распространяется в пространстве, а само пространство смещается, то нам покажется, что он тоже изгибается. Вот, мы предсказали, что возможно отклонение света. (Гениальное предсказание за несколько строчек рассуждений) Опять же, тут речь только про ускорение, потому что иначе мы не заметим, что пространство ускоряется вниз.

(тут можно задать вопрос, будет ли отклоняться свет, если мы будем двигаться с постоянной скоростью?)

(!!! таким образом, хотя мы перемещаемся относительно покоящегося пространства, отклонение света, пущенного перпендикулярно направлению ускорения из нашей системы отсчета, все равно не будет. Потому что свет пущен из нашей СО.)

И мы заключаем, что вся физика в нашей системе такая, что будто мы находимся в присутствии гравитационного поля. Это принцип эквивалентности.

О, таким образом, можно провести аналогию, что любая система отсчета, где есть гравитация, на самом деле движется с ускорением. То есть наша Земля, где мы находимся прямо сейчас, она сейчас ускоряется с ускорением 9.8 м/с^2 относительно неподвижного пространства.

Или можно сказать, что это пространство ускоряется, а Земля неподвижна относительно самой себя. И оно идет прямо в центр массивного объекта, который и источник поля.

Ладно, это ведь просто умная аналогия, пространство ведь на самом деле не падает в Землю, да?

(пауза)

Оказывается, нет, Земля на самом деле ускоряется. Во-первых, мы отпустим объект, он упадет на Землю также, как и упал бы на пол космического корабля. Во-вторых если мы соступим с высокого дома, то гравитационное поле в нашей системе отсчета исчезнет мгновенно, гораздо быстрее, чем скорость света достигнет любую точку пространства. И это нарушение принципа причинности, потому что для любого настоящего поля любое распространение поля происходит со скоростью света или меньшей. Поэтому на самом деле поле было фиктивное.

И на этом этапе возникают вопросы.

Как одна часть Земли может ускоряться вверх в одно направление, а другая - в другое? Противоположная часть Земли - в другое направление. А Земля почему-то не раздувается, хотя нет никаких сил, которые сдерживают ее.

И чтобы ответить на эти вопросы, можно рассмотреть мысленный эксперимент о реке. И понимать гравитацию, как динамику самого пространства-время, а не как силу, действующую на материю. И поэтому пространство-время начинает двигаться к массе и энергии.

22.1.2 What is a curved spacetime?

(write this in detail. what is space? what is time? what is this strange curved object?)

откуда вообще идея менять метрику?

вот поля, вот пространство, как вообще придумать, что пространство искривлено?

что вообще происходит???

ну как бы по уравнениям понятно, что скалярное произведение меняем, понятны преобразования,

но вот задуматься можно, почему вообще тупое скалярное произведение дает нам идею о полях в пространстве?

просто мы казалось бы и не думали ничего про пространство, и не планировали даже думать, получается, без гравитационного поля все наши теории именно локальные, то есть на больших масштабах абсолютно неверные?

(мб переформулирую, потом запишу.)

почему искривленное пространство можем называть полем?

ведь поля распространялись в пространстве,

а тут получается, динамика самого пространства.

то есть пространство наше на самом деле поле?

22.1.3 Equivalence Principle: Illustrations and Examples

О нахождении в космическом корабле

Допустим, мы сидим в корабле в космосе и он ускоряется. Допустим мы уронили яблоко. Мы понимаем, что на самом деле это корабль ускоряется, а яблоко на самом деле покоится.

А теперь представим, что у нас есть плоская сетка, созданная из малых из частиц. Эта сетка тоже будет падать на пол корабля. Эта сетка - по сути это иллюстрация самого пространства. Поэтому если свет у нас распространяется в пространстве, а само пространство смещается, то нам покажется, что он тоже изгибается. Вот, мы предсказали, что возможно отклонение света. (Гениальное предсказание за несколько

строчек рассуждений) Опять же, тут речь только про ускорение, потому что иначе мы не заметим, что пространство ускоряется вниз.

(тут можно задать вопрос, будет ли отклоняться свет, если мы будем двигаться с постоянной скоростью???)

(!!! таким образом, хотя мы перемещаемся относительно покоящегося пространства, отклонение света, пущенного перпендикулярно направлению ускорения из нашей системы отсчета, все равно не будет. Потому что свет пущен из нашей СО.)

И мы заключаем, что вся физика в нашей системе такая, что будто мы находимся в присутствии гравитационного поля. Это принцип эквивалентности.

Применимость аналогии гравитации в космическом корабле для других систем

Таким образом, можно провести аналогию, что любая система отсчета, где есть гравитация, на самом деле движется с ускорением. То есть наша Земля, где мы находимся прямо сейчас, она сейчас ускоряется с ускорением 9.8 м/с^2 относительно неподвижного пространства.

Или можно сказать, что это пространство ускоряется, а Земля неподвижна относительно самой себя. И оно идет прямо в центр массивного объекта, который и источник поля.

Ладно, это ведь просто умная аналогия, пространство ведь на самом деле не падает в Землю, да? Оказывается, нет, Земля на самом деле ускоряется. Во-первых, мы отпустим объект, он упадет на Землю также, как и упал бы на пол космического корабля. Во-вторых если мы соступим с высокого дома, то гравитационное поле в нашей системе отсчета исчезнет мгновенно, гораздо быстрее, чем скорость света достигнет любую точку пространства. И это нарушение принципа причинности, потому что для любого настоящего поля любое распространение поля происходит со скоростью света или меньшей. Поэтому на самом деле поле было фиктивное.

И на этом этапе возникают вопросы.

Как одна часть Земли может ускоряться вверх в одно направление, а другая - в другое? Противоположная часть Земли - в другое направление. А Земля почему-то не раздувается, хотя нет никаких сил, которые сдерживают ее.

И чтобы ответить на эти вопросы, можно рассмотреть мысленный эксперимент о реке. И понимать гравитацию, как динамику самого пространства-время, а не как силу, действующую на материю. И поэтому пространство-время начинает двигаться к массе и энергии.

Иллюстрация гравитации рекой и водопадом

О реке

Представим, что мы на лодке и мы находимся вблизи водопада, наши моторы включены, поэтому нас вода не сносит. Чем ближе мы к обрыву, тем сильнее нужно включить моторы и иметь большее ускорение, чтобы нас не снесла вода.

В то же время, если мы находимся в лодке и нас сносит вода к водопаду, то мы не узнаем, что мы ускоряемся, если мы не посмотрим вокруг, потому что никаких признаков тому не будет.

(????? или будет??? что там с ускорением? дз, подумать, будет ли?)

На самом деле есть способ понять это, потому что лодка протяженная, и разные ее части будут ускоряться с чуть разными ускорениями, так что будет сила, которая будет растягивать лодку.

Допустим, что есть два наблюдателя, один ближе к водопаду, другой дальше. У них одинаково включены двигатели, так что дальний наблюдатель покоится. Тогда ближний будет сдвигаться к водопаду, потому что для него скорость течения воды больше, чем для второго. Им будет казаться, что они отдаляются друг от друга, но на самом деле это вода их отдаляет, а они сами по себе неподвижные.

Допустим, теперь есть круговое отверстие в озере и вода сливается туда. Тогда лодки должны ускоряться в разных направлениях, чтобы оставаться в покое.

И кстати, тогда вода будет сжимать лодку еще в перпендикулярном направлении, не только растягивать в продольном.

И также им будет казаться, что они будут сближаться, если они изначально находились на разных угловых направлениях.

И вот, тогда если мы находимся в лодке, то мы увидим, что объекты в реке почему-то двигаются к центру и мы можем предположить, что есть какая-то сила, которая их и сдвигает.

О круглом водопаде

Теперь представим большое гравитирующее тело, в поле которого мы находимся. Из принципа эквивалентности следует, что это то же самое, что если бы каждая неподвижная относительно него точка двигалась бы с ускорением относительно движущегося пространства.

И тут такие же явления, какие и были в реке. Радиально находящиеся наблюдатели ускоряются друг относительно друга сами по себе.

Наблюдатели, под разными углами, будут считать что они почему-то сближаются.

Продольные и поперечные деформации будут такими же, как и в случае движения в метрике центрального поля.

И особенно важно в этой аналогии, что что угодно в реке будет также подвержено ее движению. Например, свет или материя. Таким образом, мы объяснили отклонение света в гравитационном поле.

Вопрос, допустим, сетка пространства изначально покоилась и все-таки падает на поверхность Земли, с какой скоростью она упадет? Со второй космической скоростью, примерно 11 км/с.

Но в модели реки это скорость, с которой мы путешествуем сквозь реку.

Так что ускоряясь постоянно со скоростью 9.8 м/с^2 мы всегда остаемся движущимися относительно нашего места в нашей реке со скоростью 11 км/с.

Получается, Земля в каждой ее точке постоянно ускоряется против движения пространства. Ускорение это обеспечено взаимодействием между частицами, потому что Земля не может уже больше сужаться, как пространство стремиться сделать.

Кстати, про скорость у водопада, которую нельзя преодолеть. Это же когда мы приближаемся в горизонту событий в черной дыре. Там метрика начинает двигаться со скоростью света, так что вылететь из нее невозможно.

В общем, черная дыра для пространства это то же самое, что водопад для реки.

Критический обзор принципа эквивалентности

Если просто два массивных шара притягиваются, то при чем тут системы отсчета?

22.1.4 Equivalence Principle: Statement

о связи с неинерциальными системами отсчета

что это за связь и насколько это одно и то же?

подумаем в деталях, а еще лучше, если примеры приведем.

равномерно ускоренная система отсчета эквивалентна постоянному однородному внешнему полю.

22.1.5 Equivalence Principle: Tests and Other Properties

О проверке принципа эквивалентности (???)

22.1.6 Overview of What Gravity is Definitely Not?

(great collection of good ideas, which have nothing to do with reality)

Why gravitational field is not scalar field?

(??? theoretical and experimental reasons???)

Why gravitational field is not vector field?

(??? theoretical and experimental reasons???)

Gravity is not a linear theory

(??? как бы это показать явно...??? maybe here, there is a theory by Hriplovich, but I am not sure)

Есть большой соблазн думать, что слабое гравитационное поле описывается линейной теорией, подобной электродинамике, однако это не так.

Получаемая таким способом теория не является математически замкнутой.

Это выражается, прежде всего, в том, что возмущение метрики $h_{\mu\nu}$ влияет на измерение расстояний и времени, таким образом, не допускает масштабирования: если мы увеличим масштабы так, чтобы $h_{\mu\nu}$ было бы сравнимо с $\eta_{\mu\nu}$, мы получим абсурдные результаты для движения частиц в поле.

Поэтому нам с необходимостью надо рассмотреть сильное поле и понять, к каким эффектам приводит сильная нелинейность.

Как мы увидим, неизбежным следствием уравнений поля оказываются особенности пространственновременного многообразия.

В этой лекции мы построим сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна-решение малюно это решение будет стационарным, то есть компоненты метрики не будут зависеть от времени.

Важный вывод будет состоять в том, что стационарность этого решения фиктивна и связана с неполнотой выбранной системы координат: она определена только в одной карте и не описывает многообразие целиком.

(????)

Что могли бы означать слова «сферически-симметричное решение» в применении к искривленному пространству-времени? Чтобы это понять, разберем, что мы понимаем под сферически-симметричным решением теории поля в пространстве-времени Минковского.
(and then there is a discussion of Schwarzschild solution)

22.1.7 Overview of What True Nature of Gravity Can Be?

(great collection of good ideas, which are not tested, but they are telling some really meaningful ideas)

22.1.8 Overview of What Gravity Really Can Be: Experimental Confirmations

(overview of experiments that rule out some theories)

22.2 Really Useful Mathematics of Gravity

(write it and not long abstract discussion of diff geom)

22.3 Construction of General Relativity

Обсудим подробно, как строить ОТО.

22.3.1 Gravitational Field in Nonrelativistic Mechanics

(лл2 раздел)

Theory

Гравитационные поля (или поля тяготения) обладают следующим основным свойством:

все тела вне зависимости от их массы движутся в них (при заданных начальных условиях) одинаковым образом.

Например, законы свободного падения в поле тяготения Земли одинаковы для всех тел,

какой бы массой они ни обладали, — все они приобретают одно и то же ускорение.

Это свойство гравитационных полей дает возможность установить существенную аналогию между движением тел в гравитационном поле и движением тел,

не находящихся в каком-либо внешнем поле, но рассматриваемых с точки зрения неинерциальной системы отсчета. Действительно, в инерциальной системе отсчета свободное движение всех тел происходит прямолинейно и равномерно и если, скажем, в начальный момент времени их скорости были одинаковыми, то они будут одинаковыми все время.

Очевидно, поэтому, что если рассматривать это движение в заданной неинерциальной системе,

то и относительно нее все тела будут двигаться одинаковым образом.

Таким образом, свойства движения в неинерциальной системе отсчета такие же, как в инерциальной системе при наличии гравитационного поля.

Другими словами, неинерциальная система отсчета эквивалентна некоторому гравитационному полю.

Это обстоятельство называют принципом эквивалентности. Рассмотрим, например, движение в равномерно ускоренной системе отсчета.

Свободно движущиеся в ней тела любой массы будут, очевидно, обладать относительно этой системы одинаковым постоянным ускорением, равным и противоположным ускорению самой системы отсчета.

Таким же является движение в однородном постоянном гравитационном поле, например в поле тяготения земли (в небольших участках его, где поле можно рассматривать как однородное).

Таким образом, равномерно ускоренная система отсчета эквивалентна постоянному однородному внешнему полю.

В таком же смысле неравномерно ускоренная, поступательно движущаяся система отсчета эквивалентна однородному, но переменному гравитационному полю.

Однако поля, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, все же не вполне тождественны с «истинными» гравитационными полями, существующими и в инерциальных системах.

Между ними имеется существенное отличие в отношении их свойств на бесконечности.

На бесконечном расстоянии от создающих поле тел «истинное» гравитационное поле всегда стремится к нулю.

Поля же, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, на бесконечности, напротив, неограниченно возрастают, или, в крайнем случае, остаются конечными по величине.

Так, возникающие во вращающейся системе отсчета центробежные силы неограниченно растут при удалении от оси вращения; поле, которому эквивалентна ускоренно прямолинейно движущаяся система отсчета, одинаково во всем пространстве, в том числе и на бесконечности. Поля, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, исчезают, как только мы перейдем к инерциальной системе.

В противоположность этому «истинные» гравитационные поля (существующие и в инерциальной системе отсчета) невозможно исключить никаким выбором системы отсчета.

Это видно уже из указанного выше различия между условиями на бесконечности в «истинных» гравитационных полях и в полях, которым эквивалентны неинерциальные системы; поскольку последние на бесконечности к нулю не стремятся, то ясно, что никаким выбором системы отсчета нельзя исключить «истинные» поля, обращаемые на бесконечности в нуль. Единственное, чего можно достичь надлежащим выбором системы отсчета, это — исключения гравитационного поля в данном участке пространства, достаточно малом для того, чтобы в нем можно было считать поле однородным.

Это можно сделать путем выбора ускоренно движущейся системы, ускорение которой было бы равно тому ускорению, которое приобретает частица, помещенная в рассматриваемом участке поля. Движение частицы в гравитационном поле определяется в нерелятивистской механике функцией Лагранжа, имеющей (в инерциальной системе отсчета) вид

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\varphi$$

где φ - некоторая функция координат и времени, характеризующая поле и называемая гравитационным потенциалом ¹⁾.

Соответственно уравнения движения частицы гласят

$$\dot{\mathbf{v}} = -\text{grad } \varphi.$$

Они не содержат массы или какой-либо другой постоянной, характеризующей свойства частицы, что является выражением основного свойства гравитационных полей.

22.3.2 Constant Gravitational Field

(лп2 п88)

Theory

Гравитационное поле называют постоянным, если можно выбрать такую систему отсчета, в которой все компоненты метрического тензора не зависят от временной координаты x^0 ; последнюю называют в таком случае мировым временем. Выбор мирового времени не вполне однозначен.

Так, при добавлении к x^0 произвольной функции пространственных координат все g_{ik} по-прежнему не будут содержать x^0 ; это преобразование соответствует произвольности выбора начала отсчета времени в каждой точке пространства τ).

Кроме того, разумеется, мировое время допускает умножение на произвольную постоянную, т.

е.

произвольный выбор единицы его измерения.

Строго говоря, постоянным может быть лишь поле, создаваемое одним телом.

В системе нескольких тел их взаимное гравитационное притяжение приводит к возникновению движения, в результате чего создаваемое ими поле не может быть постоянным.

Если создающее поле тело неподвижно (в системе отсчета, в которой g_{ik} не зависит от x^0), то оба направления времени эквивалентны.

При должном выборе начала отсчета времени во всех точках пространства, интервал ds в этом случае не должен меняться при изменении знака x^0 , а потому все компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора должны быть тождественно равными нулю.

Такие постоянные гравитационные поля мы будем называть статическими.

Неподвижность тела, однако, не является обязательным условием постоянства создаваемого им поля.

Так, будет постоянным также и поле равномерно вращающегося вокруг своей оси аксиально-симметричного тела.

Но в этом случае оба направления времени уже отнюдь не равноценны - при изменении знака времени меняется знак угловой скорости вращения.

Поэтому в таких постоянных гравитационных полях (которые мы будем называть стационарными) компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора, вообще говоря, отличны от нуля.

Смысл мирового времени в постоянном гравитационном поле заключается в том, что его промежуток между двумя событиями в некоторой точке пространства совпадает с его промежутком между любыми другими двумя событиями в любой другой точке пространства, соответственно одновременными (в выясненном в §84 смысле) с первой парой событий.

Но одинаковым промежуткам мирового времени x^0 соответствуют в разных точках пространства различные промежутки собственного времени τ .

Связь (84.1) между ними можно написать теперь в виде

$$\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} x^0$$

применим к любым конечным промежуткам.

В слабом гравитационном поле можно воспользоваться приближенным выражением (87.12); при этом (88.1) дает, с той же точностью:

$$\tau = \frac{x^0}{c} \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right)$$

Таким образом, собственное время течет тем медленнее, чем меньше гравитационный потенциал в данной точке пространства, т.е.

чем больше его абсолютная величина (ниже, в §99 будет показано, что потенциал φ отрицателен).

Если из двух одинаковых часов одни находились некоторое время в гравитационном поле, то после этого часы, бывшие в поле, окажутся отставшими.

Как уже было указано, в статическом гравитационном поле компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора равны нулю.

Согласно результатам §84 это значит, что в таком поле возможна синхронизация часов во всем пространстве.

Заметим также, что для элемента пространственного расстояния в статическом поле имеем просто:

$$dl^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

В стационарном поле $g_{0\alpha}$ отличны от нуля и синхронизация часов во всем пространстве невозможна.

Поскольку g_{ik} не зависят от x^0 , то формулу (84.14) для разности значений мирового времени двух одновременных событий, происходящих в разных точках пространства, можно написать в виде

$$\Delta x^0 = - \int \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}$$

применим для любых двух точек на линии, вдоль которой производится синхронизация часов.

При синхронизации же вдоль замкнутого контура разность значений мирового времени, которая обнаружилась бы по возвращении в исходную точку, равна интегралу

$$\Delta x^0 = - \oint \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}$$

взятому по этому замкнутому контуру 1).

Рассмотрим распространение лучей света в постоянном гравитационном поле.

Мы видели в §53, что частота света равна производной от эйконала ψ по времени (с обратным знаком).

Частота, измеренная в мировом времени x^0/c , поэтому равна $\omega_0 = -c\partial\psi/\partial x^0$.

Поскольку уравнение эйконала (87.9) в постоянном поле не содержит x^0 явно, то частота ω остается постоянной при распространении луча света.

Частота же, измеренная в собственном времени, равна $\omega = -\partial\psi/\partial\tau$; она различна в разных точках пространства.

В силу соотношения

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0} \frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0} \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$$

имеем:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}$$

В слабом гравитационном поле получаем отсюда приближенно:

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\varphi}{c^2} \right)$$

Мы видим, что частота света возрастает с увеличением абсолютной величины потенциала гравитационного поля, т.

е.

при приближении К создающим поле телам; наоборот, при удалении луча от этих тел частота света уменьшается.

Если луч света, испущенный в точке, где гравитационный потенциал равен φ_1 , имеет (в этой точке) частоту ω , то, придя в точку с потенциалом φ_2 , он будет иметь частоту (измеренную в собственном времени в этой точке), равную

$$\frac{\omega}{1 - \frac{\varphi_1}{c^2}} \left(1 - \frac{\varphi_2}{c^2}\right) \approx \omega \left(1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\right)$$

Линейчатый спектр, испускаемый какими-л либо атомами, находящимися, например, на Солнце,

выглядит там точно так же, как выглядит на Земле спектр, испускаемый находящимися на ней такими же атомами.

Если же на Земле наблюдается спектр, испускаемый атомами,

находящимися на Солнце, то, как следует из вышеизложенного, его линии окажутся смещенными по сравнению с линиями такого же спектра, испускаемого на Земле.

Именно, каждая линия с частотой ω будет смещена на интервал $\Delta\omega$, определяемый из формулы

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} \omega$$

где φ_1 и φ_2 - потенциалы гравитационного поля соответственно В месте испускания и в месте наблюдения спектра.

Если на Земле наблюдается спектр, испускаемый на Солнце или звездах, то $|\varphi_1| > |\varphi_2|$ и из (88.8) следует, что $\Delta\omega < 0$, т.

е.

смещение происходит в сторону меньших частот.

Описанное явление называют красным смещением.

Происхождение этого явления можно уяснить себе непосредственно на основании сказанного выше о мировом времени.

В силу постоянства поля промежутков мирового времени, в течение которого некоторое колебание в световой волне распространится из одной заданной точки пространства в другую, не зависит от x^0 .

Поэтому число колебаний,

происходящих в единицу мирового времени, будет одинаковым во всех точках вдоль луча.

Но один и тот же промежуток мирового времени

соответствует тем большему промежутку собственного времени, чем дальше мы находимся от создающих поле тел.

Следовательно, частота, т. е.

число колебаний в единицу собственного времени, будет падать при удалении света от этих масс.

При движении частицы в постоянном поле сохраняется ее энергия, определяемая как производная $(-c\partial S/\partial x^0)$ от действия по мировому времени; это следует,

например, из того, что x^0 не входит явно в уравнение Гамильтона-Якоби.

Определенная таким образом энергия есть временная компонента ковариантного 4-вектора импульса $p_k = m c u_k = m c g_{ki} u^i$.

В статическом поле $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - dl^2$ и мы имеем для энергии, которую обозначим здесь посредством $\mathcal{E}_0$:

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 g_{00} \frac{dx^0}{ds} = mc^2 g_{00} \frac{dx^0}{\sqrt{g_{00}(dx^0)^2 - dl^2}}$$

Введем скорость частицы:

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{cdl}{\sqrt{g_{00}}dx^0}$$

измеренную в собственном времени, т.

е.

наблюдателем, находящимся в данном месте.

Тогда мы получим для энергии:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{mc^2 \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Это есть та величина, которая остается постоянной при движении частицы.

Легко показать, что выражение (88.9) для энергии остается в силе и в стационарном поле, если только скорость v измерять в собственном времени, определенном по часам, синхронизованным вдоль траектории частицы.

Если частица выходит из точки A в момент мирового времени x^0 и приходит в бесконечно близкую точку B в момент $x^0 + dx^0$, то для определения скорости надо взять теперь не промежуток времени $(x^0 + dx^0) - x^0 = dx^0$, а разность между $x^0 + dx^0$ и моментом $x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha$, который одновременен в точке B моменту x^0 в точке A :

$$(x^0 + dx^0) - \left(x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha\right) = dx^0 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha$$

Умножив его на $\sqrt{g_{00}}/c$, получим соответствующий интервал собственного времени, так что скорость

$$v^\alpha = \frac{cdx^\alpha}{\sqrt{h}(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)}$$

где мы ввели обозначения

$$g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}, \quad h = g_{00}$$

для трехмерного вектора g (упоминавшегося уже в §84) и для трехмерного скаляра g_{00} .

Ковариантные компоненты скорости $\mathbf{v}$ как трехмерного вектора в пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ и соответственно квадрат этого вектора надо понимать как

$$v_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} v^\beta, \quad v^2 = v_\alpha v^\alpha$$

Заметим, что при таком определении интервал ds выражается через скорость формулой, аналогичной обычной формуле:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}dx^0dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = \\ &= h(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)^2 - dl^2 = h(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Компоненты 4-скорости $u^i = dx^i/ds$ равны

$$u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{h}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{g_\alpha v^\alpha}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Энергия же

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 g_{0i} u^i = mc^2 h (u^0 - g_\alpha u^\alpha)$$

и после подстановки (88.14) приобретает вид (88.9).

и после подстановки (88.14) приобретает вид (88.9).

В предельном случае слабого гравитационного поля и малых скоростей, подставляя $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$ в (88.9), получим приближенно:

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\varphi$$

где $m\varphi$ - потенциальная энергия частицы в гравитационном поле, что находится в соответствии с функцией Лагранжа (87.10).

Сила, действующая на частицу в гравитационном поле

(???)

Определим силу, действующую на частицу в гравитационном поле. Для этого нужно найти производную от ее импульса p по (синхронизованному) собственному времени.

Для нужных нам компонент Γ_{kl}^i находим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^\alpha &= \frac{1}{2} h^{\cdot\alpha} \\ \Gamma_{0\beta}^\alpha &= \frac{h}{2} (g_{\cdot\beta}^\alpha - g_\beta^{\cdot\alpha}) - \frac{1}{2} g_\beta h^{\cdot\alpha} \\ \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= \lambda_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{h}{2} [g_\beta (g_\gamma^{\cdot\alpha} - g_\gamma^\alpha) + g_\gamma (g_\beta^{\cdot\alpha} - g_\beta^\alpha)] + \frac{1}{2} g_\beta g_\gamma h^{\cdot\alpha}\end{aligned}$$

В этих выражениях все тензорные действия (ковариантные дифференцирования, подъем и опускание индексов) производятся в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ над трехмерным вектором g^α и трехмерным скаляром h (88.11); $\lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ есть трехмерный символ Кристоффеля, составленный из компонент тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ так, как Γ_{kl}^i составляется из компонент g_{ik} ; при вычислении использованы формулы (84.9) – (84.12). Подставив (1) в уравнение движения

$$\frac{du^\alpha}{ds} = -\Gamma_{00}^\alpha (u^0)^2 - 2\Gamma_{0\beta}^\alpha u^0 u^\beta - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma$$

и используя выражения (88.14) для компонент 4-скорости, после простых преобразований получим:

$$\frac{d}{ds} \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{h^{\cdot\alpha}}{2h(1-\frac{v^2}{c^2})} - \frac{\sqrt{h}(g_{\cdot\beta}^\alpha - g_\beta^{\cdot\alpha})v^\beta}{c(1-\frac{v^2}{c^2})} - \frac{\lambda_{\beta\gamma}^\alpha v^\beta v^\gamma}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})}$$

Действующая на частицу сила f есть производная от ее импульса p по (синхронизованному) собственному времени, определенная с помощью трехмерного ковариантного дифференциала:

$$f^\alpha = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \frac{Dp^\alpha}{ds} = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \frac{d}{ds} \frac{mv^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \lambda_{\beta\gamma}^\alpha \frac{mv^\beta v^\gamma}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Из (2) имеем поэтому (для удобства опускаем индекс α)

$$f_\alpha = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{h} + \sqrt{h} \left(\frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta} \right) \frac{v^\beta}{c} \right\}$$

или в обычных трехмерных векторных обозначениях 1)

$$f = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left\{ -\text{grad} \ln \sqrt{h} + \sqrt{h} \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \text{rot} \mathbf{g} \right] \right\}$$

Отметим, что если тело неподвижно, то действующая на него сила (первый член в (3)) имеет потенциал.

При малых скоростях движения второй член в (3) имеет вид $mc\sqrt{h}[\mathbf{v} \text{rot} \mathbf{g}]$, аналогичный силе Кориолиса, которая возникла бы (при отсутствии поля) в системе координат, вращающейся с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{c}{2} \sqrt{h} \text{rot} g$$

2.

Вывести принцип Ферма для распространения лучей в постоянном гравитационном поле

Р е ш е н и е.

Принцип Ферма (см.

§ 53) гласит:

$$\delta \int k_\alpha dx^\alpha = 0$$

где интеграл берется вдоль луча, а подынтегральное выражение должно быть выражено через постоянную вдоль луча частоту ω_0 и дифференциалы координат.

Замечая, что $k_0 = -\partial\psi/\partial x^0 = \omega_0/c$, пишем:

$$\frac{\omega_0}{c} = k_0 = g_{0i}k^i = g_{00}k^0 + g_{0\alpha}k^\alpha = h(k^0 - g_\alpha k^\alpha)$$

Подставляя это в соотношение $k_i k^i = g_{ik} k^i k^k = 0$, написанное в виде

$$h(k^0 - g_\alpha k^\alpha)^2 - \gamma_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0$$

получим:

$$\frac{1}{h} \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2 - \gamma_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0$$

Учитывая также, что вектор k^α должен иметь направление вектора dx^α , находим отсюда:

$$k^\alpha = \frac{\omega_0}{c\sqrt{h}} \frac{dx^\alpha}{dl}$$

где dl (84.6) есть элемент пространственного расстояния вдоль луча.

Чтобы получить выражение для k_α , пишем:

$$k^\alpha = g^{\alpha i} k_i = g^{\alpha 0} k_0 + g^{\alpha\beta} k_\beta = -g^{\alpha 0} \frac{\omega_0}{c} - \gamma^{\alpha\beta} k_\beta$$

откуда

$$k_\alpha = -\gamma_{\alpha\beta} \left(k^\beta + \frac{\omega_0}{c} g^\beta \right) = -\frac{\omega_0}{c} \left(\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\sqrt{h}} \frac{dx^\beta}{dl} + g_\alpha \right)$$

Наконец, умножая на dx^α , получим принцип Ферма в виде (постоянный множитель ω_0/c опускаем)

$$\delta \int \left(\frac{dl}{\sqrt{h}} + g_\alpha dx^\alpha \right) = 0$$

В статическом поле имеем просто:

$$\delta \int \frac{dl}{\sqrt{h}} = 0$$

Обращаем внимание на то, что в гравитационном поле луч распространяется не по кратчайшей линии в пространстве,

так как последняя определялась бы уравнением $\delta \int dl = 0$.

22.3.3 Newton Gravity as a Particular Case of GR

Рассмотрим подробно ньютоновскую теорию тяготения с точки зрения ОТО в деталях.

(всё что угодно про неё тут. проверю, чтобы абсолютно всё в принципе можно было через ОТО решать!)

Вывод закона Ньютона

Произведем в уравнениях Эйнштейна предельный переход к нерелятивистской механике. Предположение малости скоростей всех частиц требует одновременно, чтобы само гравитационное поле было слабым.

Выражение для компоненты g_{00} метрического тензора (единственной, которая нам понадобится) в рассматриваемом предельном случае было найдено в §87:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

Далее, для компонент тензора энергии-импульса мы можем воспользоваться выражением (35.4) $T_i^k = \mu c^2 u_i u^k$, где μ - плотность массы тела (сумма масс покоя частиц в единице объема; индекс 0 у μ для краткости опускаем).

Что касается 4-скорости u^i , то поскольку макроскопическое движение тоже, конечно, считается медленным, то мы должны пренебречь всеми ее пространственными компонентами, оставив только временную, т.е.

должны положить $u^\alpha = 0, u^0 = u_0 = 1$.

Из всех компонент T_i^k остается, таким образом, только

$$T_0^0 = \mu c^2$$

Скаляр $T = T_i^i$ будет равен той же величине μc^2 .

Уравнения Эйнштейна напомним в форме $R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} (T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T)$:

$$\begin{aligned} R_i^k &= \frac{8\pi k}{c^4} (T_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k T) \\ \text{при } i &= k = 0 \\ R_0^0 &= \frac{4\pi k}{c^2} \mu \end{aligned}$$

При вычислении R_0^0 по общей формуле (92.7) замечаем, что члены, содержащие произведения величин Γ_{kl}^i , во всяком случае являются величинами второго порядка малости.

Члены же, содержащие производные по $x^0 = ct$, являются малыми (по сравнению с членами

с производными по координатам x^α), как содержащие лишние степени от $1/c$.

В результате остается $R_0^0 = R_{00} = \partial \Gamma_{00}^\alpha / \partial x^\alpha$.

Подставляя

$$\Gamma_{00}^\alpha \approx -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$$

находим:

$$R_0^0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{\alpha 2}} \equiv \frac{1}{c^2} \Delta \varphi$$

Таким образом, уравнения Эйнштейна дают:

$$\Delta \varphi = 4\pi k \mu$$

Это и есть уравнение гравитационного поля в нерелятивистской механике.

По своей форме оно полностью аналогично уравнению Пуассона (36.4) для электрического потенциала, в котором теперь вместо плотности заряда стоит плотность массы, умноженная на $-k$.

Поэтому мы можем сразу написать общее решение уравнения (99.2) по аналогии с (36.8) в виде Эта формула определяет в нерелятивистском приближении потенциал гравитационного поля любого распределения масс.

В частности, для потенциала поля одной частицы с массой m имеем:

$$\varphi = -\frac{km}{R}$$

и, следовательно, сила $F = -m' \frac{\partial \varphi}{\partial R}$, действующая в этом поле на другую частицу (массы m'), равна

$$F = -\frac{km m'}{R^2}$$

Это - известный закон тяготения Ньютона.

Потенциальная энергия

Потенциальная энергия частицы в гравитационном поле равна ее массе, умноженной на потенциал поля, аналогично тому, что потенциальная энергия в электрическом поле равна произведению заряда на потенциал этого поля.

Поэтому мы можем написать по аналогии с (37.1) для потенциальной энергии любого распределения масс выражение

$$U = \frac{1}{2} \int \mu \varphi dV$$

Для ньютоновского потенциала постоянного гравитационного поля вдали от создающих его масс можно написать разложение, аналогичное тому, которое было получено в §40 – §41 для электростатического поля.

Выберем начало координат в центре инерции масс.

Тогда интеграл $\int \mu \mathbf{r} dV$, аналогичный дипольному моменту системы зарядов, тождественно обратится в нуль.

Таким образом, в отличие от электрического поля, в гравитационном поле всегда можно исключить дипольный член.

(?!!!! подумая еще про это)

Разложение потенциала φ имеет, следовательно, вид

$$\varphi = -k \left(\frac{M}{R_0} + \frac{1}{6} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} + \dots \right)$$

где $M = \int \mu dV$ - полная масса системы, а величины

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) dV$$

можно назвать тензором квадрупольного момента масс.

Он связан с обычным тензором моментов инерции $J_{\alpha\beta} = \int \mu (r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta) dV$ очевидными соотношениями

$$D_{\alpha\beta} = J_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} - 3J_{\alpha\beta}$$

Определение ньютоновского потенциала по заданному распределению масс составляет предмет одного из разделов математической физики.

(которой я пока не занимался)

Гравитационное поле эллипсоида

(хотя бы пару еще таких задач когда-то нужно бы порешать)

Формулы для потенциала гравитационного поля, создаваемого однородным эллипсоидальным телом получаются следующим образом.

Пусть поверхность эллипсоида задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c$$

Тогда потенциал поля в произвольной точке x, y, z вне тела дается следующей формулой:

$$\varphi = -\pi\mu abck \int_{\xi}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{R_s},$$

где $R_s = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}$, а $\xi > 0$ есть корень уравнения $\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1$.

Потенциал поля внутри эллипсоида определяется формулой

$$\varphi = -\pi\mu abck \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{R_s},$$

отличающейся от (99.11) заменой нижнего предела нулем; отметим, что это выражение является квадратичной функцией координат x, y, z .

Гравитационная энергия тела получается, согласно (99.6), интегрированием выражения (99.13) по объему эллипсоида.

Оно производится элементарно ¹ и дает:

$$\begin{aligned} U &= \frac{3km^2}{8} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{a^2}{a^2 + s} + \frac{b^2}{b^2 + s} + \frac{c^2}{c^2 + s} \right) - 1 \right] \frac{ds}{R_s} = \\ &= \frac{3km^2}{8} \int_0^{\infty} \left[\frac{2}{5} s d \left(\frac{1}{R_s} \right) - \frac{2}{5} \frac{ds}{R_s} \right] \end{aligned}$$

($m = \frac{4\pi}{3} abc\mu$ — полная масса тела); интегрируя первый член по частям, окончательно получим:

$$U = -\frac{3km^2}{10} \int_0^{\infty} \frac{ds}{R_s}$$

Все интегралы, входящие в формулы (99.11) – (99.14), приводятся к эллиптическим интегралам первого и второго рода.

Для эллипсоидов вращения эти интегралы выражаются через элементарные функции.

В частности, гравитационная энергия сплюснутого эллипсоида вращения ($a = b > c$)

$$U = -\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2 - c^2}} \arccos \frac{c}{a},$$

а для вытянутого эллипсоида вращения ($a > b = c$):

$$U = -\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{Arch} \frac{a}{c}$$

Для шара ($a = c$) обе формулы дают значение $U = -3 \text{ км}^2/5a$, которое разумеется, можно получить и элементарным путем.

Равновесная форма равномерно вращающейся жидкости (!?)

(вроде крутая задача очень!!)

Обсудим, какая равновесная форма равномерно вращающейся как целое однородной гравитирующей массы жидкости.

Условие равновесия заключается в условии постоянства вдоль поверхности тела суммы гравитационного потенциала и потенциала центробежных сил:

$$\varphi - \frac{\Omega^2}{2} (x^2 + y^2) = \text{const}$$

(Ω - угловая скорость вращения; ось вращения - ось z).

Искомая форма представляет собой сплюснутый эллипсоид вращения.

Для определения его параметров подставляем (99.13) в условие равновесия и исключаем z^2 с помощью уравнения (99.10); это дает:

$$(x^2 + y^2) \left[\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)^2 \sqrt{c^2 + s}} - \frac{\Omega^2}{2\pi\mu k a^2 c} - \frac{c^2}{a^2} \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)(c^2 + s)^{3/2}} \right] = \text{const}$$

откуда следует, что выражение в квадратных скобках должно обращаться в нуль.

Произведя интегрирование, получим в результате уравнение:

$$\frac{(a^2 + 2c^2)}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \arccos \frac{c}{a} - \frac{3c^2}{a^2 - c^2} = \frac{\Omega^2}{2\pi k \mu} = \frac{25}{6} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{M^2 \mu^{1/3}}{m^{10/3} k} \left(\frac{c}{a} \right)^{4/3}$$

($M = \frac{2}{5} m a^2 \Omega$ – момент импульса тела относительно оси z), определяющее отношение полуосей c/a по заданному Ω или M .

Зависимость отношения c/a от M - однозначная; c/a монотонно убывает с увеличением M .

Оказывается, однако, что найденная симметричная форма устойчива (по отношению к малым возмущениям) лишь при не слишком больших значениях M .

Именно, она теряет устойчивость при $M = 0,24 k^{1/2} \text{ м}^{5/3} \mu^{-1/6}$ (причем $c/a = 0,58$).

При дальнейшем увеличении M равновесной становится форма трехосного эллипсоида с постепенно убывающими (соответственно от 1 и от 0,58) значениями b/a и c/a .

Эта форма, в свою очередь, становится неустойчивой при $M = 0,31 k^{1/2} m^{5/3} \mu^{-1/6}$ (причем $a : b : c = 1 : 0,43 : 0,34$)¹.

22.4 Einstein Equations

Большинство задач ОТО сводятся к уравнениям Эйнштейна, которые и обсудим подробно в этом разделе.

(по идее абсолютно любая задача ОТО сведется к уравнению из этой части)

22.4.1 Derivation of Einstein's Equations

Достаточно просто и интересно вывести уравнения Эйнштейна, сделаем это, чтобы пользоваться.

О том, почему мы берем именно скалярную кривизну

(кст, для ЭД нужно аналогичное проделать)

(не совсем полезные рассуждения Ландау, но тут пояснения, почему именно скалярная кривизна у нас. мб потом мне объяснят, почему они важны, пока вроде ничего такого важного тут нет, всё понятно.)

Для нахождения уравнений, определяющих гравитационное поле, необходимо предварительно определить действие S_g этого поля, чтобы далее его и действие материальных частиц варьировать.

Действие S_g должно быть выражено в виде некоторого скалярного интеграла $\int G\sqrt{-g}d\Omega$, взятого по всему пространству и по временной координате x^0 между двумя заданными ее значениями.

Чтобы уравнения гравитационного поля содержали производные от «потенциалов» поля не выше второго порядка, так как они получаются путем варьирования действия, то необходимо, чтобы подинтегральное выражение G содержало производные от g_{ik} не выше первого порядка; таким образом, G должно содержать только тензор g_{ik} и величины Γ_{kl}^i .

Однако из одних только величин g_{ik} и Γ_{kl}^i невозможно построить скаляр, потому что посредством соответствующего выбора системы координат можно всегда обратить все величины Γ_{kl}^i в данной точке в нуль.

Существует, однако, скаляр R -кривизна 4-пространства, - который хотя и содержит наряду с тензором g_{ik} и его первыми производными еще и вторые производные от g_{ik} , но последние входят только линейно.

Благодаря этой линейности инвариантный интеграл $\int R\sqrt{-g}d\Omega$ можно преобразовать с помощью теоремы Гаусса в интеграл от выражения, не содержащего вторых производных.

Именно, можно представить его в виде

$$\int R\sqrt{-g}d\Omega = \int G\sqrt{-g}d\Omega + \int \frac{\partial(\sqrt{-g}w^i)}{\partial x^i}d\Omega,$$

где G содержит только тензор g_{ik} и его первые производные, а подинтегральное выражение во втором интеграле имеет вид дивергенции некоторой величины w^i

(подробное вычисление произведено в конце настоящего параграфа (???)).

Согласно теореме Гаусса этот второй интеграл можно преобразовать в интеграл по гиперповерхности, охватывающей 4-объем, по которому производится интегрирование в двух других интегралах.

При варьировании действия вариация второго члена справа, следовательно, исчезает, так как по смыслу принципа наименьшего действия на границах области интегрирования вариация поля равна нулю.

Следовательно, мы можем написать:

$$\delta \int R \sqrt{-g} d\Omega = \delta \int G \sqrt{-g} d\Omega$$

Слева стоит скаляр; поэтому скаляром является и стоящее справа выражение (сама же величина G скаляром, конечно, не является).

Величина G удовлетворяет поставленному выше требованию, так как содержит только g_{ik} и его первые производные.

Таким образом, мы можем написать:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int G \sqrt{-g} d\Omega = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int R \sqrt{-g} d\Omega$$

где k - новая универсальная постоянная.

Положительность гравитационной постоянной (?)

(потом досмотрю)

Аналогично тому, как это было сделано в §27 для действия электромагнитного поля, можно видеть, что постоянная k должна быть положительна (см. конец этого параграфа).

Постоянная k называется гравитационной постоянной.

Размерность гравитационной постоянной

Размерность k следует непосредственно из

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int G \sqrt{-g} d\Omega = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int R \sqrt{-g} d\Omega.$$

Действие имеет размерность ($\text{г}^2 \text{см}^2 \text{с}^{-1}$); все координаты можно считать имеющими размерность см, а g_{ik} - безразмерными, и следовательно, R имеет размерность.

В результате находим, что k имеет размерность ($\text{см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \text{с}^{-2}$).

Ее численное значение равно

$$k = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$$

(откуда кст это?)

Заметим, что мы могли бы положить k равной единице или другому произвольному безразмерному числу, однако, при этом определился бы выбор единицы для измерения массы.

(подумаю про это позже)

Вычисление G

Вычислим, наконец, величину $\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int R \sqrt{-g} d\Omega$.
(?? кст, откуда минус перед всем выражением?)

Из выражения $R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l$ имеем:

$$\sqrt{-g} R = \sqrt{-g} g^{ik} R_{ik} = \sqrt{-g} \left\{ g^{ik} \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - g^{ik} \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^k} + g^{ik} \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - g^{ik} \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l \right\}.$$

Здесь два первые справа члены можно записать как:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} &= \frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma_{ik}^l) - \Gamma_{ik}^l\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}g^{ik}), \\ \sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\Gamma_{il}^l}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma_{il}^l) - \Gamma_{il}^l\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}g^{ik})\end{aligned}$$

Опуская полные производные, находим:

$$\sqrt{-g}R = \Gamma_{im}^m\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}g^{ik}) - \Gamma_{ik}^l\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}g^{ik}) - (\Gamma_{il}^m\Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^l\Gamma_{lm}^m)g^{ik}\sqrt{-g}$$

С помощью формул $\Gamma_{ki}^i = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}$, $g^{kl}\Gamma_{kl}^i = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{ik})}{\partial x^k}$, $\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma_{ml}^i g^{mk} - \Gamma_{ml}^k g^{im}$ находим, что первые два члена справа равны $\sqrt{-g}$, помноженному на

$$2\Gamma_{ik}^l\Gamma_{lm}^i g^{mk} - \Gamma_{im}^m\Gamma_{kl}^i g^{kl} - \Gamma_{ik}^l\Gamma_{lm}^m g^{ik} = g^{ik}(2\Gamma_{mk}^l\Gamma_{li}^m - \Gamma_{lm}^m\Gamma_{ik}^l - \Gamma_{ik}^l\Gamma_{lm}^m) = 2g^{ik}(\Gamma_{il}^m\Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^l\Gamma_{lm}^m)$$

Окончательно имеем:

$$G = g^{ik}(\Gamma_{il}^m\Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^l\Gamma_{lm}^m)$$

(?? возможно, этой формулой удобно пользоваться чуть что будет, а не считать с нуля тензор Риччи?? пока хз, зачем она??)

Величинами, определяющими гравитационное поле, являются g_{ik} , поэтому в принципе наименьшего действия для гравитационного поля варьированию подлежат именно они.

(?? а не кристоффеля кст варьируются? чет не так понял, что же варьируется???)

Действие гравитационного поля имеет минимум только при наложении определенных условий на метрику (??)

Мы не можем теперь утверждать, что в реальном поле интеграл действия имеет минимум (а не просто экстремум) по отношению ко всем возможным вариациям g_{ik} .

Это связано с тем, что не всякое изменение g_{ik} соответствует изменению метрики пространства-времени, т.е. реальному изменению гравитационного поля. Компоненты g_{ik} меняются уже и при простом преобразовании координат, связанном лишь с переходом от одной системы к другой в одном и том же пространстве-времени. Каждое такое преобразование координат представляет собой, вообще говоря, совокупность четырех (по числу координат) независимых преобразований. (????? про это в др. разделе подумаю)

Для того чтобы исключить такие не связанные с изменением метрики изменения g_{ik} , можно наложить на них четыре дополнительных условия и потребовать выполнения этих условий при варьировании. (?? какие??)

Таким образом, в применении к гравитационному полю принцип наименьшего действия утверждает лишь, что можно наложить на g_{ik} такие дополнительные условия, при соблюдении которых действие имеет минимум по отношению к варьированию g_{ik} .

Положительность гравитационной постоянной необходима для минимума действия (?)

(потом еще подумаю про это, сделаю сам, но позже. суть пока не совсем понял)

Покажем, что гравитационная постоянная должна быть положительной.

В качестве четырех дополнительных условий для минимума действия потребуем обращения в нуль трех компонент $g_{0\alpha}$ и постоянства определителя $|g_{\alpha\beta}|$:

$$g_{0\alpha} = 0, \quad |g_{\alpha\beta}| = \text{const.}$$

(почему именно такие?)

В силу последнего из этих условий будем иметь: (??)

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial x^0} |g_{\alpha\beta}| = 0$$

(??) Нас интересуют здесь те члены в подынтегральном выражении в действии, которые содержат производные от g_{ik} по x^0 . Вычисление по $G = g^{ik} (\Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m)$ показывает, что такими членами в G являются

$$-\frac{1}{4} g^{00} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^0} \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^0}$$

(??? проверю потом??)

Легко видеть, что эта величина строго отрицательна. Действительно, выбирая пространственную систему координат, которая была бы декартовой в данной точке пространства в данный момент времени (так что $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$), получим:

$$-\frac{1}{4} g^{00} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} \right)^2$$

и поскольку $g^{00} = 1/g_{00} > 0$, то выражение отрицательно.

Достаточно быстрым изменением компонент $g_{\alpha\beta}$ со временем x^0 (в промежутке между двумя пределами интегрирования по dx^0) можно, следовательно, сделать величину $-G$ сколь угодно большой.

Если бы в $\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \delta \int R \sqrt{-g} d\Omega$ постоянная k была отрицательной, то δS_g при этом неограниченно уменьшалось бы, т.е. не имела бы минимума.

О множителе перед ТЭИ в уравнениях Эйнштейна

Обсудим, почему перед ТЭИ множитель именно $\frac{8\pi G}{c^4}$.

(пока не готов ответить)

22.4.2 Properties of Einstein's Equations

Обсудим подробно все свойства уравнений Эйнштейна.

Вид δS_g

(потренируюсь кст в этом всем потом!!!)

Уравнения гравитационного поля получаются из $\delta (S_m + S_g) = 0$, где S_g и S_m - действия соответственно для гравитационного поля и материи.

Покажем, что вариация δS_g равна:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega$$

Варьированию подвергается теперь гравитационное поле, т.е. величины g_{ik} . Вычислим вариацию δS_g :

$$\begin{aligned} \delta S_g &= \delta \int R \sqrt{-g} d\Omega \\ &= \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega = \\ &= \int (R_{ik} \sqrt{-g} \delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta \sqrt{-g} + g^{ik} \sqrt{-g} \delta R_{ik}) d\Omega \end{aligned}$$

Используя $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ik}\delta g^{ik}$, имеем:

$$\delta S_g = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega + \int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega$$

(!!! тут очень крутая идея перейти в лок.геод СК, а потом в произвольную. пропишу эту идею потом где-то отдельно! пока для этого слабоватая структура.)

Теперь осталось доказать, что вариация второго члена-интеграла действия исчезает. Воспользуемся локально-геодезической системой координат, в данной точке все $\Gamma_{kl}^i = 0$, то есть первые производные от g^{ik} равны теперь нулю. С помощью $R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l$ имеем:

$$g^{ik} \delta R_{ik} = g^{ik} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \Gamma_{il}^l \right\} = g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^l - g^{il} \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}^k = \frac{\partial w^l}{\partial x^l}$$

где $w^l = g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^l - g^{il} \delta \Gamma_{lk}^k$.

Поскольку w^l это вектор, мы можем написать полученное соотношение в произвольной системе координат в виде

$$g^{ik} \delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g} w^l)$$

Следовательно, второй член в δS_g равен

$$\int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega = \int \frac{\partial \sqrt{-g} w^l}{\partial x^l} d\Omega$$

и, по теореме Гаусса может быть преобразован в интеграл от w^l по гиперповерхности, охватывающей весь 4-объем. Поскольку на пределах интегрирования вариация поля равна нулю, то этот член исчезает.

Таким образом, вариация δS_g равна:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega$$

замечание о связи G и R (?)

(и зачем оно?)

Заметим, что если бы мы исходили из выражения для действия поля вида:

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int G \sqrt{-g} d\Omega,$$

то мы получили бы (???)

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k} \int \left\{ \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \right\} \delta g^{ik} d\Omega$$

Приравняв к выражению выше, получим:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \right\}.$$

(?? и что???)

Вариация действия материи

Для вариации действия материи δS_m можно написать согласно

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega$$

где T_{ik} - тензор энергии-импульса материи (включая электромагнитное поле).

(проработаю раздел про ТЭИ, пока слабоват он!!)

При исследовании гравитационного поля нам приходится обычно иметь дело с макроскопическими телами, потому что только для них гравитационное взаимодействие существенно (благодаря малости гравитационной постоянной). Поэтому чаще всего

$$T_{ik} = (p + \varepsilon) u_i u_k - p g_{ik}$$

Таким образом, из принципа наименьшего действия $\delta S_m + \delta S_g = 0$ находим:

$$-\frac{c^3}{16\pi k} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega = 0$$

откуда ввиду произвольности δg^{ik} получаем уравнения Эйнштейна гравитационного поля - основные уравнения общей теории относительности:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik}$$

или в смешанных компонентах

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k$$

Упрощая уравнения Эйнштейна в смешанных компонентах по индексам i и k , находим:

$$R = -\frac{8\pi k}{c^4} T$$

где $T = T_i^i$. Поэтому уравнения поля можно написать также в виде

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right)$$

Нелинейность уравнений Эйнштейна

Покажем явно, что уравнения Эйнштейна нелинейны.

(??? также какой-то конкретный пример добавлю)

Отсутствие принципа суперпозиции для гравитационных полей

Покажем явно, что в общем случае ввиду нелинейности уравнений Эйнштейна отсутствует принцип суперпозиции.

(??? пример???)

22.5 Construction of General Relativity: Other Fundamental Properties

22.5.1 Gravity in Coordinate Free Notation

(??? I still don't know how to do it, but I heard that knowledge of it is used by specialists. So, I'll write later. ????)

22.5.2 Einstein's Equations in the Tetrad Formalism (??)

(раздел будет висеть до тех пор, пока не возникнет в нем потребность. пока я не разбираюсь в этом.)

Суть тетрадного формализма

(узнаю - напишу)

обзор применений тетрадного формализма

хз

Объяснение существования тетрадного формализма (??!!)

(тоже не пойму, вот теория там ОТО себе была, ничего даже не намекает, что еще может быть какой-то формализм. пока хз.)

Theory

Определение компонент тензора Риччи (и тем самым составление уравнений Эйнштейна) для метрики того или иного специального вида связано, вообще говоря, с довольно громоздкими вычислениями.

Поэтому приобретают значение различные формулы, позволяющие в некоторых случаях упростить эти вычисления и представить результат в более обозримом виде.

К числу таких формул относится выражение тензора кривизны в так называемом тетрадном виде.

Введем совокупность четырех линейно-независимых реперных 4-векторов $e^i_{(a)}$ (нумеруемых индексом a), подчиненных лишь требованию

$$e^i_{(a)} e_{(b)i} = \eta_{ab}$$

где η_{ab} - заданная постоянная симметричная матрица с сигнатурой $+$ - -; матрицу, обратную матрице η_{ab} , обозначим посредством η^{ab} ($\eta^{ac}\eta_{cb} = \delta^a_b$).

Наряду с четверкой (тетрадой) векторов $e^i_{(a)}$, введем также четверку взаимных с ними векторов $e^{(a)i}$ (нумеруемых верхними реперными индексами), определенных условиями

$$e^{(a)i} e_{(b)i} = \delta^a_b$$

т.е.

каждый из векторов $e^{(a)}_i$ ортогонален трем векторам $e^i_{(b)}$ с $b \neq a$.

Умножив равенство (98.2) на $e^k_{(a)}$, получим $(e^k_{(a)} e^i_{(a)}) e^i_{(b)} = e^k_{(b)}$ откуда видно, что наряду с (98.2) автоматически выполняются также и равенства

$$e^{(a)}_i e^k_{(a)} = \delta^k_i$$

Умножив равенство $e^i_{(a)} e_{(c)i} = \eta_{ac}$ с обеих сторон на η^{bc} , получим:

$$e^i_{(a)} (\eta^{bc} e_{(c)i}) = \delta^b_a$$

сравнив с (98.2), находим, что

$$e^{(b)}_i = \eta^{bc} e_{(c)i}, \quad e_{(b)i} = \eta_{bc} e^{(c)}_i$$

Таким образом, поднимание и опускание реперных индексов осуществляется матрицами η^{bc} и η_{bc}

Значение введенных таким образом реперных векторов состоит в том, что через них может быть выражен метрический тензор.

Действительно, согласно определению связи между ко- и контравариантными компонентами 4-вектора имеем $e_i^{(a)} = g_{il}e^{(a)l}$; умножив это равенство на $e_{(a)k}$ и используя (98.3) в (98.4), найдем:

$$g_{ik} = e_{(a)i}e_k^{(a)} = \eta_{ab}e_i^{(a)}e_k^{(b)}$$

Квадрат элемента интервала с метрическим тензором (98.5) принимает вид

$$ds^2 = \eta_{ab} \left(e_i^{(a)} dx^i \right) \left(e_k^{(b)} dx^k \right)$$

Что касается произвольно задаваемой матрицы η_{ab} , то наиболее естественный ее выбор - в галилеевой» форме (т.е.

диагональная матрица с элементами $1, -1, -1, -1$); при этом реперные векторы, согласно (98.1), взаимно ортогональны, причем один из них времениподобен, а три других - пространственноподобны 1).

Подчеркнем, однако, что такой выбор отнюдь не обязателен и возможны ситуации, когда по тем или иным причинам (например, по свойствам симметрии метрики) целесообразен выбор неортогональной тетрады.

Тетрадные компоненты 4-вектора A^i (и аналогично для 4-тензоров любого ранга) определяются как его «проекции» на реперные 4-векторы:

$$A_{(a)} = e_{(a)i}A^i, \quad A^{(a)} = e_i^{(a)}A^i = \eta^{ab}A_{(b)}$$

Обратно:

$$A_i = e_i^{(a)}A_{(a)}, \quad A^i = e_{(a)i}A^{(a)}$$

Таким же образом определим операцию дифференцирования вдоль направления a :

$$\varphi_{\cdot(a)} = e_{(a)}^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$$

γ_{acb} - коэффициенты вращения Риччи

Введем нужные для дальнейшего величины

$$\gamma_{acb} = e_{(a)i;k}e_{(b)}^ie_{(c)}^k$$

и их линейные комбинации

$$\begin{aligned} \lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb} &= (e_{(a)i;k} - e_{(a)k;i})e_{(b)}^ie_{(c)}^k = \\ &= (e_{(a)i,k} - e_{(a)k,i})e_{(b)}^ie_{(c)}^k \end{aligned}$$

Последнее равенство в (98.10) следует из (86.12); отметим, что величины λ_{abc} вычисляются простым дифференцированием реперных векторов.

Обратное выражение γ_{abc} через λ_{abc}

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab})$$

Эти величины обладают свойствами симметрии:

$$\begin{aligned} \gamma_{abc} &= -\gamma_{bac} \\ \lambda_{abc} &= -\lambda_{acb} \end{aligned}$$

Наша цель состоит в определении тетрадных компонент тензора кривизны.

Для этого надо исходить из определения (91.6), примененного к ковариантным производным реперных векторов:

$$e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i;l;k} = e_{(a)}^m R_{mikl}$$

или

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = (e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i;l;k}) e_{(b)}^i e_{(c)}^k e_{(d)}^l$$

Это выражение легко выразить через величины γ_{abc} .

Пишем

$$e_{(a)i;k} = \gamma_{abc} e_i^{(b)} e_k^{(c)}$$

а после следующего ковариантного дифференцирования производные от реперных векторов снова выражаются таким же образом; при этом

ковариантная производная от скалярной величины γ_{abc} совпадает с ее простой производной 1).

В результате получается:

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \gamma_{a,c,d} - \gamma_{abd,c} + \gamma_{abf} (\gamma^f_{cd} - \gamma^f_{dc}) + \gamma_{afc} \gamma^f_{bd} - \gamma_{afd} \gamma^f_{bc}$$

где в соответствии с общим правилом $\gamma^a_{bc} = \eta^{ad} \gamma_{dbc}$ и т. п.

Упрощение этого тензора по паре индексов a, c дает искомые тетрадные компоненты тензора Риччи; приведем их выраженными уже через величины λ_{abc} :

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)} = & -\frac{1}{2}(\lambda_{ab^c,c} + \lambda_{ba^c,c} + \lambda_{ca,b}^c + \lambda_{cb,a}^c + \\ & + \lambda_b^{cd} \lambda_{cda} + \lambda_b^{cd} \lambda_{dca} - \frac{1}{2} \lambda_b^{cd} \lambda_{acd} + \lambda_{cd}^c \lambda_{ab}^d + \lambda_{cd}^c \lambda_{ba}^d) \end{aligned}$$

Тетрадный формализм в 3-мерном пространстве

Заметим, что изложенные построения по существу никак не связаны с четырехмерностью метрики. Поэтому полученные результаты могут быть применены и к вычислению трехмерных тензоров Римана и Риччи по трехмерной метрике. При этом, естественно, вместо тетрады реперных 4 -векторов мы будем иметь дело с триадой трехмерных векторов, а матрица η_{ab} должна иметь сигнатуру + + + (мы встретимся с таким применением в §116).

(?? мб тут формулы приведу)

О калибровках в ОТО при тетрадном формализме (???)

Ходят слухи, что с ним можно сделать уравнения Эйнштейна калибровочными. не знаю.

Примеры применения тетрадного формализма

(не знаю. не актуально)

22.5.3 Einstein's Equations in the Second Approximation

(примеры из этого раздела перенесу в часть про модели. тут лишь укажу, что там эта теория нужна.)

Суть уравнений во втором приближении

Система гравитирующих тел может быть описана с помощью функции Лагранжа с точностью до членов порядка $1/c^4$ в отличие от электромагнитного поля, где функция Лагранжа существует, в общем случае, только с точностью до членов второго порядка.

(пропишу там это четче!)

сами уравнения имеют вид:

???

для получения искомых уравнений движения достаточно знать пространственные компоненты $h_{\alpha\beta}$ с точностью ($\sim 1/c^2$); смешанные же компоненты (отсутствующие в приближении $1/c^2$) необходимо иметь с точностью до членов $1/c^3$, а временную h_{00} - с точностью до членов $1/c^4$.

Обзор применений уравнений Эйнштейна во втором приближении (??)

Система движущихся тел излучает гравитационные волны, теряя при этом энергию в пятом приближении по $1/c$. В первых же четырех приближениях энергия системы остается постоянной.

(в 1ю часть вставлю потом)

(а мы же кстати так далеко не идем, мы на втором останавливаемся, так что нам то что с этого?)

Вывод функции Лагранжа системы тел с точностью до членов второго порядка

Приведем вывод функции Лагранжа системы тел с точностью до членов второго порядка. Тем самым мы найдем уравнения движения системы в приближении, следующем после ньютоновского.

(явно выделю Ньютоновскую часть в нем потом)

Будем пренебрегать размерами и внутренней структурой тел, рассматривая их как «точечные»; другими словами, мы ограничиваемся нулевыми членами разложения по степеням отношений размеров тел a к их взаимным расстояниям l .

Для решения поставленной задачи мы должны начать с определения в соответствующем приближении слабого гравитационного поля, создаваемого телами на расстояниях, больших по сравнению с их размерами, но в то же время малых по сравнению с длиной излучаемых системой гравитационных волн λ , то есть ($a \ll r \ll \lambda \sim lc/v$).

С точностью до величин порядка $1/c^2$ поле вдали от тела дается полученными в предыдущем параграфе выражениями, обозначенными там как $h_{ik}^{(1)}$; воспользуемся здесь этими выражениями в форме (105.6a).

В теории слабого поля подразумевалось, что поле создается всего одним находящимся в начале координат телом. Но поскольку поле $h_{ik}^{(1)}$ представляет собой решение линеаризованных уравнений Эйнштейна, то для него справедлив принцип суперпозиции. Поэтому поле вдали от системы тел получится просто суммированием полей каждого из них. Напишем его в виде

$$\begin{aligned} h_0^0 &= \frac{2}{c^2} \varphi, \\ h_0^\alpha &= 0 \\ h_\alpha^\beta &= -\frac{2}{c^2} \varphi \delta_\alpha^\beta \end{aligned}$$

где $\varphi(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}$ есть ньютонов гравитационный потенциал системы точечных тел ($\mathbf{r}_a$ — радиус-вектор тела с массой m_a). В данном случае интервал имеет вид:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{c^2}\varphi\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2}{c^2}\varphi\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Отметим, что члены первого порядка по φ имеются не только в g_{00} , но и в $g_{\alpha\beta}$; в §87 было уже указано, что в уравнениях движения частицы поправочные члены в $g_{\alpha\beta}$ приводят к величинам более высоких порядков малости, чем члены, происходящие от g_{00} ; в связи с этим путем сравнения с ньютоновыми уравнениями движения можно было определить только g_{00} .

(?? там еще раз посмотрю, почему это так)

Обратимся к общим уравнениям тяготения. Пренебрегая размерами тел, мы должны писать тензор энергии-импульса вещества в форме $T^{ik} = \mu c u^i u^k \frac{ds}{dt}$. В криволинейных координатах это выражение переписывается как

$$T^{ik} = \sum_a \frac{m_a c}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a),$$

где суммирование производится по всем телам в системе.

Компонента

$$T_{00} = \sum_a \frac{m_a c^3}{\sqrt{-g}} g_{00}^2 \frac{dt}{ds} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

а в первом приближении равна $\sum_a m_a c^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$; в следующем приближении подставляем g_{ik} нашего случая, после простого ^aвычисления получаем:

$$T_{00} = \sum_a m_a c^2 \left(1 + \frac{5\varphi_a}{c^2} + \frac{v_a^2}{2c^2}\right) \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

где $\mathbf{v}$ — обычная трехмерная скорость ($v^\alpha = dx^\alpha/dt$), а φ_a — потенциал поля в точке $\mathbf{r}_a$ (на наличие в φ_a бесконечной части — потенциала собственного поля частицы m_a — пока не обращаем внимания, это где-то потом будет обсуждено (??)).

(проделаю потом разок еще)

Что касается компонент $T_{\alpha\beta}, T_{0\alpha}$ тензора энергии-импульса, то для них, в том же приближении, достаточно оставить лишь первые члены разложения выражений (106.4):

$$T_{\alpha\beta} = \sum_a m_a v_{a\alpha} v_{a\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad T_{0\alpha} = - \sum_a m_a c v_{a\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

Далее переходим к вычислению компонент тензора R_{ik} . Вычисление удобно производить по формуле $R_{ik} = g^{lm} R_{limk}$ с R_{limk} через кристоффеля. При этом надо помнить, что величины $h_{\alpha\beta}, h_{00}$ содержат члены порядок не ниже $1/c^2$, а $h_{0\alpha}$ — не ниже $1/c^3$; дифференцирования по $x^0 = ct$, в свою очередь, повышают порядок малости на 1.

Главные члены в R_{00} порядка $1/c^2$; наряду с ними, мы должны сохранить также и члены следующего не исчезающего порядка $-1/c^4$.

Простое вычисление приводит к результату:

$$R_{00} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2c} \frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \Delta h_{00} + \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta} \left(2 \frac{\partial h_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial x^\beta} \right)$$

(?? потом проделаю, пока не до этого)

В этом вычислении не было еще использовано никакого дополнительного условия для величин h_{ik} . Пользуясь этой свободой, наложим теперь на них условие калибровки

$$\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2c} \frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t} = 0$$

в результате которого из R_{00} полностью выгадают члены, содержащие компоненты $h_{0\alpha}$. В остальных членах подставляем

$$h_\alpha^\beta = -\frac{2}{c^2} \varphi \delta_\alpha^\beta, \quad h_{00} = \frac{2}{c^2} \varphi + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

и получаем, с требуемой точностью:

$$R_{00} = \frac{1}{2} \Delta h_{00} + \frac{2}{c^4} \varphi \Delta \varphi - \frac{2}{c^4} (\nabla \varphi)^2$$

где мы перешли к трехмерным обозначениям.

При вычислении компонент $R_{0\alpha}$ достаточно сохранить лишь члены первого не исчезающего порядка $-1/c^3$. Аналогичным образом получим:

$R_{0\alpha} = \frac{1}{2c} \frac{\partial^2 h_\alpha^\beta}{\partial t \partial x^\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_0^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{1}{2c} \frac{\partial^2 h_\beta^\beta}{\partial t \partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \Delta h_{0\alpha}$ и затем, с учетом нашей калибровки:

$$R_{0\alpha} = \frac{1}{2} \Delta h_{0\alpha} + \frac{1}{2c^3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x^\alpha}$$

Теперь составим уравнения Эйнштейна $R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} (T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T)$. Временная компонента дает:

$$\Delta h_{00} + \frac{4}{c^4} \varphi \Delta \varphi - \frac{4}{c^4} (\nabla \varphi)^2 = \frac{8\pi k}{c^4} \sum_a m_a c^2 \left(1 + \frac{5\varphi_a}{c^2} + \frac{3v_a^2}{2c^2} \right) \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

с помощью тождества $4(\nabla \varphi)^2 = 2\Delta(\varphi^2) - 4\varphi \Delta \varphi$ и уравнения ньютоновского потенциала

$$\Delta \varphi = 4\pi k \sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

переписываем это уравнение в виде

$$\Delta \left(h_{00} - \frac{2}{c^4} \varphi^2 \right) = \frac{8\pi k}{c^2} \sum_a m_a \left(1 + \frac{\varphi'_a}{c^2} + \frac{3v_a^2}{2c^2} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

(?? проделаю это потом, пока тождество выше это не усвоено)

После проведения всех вычислений мы заменили в правой стороне уравнения выше φ_a на

$$\varphi'_a = -k \sum_b^I \frac{m_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}$$

т.е. на потенциал в точке $\mathbf{r}_a$ поля, создаваемого всеми телами, за исключением тела m_a ;

Исключение бесконечного собственного потенциала тел (в используемом нами методе, рассматривающем тела как точечные) соответствует «перенормировке» их масс, в результате которой они принимают свои истинные значения, учитывающие создаваемые самими телами поля.

Решение уравнения Эйнштейна на R_{00} может быть написано сразу, учитывая известное соотношение $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \Delta(\mathbf{r})$. Таким образом, найдем:

$$h_{00} = \frac{2\varphi}{c^2} + \frac{2\varphi^2}{c^4} - \frac{2k}{c^4} \sum_a \frac{m_a \varphi'_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} - \frac{3k}{c^4} \sum_a \frac{m_a v_a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}$$

Смешанная компонента уравнения Эйнштейна есть:

$$\Delta h_{0\alpha} = -\frac{16\pi k}{c^3} \sum_a m_a v_{a\alpha} \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) - \frac{1}{c^3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x^\alpha}$$

Решение этого линейного уравнения есть

$$h_{0\alpha} = \frac{4k}{c^3} \sum_a \frac{m_a v_{a\alpha}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} - \frac{1}{c^3} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^\alpha}$$

где f - решение вспомогательного уравнения $\Delta f = \varphi = -\sum \frac{km_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}$.

(?? ниже непонятно, откуда оно???)

Учитывая соотношение $\Delta r = 2/r$, находим:

$$f = -\frac{k}{2} \sum_a m_a |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|$$

и затем, после простого вычисления, окончательно получаем:

$$h_{0\alpha} = \frac{k}{2c^3} \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} [7v_{a\alpha} + (\mathbf{v}_a \mathbf{n}_a) n_{a\alpha}]$$

где $\mathbf{n}_a$ - единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}_a$.

Вывод функции Лагранжа с точностью до членов второго порядка

Найденные поправки к метрике достаточны для вычисления искомой функции Лагранжа с точностью до членов второго порядка.

(?!! это вот сделаю потом еще раз!!)

Функция Лагранжа одного тела в гравитационном поле, создаваемом другими телами и рассматриваемом как заданное:

$$L_a = -m_a c \frac{ds}{dt} = -m_a c^2 \left(1 + h_{00} + 2h_{0\alpha} \frac{v_a^\alpha}{c} - \frac{v_a^2}{c^2} + h_{\alpha\beta} \frac{v_a^\alpha v_a^\beta}{c^2} \right)^{1/2}$$

Разлагая радикал и опустив несущественную постоянную $-m_a c^2$, переписываем это выражение с требуемой точностью как

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - m_a c^2 \left(\frac{h_{00}}{2} + h_{0\alpha} \frac{v_a^\alpha}{c} + \frac{1}{2c^2} h_{\alpha\beta} v_a^\alpha v_a^\beta - \frac{h_{00}^2}{8} + \frac{h_{00}}{4c^2} v_a^2 \right)$$

Значения всех h_{ik} здесь берутся в точке $\mathbf{r}_a$; при этом снова должны быть опущены обращающиеся в бесконечность члены, что сводится к «перенормировке» массы m_a , стоящей в виде коэффициента в L_a .

Дальнейший ход вычислений состоит в следующем.

(?!! эту идею в 1ю часть добавлю потом тоже!! кст, не усвоил эту идею)

Полная функция Лагранжа L системы, разумеется, не равна сумме функций L_a для отдельных тел, но она должна быть составлена так, чтобы приводить к правильным значениям сил $\mathbf{f}_a$, действующих на каждое из тел при заданном движении остальных.

Для этого вычисляем силы $\mathbf{f}_a$ путем дифференцирования функции Лагранжа L_a :

$$\mathbf{f}_a = \left(\frac{\partial L_a}{\partial \mathbf{r}} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_a}$$

где дифференцирование производится по бегущим координатам $\mathbf{r}$ точки наблюдения в выражениях для h_{ik} .

После этого легко составить такую общую функцию L , из которой все те же силы $\mathbf{f}_a$ получаются взятием частных производных $\partial L / \partial \mathbf{r}_a$.

Не останавливаясь на простых промежуточных вычислениях, приведем сразу окончательный результат для функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} L = & \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_a \sum_b \frac{3k m_a m_b v_a^2}{2c^2 r_{ab}} + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} + \sum_a \sum_b \frac{2k m_a m_b}{2r_{ab}} - \\ & - \sum_a \sum_b \frac{k m_a m_b}{4c^2 r_{ab}} [7(\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b) + (\mathbf{v}_a \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b \mathbf{n}_{ab})] - \\ & - \sum_a \sum_b \sum_c' \frac{k^2 m_a m_b m_c}{2c^2 r_{ab} r_{ac}} \end{aligned}$$

где $r_{ab} = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$, $\mathbf{n}_{ab}$ - единичный вектор в направлении $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$, а штрих у знака суммы означает, что должен быть опущен член с $b = a$ или $c = a$.

Действие и энергия гравитационного поля в ньютоновском приближении (!!)

(потом в место про ньютоновскую теорию!)

Определим действие для гравитационного поля в ньютоновском приближении.

С помощью g_{ik} из $ds^2 = (1 + \frac{2}{c^2}\varphi) c^2 dt^2 - (1 - \frac{2}{c^2}\varphi) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ по формуле $G = g^{ik} (\Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m)$ находим $G = 2(\nabla\varphi)^2/c^4$, так что действие для поля

$$S_g = -\frac{1}{8\pi k} \iint (\nabla\varphi)^2 dV dt$$

(проделаю это потом)

Полное действие для поля вместе с массами, распределенными в пространстве с плотностью μ :

$$S = \iint \left[\frac{\mu v^2}{2} - \mu\varphi - \frac{1}{8\pi k} (\nabla\varphi)^2 \right] dV dt$$

Легко убедиться в том, что варьирование S по φ приводит, как и следовало, к уравнению Пуассона $\Delta\varphi = 4\pi k\mu$.

Плотность энергии находится из плотности функции Лагранжа Λ по общей формуле $T_i^k = \sum_l q_{,i}^{(l)} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}^{(l)}} - \delta_i^k \Lambda$, что сводится к изменению знака второго и третьего членов.

Интегрируя плотность энергии по пространству, подставив при этом во втором члене $\mu\varphi = \varphi\Delta\varphi/4\pi k$ и интегрируя его по частям, получим окончательно полную энергию поля и материи в виде

$$W = \int \left[\frac{\mu v^2}{2} - \frac{(\nabla\varphi)^2}{8\pi k} \right] dV$$

Следовательно, плотность энергии гравитационного поля в ньютоновской теории есть

$$W = -(\nabla\varphi)^2/8\pi k^2.$$

Центр инерции во втором приближении

Определим координаты центра инерции системы гравитирующих тел во втором приближении.

Ввиду полной формальной аналогии между законом Ньютона для гравитационного взаимодействия и законом Кулона для электростатического взаимодействия, координаты центра инерции даются формулой

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mathcal{E}} \sum_a \mathbf{r}_a \left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} - \frac{km_a}{2} \sum_b' \frac{m_b}{r_{ab}} \right),$$

где $\mathcal{E} = \sum_a \left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} - \frac{km_a}{2} \sum_b' \frac{m_b}{r_{ab}} \right)$.

(тут комментарий про то, что в электродинамике эта задача должна быть решена, укажу смысл того решения. пока её не прорешал.)

Вековое смещение перигелия орбиты двух гравитирующих тел сравнимой массы (???)

(?? поч именно во 2 приближении нужно ур-я писать для этого? прорешаю её еще раз ручками)

Вековое смещение перигелия орбиты двух гравитирующих тел сравнимой массы имеет вид:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi k^2 m_1^2 m_2^2}{c^2 M^2} = \frac{6\pi k (m_1 + m_2)}{c^2 a (1 - e^2)}$$

Выведем её. Известно, что функция Лагранжа системы двух тел есть

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{km_1 m_2}{r} + \frac{1}{8c^2} (m_1 v_1^4 + m_2 v_2^4) + \\ + \frac{km_1 m_2}{2c^2 r} [3(v_1^2 + v_2^2) - 7(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) - (\mathbf{v}_1 \mathbf{n})(\mathbf{v}_2 \mathbf{n})] - \frac{k^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2c^2 r^2}$$

Переходя к функции Гамильтона и исключая из нее движение центра инерции, получим:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - \frac{km_1 m_2}{r} - \frac{p^4}{8c^2} \left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right) - \\ - \frac{k}{2c^2 r} \left[3p^2 \left(\frac{m_2}{m_1} + \frac{m_1}{m_2} \right) + 7p^2 + (\mathbf{p} \mathbf{n})^2 \right] + \frac{k^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2c^2 r^2},$$

где $\mathbf{p}$ - импульс относительного движения.

(тут опять отсылка на электродинамику, которую потом прорешаю!)

Определим радиальную составляющую импульса p_r как функцию переменной r , момента импульса M и энергии $\mathcal{E}$. Эта функция определяется из уравнения $\mathcal{H} = \mathcal{E}$ (при этом в членах второго порядка надо заменить p^2 его выражением из нулевого приближения):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \left(p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} \right) - \frac{km_1 m_2}{r} - \\ - \frac{1}{8c^2} \left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3} \right) \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \left(\mathcal{E} + \frac{km_1 m_2}{r} \right)^2 - \\ - \frac{k}{2c^2 r} \left[3 \left(\frac{m_2}{m_1} + \frac{m_1}{m_2} \right) + 7 \right] \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\mathcal{E} + \frac{km_1 m_2}{r} \right) - \frac{k}{2c^2 r} p_r^2 + \frac{k^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2c^2 r^2}$$

(??? проделаю это потом!!!)

Дальнейший ход вычислений аналогичен произведенным вычислениям в случае поиска смещения перигелия в метрике Шварцшильда. Определим из написанного алгебраического уравнения p_r , далее произведем в интеграле $S_r = \int p_r dr$ преобразование переменной r так, чтобы привести член, содержащий M^2 , к виду M^2/r^2 . Произведя затем в подкоренном выражении разложение по малым релятивистским поправкам, получим:

$$S_r = \int \sqrt{A + \frac{B}{r} - \left(M^2 - \frac{6k^2 m_1^2 m_2^2}{c^2}\right) \frac{1}{r^2}} dr$$

где A, B - постоянные коэффициенты, в явном вычислении которых нет необходимости.

В результате для смещения перигелия орбиты относительного движения получим:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi k^2 m_1^2 m_2^2}{c^2 M^2} = \frac{6\pi k (m_1 + m_2)}{c^2 a (1 - e^2)}$$

Видим, что формула в точности такая же, как и было в случае движения в метрике Шварцшильда.

(? кстати, а почему?)

Частота прецессии шарового волчка

(?? поч именно во 2 приближении нужно ур-я писать для этого?)

Частота прецессии шарового волчка, совершающего орбитальное движение в гравитационном поле вращающегося вокруг своей оси центрального тела есть:

$$\Omega = \frac{3km'}{2c^2 R_0^2} [\mathbf{n}\mathbf{v}_0] + \frac{k}{c^2 R_0^3} \{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{M}') - \mathbf{M}'\}$$

Выведем это. В первом приближении искомый эффект представляется суммой двух независимых частей, одна из которых связана с неньютоновостью центрально-симметричного поля, а другая - с вращением центрального тела.

Первая часть описывается дополнительным членом в функции Лагранжа волчка, соответствующим члену $\sum_a \sum_b \frac{3km_a m_b v_a^2}{2c^2 r_{ab}}$. Представим скорость отдельных элементов волчка (с массами dm) в виде $\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$, где $\mathbf{V}$ - скорость его орбитального движения, $\boldsymbol{\omega}$ - угловая скорость, $\mathbf{r}$ - радиус-вектор элемента dm относительно центра инерции волчка (так что интеграл по объему волчка $\int \mathbf{r} dm = 0$). Опустив члены, не зависящие от $\boldsymbol{\omega}$, а также пренебрегая квадратичными по $\boldsymbol{\omega}$ членами, имеем:

$$\Delta^{(1)}L = \frac{3km'}{2c^2} \int \frac{2(\mathbf{V}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}])}{R} dm$$

где m' - масса центрального тела, $R = |\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}|$ - расстояние от центра поля до элемента dm , $\mathbf{R}_0$ - радиус-вектор центра инерции волчка.

При разложении $1/R \approx 1/R_0 - \mathbf{n}\mathbf{r}/R_0^2$ (где $\mathbf{n} = \mathbf{R}_0/R_0$) интеграл от первого члена обращается в нуль, а во втором интегрирование производится с помощью формулы

$$\int x_\alpha x_\beta dm = \frac{1}{2} I \Delta_{\alpha\beta}$$

где I - момент инерции волчка. В результате получим:

$$\Delta^{(1)}L = \frac{3km'}{2c^2 R_0^2} (\mathbf{M} [\mathbf{v}_0 \mathbf{n}])$$

где $\mathbf{M} = I\omega$ - вращательный момент волчка.

Дополнительный член в функции Лагранжа, обязанный вращению центрального тела. Вычислить его с помощью формулы (1) из задачи 2 к §105:

$$\Delta^{(2)}L = \frac{2k}{c^2} \int \frac{\mathbf{M}'[[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]\mathbf{R}]}{R^3} dm$$

где $\mathbf{M}'$ - момент центрального тела. Разложив

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3} \approx \frac{\mathbf{n}}{R_0^2} + \frac{1}{R_0^3}(\mathbf{r} - 3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r}))$$

и произведя интегрирование, получим:

$$\Delta^{(2)}L = \frac{k}{c^2 R_0^3} \{ \mathbf{M}\mathbf{M}' - 3(\mathbf{n}\mathbf{M})(\mathbf{n}\mathbf{M}') \}$$

Таким образом, полная добавка к функции Лагранжа

$$\Delta L = -\mathbf{M}\boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{3km'}{2c^2 R_0^2} [\mathbf{n}\mathbf{v}_0] + \frac{k}{c^2 R_0^3} \{ 3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{M}') - \mathbf{M}' \}$$

Этой функции отвечает уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}]$$

(ср. уравнение (2) из задачи 2 к §105).

Это значит, что момент волчка $\mathbf{M}$ прецессирует с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, оставаясь постоянным по своей величине.

(?!!!!)

Is second order expansion really important?

(I still want to learn that solution by Ginzburg, so, after learning it, I'll write that indeed, it is very important, because without it strange things can arise)

22.5.4 Palatini Formalism (??)

(пока не совсем разобрался)

Суть (???)

О применениях формализма Палатини (??)

(пока открытый вопрос, где нужен он?)

Вергелес писал, что что формализм Палатини позволяет перейти к дискретной теории гравитации на нерегулярной решетке (симплициальном комплексе).

(???)

Возможно, в продвинутых теориях гравитации тоже он используется.

Формализм Палатини как вариация формы по Вергелесу

(не уверен, что в этом что-то годное, по другому источнику буду перечислять, если будет нужно)

Вергелес предлагает, чтобы мы рассмотрели форму $\Xi = \frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}R^{ab} \wedge \omega^c \wedge \omega^d$, нашли её вариацию, а дальше ничего не знали, что с ней сделать. Приведем эти рассуждения.

Далее работаем в ортонормированном базисе. Так как используется антисимметричная форма связности ($\omega^{ab} = -\omega^{ba}$), то это автоматически означает, что связность согласована с метрикой. Кручение будем считать ненулевым.

Рассмотрим 4-форму

$$\Xi = \frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}R^{ab} \wedge \omega^c \wedge \omega^d,$$

где как всегда: ε_{abcd} - тензор Леви-Чивита, $\varepsilon_{0123} = 1$, 2-форма кривизны Римана $R^{ab} = R^{ab}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ выражается через 1-форму связности $\omega^a_\mu dx^\mu$ согласно $d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B = \frac{1}{2}R^A_{BCD}\omega^C \wedge \omega^D$ и $\omega^a = e^a_\mu dx^\mu$.

(далее какие-то преобразования, которые не особо смотрел, потому что не понимаю, зачем он)

Имеем:

$$\varepsilon_{abcd}e^c_\lambda e^d_\rho = (\det e^c_\sigma) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} e^\mu_a e^\nu_b$$

Из соотношения $g_{\mu\nu} = \eta_{ab}e^a_\mu e^b_\nu$ получаем $g = (\det \eta_{ab}) (\det e^a_\mu)^2 = -(\det e^a_\mu)^2$.

Пусть $\det e^a_\mu > 0$. Тогда $\det e^a_\mu = \sqrt{-g}$ и

$$\varepsilon_{abcd}e^c_\lambda e^d_\rho = E_{\mu\nu\lambda\rho} e^\mu_a e^\nu_b$$

Тензор $E_{\mu\nu\lambda\rho}$ определен в $E_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}(x) = \sqrt{|g(x)|}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$.

Форма Ξ переписывается при помощи $E_{\mu\nu\lambda\rho}$ в виде

$$\Xi = \frac{1}{4} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho E_{\sigma\tau\lambda\rho} e^\sigma_a e^\tau_b R^{ab}_{\mu\nu}$$

Теперь учтем, что

$$e^\sigma_a e^\tau_b R^{ab}_{\mu\nu} = R^{\sigma\tau}_{\mu\nu}$$

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \cdot \varepsilon_{\mu\nu\lambda\mu}$$

Поэтому

$$\Xi = \frac{1}{4}\sqrt{-g} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \cdot \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{\sigma\tau\lambda\rho} R^{\sigma\tau}_{\mu\nu}$$

Но

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \varepsilon_{\sigma\tau\lambda\rho} = 2(\delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\tau - \delta^\mu_\tau \delta^\nu_\sigma)$$

и окончательно

$$\Xi = dV \cdot R, \quad R = R^{\mu\nu}_{\mu\nu}, \quad dV = \sqrt{-g} d^{(4)}x$$

Мы видим, что интеграл от формы Ξ пропорционален действию Гильберта.

Вычислим вариацию $\delta\Xi$ предполагая ω^{ab} и ω^a независимыми. Тензор кривизны задаётся согласно $d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B = \frac{1}{2}R^A_{BCD}\omega^C \wedge \omega^D$. Имеем:

$$\delta\Xi = d\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\omega^c \wedge \omega^d \wedge \delta\omega^{ab}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}T^c \wedge \omega^d \wedge \delta\omega^{ab} + \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}R^{ab} \wedge \omega^c \wedge \delta\omega^d$$

Здесь T^c обозначает левую часть $d\omega^A + \omega^A_B \wedge \omega^B = \frac{1}{2}T^A_{BC}\omega^B \wedge \omega^C$.

Формула для $\delta\Xi$ без труда выводится в точке пространства, в которой $\omega^{ab} = 0$. В такой точке имеем:

$$d\delta\omega^{ab} = \frac{1}{2}\delta R^{ab}, \quad d\omega^c = \frac{1}{2}T^c$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}\delta R^{ab} \wedge \omega^c \wedge \omega^d &= \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\omega^c \wedge \omega^d \wedge d\delta\omega^{ab} = \\ &= d\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\omega^c \wedge \omega^d \wedge \delta\omega^{ab}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}T^c \wedge \omega^d \wedge \delta\omega^{ab} \end{aligned}$$

Таким образом, первые два слагаемых в $\delta\Xi$ возникают вследствие вариации связности, последнее слагаемое тривиально получается вследствие вариации тетрады. Формула $\delta\Xi$ проверена в точке, в которой $\omega^{ab} = 0$. Теперь из факта независимости обеих частей в $\delta\Xi$ от базиса следует, в $\delta\Xi$ справедливо в любой точке.

Приведенное вычисление, использующее возможность обращения связности в нуль в любой точке пространства, характерно для дифференциальной геометрии и теории гравитации. Таким путем можно резко сократить вычисления.

(??????)

Считая переменные ω^{ab} и ω^d независимыми, приравняем отдельно нулю коэффициенты при вариациях $\delta\omega^{ab}$ и $\delta\omega^d$ в интеграле от величины $\delta\Xi$. При этом первое слагаемое в $\delta\Xi$ можно отбросить, поскольку оно является полной производной. Имеем условие экстремальности относительно ω^{ab} :

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{abcd}e_\nu^c T_{\lambda\rho}^d = 0$$

или

$$e_{[\mu}^a T_{\nu\lambda]}^b - e_{[\mu}^b T_{\nu\lambda]}^a = 0$$

После умножения на e_a^λ , получаем

$$T_{\mu\nu}^a = (e_\mu^a T_{\nu\lambda}^b - e_\nu^a T_{\mu\lambda}^b) e_b^\lambda$$

Последнее равенство умножим на e_a^ν , что дает $T_{\mu\nu}^a e_a^\nu = 0$. Вместе с (3.94) это означает отсутствие кручения. Таким образом, вариация интеграла величины $\delta\Xi$ относительно связности дает уравнения

$$\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_\mu^{ab} e_{b\nu} - \omega_\nu^{ab} e_{b\mu} = 0$$

которые имеют единственное решение (2.89) для формы связности (или (2.87) в базисе $\partial/\partial x^\mu$). Если подставить это решение в 4-форму Ξ , мы возвращаемся к подынтегральному выражению в действии Гильберта, которое полностью выражается через метрический тензор.

Приведём также коэффициент в $\delta\Xi$ при вариации δe_μ^a :

$$\delta\Xi = \dots - 2(\det e_\lambda^c) \left(R_a^b e_b^\mu - \frac{1}{2} R e_a^\mu \right) \delta e_\mu^a$$

Здесь была использована формула $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} e_\rho^d = (\det e_\mu^a) \varepsilon^{abcd} e_a^\mu e_b^\nu e_c^\lambda$

(??????)

Вычисления в этом Разделе приводят к следующему выводу: если связность согласована с метрикой, то действие Гильберта (или интеграл от формы Ξ) тогда и только тогда экстремально относительно вариации коэффициентов связности, когда кручение отсутствует.

(????)

Таким образом, для получения уравнения Эйнштейна остаётся проварьировать действие Гильберта относительно метрического тензора или тетрады, не затрагивая коэффициентов связности, и вариацию приравнять нулю.

Аналог формализма Палатини в механике

(у Мизнера спишу, если будет потребность)

Другое о формализме Палатини

(еще много теории есть о нем, у того же Мизнера. нужно будет - допишу)

22.5.5 Cauchy Problem (???)

(свяжу с УМФ что ли потом в дополнениях... по вергелесу)

Суть (??)

(очень важно понять, что есть задача Коши в ОТО, спрошу у кого-то потом.)

В теории гравитации имеет смысл задача Коши.

Однако задача Коши содержит произвол: 4 функции e_0^a и 6 функций ω_0^{ab} , которые выбираются исходя из соображений удобства.

(тут подробнее суть распишу, спрошу у кого-то мб лучше)

Задача Коши в терминах форм смещения и тетрад

(такое пока не тяну, потренироваться нужно и почитать Вергелеса ещё)

В этом параграфе в качестве независимых переменных берутся тетрада $e_\mu^a(x)$ и связность $\omega_\mu^{ab}(x)$. Эти переменные подчиняются уравнениям Эйнштейна, в которых тензор кривизны выражен через связность согласно $d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C = \frac{1}{2}R_{BCD}^A \omega^C \wedge \omega^D$, и уравнениям $\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_\mu^{ab} e_{b\nu} - \omega_\nu^{ab} e_{b\mu} = 0$.

Мы хотим изучить следующую задачу, называемую задачей Коши: пусть на “гиперповерхности” $x^0 = \text{const}$ заданы поля тетрады и связности, можно ли найти эти поля на “гиперповерхности” $x^0 + \delta x^0$, используя уравнения Эйнштейна и $\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_\mu^{ab} e_{b\nu} - \omega_\nu^{ab} e_{b\mu} = 0$ и заданные начальные условия при $x^0 = \text{const}$?

Заметим, что тождество Бианки (3.73) вытекает непосредственно из определения тензора кривизны $d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C = \frac{1}{2}R_{BCD}^A \omega^C \wedge \omega^D$.

Поэтому тождество (3.70) для тензора (3.74) имеет место всегда независимо от выполнения уравнений Эйнштейна и $\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_\mu^{ab} e_{b\nu} - \omega_\nu^{ab} e_{b\mu} = 0$. Распишем тождество (3.70):

$$\dot{G}^{\mu 0} = -\frac{\partial}{\partial x^i} G^{\mu i} - \Gamma_{\sigma\nu}^\mu G^{\sigma\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^\nu G^{\mu\sigma}.$$

где точка сверху означает производную $\partial/\partial x^0$. Согласно общим формулам пересчета связности (2.13) и с учетом (2.4) имеем

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = e_a^\mu e_\nu^b \omega_{b\lambda}^a + e_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\lambda} e_\nu^a$$

Так как тензор $G^{\mu\nu}$ содержит величину $\dot{\omega}_\mu^{ab}$ в степени не выше первой, то с учетом (3.100) можно утверждать, что правая часть равенства (3.99) содержит $\dot{\omega}_\mu^{ab}$ в степени не выше первой. Следовательно, величина $G^{\mu 0}$ вовсе не зависит от $\dot{\omega}_\mu^{ab}$.

В уравнениях Эйнштейна и $\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_\mu^{ab} e_{b\nu} - \omega_\nu^{ab} e_{b\mu} = 0$ не содержатся величины $\dot{e}_0^a$ и $\dot{\omega}_0^{ab}$. Поэтому поля $e_0^a(x)$ и $\omega_0^{ab}(x)$ не являются динамическими переменными, они являются произвольными функциями, смысл которых выяснится ниже. Таким образом, динамическими переменными являются поля $e_i^a(x)$ и $\omega_i^{ab}(x)$, $i = 1, 2, 3$.

(????) Выше было показано, что компоненты $G^{\mu 0}$ не зависят от $\dot{\omega}_i^{ab}$. Из определения тензора $G^{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} R$ видно, что он не зависит от $\dot{e}_i^a$. Поскольку компоненты $G^{\mu 0}$ не

зависят от производных $\partial/\partial x^0$ от каких-либо полей, то эти компоненты не могут зависеть также и от полей $\omega_0^{ab}(x)$. В противном случае была бы нарушена общая ковариантность теории.

Далее видно, что действие S_g зависит от e_0^a линейно, и потому вариация S_g относительно e_0^a не зависит от e_0^a .

С другой стороны, вследствие (3.87), симметрии тензора $G_{\mu\nu}$ и формулы

$$\delta g_{\mu\nu} = \eta_{ab} (e_\mu^a \delta e_\nu^b + e_\nu^b \delta e_\mu^a)$$

мы можем сделать вывод, что $G^{\mu 0}$ не зависит от e_0^a .

Поэтому часть уравнений Эйнштейна

$$R^{\mu 0} - \frac{1}{2}g^{\mu 0}R - \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu 0} = 0$$

не содержат полей $e_0^a, \omega_0^{ab}, \dot{e}_i^a, \dot{\omega}_i^{ab}$.

Четыре этих уравнения являются связями между переменными e_i^a и ω_i^{ab} на гиперповерхности $x^0 = \text{Const}$.

(?? почему??)

Очевидно, что 12 из 24 -х уравнений $\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_\mu^{ab} e_{b\nu} - \omega_\nu^{ab} e_{b\mu} = 0$ также являются связями:

$$\partial_i e_j^a + \omega_i^{ab} e_{bj} - \partial_j e_i^a - \omega_j^{ab} e_{bi} = 0$$

Уравнениями движения являются уравнения

$$\dot{e}_i^a = -\omega_0^{ab} e_{bi} + \partial_i e_0^a + \omega_i^{ab} e_{b0}$$

$$R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R - \frac{8\pi G}{c^4}T^{ij} = 0$$

Пусть на гиперповерхности $x^0 = \text{Const}$ заданы переменные e_i^a и ω_i^{ab} , удовлетворяющие условиям (3.101) и (3.102). Такие переменные будем называть допустимыми.

Тогда при помощи ур на $\dot{e}_i^a$ можно найти переменные e_i^a в момент времени $x^0 + \delta x^0$.

Смысл полей ω_0^{ab} и e_0^a

Из уравнения (выше) виден смысл полей ω_0^{ab} и e_0^a , которые произвольны.

Поля ω_0^{ab} генерируют локальные преобразования Лоренца ОНБ $\{e^a\}$, а поля e_0^a производят общее преобразование локальных координат.

Действительно, изменение метрики $g_{ij} = e_i^a e_{aj}$ за бесконечно малый промежуток времени δx^0 согласно ур. на $\dot{e}_i^a$ равно

$$\begin{aligned} \delta g_{ij} &= \delta x^0 \{ \partial_i e_0^a \cdot e_{aj} + e_{ai} \cdot \partial_j e_0^a + \omega_i^{ab} e_{b0} e_{aj} + \omega_j^{ab} e_{b0} e_{ai} \} = \\ &= \partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i - \delta x^0 e_{a0} \{ (\partial_i e_j^a + \omega_i^{ab} e_{bj}) + (\partial_j e_i^a + \omega_j^{ab} e_{bi}) \} = \\ &= \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i \end{aligned}$$

Здесь $\xi_i = e_0^a e_{ai} \delta x^0$. При переходе к последнему равенству мы учли тетрадный постулат (2.47).

Для нахождения 18 полей ω_i^{ab} в момент времени $x^0 + \delta x^0$ не достаточно шести уравнений Эйнштейна. (???)

Мы потребуем, чтобы 12 связей (3.102) сохранялись во времени. Это даст нам недостающие 12 уравнений. Для этого вычислим производную $\partial/\partial x^0$ от уравнений

(3.102) и воспользуемся уравнениями ур. на $\dot{e}_i^a$ и еще раз уравнениями (3.102). В результате простого вычисления получаем:

$$R_{0i}^{ab}e_{bj} - R_{0j}^{ab}e_{bi} + R_{ij}^{ab}e_{b0} = 0$$

Двенадцать уравнений (3.106) и шесть уравнений (3.104) относительно величин $\dot{\omega}_i^{ab}$ (все эти уравнения линейны) дают возможность найти все величины $\dot{\omega}_i^{ab}$ и тем самым найти поля ω_i^{ab} в момент времени $x^0 + \delta x^0$.

Остается установить, что найденные переменные e_i^a и ω_i^{ab} на гиперплоскости $x^0 + \delta x^0$ допустимы т.е. что связи (3.101) и (3.102) остаются в силе. Сохранение связей (3.102) заложено в саму процедуру решения, поскольку сохранение этих связей дает возможность найти $\dot{\omega}_i^{ab}$. Сохранение связей (3.101) вытекает из тождества Бианки

$$\nabla_\nu \left(G^{\mu\nu} - \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \right) = 0,$$

которое с учетом уравнений связей (3.101) и движения (3.104) дает

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left(R^{\mu 0} - \frac{1}{2} g^{\mu 0} R - \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu 0} \right) = 0$$

О добавлении уравнения движения полей материи

(обсудим четко, как это делать)

К обсужденным здесь уравнениям гравитационных полей следует добавить уравнения движения для полей материи.

Аналогия недостаточности уравнений Эйнштейна с электродинамикой

(распишу тут с формулами, как выглядит эта аналогия.)

Недостаточность эйнштейновских уравнений для определения $g_{\mu\nu}$ единственным образом аналогична недостаточности уравнений Максвелла для однозначного определения векторпотенциала A_μ . Эта неоднозначность используется в каждой конкретной задаче наложением калибровочного условия так, чтобы это облегчало решение задачи.

О степенях свободы в уравнениях Эйнштейна

Симметричный тензор в 4-мерном пространстве-времени имеет 10 независимых компонент. Поэтому, на первый взгляд, может показаться, что уравнений Эйнштейна при заданных граничных условиях может быть достаточно, чтобы определить $g_{\mu\nu}$ единственным образом.

Вспомним, однако, что тензор, стоящий в левой части Ур. Эйнштейна, удовлетворяет тождеству (3.70), которое состоит из 4-х дифференциальных уравнений. Из этого тождества следует, что число независимых дифференциальных уравнений среди уравнений Эйнштейна равно $10 - 4 = 6$. Отсюда, в свою очередь следует, что ур Эйнштейна оставляют неопределенными 4 степени свободы в 10 неизвестных компонентах $g_{\mu\nu}$. Эти степени свободы соответствуют тому, что если $g_{\mu\nu}$ - решение уравнений Эйнштейна, то решением его будет также и $g'_{\mu\nu}$, которое получается из $g_{\mu\nu}$ с помощью произвольного преобразования координат $x \rightarrow x'$. Такое преобразование координат вводит четыре произвольные функции $x'(x)$, соответствующие как раз четырем степеням свободы в решении уравнений Эйнштейна.

22.5.6 Harmonic Coordinates

Поскольку уравнения Эйнштейна имеют свободу, мы накладываем дополнительные условия на наши координаты. Обсудим подробно одни из используемых - гармонические координаты. Для этого будем рассматривать уравнения Эйнштейна как дифференциальные уравнения второго порядка относительно компонент метрического тензора.

Суть

(просто координаты с условием на метрику, да?)

Условие гармоничности не является тензорным, т.к. координаты не являются скалярными величинами.

Теория

Гармонические координаты имеют вид

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$$

Определим для удобства $\Gamma^{\lambda} \equiv g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$.

Условие гармоничности всегда возможно. Действительно, условия гармоничности преобразуются как

$$\begin{aligned}\Gamma^{\lambda'} &= g^{\mu'\nu'}\Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} g^{\mu'\nu'} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} g^{\mu'\nu'} = \\ &= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma^{\lambda} + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\rho}} g^{\sigma\rho} = \\ &= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma^{\lambda} - \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \left(\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \right) \right] \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\rho}} \right) g^{\sigma\rho} = \\ &= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma^{\lambda} - \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} g^{\sigma\rho}\end{aligned}$$

(?? ниже чуть хз)

Если Γ^{λ} не исчезает, то мы вводим новую систему координат, решив следующие дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma^{\lambda} = 0$$

Тогда согласно (3.125) $\Gamma^{\lambda'} = 0$ в координатах x' .

Чтобы выяснить математический смысл Ур. (3.126), используем представление символов Кристоффеля через метрический тензор (2.87), при помощи которого находим:

$$\Gamma^{\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{-g} g^{\nu\lambda})$$

При помощи (3.127) и (2.94) уравнения (3.126) переписываются в виде

$$-\square x^{\lambda'} = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0$$

Последние уравнения совпадают с (2.94), где вместо поля ϕ подставлены координаты $x^{\lambda'}$.

Теперь проясняется смысл термина "гармонические координаты": гармонические координаты x' удовлетворяют уравнению д'Аламбера (2.94).

Пусть x^μ - гармонические координаты, т.е. условие гармоничности выполнено. Согласно (3.127) это означает выполнение условий

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0$$

Если x' - другие гармонические координаты, то согласно (3.126) они удовлетворяют уравнениям

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0$$

Очевидно, что в пространстве Минковского обычные ортогональные координаты являются гармоническими, поскольку $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и $g = -1$. Тем самым условия (3.129) выполняются тривиально.

Схожесть гармонических координат с ортогональными (???)

(не понял, насколько они схожи)

В неком смысле гармонические координаты в кривом пространстве максимально близки (в конечном участке пространства, в отличие от бесконечно малого участка пространства. вбл из центра нормальных координат Римана) к ортогональным координатам в пространстве Минковского.

Однако, хотя условия гармоничности накладывают некоторые ограничения на координаты, эти условия не фиксируют координаты однозначно.

Это видно уже на примере пространства Минковского. Действительно, если добавить к гармоническим координатам любые решения уравнения д'Аламбера, то новые координаты останутся гармоническими.

(проверю потом)

Известно, что уравнение д'Аламбера имеет бесконечно много решений, которые легко описываются в пространстве Минковского. Ситуация опять аналогична ситуации в электродинамике. Фиксация калибровки условием $\partial_\mu A^\mu = 0$ неоднозначна, поскольку потенциал $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$, $\square f = 0$, также удовлетворяет условию $\partial_\mu A'^\mu = 0$

Применения гармонических координат

(тут все их укажу потом)

22.6 Conservation Laws in General Relativity

Обсудим подробно законы сохранения в ОТО.

(про сохранение энергии напишу нормально, пока вообще не могу пользоваться ими.)

22.6.1 Energy–Momentum Tensor

Суть тензора энергии-импульса

(уже почти готов написать, но еще нет)

воспоминания прошлых конструкций

(потом удалю и раскидаю этот пар-ф)

В §32 было получено общее правило для вычисления тензора энергии-импульса любой физической системы, действие которой представлено в виде интеграла (32.1) по 4-пространству.

В криволинейных координатах этот интеграл должен быть написан в виде

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g} d\Omega$$

(в галилеевых координатах $g = -1$ и S переходит в $\frac{1}{c} \int \Lambda dV dt$).

Интегрирование производится по всему (трехмерному) пространству и по времени между двумя заданными моментами, т.е. по бесконечной области 4-пространства, заключенной между двумя гиперповерхностями.

Как уже было указано в §32, тензор энергии-импульса, определенный по формуле (32.5), не является, вообще говоря, симметричным, каким он должен быть.

Для того чтобы сделать его симметричным, необходимо было прибавить к выражению (32.5) надлежащим образом подобранный член вида $\frac{\partial}{\partial x^l} \psi_{ikl}$, причем $\psi_{ikl} = -\psi_{ilk}$.

Мы дадим теперь другой способ вычисления тензора энергии-импульса, обладающий тем преимуществом, что он сразу приводит к симметричному выражению.

Преобразования метрики

(в др. месте это будет)

При преобразовании координат x^i к координатам $x'^i = x^i + \xi^i$, где ξ^i -малые величины, есть известное выражение для изменения метрики: $\delta g_{ik} = -\xi_{i;k} - \xi_{k;i}$, которое и получим в этом разделе.

При этом преобразовании компоненты g^{ik} преобразуются согласно формулам

$$\begin{aligned} g'^{ik}(x^l) &= g^{lm}(x^l) \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} \\ &= g^{lm} \left(\delta_l^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \right) \left(\delta_m^k + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \right) \approx \\ &\approx g^{ik}(x^l) + g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kl} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \end{aligned}$$

Тензор g'^{ik} является здесь функцией от x'^l , а тензор g^{ik} -функцией прежних координат x^l .

Для того чтобы представить все члены в виде функций от одних и тех же переменных, разложим $g'^{ik}(x^l + \xi^l)$ по степеням ξ^l .

Далее, пренебрегая членами высшего порядка по ξ^i , мы можем в членах, содержащих ξ^l , написать g^{ik} вместо g'^{ik} .

Таким образом, находим:

$$g'^{ik}(x^l) = g^{ik}(x^l) - \xi^l \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{il} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + g^{kl} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}$$

Легко убедиться путем непосредственной проверки, что последние три члена справа могут быть написаны в виде суммы $\xi^{i;k} + \xi^{k;i}$ контравариантных производных от ξ^i .

Таким образом, находим окончательно преобразование g^{ik} в виде

$$g'^{ik} = g^{ik} + \delta g^{ik}, \quad \delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i}$$

Для ковариантных компонент имеем при этом:

$$g'_{ik} = g_{ik} + \delta g_{ik}, \quad \delta g_{ik} = -\xi_{i;k} - \xi_{k;i}$$

(так, чтобы с точностью до величин первого порядка малости соблюдалось условие $g'_{il}g'^{kl} = \delta_i^k$).

Получение ТЭИ с помощью варьирования действия по метрике (??)

Поскольку действие S есть скаляр, то при преобразовании координат оно не меняется.

С другой стороны, изменение δS действия при преобразовании координат можно написать в следующем виде.

Пусть, как и в §32, q обозначают величины, определяющие ту физическую систему, к которой относится действие S .

При преобразовании координат величины q меняются на δq .

При вычислении δS можно, однако, не писать членов, связанных с изменениями q .

Все эти члены все равно взаимно сокращаются в силу «уравнений движения» физической системы, поскольку эти уравнения как раз и получаются путем приравнивания нулю вариации S по величинам q .

Поэтому достаточно писать только члены, связанные с изменением g_{ik} .

Воспользовавшись, как обычно, теоремой Гаусса и полагая на границах интегрирования $\delta g^{ik} = 0$, находим δS в виде

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \delta \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right\} d\Omega = \\ &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \right\} \delta g^{ik} d\Omega \end{aligned}$$

Введем теперь обозначение

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{ik} = \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}$$

тогда δS примет вид

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega = -\frac{1}{2c} \int T^{ik} \delta g_{ik} \sqrt{-g} d\Omega$$

где использовано, что $g^{ik} \delta g_{lk} = -g_{lk} \delta g^{ik}$ и потому $T^{ik} \delta g_{ik} = -T_{ik} \delta g^{ik}$.

Подставляя сюда для δg^{ik} выражение (94.2), имеем, воспользовавшись симметрией тензора T_{ik} :

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} (\xi^{i;k} + \xi^{k;i}) \sqrt{-g} d\Omega = \frac{1}{c} \int T_{ik} \xi^{i;k} \sqrt{-g} d\Omega$$

Далее преобразуем это выражение следующим образом:

$$\delta S = \frac{1}{c} \int (T_i^k \xi^i)_{;k} \sqrt{-g} d\Omega = \int \frac{1}{c} T_{i,k}^k \xi^i \sqrt{-g} d\Omega$$

Первый интеграл с помощью $A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^i}$ может быть написан в виде $\int \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} T_i^k \xi^i) d\Omega$ и преобразован в интеграл по гиперповерхности. Поскольку на границах интегрирования ξ^i обращаются в нуль, то этот интеграл исчезает.

Таким образом, приравнявая δS нулю, находим:

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int T_{i;k}^k \xi^i \sqrt{-g} d\Omega = 0$$

Ввиду произвольности ξ^i отсюда следует, что

$$T_{i;k}^k = 0$$

Сравнивая это уравнение с уравнением $\partial T_{ik}/\partial x^k = 0$, имевшим место в галилеевых координатах, мы видим, что тензор T_{ik} , определяемый формулой (94,4), должен быть отождествлен с тензором энергии-импульса по крайней мере с точностью до постоянного множителя.

(?? ниже - поверил, лень проверять)

Что этот множитель равен единице, легко проверить, производя, например, вычисление по формуле (94.4) для случая электромагнитного поля, когда

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik} = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F_{lm} g^{il} g^{km}$$

Таким образом, формула (94.4) дает возможность вычислить тензор энергии-импульса путем дифференцирования Λ по компонентам метрического тензора (и их производным).

При этом тензор T_{ik} получается сразу в явно симметричном виде.

Формула (94.4) удобна для вычисления тензора энергии-импульса не только в случае наличия гравитационного поля, но и при его отсутствии, когда метрический тензор не имеет самостоятельного смысла и переход к криволинейным

координатам производится формально как промежуточный этап при вычислении T_{ik} .

Другие ТЭИ в криволинейных координатах

(нерел случай пропишу потом лучше в другом месте!!)

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля должно быть написано в криволинейных координатах в виде

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(-F_{il} F_k^l + \frac{1}{4} F_{lm} F^{lm} g_{ik} \right)$$

Для макроскопических же тел тензор энергии-импульса есть

$$T_{ik} = (p + \varepsilon) u_i u_k - p g_{ik}$$

T_{00} нулевая компонента

(про неё подробно. в 1й части скорее всего про неё будет!!)

Отметим, что компонента T_{00} всегда положительна:

$$T_{00} \geq 0$$

(смешанная же компонента T_0^0 не имеет, вообще говоря, определенного знака).

Связь метрического тензора с каноническим

(хз, всё ещё путаюсь в этом.)

22.6.2 Energy–Momentum Pseudotensor of the Gravitational Field

(в 1й части суть его, тут - полная теория.)

Основные формулы ТЭИ Ландау-Лифшица

потом выделяю

О случаях применений псевдотензора ЛЛ

(четко потом укажу)

Недостатки обычного ковариантного ЗС ТЭИ (!?!)

(оч важно четко это увидеть, пока хз.)

При отсутствии гравитационного поля закон сохранения энергии и импульса материи (вместе с электромагнитным полем) выражается уравнением

$$\partial T^{ik} / \partial x^k = 0$$

Обобщением этого уравнения на случай наличия гравитационного поля является уравнение $T^k_{i;k} = 0$, то есть

$$T^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (T^k_i \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0$$

В таком виде, однако, это уравнение, вообще говоря, не выражает закона сохранения чего бы то ни было.

Это обстоятельство связано с тем, что в гравитационном поле должен сохраняться 4-импульс материи вместе с гравитационным полем, а не 4-импульс одной лишь материи. последний же не учтен в выражении для T^k_i .

(?!!!!! тут важные пояснения, почему это так, пока что не зашло.)

Определение ТЭИ ЛЛ через обобщение ТЭИ из локально геодезической системы координат

Для определения сохраняющегося полного 4-импульса гравитационного поля вместе с находящейся в нем материей мы поступим следующим образом.

Выберем систему координат так, чтобы в некоторой заданной точке пространства-времени все первые производные от g_{ik} по координатам обратились в нуль (сами же g_{ik} при этом не должны обязательно иметь галилеевы значения).

Тогда в этой точке второй член в уравнении $T^k_{i;k} = 0$ обратится в нуль, а в первом можно вынести $\sqrt{-g}$ из-под знака производной, так что остается

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^k_i = 0$$

или в контравариантных компонентах (??)

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{ik} = 0$$

Величины T^{ik} , тождественно удовлетворяющие этому уравнению, могут быть написаны в виде

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \eta^{ikl}$$

где η^{ikl} - величины, антисимметричные по индексам k, l :

$$\eta^{ikl} = -\eta^{ilk}$$

Нетрудно фактически привести T^{ik} к такому виду. Для этого исходим из уравнений поля:

$$T^{ik} = \frac{c^4}{8\pi k} \left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \right)$$

где $R^{ik} = \frac{1}{2} g^{im} g^{kp} g^{ln} \left\{ \frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{ln}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l \partial x^n} \right\}$, ибо в рассматриваемой точке все $\Gamma_{lk}^i = 0$.

(потом проверю, очевидна ли мне эта формула)

После простых преобразований имеем:

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{c^4}{16\pi k} \frac{1}{(-g)} \frac{\partial}{\partial x^m} [(-g) (g^{ik} g^{lm} - g^{il} g^{km})] \right\}$$

Стоящее в фигурных скобках выражение антисимметрично по индексам k, l и есть η^{ikl} .

Поскольку первые производные от g_{ik} в рассматриваемой точке равны нулю, то множитель $1/(-g)$ можно вынести из-под знака производной $\partial/\partial x^l$.

Введем обозначения

$$h^{ikl} = \frac{\partial}{\partial x^m} \lambda^{iklm}$$

$$\lambda^{iklm} = \frac{c^4}{16\pi k} (-g) (g^{ik} g^{lm} - g^{il} g^{km})$$

величины h^{ikl} антисимметричны по индексам k, l :

$$h^{ikl} = -h^{ilk}$$

Тогда можно написать

$$\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} = (-g) T^{ik}$$

Теперь перейдем в криволинейную систему отсчета. В общем случае $\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} - (-g) T^{ik} \neq 0$; обозначим ее посредством $(-g) t^{ik}$. Совокупность величин t^{ik} называют псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля. Тогда будем иметь по определению:

$$(-g) (T^{ik} + t^{ik}) = \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}$$

Величины t^{ik} симметричны по индексам i, k :

$$t^{ik} = t^{ki}$$

Это видно непосредственно из их определения, поскольку как тензор T^{ik} , так и производные $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ являются симметричными величинами.

Выражая T^{ik} через R^{ik} согласно уравнениям Эйнштейна, получим соотношение

$$(-g) \left\{ \frac{c^4}{8\pi k} \left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \right) + t^{ik} \right\} = \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}$$

из которого можно найти после довольно длинного вычисления (???????) следующее выражение для t^{ik} :

$$t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k} \left\{ (2\Gamma_{lm}^n \Gamma_{np}^p - \Gamma_{lp}^n \Gamma_{mn}^p - \Gamma_{ln}^n \Gamma_{mp}^p) (g^{il} g^{km} - g^{ik} g^{lm}) + \right. \\ \left. + g^{il} g^{mn} (\Gamma_{lp}^k \Gamma_{mn}^p + \Gamma_{mn}^k \Gamma_{lp}^p - \Gamma_{np}^k \Gamma_{lm}^p - \Gamma_{lm}^k \Gamma_{np}^p) + \right. \\ \left. + \{ g^{kl} g^{mn} (\Gamma_{lp}^i \Gamma_{mn}^p + \Gamma_{mn}^i \Gamma_{lp}^p - \Gamma_{np}^i \Gamma_{lm}^p - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{np}^p) + \right. \\ \left. + g^{lm} g^{np} (\Gamma_{ln}^i \Gamma_{mp}^k - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{np}^k) \} \right\}$$

или, непосредственно через производные от компонент метрического тензора:

$$(-g)t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k} \left\{ \mathfrak{g}_{,l}^{ik} \mathfrak{g}_{,m}^{lm} - g_{,l}^{il} \mathfrak{g}^{km}, m + \frac{1}{2} g^{ik} g_{lm} \mathfrak{g}_{,p}^{ln} \mathfrak{g}^{pm}, n - \right. \\ \left. - (g^{il} g_{mn} \mathfrak{g}^{kn}, p_{,l}^{mp} + g^{kl} g_{mn} \mathfrak{g}^{in}, p_{,l}^{mp}) + g_{lm} g^{np} \mathfrak{g}_{,n}^{il} \mathfrak{g}^{km}, p + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} (2g^{il} g^{km} - g^{ik} g^{lm}) (2g_{np} g_{qr} - g_{pq} g_{nr}) \mathfrak{g}_{,l}^{nr} \mathfrak{g}^{pq}, m \right\},$$

где $\mathfrak{g}^{ik} = \sqrt{-g} g^{ik}$, а индекс e, i означает простое дифференцирование по x^i

(!!!!???? выше формула, которую наверное никогда не дойду я проверить, просто такая вот она)

(?? хотя бы раз посчитаю его!!!)

Псевдотензор гравитационного поля не тензор

Величины t^{ik} не составляют тензора; это видно уже из того, что в $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ стоят простые, а не ковариантные производные.

(тут более явно их укажу)

Однако t^{ik} выражаются через величины Γ_{kl}^i , а последние ведут себя как тензор по отношению к линейным преобразованиям координат; то же самое относится, следовательно, и к t^{ik}

(потом четкое напишу док-во.)

Явный пример необходимости пользоваться ТЭИ Л-Л

(дополнительно укажу, для еще большей четкости)

О тензоре Беленфанта

(гуглится. слышал про него. что и зачем - пока не знаю, кто-то объяснит - впишу сюда.)

22.6.3 4-Momentum and 4-Angular Momentum of the Gravitational Field

(в 1ю часть суть занесу. пока хз.)

полный 4-импульс (?????)

Из определения (96.5) следует, что для суммы $T^{ik} + t^{ik}$ тождественно выполняются уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (-g) (T^{ik} + t^{ik}) = 0$$

Это значит, что имеет место закон сохранения величин

$$P^i = \frac{1}{c} \int (-g) (T^{ik} + t^{ik}) dS_k$$

При отсутствии гравитационного поля в галилеевых координатах $t^{ik} = 0$ и написанный интеграл переходит в $\frac{1}{c} \int T^{ik} dS_k$, т.е. в 4-импульс материи.

Поэтому величины P^i должны быть отождествлены с полным 4-импульсом материи вместе с гравитационным полем.

Интегрирование в P^i может производиться по любой бесконечной гиперповерхности, включающей в себя все трехмерное пространство.

Если выбрать в качестве нее гиперповерхность $x^0 = \text{const}$, то P^i можно написать в виде трехмерного пространственного интеграла:

$$P^i = \frac{1}{c} \int (-g) (T^{i0} + t^{i0}) dV$$

Тот факт, что полный 4-импульс материи и поля выражается в виде интегралов от симметричных по индексам i, k величин $(-g) (T^{ik} + t^{ik})$, весьма существен.

Он означает, что сохраняется 4-момент импульса, определяемый как

$$M^{ik} = \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \frac{1}{c} \int [x^i (T^{kl} + t^{kl}) - x^k (T^{il} + t^{il})] (-g) dS_l$$

(до этого плохо прописано, что именно за счет этого есть момент импульса. в теории поля это пропишу четко потом!!)

Таким образом, и в общей теории относительности у замкнутой системы гравитирующих тел сохраняется полный момент импульса.

Полный 4-импульс материи

(???? вроде тут еще другой поход, задача ЛЛ2. пока хз.)

Получить выражение для полного 4-импульса материи и гравитационного поля, воспользовавшись формулой $T_i^k = \sum_l q_{,i}^{(l)} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}^{(l)}} - \delta_i^k \Lambda$.

В криволинейных координатах действие имеет вид

$$S = \int \Lambda \sqrt{-g} dV dt$$

вместо $S = \int \Lambda (q, \frac{\partial q}{\partial x^i}) dV dt$, и потому для получения сохраняющейся величины надо писать в (32.5) $\Lambda \sqrt{-g}$ вместо Λ , так что 4-импульс имеет вид (??????)

$$P_i = \frac{1}{c} \int \left[-\Lambda \sqrt{-g} \delta_i^k + \sum \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i} \frac{\partial (\sqrt{-g} \Lambda)}{\partial \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^k}} \right] dS_k.$$

При применении этой формулы к материи, для которой величины $q^{(l)}$ отличны от g_{ik} , можно вынести $\sqrt{-g}$ из-под знака производной, и подынтегральное выражение оказывается равным $\sqrt{-g} T_i^k$, где T_i^k - тензор энергии-импульса материи.

При применении же написанной формулы к гравитационному полю надо положить $\Lambda = -\frac{c^4}{16\pi k} G$, а величинами $q^{(l)}$ являются компоненты g_{ik} метрического тензора.

Полный 4-импульс поля и материи равен, следовательно,

$$P_i = \frac{1}{c} \int T_i^k \sqrt{-g} dS_k + \frac{c^3}{16\pi k} \int \left[G \sqrt{-g} \delta_i^k - \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} \frac{\partial (G \sqrt{-g})}{\partial \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} \right] dS_k$$

Воспользовавшись выражением (93.3) для G , можно преобразовать эту формулу к виду

$$P_i = \frac{1}{c} \int \left\{ T_i^k \sqrt{-g} + \frac{c^4}{16\pi k} \left[G \sqrt{-g} \delta_i^k + \Gamma_{lm}^k \frac{\partial (g^{lm} \sqrt{-g})}{\partial x^i} - \Gamma_{ml}^l \frac{\partial (g^{mk} \sqrt{-g})}{\partial x^i} \right] \right\} dS_k$$

Второй член в фигурных скобках определяет 4-импульс гравитационного поля при отсутствии материи.

Подынтегральное выражение не симметрично по индексам i, k и потому не дает возможности сформулировать закон сохранения момента импульса.

Центр инерции в ОТО (?)

(про центр инерции в теории поля тоже создам нормальный раздел потом!!!)

В ОТО может быть дано определение центра инерции, совершающего равномерное движение. Последнее связано с сохранением компонент $M^{0\alpha}$, выражающимся уравнением

$$x^0 \int (T^{\alpha 0} + t^{\alpha 0}) (-g) dV - \int x^\alpha (T^{00} + t^{00}) (-g) dV = \text{const}$$

так что координаты центра инерции даются формулой

$$X^\alpha = \frac{\int x^\alpha (T^{00} + t^{00}) (-g) dV}{\int (T^{00} + t^{00}) (-g) dV}$$

Выбирая систему координат, инерциальную в данном элементе объема, можно обратить все t^{ik} в любой точке пространства-времени в нуль (так как при этом обращаются в нуль все Γ_{kl}^i).

О сложностях определения центра инерции в ОТО

(пока не совсем понимаю, почему с этим могут быть сложности. потом пропишу, что так-то просто его не определить. пока хз.)

(???) дальше теория

(тут пока забил разбирать, еще пара страниц ЛЛ2, пока не до них)

С другой стороны, можно получить отличные от нуля t^{ik} в плоском пространстве, т.е. при отсутствии гравитационного поля, если просто воспользоваться криволинейными координатами вместо декартовых.

Таким образом, во всяком случае не имеет смысла говорить об определенной локализации энергии гравитационного поля в пространстве.

Если тензор $T_{ik} = 0$ в некоторой мировой точке, то это имеет место в любой системе отсчета, так что мы можем сказать, что в этой точке нет материи или электромагнитного поля.

Напротив, из равенства нулю псевдотензора же самого для другой системы отсчета, и поэтому не имеет смысла говорить о том, имеется ли или нет гравитационная энергия в данном месте.

Это вполне соответствует тому, что подходящим выбором

координат можно «уничтожить» гравитационное поле в данном элементе объема, причем согласно сказанному выше одновременно исчезает и псевдотензор t^{ik} в этом элементе.

Величины же P^i — 4-импульс поля и материи — имеют вполне определенный смысл, оказываясь не зависящими от выбора системы отсчета как раз в такой степени, как это необходимо на основании физических соображений.

Выделим область пространства, включающую в себя все рассматриваемые массы.

В четырехмерном пространстве-времени эта область с течением времени прорезывает канал».

Вне этого «канала» поле убывает, так что 4-пространство асимптотически приближается к плоскому.

В связи с этим при вычислении энергии и импульса поля надо выбрать четырехмерную систему координат таким образом, чтобы по мере удаления от канала» она переходила в галилееву систему и все t^{ik} исчезали.

Этим требованием система отсчета, конечно, отнюдь не определяется однозначно, - внутри канала она может быть выбрана произвольно.

В полном согласии с физическим смыслом величин P^i они оказываются, однако, совершенно не зависящими от выбора системы координат внутри «каналов».

Действительно, рассмотрим две системы координат, различные внутри «канала», но переходящие вдали от него в одну и ту же галилееву систему, и сравним значения 4-импульса P^i и P'^i в этих двух системах в определенные моменты «времени» x^0 и x'^0 .

Введем третью систему координат, совпадающую внутри «канала» в момент x^0 с первой системой, в момент x'^0 - со второй, а вдали от канала» - с той же галилеевой.

В силу закона сохранения энергии и импульса величины P^i постоянны ($dP^i/dx^0 = 0$).

Это имеет место в третьей системе координат, как и в первых двух.

Отсюда следует $P^i = P'^i$, что и требовалось доказать.

Выше было отмечено, что величины t^{ik} являются тензором по отношению к линейным преобразованиям координат.

Поэтому величины P^i образуют 4-вектор по отношению к таким преобразованиям, в частности по отношению к преобразованиям Лоренца, переводящим на бесконечности одну галилееву систему отсчета в другую.

4-импульс через интеграл

4-импульс P^i может быть выражен также в виде интеграла по удаленной трехмерной поверхности, охватывающей все пространство».

Подставив (96.5) в P^i , находим

$$P^i = \frac{1}{c} \int \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} dS_k$$

Этот интеграл можно преобразовать в интеграл по обычной поверхности с помощью (6.17):

$$P^i = \frac{1}{2c} \oint h^{ikl} df_{kl}^*$$

Если в качестве области интегрирования в P^i выбирается гиперповерхность $x^0 = \text{const}$, то в (96.15) поверхность интегрирования оказывается чисто пространственной поверхностью:

$$P^i = \frac{1}{c} \oint h^{i0\alpha} df_\alpha$$

Заметим, что, как будет показано в §105, величины $h^{i0\alpha}$ убывают в стационарном случае на больших расстояниях от тел по закону $1/r^2$, так что интеграл (96.16) остается конечным при удалении поверхности интегрирования на бесконечность.

Момент импульса через интеграл

Для вывода аналогичной формулы для момента импульса подставим (96.5) в (96.13) и представим h^{ikl} в виде (96.2).

Проинтегрировав затем «по частям», найдем:

$$\begin{aligned} M^{ik} &= \frac{1}{c} \int \left(x^i \frac{\partial^2 \lambda^{klmn}}{\partial x^m \partial x^n} - x^k \frac{\partial^2 \lambda^{ilmn}}{\partial x^m \partial x^n} \right) dS_l = \\ &= \frac{1}{2c} \oint \left(x^i \frac{\partial \lambda^{klmn}}{\partial x^n} - x^k \frac{\partial \lambda^{ilmn}}{\partial x^n} \right) df_{lm}^* - \frac{1}{c} \int \left(\delta_m^i \frac{\partial \lambda^{klmn}}{\partial x^n} - \delta_m^k \frac{\partial \lambda^{ilmn}}{\partial x^n} \right) dS_l = \\ &= \frac{1}{2c} \oint (x^i h^{klm} - x^k h^{ilm}) df_{lm}^* - \frac{1}{c} \int \frac{\partial}{\partial x^n} (\lambda^{klin} - \lambda^{ilkn}) dS_l \end{aligned}$$

Из определения величин λ^{iklm} легко видеть, что

$$\lambda^{ilkn} - \lambda^{klin} = \lambda^{ilnk}.$$

Поэтому оставшийся интеграл по dS_l равен

$$\frac{1}{c} \int \frac{\partial \lambda^{unk}}{\partial x^n} dS_l = \frac{1}{2c} \oint \lambda^{ilnk} df_{ln}^*$$

Наконец, снова выбирая чисто пространственную поверхность интегрирования, получим окончательно:

$$M^{ik} = \frac{1}{c} \oint (x^i h^{k0\alpha} - x^k h^{i0\alpha} + \lambda^{i0\alpha k}) df_{\alpha}$$

Strange derivation of Einstein's equations and conservation of energy by Lashkevich

(????? this is a very strange theory, later I'll read books and learn it better)

черновик лб лашкевича

$$\frac{\delta S_{\text{о6м}}}{\delta g_{\mu\nu}} \equiv \frac{\partial \left(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_{\text{о6м}} \right)}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_{\lambda} \frac{\partial \left(\sqrt{|g|} \mathcal{L}_{\text{обм}} \right)}{\partial g_{\mu\nu, \lambda}} + \dots = 0$$

$$f(R, R_{12}R^{12}, R_{1234}R^{1234}, R_{12}R_3^1R^{23}, \dots)$$

действием Эйнштейна—Гильберта.

Второе слагаемое (так называемый лямбда-член) не содержит производных и может быть отнесено к материи.

Действительно, имеем

$$S_{\text{rпaс}} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{|g|} (R + 2\Lambda)$$

$$T_{\Lambda}^{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{4\pi G \sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g^{\mu\nu}$$

$$S_{\text{rпaс}}[g] = -\frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{|g|} \mathcal{R}(g, \partial_{\bullet} g)$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu, \rho} g_{\kappa\lambda, \sigma} (g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\kappa} g^{\nu\sigma} g^{\rho\lambda} - 2g^{\mu\nu} g^{\kappa\rho} g^{\lambda\sigma})$$

$$\begin{aligned}\delta \int d^4x \sqrt{|g|} R &= \delta \int d^4x \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \int d^4x \left(\delta \sqrt{|g|} R + \sqrt{|g|} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right) \\ &= \int d^4x \left(\sqrt{|g|} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right)\end{aligned}$$

$$\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \left(\sqrt{|g|} w^\lambda \right) = \sqrt{|g|} w^\lambda_{;\lambda}, \quad w^\lambda = g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\lambda\mu} \delta \Gamma^\nu_{\mu\nu}$$

о, а от сюда ур Э получается

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$\frac{d-2}{2} R = -8\pi G T, \quad T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{d-2} T \right)$$

$$R_{00} = -\frac{1}{2} g^{ik} \ddot{g}_{ik} + \bar{R}_{00}, \quad R_{0i} = \frac{1}{2} g^{0k} \ddot{g}_{ik} + \bar{R}_{0i}, \quad R_{ik} = -\frac{1}{2} g^{00} \ddot{g}_{ik} + \bar{R}_{ik}$$

$$R_0^0 - \frac{1}{2} R = \bar{R}_0^0 - \frac{1}{2} \bar{R}, \quad R_i^0 = \bar{R}_i^0$$

$$R_k^i - \frac{\delta_k^i}{2} R = \frac{1}{2} (g^{0l} g^{0m} - g^{00} g^{lm}) (\delta_l^i \ddot{g}_{km} - \delta_k^i \ddot{g}_{lm}) + \bar{R}_k^i - \frac{\delta_k^i}{2} \bar{R}$$

$$\xi_{0;0} = 0, \quad \xi_{i;0} = -\xi_{0;i}$$

$$V - C - G = d(d-1) - d - d = d(d-3)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{|g|} t_\mu^E \nu &= -\frac{1}{16\pi G} \left(g_{\alpha\beta,\mu} \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{R})}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} - \delta_\mu^\nu \sqrt{|g|}\mathcal{R} \right) \\ \left(\sqrt{|g|} (T_\mu^\nu + t_\mu^E \nu) \right)_{,\nu} &= 0\end{aligned}$$

Покажем, что если массы сосредоточены в конечной области и настоящая метрика достаточно быстро стремится к плоской на больших расстояниях от этой области, то энергия и импульс такой системы определены однозначно.

Действительно, равенство нулю градиента псевдотензора в односвязном пространстве эквивалентно существованию так называемого суперпотенциала

$$\sqrt{|g|} (T_\mu^\nu + t_\mu^E \nu) = \sqrt{|g|} \left(-(T_{\text{грас}})_\mu^\nu + t_\mu^E \nu \right) = \partial_\lambda \tau_\mu^{E\nu\lambda}, \quad \tau_\mu^{E\nu\lambda} = -\tau_\mu^{E\lambda\nu}$$

Суперпотенциал определен неоднозначно.

Его можно найти, например, в виде

$$\tau_\mu^{E\nu\lambda} = |g|^{-1/2} g_{\mu\kappa} \chi_{,\rho}^{\kappa\nu\lambda\rho}$$

$$\tau_\mu^{E\nu\lambda} = |g|^{-1/2} g_{\mu\kappa} \chi^{\kappa\nu\lambda\rho}, \rho$$

$$P_\mu^E = \int dS_\nu \partial_\lambda \tau_\mu^{E\nu\lambda} = \frac{1}{2} \oint dS_{\nu\lambda} \tau_\mu^{E\nu\lambda}$$

$$|g| T^{\mu\nu}(x) = -|g| T_{\text{гpaи}}^{\mu\nu}(x) = \partial_\lambda \tau^{\mu\nu\lambda}(x)$$

Тогда в произвольной системе координат псевдотензор энергии-импульса Ландау—Лифшица определяется равенством

$$|g| (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \tau^{\mu\nu\lambda},{}_\lambda$$

$$P^\mu = \int dS_\nu |g| (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \oint dS_{\nu\lambda} \tau^{\mu\nu\lambda}$$

Симметричность псевдотензора Ландау—Лифшица позволяет определить сохраняющийся момент импульса

$$J^{\mu\nu} = \int dS_\lambda |g| (x^\mu (T^{\nu\lambda} + t^{\nu\lambda}) - x^\nu (T^{\mu\lambda} + t^{\mu\lambda}))$$

$$J^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \oint dS_{\alpha\beta} (x^\mu \tau^{\nu\alpha\beta} - x^\nu \tau^{\mu\alpha\beta} + \chi^{\mu\alpha\beta\nu})$$

нахрена нам центр инерции?:

$$X^i = \frac{\int d^{d-1}x |g| (T^{00} + t^{00}) x^i}{\int d^{d-1}x |g| (T^{00} + t^{00})}$$

22.6.4 Other Statements about Conservation Laws in General Relativity

(many questions can be asked, so I'll discuss the most important of them here)

22.7 Other Equations of General Relativity

(все играющие хотя бы какую-то роль уравнения тут будут)

22.7.1 Geodesic Deviation Equation

(от Тонга пропишу потом тут теорию)

Относительное ускорение частиц, движущихся по геодезическим

Определим относительное 4-ускорение двух частиц, движущихся по бесконечно близким геодезическим мировым линиям.

Рассмотрим семейство геодезических линий, отличаемых значениями некоторого параметра v (это не скорость. мб переобозначу параметр); другими словами, координаты мировой точки выражаются в виде функций $x^i = x^i(s, v)$, таких, что при каждом $v = \text{const}$ это есть уравнение геодезической (причем s - длина интервала, отсчитываемого вдоль линии от ее точки пересечения с некоторой заданной гиперповерхностью).

Введем 4-вектор

$$\eta^i = \frac{\partial x^i}{\partial v} \Delta v \equiv v^i \Delta v,$$

соединяющий на бесконечно близких геодезических (отвечающих значениям параметра v и $v + \Delta v$) точки с одинаковыми значениями s .

Из определения ковариантной производной и равенства $\partial u^i / \partial v = \partial v^i / \partial s$ (где $u^i = \partial x^i / \partial s$) следует, что

$$u^i_{;k} v^k = v^i_{;k} u^k$$

(???? хз, почему это следует)

Рассмотрим вторую производную:

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} \equiv (v^i_{;k} u^k)_{;l} u^l = (u^i_{;k} v^k)_{;l} u^l = u^i_{;k;l} v^k u^l + u^i_{;k} v^k_{;l} u^l$$

Во втором члене снова используем (1), а в первом меняем порядок ковариантных дифференцирований с помощью (91.7) и находим:

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} = (u^i_{;l} u^l)_{;k} v^k + u^m R^i_{mkl} u^k v^l$$

Первый член равен нулю, поскольку вдоль геодезических линий $u^i_{;l} u^l = 0$. Введя постоянный множитель Δv , находим окончательно уравнение:

$$\frac{D^2 \eta^i}{ds^2} = R^i_{klm} u^k u^l \eta^m$$

(его называют уравнением геодезического отклонения).

(??? собственно, а чему равно-то ускорение относительное???? вообще не въехал.)

О применении уравнения девиации геодезической (??)

примеры применения (??)

(мб явные примеры, где оно нужно, найду)

22.7.2 Equation of Motion of Particles in a Gravitational Field (??)

(пока не особо занимался. выгружу потом ЛЛ2)

Предположение малости скоростей всех частиц требует одновременно, чтобы само гравитационное поле было слабым

в ЛЛ2 в пар 87 доказывается мб.

относительное 4-ускорение двух частиц, движущихся по бесконечно близким геодезическим мировым линиям

Определить относительное 4-ускорение двух частиц, движущихся по бесконечно близким геодезическим мировым линиям.

Рассмотрим семейство геодезических линий, отличаемых значениями некоторого параметра v ; другими словами, координаты мировой точки выражаются в виде функций $x^i = x^i(s, v)$, таких, что при каждом $v = \text{const}$ это есть уравнение геодезической (причем s - длина интервала, отсчитываемого вдоль линии от ее точки пересечения с некоторой заданной гиперповерхностью). Введем 4-вектор

$$\eta^i = \frac{\partial x^i}{\partial v} \delta v \equiv v^i \delta v$$

соединяющий на бесконечно близких геодезических (отвечающих значениям параметра v и $v + \delta v$) точки с одинаковыми значениями s .

Из определения ковариантной производной и равенства $\partial u^i / \partial v = \partial v^i / \partial s$ (где $u^i = \partial x^i / \partial s$) следует, что

$$u^i_{;k} v^k = v^i_{;k} u^k$$

Рассмотрим вторую производную:

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} \equiv (v^i_{;k} u^k)_{;l} u^l = (u^i_{;k} v^k)_{;l} u^l = u^i_{;k;l} v^k u^l + u^i_{;k} v^k_{;l} u^l$$

Во втором члене снова используем (1), а в первом меняем порядок ковариантных дифференцирований с помощью (91.7) и находим:

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} = (u^i_{;l} u^l)_{;k} v^k + u^m R^i_{mkl} u^k v^l$$

Первый член равен нулю, поскольку вдоль геодезических линий $u^i_{;l} u^l = 0$. Введя постоянный множитель δv , находим окончательно уравнение:

$$\frac{D^2 \eta^i}{ds^2} = R^i_{klm} u^k u^l \eta^m$$

(его называют уравнением геодезического отклонения).

Уравнение движения частиц в гравитационном поле из принципа наименьшего действия

Вывести уравнение движения $\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0$ из принципа наименьшего действия $\delta S = -mc \delta \int ds = 0$.

Имеем:

$$\delta ds^2 = 2ds \delta s = \delta (g_{ik} dx^i dx^k) = dx^i dx^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l + 2g_{ik} dx^i d\delta x^k$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l + g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{d\delta x^k}{ds} \right\} ds = \\ &= -mc \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l - \frac{d}{ds} \left(g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \right) \delta x^k \right\} ds \end{aligned}$$

(при интегрировании по частям учтено, что на пределах $\delta x^k = 0$). Во втором члене под интегралом заменим индекс k индексом l . Тогда находим, приравнявая нулю коэффициент при произвольной вариации δx^l :

$$\frac{1}{2} u^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{d}{ds} (g_{il} u^i) = \frac{1}{2} u^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{il} \frac{du^i}{ds} - u^i u^k \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = 0$$

Замечая, что третий член можно написать в виде

$$-\frac{1}{2} u^i u^k \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right)$$

и вводя символы Кристоффеля $\Gamma_{l,ik}$ согласно (86.2), получаем:

$$g_{il} \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{l,ik} u^i u^k = 0$$

Уравнение (87.3) получается отсюда поднятием индекса l .

Сила, действующую на частицу в постоянном гравитационном поле

Для нужных нам компонент Γ_{kl}^i находим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^\alpha &= \frac{1}{2}h^{;\alpha} \\ \Gamma_{0\beta}^\alpha &= \frac{h}{2}(g_{;\beta}^\alpha - g_\beta^{;\alpha}) - \frac{1}{2}g_\beta h^{;\alpha} \\ \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= \lambda_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{h}{2}[g_\beta(g_{;\gamma}^\alpha - g_\gamma^{;\alpha}) + g_\gamma(g_{;\beta}^\alpha - g_\beta^{;\alpha})] + \frac{1}{2}g_\beta g_\gamma h^{;\alpha}\end{aligned}$$

В этих выражениях все тензорные действия (ковариантные дифференцирования, подъем и опускание индексов) производятся в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ над трехмерным вектором g^α и трехмерным скаляром h (88.11); $\lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ есть трехмерный символ Кристоффеля, составленный из компонент тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ так, как Γ_{kl}^i составляется из компонент g_{ik} ; при вычислении использованы формулы (84.9) – (84.12). Подставив (1) в уравнение движения

$$\frac{du^\alpha}{ds} = -\Gamma_{00}^\alpha (u^0)^2 - 2\Gamma_{0\beta}^\alpha u^0 u^\beta - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma$$

и используя выражения (88.14) для компонент 4-скорости, после простых преобразований получим:

$$\frac{d}{ds} \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{h^{;\alpha}}{2h(1-\frac{v^2}{c^2})} - \frac{\sqrt{h}(g_{;\beta}^\alpha - g_\beta^{;\alpha})v^\beta}{c(1-\frac{v^2}{c^2})} - \frac{\lambda_{\beta\gamma}^\alpha v^\beta v^\gamma}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})}$$

Действующая на частицу сила $\mathbf{f}$ есть производная от ее импульса $\mathbf{p}$ по (синхронизованному) собственному времени, определенная с помощью трехмерного ковариантного дифференциала:

$$f^\alpha = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \frac{Dp^\alpha}{ds} = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \frac{d}{ds} \frac{mv^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \lambda_{\beta\gamma}^\alpha \frac{mv^\beta v^\gamma}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Из (2) имеем поэтому (для удобства опускаем индекс α):

$$f_\alpha = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{h} + \sqrt{h} \left(\frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta} \right) \frac{v^\beta}{c} \right\}$$

или в обычных трехмерных векторных обозначениях

$$\mathbf{f} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left\{ -\text{grad} \ln \sqrt{h} + \sqrt{h} \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \text{rot} \mathbf{g} \right] \right\}$$

Отметим, что если тело неподвижно, то действующая на него сила (первый член в (3)) имеет потенциал. При малых скоростях движения второй член в (3) имеет вид $mc\sqrt{h}[\mathbf{v} \text{rot} \mathbf{g}]$, аналогичный силе Кориолиса, которая возникла бы (при отсутствии поля) в системе координат, вращающейся с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{c}{2}\sqrt{h} \text{rot} \mathbf{g}$$

22.7.3 The synchronous reference system

(see Landau 2 about it)

Обсудим подробно синхронную систему отсчета и её применения.

(?????????)

Суть синхронной системы отсчета

(в 1ю часть это отойдет потом тоже)

Обзор применений синхронной системы отсчета (??)

(на неё отсылки есть, потом пропишу их. встречается, но пока хз, где. серьезно, прямо очень важно это указать потом!!!)

Условие синхронности есть $g_{0\alpha} = 0$

(обосную, почему это так. пар 84 в ЛЛ2 про гравитацию это пояснено.)

Theory

Условие, допускающее синхронизацию хода часов в различных точках пространства, заключается в равенстве нулю компонент $g_{0\alpha}$ метрического тензора.

Если, кроме того, $g_{00} = 1$, то временная координата $x^0 = t$ представляет собой собственное время в каждой точке пространства Γ).

Систему отсчета, удовлетворяющую условиям

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0$$

назовем синхронной.

Элемент интервала в такой системе дается выражением

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

причем компоненты тензора пространственной метрики совпадают (с точностью до знака) с компонентами $g_{\alpha\beta}$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}$$

В синхронной системе отсчета линии времени являются геодезическими линиями в 4-пространстве.

Действительно, 4-вектор $u^i = dx^i/ds$ касательной к мировой линии $x^1, x^2, x^3 = \text{const}$ имеет составляющие $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1$ и автоматически удовлетворяет геодезическим уравнениям:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l = \Gamma_{00}^i = 0$$

поскольку при условиях (97.1) символы Кристоффеля $\Gamma_{00}^\alpha, \Gamma_{00}^0$ равны нулю тождественно.

Легко также видеть, что эти линии нормальны к гиперповерхностям $t = \text{const}$.

Действительно, 4-вектор нормали к такой гиперповерхности $n_i = \partial t / \partial x^i$ имеет ковариантные составляющие $n_\alpha = 0$, $n_0 = 1$.

Соответствующие контравариантные компоненты при условиях (97.1) тоже равны $n^\alpha = 0$, $n^0 = 1$, т.е. совпадают с компонентами 4-вектора u^i касательных к линиям времени.

построения синхронной системы отсчета в любом пространстве-времени

Обратно, этими свойствами можно воспользоваться для геометрического построения синхронной системы отсчета в любом пространстве-времени.

Для этого выбираем в качестве исходной какую-либо пространственноподобную гиперповерхность, т.е. гиперповерхность, нормаль к которой в каждой ее точке имеет временное направление (лежит внутри светового конуса с вершиной в этой же точке); все элементы интервала на такой гиперповерхности пространственноподобны.

Затем строим семейство нормальных к этой гиперповерхности геодезических линий.

Если теперь выбрать эти линии в качестве координатных линий времени, причем определить временную координату t как длину s геодезической линии, отсчитываемую от исходной гиперповерхности, мы получим синхронную систему отсчета.

Ясно, что такое построение, а тем самым и выбор синхронной системы отсчета в принципе возможны всегда.

Более того, этот выбор еще и не однозначен.

Метрика вида (97.2) допускает любые преобразования пространственных координат, не затрагивающие времени, и, кроме того, преобразование, соответствующее произволу в выборе исходной гиперповерхности в указанном геометрическом построении.

Переход к синхронной системе через уравнения Гамильтона-Якоби (!!)

(идею тут упустил пока что)

Аналитически преобразование к синхронной системе отсчета можно в принципе произвести при помощи уравнения Гамильтона-Якоби.

Основание этого способа состоит в том, что траектории частицы в гравитационном поле как раз и являются геодезическими линиями.

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы с массой равной единице в гравитационном поле есть $g^{ik} \frac{d\tau}{dx^i} \frac{d\tau}{dx^k} = 1$, где обозначено действие посредством τ (?? поч??).

Его полный интеграл имеет вид

$$\tau = f(\xi^\alpha, x^i) + A(\xi^\alpha)$$

где f - функция четырех координат x^i и трех параметров ξ^α ; четвертую постоянную A рассматриваем как произвольную функцию трех ξ^α .

При таком представлении τ уравнения траектории частицы можно получить приравниванием производных $\partial\tau/\partial\xi^\alpha$ нулю, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} = -\frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha}$$

Для каждого заданных значений параметров ξ^α правые стороны уравнений (97.6) имеют определенные постоянные значения и определяемая этими уравнениями мировая линия является одной из возможных траекторий частицы.

Выбрав постоянные вдоль траекторий величины ξ^α в качестве новых пространственных координат, а величину τ - в качестве новой временной координаты, мы и получим синхронную систему отсчета, причем уравнениями (97.5)-(97.6) определится искомое преобразование от старых координат к новым.

Действительно, геодезичность линий времени при таком преобразовании обеспечивается автоматически, причем эти линии будут нормальны к гиперповерхностям $\tau = \text{const}$.

Последнее очевидно из механической аналогии: 4-вектор нормали к гиперповерхности $-\partial\tau/\partial x^i$ совпадает в механике с 4-импульсом частицы и потому совпадает по направлению с ее 4-скоростью u^i , т.е. с 4-вектором касательной к траектории.

Наконец, выполнение условия $g_{00} = 1$ очевидно из того, что производная $-d\tau/ds$ действия вдоль траектории есть масса частицы, которую мы приняли равной 1; поэтому $|d\tau/ds| = 1$.

Уравнения Эйнштейна в синхронной системе отсчета

Напишем уравнения Эйнштейна в синхронной системе отсчета, отделив в них операции пространственных и временного дифференцирования.

Введем обозначение

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t}$$

для производных по времени от трехмерного метрического тензора; эти величины сами составляют трехмерный тензор.

Все операции перемещения индексов у трехмерного тензора $x_{\alpha\beta}$ и его ковариантные дифференцирования производятся в дальнейшем в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ 1).

Отметим, что сумма x_{α}^{α} есть логарифмическая производная определителя $\gamma \equiv |\gamma_{\alpha\beta}| = -g$;

$$x_{\alpha}^{\alpha} = \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \ln \gamma$$

Для символов Кристоффеля находим выражения:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \Gamma_{00}^{\alpha} = \Gamma_{0\alpha}^0 = 0 \\ \Gamma_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2} \varkappa_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{0\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2} \varkappa_{\beta}^{\alpha}, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \lambda_{\beta\gamma}^{\alpha} \end{aligned}$$

где $\lambda_{\beta\gamma}^{\alpha}$ - трехмерные символы Кристоффеля, образованные из тензора $\gamma_{\alpha\beta}$.

Вычисление по формуле (92.7) приводит к следующим выражениям для компонент R_{ik} :

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \varkappa_{\alpha}^{\alpha} - \frac{1}{4} \varkappa_{\alpha}^{\beta} \varkappa_{\beta}^{\alpha}, \\ R_{0\alpha} &= \frac{1}{2} \left(\varkappa_{\alpha;\beta}^{\beta} - \varkappa_{\beta;\alpha}^{\beta} \right) \\ R_{\alpha\beta} &= P_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \varkappa_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \left(\varkappa_{\alpha\beta} \varkappa_{\gamma}^{\gamma} - 2 \varkappa_{\alpha}^{\gamma} \varkappa_{\beta\gamma} \right) \end{aligned}$$

Здесь $P_{\alpha\beta}$ - трехмерный тензор Риччи, построенный из $\gamma_{\alpha\beta}$ так же, как R_{ik} строится из g_{ik} ; поднятие его индексов производится ниже тоже с помощью трехмерной метрики $\gamma_{\alpha\beta}$.

Уравнения Эйнштейна напомним в смешанных компонентах:

$$\begin{aligned} R_0^0 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} x_{\alpha}^{\alpha} - \frac{1}{4} x_{\alpha}^{\beta} x_{\beta}^{\alpha} = 8\pi k \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) \\ R_{\alpha}^0 &= \frac{1}{2} \left(x_{\alpha;\beta}^{\beta} - x_{\beta;\alpha}^{\beta} \right) = 8\pi k T_{\alpha}^0 \\ R_{\alpha}^{\beta} &= -P_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} x_{\alpha}^{\beta}) = 8\pi k \left(T_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\beta} T \right) \end{aligned}$$

(укажу потом применения. также скопирую в первый пар с обзором синхронной системы)

Нестационарность синхронной системы отсчета

(пока не совсем уверен, что это так)

Характерным свойством синхронных систем отсчета является их нестационарность: в такой системе гравитационное поле не может быть постоянным.

Действительно, в постоянном поле было бы $\varkappa_{\alpha\beta} = 0$.

Между тем при наличии материи обращение всех $x_{\alpha\beta}$ в нуль во всяком случае противоречило бы уравнению уравнения Эйнштейна для R_0^0 (с отличной от нуля правой частью).

В пустом же пространстве мы нашли бы из (97.13), что все $P_{\alpha\beta}$, а тем самым и все компоненты трехмерного тензора кривизны $\bar{P}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ обращаются в нуль, т.е. поле вообще отсутствует (в синхронной системе при евклидовой пространственной метрике пространство-время плоское).

Материя не может покоиться относительно синхронной системы

В то же время заполняющая пространство материя не может, вообще говоря, покоиться относительно синхронной системы отсчета.

Это очевидно из того, что частицы материи, в которой действуют силы давления, движутся, вообще говоря, не по геодезическим мировым линиям; мировая же линия покоящейся частицы есть линия времени и в синхронной системе является геодезической.

Исключение представляет случай “пылевидной” материи ($p = 0$).

Не взаимодействуя друг с другом, ее частицы движутся по геодезическим мировым линиям; в этом случае, следовательно, условие синхронности системы отсчета не противоречит условию ее сопутствия материи.

Для других уравнений состояния аналогичная ситуация может иметь место лишь в частных случаях, когда во всех или в некоторых направлениях отсутствует градиент давления.

Определитель метрического тензора $-g = \gamma$ в синхронной системе должен обнулиться

(потом укажу важность этого факта)

Из уравнения Эйнштейна для R_0^0 можно показать, что определитель $-g = \gamma$ метрического тензора в синхронной системе отсчета непременно должен обратиться в нуль в течение конечного времени.

Для этого заметим, что выражение в правой стороне этого уравнения при любом распределении материи положительно.

Действительно, в синхронной системе отсчета для тензора энергии-импульса (94.9) имеем:

$$T_0^0 - \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}(\varepsilon + 3p) + \frac{(p + \varepsilon)v^2}{1 - v^2}$$

(компоненты 4-скорости - из (88.14)); положительность этой величины очевидна.

То же самое справедливо и для тензора энергии-импульса электромагнитного поля ($T = 0, T_0^0$ – положительная плотность энергии поля).

Таким образом, имеем из уравнения Эйнштейна для R_0^0 :

$$-R_0^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \varkappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{4} x_\alpha^\beta x_\beta^\alpha \leq 0$$

(знак равенства достигается в пустом пространстве).

В силу алгебраического неравенства

$$\varkappa_\beta^\alpha \varkappa_\alpha^\beta \geq \frac{1}{3} (\varkappa_\alpha^\alpha)^2$$

можно переписать (97.14) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N}_\alpha^\alpha + \frac{1}{6} (\varkappa_\alpha^\alpha)^2 \leq 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{x_\alpha^\alpha} \geq \frac{1}{6}$$

Пусть, например, в некоторый момент времени $x_\alpha^\alpha > 0$, Тогда при уменьшении t величина $1/x_\alpha^\alpha$ убывает, имея всегда конечную (не равную нулю) производную, и потому должна обратиться в нуль (с положительной стороны) в течение конечного времени.

Другими словами, x_α^α обращается в $\mathbf{B} + \infty$, а поскольку $x_\alpha^\alpha = \partial \ln \gamma / \partial t$, то это значит, что определитель γ обращается в нуль (причем, согласно неравенству (97.15), не быстрее - чем t^6).

Если же в начальный момент $x_\alpha^\alpha < 0$, то же самое получится для возрастающего времени.

Этот результат, однако, отнюдь не доказывает неизбежности существования истинной, физической особенности в метрике.

Физической особенностью является лишь такая, которая свойственна пространству-времени как таковому и не связана с характером выбранной системы отсчета (такая особенность должна характеризоваться обращением в бесконечность скалярных величин - плотности материи, инвариантов тензора кривизны).

Особенность же в синхронной системе отсчета, неизбежность которой мы доказали, в общем случае в действительности является фиктивной, исчезающей при переходе к другой (не синхронной) системе отсчета.

Ее происхождение ясно из простых геометрических соображений.

(???)

(???) пояснения

(тут хз)

Мы видели выше, что построение синхронной системы сводится к построению семейства геодезических линий, ортогональных к какой-либо пространственноподобной гиперповерхности.

Но геодезические линии произвольного семейства, вообще говоря, пересекаются друг с другом на некоторых огибающих гиперповерхностях - четырехмерных аналогах каустических поверхностей геометрической оптики.

Пересечение же координатных линий дает, разумеется, особенность в метрике в данной координатной системе.

Таким образом, имеется геометрическая причина для появления особенности, связанной со специфическими свойствами синхронной системы и потому не имеющей физического характера.

Произвольная метрика 4-пространства допускает, вообще говоря, существование также и непересекающихся семейств времениподобных геодезических линий.

Неизбежность же обращения в нуль определителя γ в синхронной системе означает, что допускаемые уравнениями поля свойства кривизны реального (не плоского) пространства-времени (выражаемые неравенством $R_0^0 \geq 0$ исключают возможность существования таких семейств, так что линии времени во всякой синхронной системе отсчета непременно пересекаются друг с другом.

Мы упоминали выше о том, что для пылевидной материи синхронная система отсчета может быть в то же время и сопутствующей.

В таком случае плотность материи обратится на каустике в бесконечность, - просто как результат пересечения мировых траекторий частиц, совпадающих с линиями времени.

Ясно, однако, что эта особенность плотности устранилась уже введением сколь угодно малого, но отличного от нуля давления материи и в этом смысле тоже не имеет физического характера.

Разложение решения уравнений гравитационного поля в пустоте вблизи регулярной по времени точки (???)

(??? зачем это?? пока не вникал)

Найти вид разложения решения уравнений гравитационного поля в пустоте вблизи не особой, регулярной точки по времени.

Выбрав условно рассматриваемую временную точку в качестве начала отсчета времени, будем искать $\gamma_{\alpha\beta}$ в виде

$$\gamma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + tb_{\alpha\beta} + t^2 c_{\alpha\beta} + \dots$$

где $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}$ - функции пространственных координат.

В том же приближении обратный тензор:

$$\gamma^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} - tb^{\alpha\beta} + t^2 (b^{\alpha\gamma} b_{\gamma}^{\beta} - c^{\alpha\beta})$$

где $a^{\alpha\beta}$ - тензор, обратный $a_{\alpha\beta}$, а поднятие индексов у остальных тензоров производится с помощью $a^{\alpha\beta}$.

Далее имеем:

$$\alpha_{\beta} = b_{\alpha\beta} + 2tc_{\alpha\beta}, \quad \gamma_{\alpha}^{\beta} = b_{\alpha}^{\beta} + t(2c_{\alpha}^{\beta} - b_{\alpha\gamma} b^{\beta\gamma})$$

Уравнения Эйнштейна в синхронной системе отсчета приводят к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} cR_0^0 &= -c + \frac{1}{4}b_{\alpha}^{\beta}b_{\beta}^{\alpha} = 0 \\ R_{\alpha}^0 &= \frac{1}{2}(b_{\alpha;\beta}^{\beta} - b_{;\alpha}) + t \left[-c_{;\alpha} + \frac{3}{8}(b_{\beta}^{\gamma}b_{\gamma}^{\beta})_{;\alpha} + c_{\alpha;\beta}^{\beta} + \frac{1}{4}b_{\alpha}^{\beta}b_{;\beta} - \frac{1}{2}(b_{\alpha}^{\gamma}b_{\gamma}^{\beta})_{;\beta} \right] = 0 \\ R_{\alpha}^{\beta} &= -P_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{4}b_{\alpha}^{\beta}b + \frac{1}{2}b_{\alpha}^{\gamma}b_{\gamma}^{\beta} - c_{\alpha}^{\beta} = 0 \end{aligned}$$

где $b \equiv b_{\alpha}^{\alpha}, c \equiv c_{\alpha}^{\alpha}$.

Здесь операции ковариантного дифференцирования производятся в трехмерном пространстве с метрикой $a_{\alpha\beta}$: по этой же метрике определяется тензор $P_{\alpha\beta}$.

Из (4) коэффициенты $c_{\alpha\beta}$ полностью определяются по коэффициентам $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$.

После этого (2) дает соотношение

$$P + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}b_{\alpha}^{\beta}b_{\beta}^{\alpha} = 0$$

Из членов нулевого порядка в (3) имеем:

$$b_{\alpha;\beta}^{\beta} = b_{;\alpha}$$

Члены же $\sim t$ в этом уравнении при использовании (2); (4) – (6) (и тождества $P_{\alpha;\beta}^{\beta} = \frac{1}{2}P_{;\alpha}$; ср.

(92.10)) обращаются в нуль тождественно.

Таким образом, 12 величин $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ связаны друг с другом одним соотношением (5) и тремя соотношениями (6), так что остается восемь произвольных функций трех пространственных координат.

Из них три связаны с возможностью произвольных преобразований трех пространственных координат и одна - с произволом в выборе исходной гиперповерхности при построении синхронной системы отсчета.

Остается, как и следовало (см. конец §95), четыре «физически различные произвольные функции».

Тензор кривизны R_{iklm} в синхронной системе отсчета

Вычислить компоненты тензора кривизны R_{iklm} в синхронной системе отсчета. При помощи известных символов Кристоффеля получим по обычной формуле:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -P_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{4}(x_{\alpha\delta}x_{\beta\gamma} - x_{\alpha\gamma}x_{\beta\delta}) \\ R_{0\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2}(\alpha_{\gamma;\beta} - \alpha_{\beta;\gamma}) \\ R_{0\alpha 0\beta} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}x_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}x_{\alpha\gamma}x_{\beta}^{\gamma} \end{aligned}$$

где $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ - трехмерный тензор кривизны, соответствующий трехмерной пространственной метрике $\gamma_{\alpha\beta}$.

(!! проделаю это потом ручками!!!)

Бесконечно малое синхронное преобразование

Найти общий вид бесконечно малого преобразования, не нарушающего синхронности системы отсчета.

В общем случае преобразование имеет вид

$$t \rightarrow t + \varphi(x^1, x^2, x^3), \quad x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \xi^\alpha(x^1, x^2, x^3, t)$$

где φ, ξ^α - малые величины.

Соблюдение условия $g_{00} = 1$ обеспечивается независимостью φ от t , а для соблюдения условия $g_{0\alpha} = 0$ должны выполняться уравнения

$$\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$$

откуда

$$\xi^\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} \int \gamma^{\alpha\beta} dt + f^\alpha(x^1, x^2, x^3)$$

где f^α - снова малые величины (образующие трехмерный вектор $\mathbf{f}$).

При этом пространственный метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ заменяется согласно

$$\gamma_{\alpha\beta} \rightarrow \gamma_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha;\beta} - \xi_{\beta;\alpha} - \varphi x_{\alpha\beta}$$

(в чем легко убедиться с помощью формулы (94.3)).

Преобразование содержит, как и следовало, четыре произвольные (малые) функции пространственных координат φ, f^α .

(?? потом потренируюсь)

23 Typical Models of General Relativity

23.1 Basic Models of Gravity

Обсудим подробно типичные частные случаи уравнений Эйнштейна.

(here are simple models, structure is not that good, but for now, it is ok, it is better to focus on quality of subsubsections!)

23.1.1 Weak Gravitational Fields

(от Лашкевича тоже добавлю теорию сюда)

Основные формулы слабого поля

(потом выпишу, пока - хз)

О применениях слабого поля

Конструкция слабого поля применяется в гравитационных волнах, именно с неё и начинается их изучение.

(тут конкретно укажу.)

Метрика слабого поля

Рассмотрим стационарное гравитационное поле на больших расстояниях r от создающего его тела и определим первые члены его разложения по степеням $1/r$.

Вдали от тела поле слабое, то есть что метрика пространств-времени здесь почти галилеева, т.е. можно выбрать такую систему отсчета, в которой компоненты метрического тензора почти равны своим галилеевым значениям:

$$g_{00}^{(0)} = 1, \quad g_{0\alpha}^{(0)} = 0, \quad g_{\alpha\beta}^{(0)} = -\delta_{\alpha\beta}.$$

Соответственно этому представим g_{ik} в виде

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}$$

где h_{ik} - малые поправки, определяющие гравитационное поле.

Оперируя с тензором h_{ik} , условимся в дальнейшем поднимать и опускать его индексы с помощью «невозмущенной» метрики: $h_i^k = g^{(0)kl} h_{il}$ и т.п. При этом необходимо отличать h^{ik} от поправок в контравариантных компонентах метрического тензора g^{ik} , которые определяются решением уравнений

$$g_{il} g^{lk} = \left(g_{il}^{(0)} + h_{il} \right) g^{lk} = \delta_i^k$$

так, с точностью до величин второго порядка малости находим:

$$g^{ik} = g^{ik(0)} - h^{ik} + h_i^j h^{jk}$$

С той же точностью определитель метрического тензора

$$g = g^{(0)} \left(1 + h + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{2} h_k^i h_i^k \right)$$

где $h = h_i^i$.

(?? хз откуда эти формулы, потом в линале пропишу их, пока запоминаю, наверное, это так.)

(хотелось бы конкретный тут пример посчитать, мб потом приведу его)

малость h_{ik} не фиксирует однозначного выбора системы отсчета

(хз, к чему это)

Подчеркнем, что условие малости h_{ik} отнюдь не фиксирует однозначного выбора системы отсчета.

Если это условие выполнено в какой-либо одной системе, то оно будет выполнено и после любого преобразования $x^{ii} = x^i + \xi^i$, где ξ^i - малые величины.

Согласно (94.3) (?!?!!) тензор h_{ik} переходит при этом в

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}$$

где $\xi_i = g_{ik}^{(0)} \xi^k$ (ввиду постоянства $g_{ik}^{(0)}$ ковариантные производные в (94.3) сводятся в данном случае к обычным производным).

Поправки в первом порядке малости

В первом приближении, с точностью до членов порядка $1/r$, малые добавки к галилеевым значениям даются соответствующими членами разложения центрально-симметричной метрики Шварцшильда.

В соответствии с отмеченной неопределенностью в выборе (галилеевой на бесконечности) системы отсчета, конкретный вид h_{ik} зависит при этом от способа определения радиальной координаты r .

Так, если шварцшильдова метрика представлена в виде (100.14), первые члены ее разложения при больших r даются выражением (100.18).

Перейдя в нем от сферических пространственных координат к декартовым (для чего надо заменить $dr = n_\alpha dx^\alpha$, где $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$), получим следующие значения:

$$h_{00}^{(1)} = -\frac{r_g}{r}, \quad h_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{r_g}{r} n_\alpha n_\beta, \quad h_{0\alpha}^{(1)} = 0$$

где $r_g = (??)$.

(не совсем понял, как векторами $\mathbf{n}$ пользоваться?)

Поправки во втором порядке малости

Среди членов второго порядка, пропорциональных $1/r^2$, имеются члены двоякого происхождения.

Часть членов возникает в результате нелинейности уравнений Эйнштейна из членов первого порядка. Поскольку последние зависят только от массы тела, то только от нее же зависят и эти члены второго порядка. Поэтому эти члены можно получить путем разложения шварцшильдовой метрики.

В тех же координатах найдем:

$$h_{00}^{(2)} = 0, \quad h_{\alpha\beta}^{(2)} = -\left(\frac{r_g}{r}\right)^2 n_\alpha n_\beta$$

(?? откуда это - не знаю)

Остальные члены второго порядка возникают как соответствующие решения линеаризованных уравнений поля.

Произведем линеаризацию уравнений, выписывая формулы в общем виде, не учитывая сразу стационарности поля.

При малых h_{ik} величины Γ_{kl}^i , выражающиеся через производные от h_{ik} , тоже малы.

Пренебрегая степенями выше первой, мы можем оставить в тензоре кривизны только члены в первой скобке:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} \right)$$

(укажу потом эту формулу в разделе про него, она не сложная)

Для тензора Риччи имеем с той же точностью: $R_{ik} = g^{lm} R_{ilmk} \approx g^{lm(0)} R_{ilmk}$, то есть

$$R_{ik} = \frac{1}{2} \left(-g^{lm(0)} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 h_i^l}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_k^l}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k} \right)$$

Его можно упростить, воспользовавшись оставшимся произволом в выборе системы отсчета.

Именно, наложим на h_{ik} четыре (по числу произвольных функций ξ^i) дополнительных условия

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad \psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k h$$

Тогда последние три члена в (105.9) взаимно сокращаются и остается

$$R_{ik} = -\frac{1}{2} g^{lm(0)} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}$$

(?!! проделаю это, это идейно важный переход)

В стационарном случае, когда h_{ik} не зависят от времени, выражение для R_{ik} сводится к $R_{ik} = 1/2 \Delta h_{ik}$, где Δ - оператор Лапласа по трем пространственным координатам.

Уравнения же Эйнштейна для поля в пустоте сводятся, таким образом, к уравнениям Лапласа

$$\Delta h_{ik} = 0$$

с дополнительными условиями (105.10), принимающими вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(h_\alpha^\beta - \frac{1}{2} h \delta_\alpha^\beta \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^\beta} h_0^\beta &= 0 \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что эти условия все еще не фиксируют вполне однозначного выбора системы отсчета.

Легко убедиться в том, что если h_{ik} удовлетворяют условиям (105.13)-(105.14), то таким же условиям будут удовлетворять и h'_{ik} , если только ξ^i удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \xi^i = 0$$

Компонента h_{00} должна даваться скалярным решением трехмерного уравнения Лапласа. Такое решение, пропорциональное $1/r^2$, имеет, как известно, вид $\mathbf{a} \nabla \frac{1}{r}$, где $\mathbf{a}$ - постоянный вектор.

Но член такого вида в h_{00} всегда может быть ликвидирован путем простого смещения начала координат в члене первого порядка по $1/r$.

(? почему это так???)

Таким образом, наличие такого члена свидетельствовало бы лишь о неудачном выборе начала координат и потому не представляет интереса.

Компоненты $h_{0\alpha}$ даются векторным решением уравнения Лапласа, т.е. должны иметь вид

$$h_{0\alpha} = \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{r}$$

где $\lambda_{\alpha\beta}$ - постоянный тензор.

Условие (105.14) дает

$$\lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{1}{r} = 0$$

откуда следует, что

$$\lambda_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \lambda \delta_{\alpha\beta},$$

где $a_{\alpha\beta}$ антисимметричный тензор.

Но решение вида $\lambda \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{1}{r}$ может быть исключено преобразованием (105.5) с $\xi^0 = \lambda/r$, $\xi^\alpha = 0$ (удовлетворяющими условию (105.15)). Поэтому реальным смыслом обладает лишь решение

$$h_{0\alpha} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{r}$$

Наконец, аналогичными, хотя и более громоздкими рассуждениями можно показать, что надлежащим преобразованием пространственных координат всегда можно исключить величины $h_{\alpha\beta}$, даваемые тензорным (симметричным по α, β) решением уравнения Лапласа.

Что касается тензора $a_{\alpha\beta}$, то он связан с тензором полного момента $M_{\alpha\beta}$, и окончательное выражение для $h_{0\alpha}$ имеет вид

$$h_{0\alpha}^{(2)} = \frac{2k}{c^3} M_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{r} = -\frac{2k}{c^3} M_{\alpha\beta} \frac{n_\beta}{r^2}$$

Покажем это путем вычисления интеграла (96.17).

(???? пока даже идейно не понимаю, откуда достать его???)

Момент $M_{\alpha\beta}$ связан только с $h_{0\alpha}$, и потому при вычислении все остальные компоненты h_{ik} можно считать отсутствующими.

С точностью до членов первого порядка по $h_{0\alpha}$ имеем из (96.2)-(96.3) (замечаем, что $g^{\alpha 0} = -h^{\alpha 0} = h_{\alpha 0}$, а g отличается от 1 лишь на величины второго порядка):

$$h^{\alpha 0\beta} = \frac{c^4}{16\pi k} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (g^{\alpha 0} g^{\beta\gamma} - g^{\gamma 0} g^{\alpha\beta}) = -\frac{c^4}{16\pi k} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (h_{\alpha 0} \delta_{\beta\gamma} - h_{\gamma 0} \delta_{\alpha\beta})$$

При подстановке сюда (105.16) второй член под знаком производной исчезает, и мы получаем

$$h^{\alpha 0\beta} = -\frac{c}{8\pi} M_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{1}{r} = -\frac{c}{8\pi} M_{\alpha\gamma} \frac{3n_\beta n_\gamma - \delta_{\beta\gamma}}{r^3}$$

С помощью этого выражения находим, производя интегрирование в (96.17) по поверхности сферы радиуса r ($df_\gamma = n_\gamma r^2 d\Omega$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \oint (x^\alpha h^{\beta 0\gamma} - x^\beta h^{\alpha 0\gamma}) df_\gamma &= -\frac{1}{4\pi} \int (n_\alpha n_\gamma M_{\beta\gamma} - n_\beta n_\gamma M_{\alpha\gamma}) d\Omega = \\ &= -\frac{1}{3} (\delta_{\alpha\gamma} M_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma} M_{\alpha\gamma}) = \frac{2}{3} M_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Аналогичное вычисление дает:

$$\frac{1}{c} \oint \lambda^{\alpha 0\gamma\beta} df_\gamma = -\frac{c^3}{16\pi k} \oint (h_{\alpha 0} df_\beta - h_{\beta 0} df_\alpha) = \frac{1}{3} M_{\alpha\beta}$$

Складывая обе величины, получим требуемое значение $M_{\alpha\beta}$.

Подчеркнем, что в общем случае, когда поле вблизи тела может не быть слабым, $M_{\alpha\beta}$ есть момент импульса тела вместе с гравитационным полем.

(?!!! отдельно про этот случай потом подумаю.)

Лишь если поле слабо на всех расстояниях, его вкладом в момент можно пренебречь.

Таким образом, поправки порядка $1/r^2$ имеют вид:

(сюда вставляю формулы выше найденные)

Ковариантные компоненты метрического тензора:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}^{(1)} + h_{ik}^{(2)}$$

А контравариантные компоненты с той же точностью равны

$$g^{ik} = g^{ik(0)} - h^{ik(1)} - h^{ik(2)} + h_l^{i(1)} h^{l(1)k}$$

Аналогия с вращением

Формула (105.16) может быть переписана в векторном виде как

$$\mathbf{g} = \frac{2k}{c^3 r^2} [\mathbf{nM}]$$

где $\mathbf{M}$ - вектор полного момента тела.

Известно, что в стационарном гравитационном поле на частицу действует «кориолисова сила», такая же, какая действовала бы на частицу в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью:

$$\Omega = \frac{c}{2} \sqrt{g_{00}} \operatorname{rot} \mathbf{g}$$

Поэтому можно сказать, что в поле вращающегося тела на удаленную частицу действует кориолисова сила, отвечающая угловой скорости:

$$\Omega \approx \frac{c}{2} \operatorname{rot} \mathbf{g} = \frac{k}{c^2 r^3} [\mathbf{M} - 3\mathbf{n}(\mathbf{Mn})]$$

энергии гравитирующего тела по интегралу (96.16).

4-импульс слабого поля (???)

Вычислив нужные компоненты h^{ikl} по формуле (96.2) – (96.3), получим с требуемой точностью (оставляем члены $\sim 1/r^2$):

$$h^{\alpha 0\beta} = 0$$

$$h^{00\alpha} = \frac{c^4}{16\pi k} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (g^{00} g^{\alpha\beta}) = \frac{mc^2}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(-\frac{\Delta^{\alpha\beta}}{r} + \frac{x^\alpha x^\beta}{r^3} \right) = \frac{mc^2}{4\pi} \frac{n^\alpha}{r^2}$$

Интегрируя теперь в (96.16) по сфере радиуса r , получим окончательно;

$$P^\alpha = 0, \quad P^0 = mc$$

- результат, который естественно было ожидать.

Он является выражением факта равенства, как говорят, «гравитационной» и «инертной» масс.

«Гравитационной» называют массу, определяющую создаваемое телом гравитационное поле, - это та масса, которая входит в метрический тензор в гравитационном поле или, в частности, в закон Ньютона.

«Инертная» же масса определяет соотношение между импульсом и энергией тела и, в частности, энергия покоя тела равна этой его массе, умноженной на c^2 .

(?? кстати, а иначе как могло бы быть? даже не представляю.)

Полная энергия материи и поля в случае постоянного гравитационного поля

В случае постоянного гравитационного поля оказывается возможным вывести простое выражение для полной энергии материи вместе с полем в виде интеграла только по пространству, занятому материей.

Получить его можно, например, исходя из следующего выражения, справедливого, когда все величины не зависят от x^0 :

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g} g^{i0} \Gamma_{0i}^\alpha)$$

(?? откуда оно??)

Интегрируя $R_0^0 \sqrt{-g}$ по (трехмерному) пространству и применив трехмерную теорему Гаусса, получим:

$$\int R_0^0 \sqrt{-g} dV = \oint \sqrt{-g} g^{i0} \Gamma_{0i}^\alpha df_\alpha$$

Взяв достаточно удаленную поверхность интегрирования и воспользовавшись на ней выражениями (105.6) для g_{ik} , получим после простого вычисления:

$$\int R_0^0 \sqrt{-g} dV = \frac{4\pi k}{c^2} m = \frac{4\pi k}{c^3} P^0$$

Замечая также, что, согласно уравнениям поля,

$$R_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) = \frac{4\pi k}{c^4} (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3)$$

получаем искомую формулу:

$$P^0 = mc = \frac{1}{c} \int (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3) \sqrt{-g} dV$$

Эта формула выражает полную энергию материи и постоянного гравитационного поля (т.е. полную массу тела) через тензор энергии-импульса одной только материи.

(?? мб она супер важная, а я пока и не применял её, тут приведу пример применения!!!)

Напомним, что в случае центральной симметрии поля мы имели для той же величины еще и другое выражение - формулу $m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^a T_0^0 r^2 dr$.

(?! это формула из задачи про Шварцшильда, на которые я забил полностью.)

$h_{0\alpha}^{(2)}$ **такое же для медленно вращающегося сферического тела**

(?? я так понимаю, задача на потренироваться, потренируюсь потом!)

Показать, что формула $h_{0\alpha}^{(2)} = -\frac{2k}{c^3} M_{\alpha\beta} \frac{n_\beta}{r^2}$ остается справедливой для поля во всем пространстве вне вращающегося сферического тела при условии медленности вращения (момент $M \ll \mathbf{cm} r_g$), но без требования слабости центрально-симметричной части поля

В сферических пространственных координатах величина $h_{0\alpha}^{(2)}$ записывается как

$$h_{03} = \frac{2kM}{rc^2} \sin^2 \theta$$

Рассматривая эту величину как малую поправку к шварцшильдовой метрике, надо проверить выполнение линеаризованного по h_{03} уравнения $R_{03} = 0$ (в остальных уравнениях поля поправочные члены выпадают тождественно).

R_{03} можно вычислить по формуле (4) из задачи к §95, причем линеаризация сводится к тому, что трехмерные тензорные операции должны производиться по “невозмущенной” метрике.

(??? тут вычисления, которые еще нужно проделать!!)

В результате получается уравнение

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{\partial^2 h_{03}}{\partial r^2} + \frac{2r_g}{r^3} h_{03} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial h_{03}}{\partial \theta} \right) = 0$$

которому выражение (1) действительно удовлетворяет.

Вековое смещение частицы за счет вращения центрального тела (?!)

Пусть частица движется в поле вращающегося тела. Покажем, что систематическое (вековое) смещение её орбиты, связанное с вращением центрального тела имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{2k [\mathbf{M}'\mathbf{M}]}{c^2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}}$$

Ввиду малости всех релятивистских эффектов они накладываются друг на друга линейно, и при вычислении эффектов, происходящих от вращения центрального тела, можно пренебречь рассмотренным в §101 влиянием неньютоновости центрально-симметричного силового поля; другими словами, можно производить вычисления, считая из всех h_{ik} отличными от нуля лишь $h_{0\alpha}$.

Ориентация классической орбиты частицы определяется двумя сохраняющимися векторами: моментом импульса частицы $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$ и вектором $\mathbf{A} = \left[\frac{\mathbf{p}}{m}\mathbf{M}\right] - \frac{kmm'\mathbf{r}}{r}$, сохранение которого специфично для ньютонова поля $\varphi = -km'/r$, где (m' есть масса центрального тела, m - масса частицы).

Вектор $\mathbf{M}$ перпендикулярен к плоскости орбиты, а вектор $\mathbf{A}$ направлен вдоль большой полуоси эллипса в сторону перигелия (и по величине равен $kmm'e$, где e - эксцентриситет орбиты).

Искомое вековое смещение орбиты можно описывать как изменение направления этих векторов.

Функция Лагранжа частицы, движущейся в поле $\mathbf{g} = \frac{2k}{c^3 r^2}[\mathbf{n}\mathbf{M}]$ есть:

$$L = -mc \frac{ds}{dt} = L_0 + \delta L, \quad \delta L = mcg\mathbf{v} = \frac{2km}{c^2 r^3}(\mathbf{M}'[\mathbf{v}\mathbf{r}])$$

где момент центрального тела обозначаем здесь посредством $\mathbf{M}'$ в отличие от момента частицы $\mathbf{M}$.

Отсюда функция Гамильтона

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \delta\mathcal{H}, \quad \delta\mathcal{H} = \frac{2k}{c^2 r^3}(\mathbf{M}'[\mathbf{r}\mathbf{p}])$$

Вычисляя производную $\dot{\mathbf{M}} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] + [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]$ с помощью уравнений Гамильтона $\dot{\mathbf{r}} = \partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} = -\partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{r}$, получим:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{2k}{c^2 r^3}[\mathbf{M}'\mathbf{M}]$$

Интересуясь вековым ходом изменения $\mathbf{M}$, мы должны усреднить это выражение по периоду T обращения частицы.

(?? с таким усреднением пока что не знаком)

Усреднение удобно произвести с помощью параметрического представления зависимости r от времени при движении по эллиптической орбите в виде

$$r = a(1 - e \cos \xi), \quad t = \frac{T}{2\pi}(\xi - e \sin \xi)$$

где a и e - большая полуось и эксцентриситет эллипса.

(в механике уже этот раздел почти и готов, дотренирую его еще!!)

$$\overline{r^{-3}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{1}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1 - e \cos \xi)^2} = \frac{1}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}}$$

Таким образом, вековое изменение $\mathbf{M}$ дается формулой

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{2k [\mathbf{M}'\mathbf{M}]}{c^2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}}$$

т.е. вектор $\mathbf{M}$ вращается вокруг оси вращения центрального тела, оставаясь неизменным по величине.

Аналогичное вычисление для вектора $\mathbf{A}$ дает:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{2k}{c^2 r^3} [\mathbf{M}'\mathbf{A}] + \frac{6k}{c^2 m r^5} (\mathbf{M}\mathbf{M}') [\mathbf{r}\mathbf{M}]$$

Усреднение этого выражения производится аналогично тому, как это было сделано выше; при этом из соображений симметрии заранее понятно, что усредненный вектор $\mathbf{r}/r^5$ направлен вдоль большой полуоси эллипса, т.е. вдоль направления вектора $\mathbf{A}$. В итоге:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\Omega\mathbf{A}], \quad \Omega = \frac{2k\mathbf{M}'}{c^2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \{\mathbf{n}' - 3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{n}')\}$$

($\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ — единичные векторы в направлении $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$), т.е. вектор $\mathbf{A}$ вращается с угловой скоростью Ω , оставаясь неизменным по величине; последнее обстоятельство означает, что эксцентриситет орбиты не испытывает векового изменения.

(?? это же выше векторное умножение двух векторной (???))

Формулу (3) можно написать в виде

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\Omega\mathbf{M}]$$

с тем же Ω , что и в (4); другими словами, Ω есть угловая скорость вращения эллипса «как целого».

Это вращение включает в себя как дополнительное (по отношению к рассмотренному в §101) смещение перигелия орбиты, так и вековое вращение ее плоскости вокруг направления оси тела (последний эффект отсутствует, если плоскость орбиты совпадает с экваториальной плоскостью центрального тела).

Для сравнения укажем, что рассмотренному в §101 эффекту соответствует

$$\Omega = \frac{6\pi k m'}{c^2 a (1 - e^2) T} \mathbf{n}$$

(короче, перерешаю еще раз сам это, пока плохо понимаю.)

Weak Gravitational Field in Terms of ψ

(По Лашкевичу. ??? как вообще лучше, через h или через ψ решать??? зачем вообще через ψ мы находим решения??)

(?) связь между решениями этих уравнений и свойствами гравитирующего тела

(нужно найти то есть массу и момент импульса этих тел по метрике (?))

(пока копия Лшк)

(по идее тут сформулирую выше итоговый вывод, который пока что у меня упущен, а дальше - выкладки как у Лашкевича, только своими словами скажу)

(7.10). Наложим d условий

$$\psi_{\nu,\mu}^{\bar{\mu}} = 0, \quad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}h.$$

Обратно,

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}\psi, \quad \psi = \psi_{\mu}^{\bar{\mu}} = -\frac{d-2}{2}h$$

При этих условиях все слагаемые в (7.5), кроме первого, сокращаются, и тензор Риччи приобретает вид

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu}$$

Соответственно, уравнения Эйнштейна в калибровке (7.11) имеют вид волнового уравнения с распределенным источником:

$$\square\psi_{\mu\nu} = -16\pi GT_{\mu\nu}.$$

Условия согласованности калибровки с этим уравнением

$$0 = \square\psi_{\nu,\mu}^{\bar{\mu}} = -16\pi GT_{\nu,\mu}^{\bar{\mu}}$$

совпадает с уравнением непрерывности для тензора энергии-импульса в лидирующем порядке. Это значит, что эффекты обмена энергией и импульсом между гравитационным полем и материей являются эффектами второго порядка по $h_{\mu\nu}$ и лежат за пределами линейного приближения.

В стационарном релятивистском случае тензор $\psi_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_i\psi_{0i} = 0, \quad \partial_i\psi_{ij} = 0$$

Чтобы найти связь между решениями этих уравнений и свойствами гравитирующего тела, выразим суперпотенциалы псевдотензора энергии-импульса $\tau^{\mu\nu\lambda}$ и $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$ через асимптотики решений.

Отметим, что условие $\psi_{\mu,\nu}^{\bar{\nu}} = 0$ не фиксирует калибровку до конца. Преобразование (7.10) не нарушает это условие, если

$$\square\xi^{\mu} = 0,$$

что в случае не зависящих от времени преобразований означает

$$\Delta\xi^{\mu} = 0$$

Будем искать решение уравнения Лапласа двух лидирующих порядках по r^{-1} . Функция r^{3-d} сама является решением уравнения Лапласа. Решения, которые спадают быстрее, даются просто производными этого решения. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \psi_{00} &= Ar^{3-d} + B^k\partial_k r^{3-d} + O(r^{1-d}) \\ \psi_{0i} &= A^i r^{3-d} + B^{ik}\partial_k r^{3-d} + O(r^{1-d}) \\ \psi_{ij} &= A^{ij} r^{3-d} + B^{ijk}\partial_k r^{3-d} + O(r^{1-d}), \quad A^{ij} = A^{ji}, \quad B^{ijk} = B^{jik} \end{aligned}$$

Калибровочное условие сводится к равенствам

$$\begin{aligned} A^i\partial_i r^{3-d} &= A^{ij}\partial_j r^{3-d} = 0 \\ B^{ik}\partial_i\partial_k r^{3-d} &= B^{ijk}\partial_j\partial_k r^{3-d} = 0. \end{aligned}$$

Первая строчка немедленно дает $A^i = A^{ij} = 0$. Из второй строчки получаем, что ²

$$B^{ik} = B^{[ik]} + C\delta^{ik}, \quad B^{ijk} = B^{i[jk]} + C^i\delta^{jk} = B^{j[ik]} + C^j\delta^{ik}$$

Члены с символами Кронекера разрешены потому, что соответствующий вклад в левую часть калибровочного условия пропорционален функции $\Delta r^{3-r} = 0$.

Из последнего равенства нетрудно доказать, что $B^{ijk} = 0$ и, таким образом, $\psi_{ij} = 0$. Выражения для ψ_{00} и ψ_{0i} нетрудно упростить, используя преобразование координат, удовлетворяющее (7.22). Действительно, преобразованием ${}^3\xi^i = -B^i/A, \xi^0 = 0$ можно устранить второй член в выражении для ψ_{00} , а преобразованием $\xi^i = 0, \xi^0 = -Cr^{3-d}$ устранить симметричную часть в B^{ik} . Итак, мы можем записать решение в виде

$$\psi_{00} = Ar^{3-d}, \quad \psi_{0i} = B^{ik}\partial_k r^{3-d} \quad (B^{ki} = -B^{ik}), \quad \psi_{ij} = 0$$

Осталось связать константы A и B^{ik} с данными об источнике гравитации. Для этого вычислим величины $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$, входящие в псевдотензор энергии-импульса. Все компоненты нас интересовать не будут. Мы ограничимся компонентами $\chi^{\mu 0kl}$.

В компоненту χ^{00kl} вносит вклад как ψ_{00} , так и ψ_{0i} , но, поскольку на больших расстояниях $|\psi_{00}| \gg |\psi_{0i}|$, достаточно сохранить только вклад ψ_{00} . Действительно,

$$\chi^{00kl} = \frac{|g|}{16\pi G} (g^{00}g^{kl} - g^{0k}g^{0l}).$$

Первый член в скобках имеет в качестве первой поправки ψ_{00} , а второй - только ψ_{0i} . Поэтому вторым слагаемым можно пренебречь. Первая поправка в $|g|$ также содержит ψ_{00} , так что членами, содержащими ψ_{0i} пренебрегаем. В результате получаем

$$\chi^{00kl} = -\frac{\delta_{kl}}{16\pi G} (1 - Ar^{3-d}), \quad \tau^{00k} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G} r^{1-d} x^k$$

Подставляя в (6.28) получаем полную массу гравитирующей системы

$$M = P^0 = \oint dS_{0i} \tau^{00i} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G} \oint \frac{dS_{0i} x^i}{r^{d-1}} = -\frac{(d-3)S_{d-1}A}{16\pi G}$$

Вклад ψ_{0i} в массу, очевидно, будет стремиться к нулю при $r \rightarrow \infty$, что оправдывает сделанное приближение. Итак,

$$A = -\frac{16\pi GM}{(d-3)S_{d-1}}$$

в полном согласии с нерелятивистской формулой (7.16). В четырехмерном случае имеем

$$A = -4GM \quad (d=4)$$

Теперь вычислим χ^{i0kl} :

$$\chi^{i0kl} = \frac{|g|}{16\pi G} (g^{0i}g^{kl} - g^{ik}g^{0l})$$

Оба слагаемых содержат множитель вида $g^{0i} = -h^{\bar{0}i} = h_{0i} = \psi_{0i}$, поэтому мы можем положить $|g| = 1, g^{ik} = -\delta^{ik}$. Находим

$$\begin{aligned} \chi^{i0kl} &= \frac{d-3}{16\pi G} \frac{(\delta^{kl}B^{im} - \delta^{ik}B^{lm})x^m}{r^{d-1}}, \\ \tau^{i0k} &= \frac{d-3}{16\pi G} \frac{B^{im}(\delta^{km}r^2 - (d-1)x^kx^m)}{r^{d+1}} \end{aligned}$$

Так как $\tau^{i0k} \sim r^{1-d}$ интеграл по поверхности для P^i обращается в нуль и мы получаем

$$P^i = 0$$

как и следовало ожидать в статической задаче. А вот интеграл для момента импульса имеет степень на единицу больше и, вообще говоря, не равен нулю. Прямое вычисление с помощью (6.30) дает

$$B^{ij} = \frac{8\pi G}{(d-3)S_{d-1}} J^{ij}$$

В четырехмерном случае имеем

$$B^{ij} = 2GJ^{ij} \quad (d=4)$$

Итак, по ведущим асимптотикам «гравитационных потенциалов» $h_{\mu\nu}$ на больших расстояниях мы можем узнать общие массу и момент импульса системы гравитирующих тел.

23.1.2 Constant Gravitational Field

(!! скоро доработаю, пока просто руки не дошли.)

Суть постоянного поля

(в 1ю часть потом перенесу)

Искомые уравнения должны быть инвариантны по отношению к преобразованию

$$x^\alpha \rightarrow x^\alpha, \quad x^0 \rightarrow x^0 + f(x^\alpha),$$

не меняющему стационарности поля.

Мировое время в стационарном поле

Гравитационное поле называют постоянным, если можно выбрать такую систему отсчета, в которой все компоненты метрического тензора не зависят от временной координаты x^0 ; последнюю называют в таком случае мировым временем.

Выбор мирового времени не вполне однозначен. Так, при добавлении к x^0 произвольной функции пространственных координат все g_{ik} по-прежнему не будут содержать x^0 ; это преобразование соответствует произвольности выбора начала отсчета времени в каждой точке пространства. Кроме того, разумеется, мировое время допускает умножение на произвольную постоянную, т.е. произвольный выбор единицы его измерения.

Строго говоря, постоянным может быть лишь поле, создаваемое одним телом. В системе нескольких тел их взаимное гравитационное притяжение приводит к возникновению движения, в результате чего создаваемое ими поле не может быть постоянным.

Если создающее поле тело неподвижно (в системе отсчета, в которой g_{ik} не зависит от x^0), то оба направления времени эквивалентны. При должном выборе начала отсчета времени во всех точках пространства, интервал ds в этом случае не должен меняться при изменении знака x^0 , а потому все компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора должны быть тождественно равными нулю. Такие постоянные гравитационные поля мы будем называть статическими.

Неподвижность тела, однако, не является обязательным условием постоянства создаваемого им поля. Так, будет постоянным также и поле равномерно вращающегося

вокруг своей оси аксиально-симметричного тела. Но в этом случае оба направления времени уже отнюдь не равноценны - при изменении знака времени меняется знак угловой скорости вращения. Поэтому в таких постоянных гравитационных полях (которые мы будем называть стационарными) компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора, вообще говоря, отличны от нуля.

Смысл мирового времени в постоянном гравитационном поле заключается в том, что его промежуток между двумя событиями в некоторой точке пространства совпадает с его промежутком между любыми другими двумя событиями в любой другой точке пространства, соответственно одновременными (в выясненном в §84 смысле) с первой парой событий. Но одинаковым промежуткам мирового времени x^0 соответствуют в разных точках пространства различные промежутки собственного времени τ . Связь (84.1) между ними можно написать теперь в виде

$$\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} x^0$$

применим к любым конечным промежуткам.

В слабом гравитационном поле можно воспользоваться приближенным выражением (87.12); при этом (88.1) дает, с той же точностью:

$$\tau = \frac{x^0}{c} \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right)$$

Таким образом, собственное время течет тем медленнее, чем меньше гравитационный потенциал в данной точке пространства, т.е. чем больше его абсолютная величина (ниже, в §99 будет показано, что потенциал φ отрицателен). Если из двух одинаковых часов одни находились некоторое время в гравитационном поле, то после этого часы, бывшие в поле, окажутся отставшими.

Как уже было указано, в статическом гравитационном поле компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора равны нулю. Согласно результатам §84 это значит, что в таком поле возможна синхронизация часов во всем пространстве.

Заметим также, что для элемента пространственного расстояния в статическом поле имеем просто:

$$dl^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

В стационарном поле $g_{0\alpha}$ отличны от нуля и синхронизация часов во всем пространстве невозможна. Поскольку g_{ik} не зависят от x^0 , то формулу (84.14) для разности значений мирового времени двух одновременных событий, происходящих в разных точках пространства, можно написать в виде

$$\Delta x^0 = - \int \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}$$

применим для любых двух точек на линии, вдоль которой производится синхронизация часов. При синхронизации же вдоль замкнутого контура разность значений мирового времени, которая обнаружилась

бы по возвращении в исходную точку, равна интегралу

$$\Delta x^0 = - \oint \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}$$

взятому по этому замкнутому контуру. Рассмотрим распространение лучей света в постоянном гравитационном поле. Мы видели в §53, что частота света равна производной от эйконала ψ по времени (с обратным знаком). Частота, измеренная в мировом времени x^0/c , поэтому равна $\omega_0 = -c \partial \psi / \partial x^0$.

Поскольку уравнение эйконала (87.9) в постоянном поле не содержит x^0 явно, то частота ω_0 остается постоянной при распространении луча света.

Красное смещение

(?? как это связано с красным смещением в космологии?)

Частота, измеренная в собственном времени, равна $\omega = -\partial\psi/\partial\tau$; она различна в разных точках пространства. В силу соотношения

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0} \frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0} \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$$

имеем:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}$$

В слабом гравитационном поле получаем отсюда приближенно:

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right)$$

Мы видим, что частота света возрастает с увеличением абсолютной величины потенциала гравитационного поля, т.е. при приближении к создающим поле телам; наоборот, при удалении луча от этих тел частота света уменьшается. Если луч света, испущенный в точке, где гравитационный потенциал равен φ_1 , имеет (в этой точке) частоту ω , то, придя в точку с потенциалом φ_2 , он будет иметь частоту (измеренную в собственном времени в этой точке), равную

$$\frac{\omega}{1 - \frac{\varphi_1}{c^2}} \left(1 - \frac{\varphi_2}{c^2}\right) \approx \omega \left(1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\right)$$

Линейчатый спектр, испускаемый какими-либо атомами, находящимися, например, на Солнце, выглядит там точно так же, как выглядит на Земле спектр, испускаемый находящимися на ней такими же атомами. Если же на Земле наблюдается спектр, испускаемый атомами, находящимися на Солнце, то, как следует из вышеизложенного, его линии окажутся смещенными по сравнению с линиями такого же спектра, испускаемого на Земле.

Именно, каждая линия с частотой ω будет смещена на интервал $\Delta\omega$, определяемый из формулы

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} \omega$$

где φ_1 и φ_2 - потенциалы гравитационного поля соответственно в месте испускания и в месте наблюдения спектра. Если на Земле наблюдается спектр, испускаемый на Солнце или звездах, то $|\varphi_1| > |\varphi_2|$ и из (88.8) следует, что $\Delta\omega < 0$, т.е. смещение происходит в сторону меньших частот. Описанное явление называют красным смещением.

(?? ниже качественное объяснение, которое потом пропишу, пока не так понимаю)

Происхождение этого явления можно уяснить себе непосредственно на основании сказанного выше о мировом времени. В силу постоянства поля промежутки мирового времени, в течение которого некоторое колебание в световой волне распространится из одной заданной точки пространства в другую, не зависит от x^0 . Поэтому число колебаний, происходящих в единицу мирового времени, будет одинаковым во всех точках вдоль луча. Но один и тот же промежуток мирового времени соответствует тем большему промежутку собственного времени, чем дальше мы находимся от создающих поле тел.

Следовательно, частота, т.е. число колебаний в единицу собственного времени, будет падать при удалении света от этих масс.

Энергия и скорость в постоянном поле

(!! тут крутые формулы, выпишу их потом обязательно себе в 1ю часть)

При движении частицы в постоянном поле сохраняется ее энергия, определяемая как производная $(-c\partial S/\partial x^0)$ от действия по мировому времени; это следует, например, из того, что x^0 не входит явно в уравнение Гамильтона-Якоби. Определенная таким образом энергия есть временная компонента ковариантного 4-вектора импульса $p_k = m c u_k = m c g_{ki} u^i$. В статическом поле $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - dl^2$ и мы имеем для энергии, которую обозначим здесь посредством $\mathcal{E}_0$:

$$\mathcal{E}_0 = m c^2 g_{00} \frac{dx^0}{ds} = m c^2 g_{00} \frac{dx^0}{\sqrt{g_{00}(dx^0)^2 - dl^2}}$$

Введем скорость частицы:

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{cdl}{\sqrt{g_{00}}dx^0}$$

измеренную в собственном времени, т.е. наблюдателем, находящимся в данном месте. Тогда мы получим для энергии:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{m c^2 \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Это есть та величина, которая остается постоянной при движении частицы.

Легко показать, что выражение (88.9) для энергии остается в силе и в стационарном поле, если только скорость v измерять в собственном времени, определенном по часам, синхронизованным вдоль траектории частицы. Если частица выходит из точки A в момент мирового времени x^0 и приходит в бесконечно близкую точку B в момент $x^0 + dx^0$, то для определения скорости надо взять теперь не промежуток времени $(x^0 + dx^0) - x^0 = dx^0$, а разность между $x^0 + dx^0$ и моментом $x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha$, который одновременен в точке B моменту x^0 в точке A :

$$(x^0 + dx^0) - \left(x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha \right) = dx^0 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha$$

Умножив его на $\sqrt{g_{00}}/c$, получим соответствующий интервал собственного времени, так что скорость

$$v^\alpha = \frac{cdx^\alpha}{\sqrt{h}(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)}$$

где мы ввели обозначения $g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}$, $h = g_{00}$ для трехмерного вектора $\mathbf{g}$ и для трехмерного скаляра g_{00} . Ковариантные компоненты скорости $\mathbf{v}$ как трехмерного вектора в пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ и соответственно квадрат этого вектора надо понимать как

$$v_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} v^\beta, \quad v^2 = v_\alpha v^\alpha$$

Заметим, что при таком определении интервал ds выражается через скорость формулой, аналогичной обычной формуле:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \\ &= h (dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)^2 - dl^2 = h (dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Компоненты 4-скорости $u^i = dx^i/ds$ равны

$$u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{h} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{g_\alpha v^\alpha}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Энергия же

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 g_{0i} u^i = mc^2 h (u^0 - g_\alpha u^\alpha)$$

и после подстановки (88.14) приобретает вид (88.9). В предельном случае слабого гравитационного поля и малых скоростей, подставляя $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$ в (88.9), получим приближенно:

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\varphi$$

где $m\varphi$ - потенциальная энергия частицы в гравитационном поле, что находится в соответствии с функцией Лагранжа (87.10).

О применении красного смещения в космологии

(укажу это)

Уравнения постоянного гравитационного поля через метрику трехмерного пространства (???)

(тут какая-то интересная идея, потом еще сделаю это! пока упустил идею, не тот уровень.)

Уравнения постоянного гравитационного поля, где операции дифференцирования по пространственным координатам выражаются в виде ковариантных производных в пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} R_{00} &= \frac{1}{\sqrt{h}} (\sqrt{h})_{;\alpha}^\alpha + \frac{h}{4} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} \left(\frac{\varepsilon + p}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\varepsilon - p}{2} \right), \\ \frac{1}{\sqrt{h}} R_0^\alpha &= -\frac{\sqrt{h}}{2} f^{\alpha\beta}_{;\beta} - \frac{3}{2} f^{\alpha\beta} (\sqrt{h})_{;\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} \frac{p + \varepsilon}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{v^\alpha}{c}, \\ R^{\alpha\beta} &= P^{\alpha\beta} + \frac{h}{2} f^{\alpha\gamma} f^{\beta\gamma} - \frac{1}{\sqrt{h}} (\sqrt{h})_{;\alpha;\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} \left[\frac{(p + \varepsilon) v^\alpha v^\beta}{c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})} + \frac{\varepsilon - p}{2} \gamma^{\alpha\beta} \right], \end{aligned}$$

где $P^{\alpha\beta}$ - трехмерный тензор, построенный из $\gamma_{\alpha\beta}$ так, как R^{ik} строится из g_{ik} .

Действительно. Вводим обозначения $g_{00} = h$; $g_{0\alpha} = -h g_\alpha$ и трехмерную скорость $v^\alpha = \frac{cdx^\alpha}{\sqrt{h}(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)}$. Ниже все операции поднимания и опускания индексов и ковариантного дифференцирования производятся в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ над трехмерными векторами g_α , v^α и трехмерным скаляром h .

Искомые уравнения должны быть инвариантны по отношению к преобразованию

$$x^\alpha \rightarrow x^\alpha, \quad x^0 \rightarrow x^0 + f(x^\alpha),$$

не меняющему стационарности поля.

Но при таком преобразовании $g_\alpha \rightarrow g_\alpha - \partial f / \partial x^\alpha$, а скаляр h и тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ не меняются. (пропишу в 1й части раздел про такие преобр-я.)

(????) Поэтому искомые уравнения, будучи выражены через $\gamma_{\alpha\beta}$, h и g_α , могут содержать g_α лишь в виде комбинации производных, составляющих трехмерный антисимметричный тензор

$$f_{\alpha\beta} = g_{\beta;\alpha} - g_{\alpha;\beta} = \frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta},$$

инвариантный относительно указанного преобразования.

(????)

Учитывая это обстоятельство, можно существенно упростить вычисления, полагая (после вычисления всех входящих в R_{ik} производных) $g_\alpha = 0$ и $g_{\alpha;\beta} + g_{\beta;\alpha} = 0$.

(????)

Символы Кристоффеля: (??)

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^\alpha h_{;\alpha}, \\ \Gamma_{00}^\alpha &= \frac{1}{2}h^\alpha \\ \Gamma_{\alpha 0}^0 &= \frac{1}{2h}h_{;\alpha} + \frac{h}{2}g^\beta f_{\alpha\beta} + \dots, \\ \Gamma_{0\beta}^\alpha &= \frac{h}{2}f_\beta^\alpha - \frac{1}{2}g_\beta h^{;\alpha} \\ \Gamma_{\alpha\beta}^0 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha}\right) - \frac{1}{2h}(g_\alpha h_{;\beta} + g_\beta h_{;\alpha}) + g_\gamma \lambda_{\alpha\beta}^\gamma + \dots \\ \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= \lambda_{\beta\gamma}^\alpha - \frac{h}{2}(g_\beta f_\gamma^\alpha + g_\gamma f_\beta^\alpha) + \dots\end{aligned}$$

Опущенные здесь члены (вместо которых стоят многоточия) квадратичны по компонентам вектора g_α ; эти члены заведомо пропадут, (?????) когда мы положим $g_\alpha = 0$ после проведения дифференцирований в R_{ik} (92.7). (????)

(???????)

При вычислениях использованы формулы (84.9), (84.12) – (84.13) ; $\lambda_{\beta\gamma}^\alpha$ - трехмерные символы Кристоффеля, построенные по метрике $\gamma_{\alpha\beta}$.

Тензор T_{ik} вычисляется по формуле (94.9) с u^i из (88.14) (причем тоже полагаем $g_\alpha = 0$).

В результате вычислений из $R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T)$ получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}R_{00} &= \frac{1}{\sqrt{h}}(\sqrt{h})_{;\alpha}^\alpha + \frac{h}{4}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(\frac{\varepsilon + p}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\varepsilon - p}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{h}}R_0^\alpha &= -\frac{\sqrt{h}}{2}f^{\alpha\beta}_{;\beta} - \frac{3}{2}f^{\alpha\beta}(\sqrt{h})_{;\beta} = \frac{8\pi k}{c^4}\frac{p + \varepsilon}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\frac{v^\alpha}{c} \\ R^{\alpha\beta} &= P^{\alpha\beta} + \frac{h}{2}f^{\alpha\gamma}f^\beta_\gamma - \frac{1}{\sqrt{h}}(\sqrt{h})_{;\alpha;\beta} = \frac{8\pi k}{c^4}\left[\frac{(p + \varepsilon)v^\alpha v^\beta}{c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})} + \frac{\varepsilon - p}{2}\gamma^{\alpha\beta}\right]\end{aligned}$$

Здесь $P^{\alpha\beta}$ - трехмерный тензор, построенный из $\gamma_{\alpha\beta}$ так, как R^{ik} строится из g_{ik} .

(?????????????) потренируюсь!! также примеры напишу, потому что пока что не так владею этим!!)

23.1.3 Einstein Equations in Vacuum

Вид

В пустом пространстве $T_{ik} = 0$ и уравнения гравитационного поля сводятся к уравнениям

$$R_{ik} = 0$$

Напомним, что это отнюдь не значит, что пустое пространство-время является плоским, - для этого требовалось бы выполнение более сильных условий $R_{iklm} = 0$.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля обладает свойством:

$$T_i^i = 0.$$

Ввиду (95.7) отсюда следует, что при наличии одного только электромагнитного поля без каких-либо масс скалярная кривизна пространства-времени равна нулю.

Как мы знаем, дивергенция тензора энергии-импульса равна нулю:

$$T_{i;k}^k = 0$$

Поэтому должна быть равна нулю также и дивергенция левой части уравнения (95.6).

Это действительно так в силу тождества (92.10).

Таким образом, уравнения (95.10) по существу содержатся в уравнениях поля (95.6).

С другой стороны, уравнения (95.10), выражая собой законы сохранения энергии и импульса, содержат в себе уравнения движения той физической системы, к которой относится рассматриваемый тензор энергии-импульса (т.е. уравнения движения материальных частиц или вторую пару уравнений Максвелла).

Таким образом, уравнения гравитационного поля содержат в себе также и уравнения для самой материи, которая создает это поле.

Поэтому распределение и движение материи, создающей гравитационное поле, отнюдь не могут быть заданы произвольным образом.

Напротив, они должны быть определены (посредством решения уравнений поля при заданных начальных условиях) одновременно с самим создаваемым этой материей полем.

Сравнение с электродинамикой (??)

Обратим внимание на принципиальное отличие этой ситуации от того, что мы имели в случае электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла содержат в себе только уравнение сохранения полного заряда (уравнение непрерывности), но не уравнения движения самих зарядов. Поэтому распределение и движение зарядов могут быть заданы произвольным образом, лишь бы полный заряд был постоянным, а по нему и определяется посредством уравнений Максвелла создаваемое электромагнитное поле.

(а явно как в гравитации - пока не совсем владею. потом пропишу.)

О важности уравнения непрерывности

Надо, однако, уточнить, что для полного определения распределения и движения материи в случае гравитационного поля к уравнениям Эйнштейна надо присоединить еще (не содержащееся, конечно, в них) уравнение состояния вещества, т.е. уравнение, связывающее между собой давление и плотность.

Это уравнение должно быть задано наряду с уравнениями поля.

Четыре координаты x^i могут быть подвергнуты произвольному преобразованию.

Посредством этого преобразования можно произвольным образом выбрать четыре из десяти компонент тензора g_{ik} .

Поэтому независимыми неизвестными функциями являются только шесть из величин g_{ik} .

Далее, четыре компоненты входящей в тензор энергии-импульса материи 4-скорости u^i связаны друг с другом соотношением $u_i u^i = 1$, так что независимыми являются только три из них.

Таким образом, мы имеем, как и следовало, десять уравнений поля (95.5) для десяти неизвестных величин: шести из компонент g_{ik} , трех из компонент u^i и плотности материи ε/c^2 (или ее давления p).

Для гравитационного поля в пустоте остается всего шесть неизвестных величин (компонент g_{ik}) и соответственно понижается число независимых уравнений поля: десять уравнений $R_{ik} = 0$ связаны четырьмя тождествами (92.10).

Отметим некоторые особенности структуры уравнений Эйнштейна.

Они представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Однако в уравнения входят вторые производные по времени не от всех 10 компонент g_{ik} . Действительно, из (92.1) видно, что вторые производные по времени содержатся только в компонентах $R_{0\alpha 0\beta}$ тензора кривизны, куда они входят в виде члена $-\frac{1}{2}\ddot{g}_{\alpha\beta}$ (точкой обозначаем дифференцирование по x^0); вторые же производные от компонент $g_{0\alpha}$ и g_{00} метрического тензора вообще отсутствуют.

Ясно поэтому, что и получающийся путем упрощения из тензора кривизны тензор R_{ik} , а с ним и уравнения (95.5) тоже содержат вторые производные по времени лишь от шести пространственных компонент $g_{\alpha\beta}$.

Легко также видеть, что эти производные входят лишь в ${}^\beta_\alpha$ -уравнения (95, 6), т.е. в уравнения

$$R^\beta_\alpha - \frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha R = \frac{8\pi k}{c^4}T^\beta_\alpha$$

Уравнения же ${}^0_0$ и ${}^0_\alpha$, т.е. уравнения

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi k}{c^4}T^0_0, \quad R^0_\alpha = \frac{8\pi k}{c^4}T^0_\alpha$$

содержат производные по времени лишь первого порядка.

В этом можно убедиться, проверив, что при образовании путем свертывания R_{iklm} величин R^α_α и $R^0_0 - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}(R^0_0 - R^\alpha_\alpha)$ компоненты вида $R_{0\alpha 0\beta}$ действительно выпадают.

Еще проще увидеть это из тождества (92.10), записав его в виде

$$\left(R^0_i - \frac{1}{2}\delta^0_i R\right)_{;0} = -\left(R^\alpha_i - \frac{1}{2}\delta^\alpha_i R\right)_{i\alpha}$$

($i = 0, 1, 2, 3$).

Старшие производные по времени, входящие в правую часть этого равенства, - вторые производные (фигурирующие в самих величинах R^α_i, R).

Поскольку (95.13) - тождество, то и его левая сторона должна, следовательно, содержать производные по времени не выше второго порядка.

Но одно дифференцирование, по времени фигурирует уже в нем явным образом; поэтому сами выражения $R^0_i - \frac{1}{2}\delta^0_i R$ могут содержать производные по времени не выше первого порядка.

Более того, левые стороны уравнений (95.12) не содержат также и первых производных $\dot{g}_{0\alpha}$ и $\dot{g}_{00}$ (а лишь производные $\dot{g}_{\alpha\beta}$).

Действительно, из всех $\Gamma_{i;kl}$ эти производные содержат только $\Gamma_{\alpha,00}$ и $\Gamma_{0,00}$, а эти величины, в свою очередь, входят только в компоненты тензора кривизны вида $R_{0\alpha 0\beta}$, которые, как мы уже знаем, выпадают при образовании левых сторон уравнений (95.12).

Если интересоваться решением уравнений Эйнштейна при заданных начальных (по времени) условиях, то возникает вопрос о том, для скольких величин могут быть произвольно заданы начальные пространственные распределения.

Начальные условия для уравнений второго порядка должны включать начальные распределения как самих дифференцируемых величин, так и их первых производных по времени.

Однако поскольку в данном случае уравнения содержат вторые производные лишь от шести $g_{\alpha\beta}$, то в начальных условиях не могут быть произвольно заданы все g_{ik} и $\dot{g}_{ik}$.

Так, можно задать (наряду со скоростью и плотностью материи) начальные значения функций $g_{\alpha\beta}$ и $\dot{g}_{\alpha\beta}$, после чего из 4 уравнений (95.12) определятся допустимые начальные значения $g_{0\alpha}$ и g_{00} ; в уравнениях же (95.11) останутся еще произвольными начальные

значения $\dot{g}_{0\alpha}$ и $\dot{g}_{00}$. В число задаваемых таким образом начальных условий входят, однако, также и функции, произвольность которых связана просто с произволом в выборе 4-системы координат.

Между тем реальным физическим смыслом обладает лишь число физически различных произвольных функций, которое уже не может быть уменьшено никаким выбором системы отсчета.

Из физических соображений легко видеть, что это число равно 8: начальные условия должны задавать распределение плотности материи и трех компонент ее скорости, а также еще четырех величин, характеризующих свободное (не связанное с материей) гравитационное поле (см. ниже §107); для свободного

гравитационного поля в пустоте начальными условиями должны задаваться лишь последние четыре величины.

23.1.4 Rotating Reference Frame

Теория

Особым случаем стационарных гравитационных полей является поле, возникающее при переходе к равномерно вращающейся системе отсчета.

Для определения интервала ds произведем преобразование от неподвижной (инерциальной) системы к равномерно вращающейся. В неподвижной системе координат r', φ', z', t (мы пользуемся цилиндрическими пространственными координатами) интервал имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr'^2 - r'^2 d\varphi'^2 - dz'^2$$

Во вращающейся системе цилиндрические координаты пусть будут r, φ, z . Если ось вращения совпадает с осями z и z' , то имеем $r' = r, z' = z, \varphi' = \varphi + \Omega t$, где Ω - угловая скорость вращения. Подставляя в плоскую метрику, находим искомое выражение для интервала во вращающейся системе отсчета:

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2) dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - dr^2$$

Вращающиеся системы не могут быть бесконечными (!)

Вращающейся системой отсчета можно пользоваться только до расстояний, равных c/Ω . Действительно, из метрики вращающейся системы отсчета видно, что при $r > c/\Omega$ величина g_{00} становится отрицательной, что недопустимо.

Неприменимость вращающейся системы отсчета на больших расстояниях связана с тем, что скорость вращения сделалась бы на них большей скорости света, и потому такая система не может быть осуществлена реальными телами.

(будет что добавить сюда - добавлю)

Несинхронизируемость часов во вращающейся системе отсчета

Как и во всяком стационарном поле, на вращающемся теле часы не могут быть однозначно синхронизованы во всех точках. Производя синхронизацию вдоль некоторой замкнутой линии, мы получим, возвратясь в исходную точку, время, отличающееся от первоначального на величину

$$\Delta t = -\frac{1}{c} \oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = \frac{1}{c^2} \oint \frac{\Omega r^2 d\varphi}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}$$

или, предполагая, что $\Omega r/c \ll 1$ (т. е. скорость вращения мала по сравнению со скоростью света),

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2} \int r^2 d\varphi = \pm \frac{2\Omega}{c^2} S$$

где S - площадь проекции контура на плоскость, перпендикулярную к оси вращения (знак $+$ или $-$ имеет место соответственно при обходе контура по или против направления вращения).

Время распространения луча света по замкнутому контуру

Предположим, что по некоторому замкнутому контуру распространяется луч света. Вычислим с точностью до членов порядка v/c время t , которое проходит между отправлением луча света и возвращением его в исходную точку. Скорость света, по определению, всегда равна c , если время синхронизуется вдоль данной замкнутой линии и в каждой точке пользуемся собственным временем. Поскольку разница между собственным и мировым временем - порядка v^2/c^2 , то при вычислении искомого промежутка времени t с точностью до величин порядка v/c этой разницей можно пренебречь. Поэтому имеем:

$$t = \frac{L}{c} \pm \frac{2\Omega}{c^2} S$$

где L - длина контура. Соответственно этому скорость света, измеренная как отношение L/t , оказывается равной

$$c \pm 2\Omega \frac{S}{L}$$

Эту формулу, как и формулу для первого приближения эффекта Доплера, можно легко вывести и чисто классическим путем.

О случаях применения вращающейся системы отсчета (???)

(пока не применял)

Элемент пространственного расстояния во вращающейся системе

Определим элемент пространственного расстояния во вращающейся системе координат (!!)

(проделаю это позже)

С помощью $dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}$ находим:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1 - \Omega^2 \frac{r^2}{c^2}}$$

чем определяется пространственная геометрия во вращающейся системе отсчета. Отметим, что отношение длины окружности в плоскости $z = \text{const}$ (с центром на оси вращения) к ее радиусу r равно

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}} > 2\pi$$

23.2 Schwarzschild Solution

Обсудим подробно решение Шварцшильда и укажем его следствия.
(где-то выше это было выведено, тут разбираем типичные следствия)

23.2.1 Derivation of the Schwarzschild Solution

обзор способов вывода

как-то разными способами можно вывести, я пока хз.

достаем сферическую симметрию из алгебры

Плоское пространство-время обладает группой симметрии $SO(3)$ вращений трехмерного пространства.

Эта группа порождается тремя генераторами

$$J_x = z\partial_y - y\partial_z, \quad J_y = x\partial_z - z\partial_x, \quad J_z = y\partial_x - x\partial_y$$

образующими алгебру Ли $so(3) \simeq su(2)$ относительно коммутатора:

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=x}^z \epsilon^{ijk} J_k, \quad \epsilon^{xyz} = 1, \quad \epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = -\epsilon^{ikj}$$

Генераторы J_i являются векторными полями Киллинга для плоской метрики. (почему???)

Под сферически-симметричными решениями мы понимаем решения, инвариантные относительно группы вращений $SO(3)$.

В терминах векторных полей Киллинга это выражается так

$$\Delta_{J_i} A = 0$$

где $A(x)$ - некоторое тензорное поле (сечение тензорного расслоения), а Δ_ξ - уже знакомая нам производная Ли.

Суть вывода Лашкевича через поля Киллинга

?????

Вывод через поля Киллинга

(лл 10 лашкевич, влом смотреть всё ещё.)

Для записи сферически-симметричных решений удобно выбрать сферические координаты t, r, ϑ, φ ,

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

причем метрика будет даваться формулой

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

где $d\Omega^2$ - метрика на единичной сфере:

$$d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

В этих координатах векторы Киллинга J_i имеют вид

$$J_x = \sin \varphi \partial_\vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta \cos \varphi \partial_\varphi, \quad J_y = -\cos \varphi \partial_\vartheta + \operatorname{ctg} \vartheta \sin \varphi \partial_\varphi, \quad J_z = -\partial_\varphi$$

Видно, что векторные поля J_i действуют на сферах $r, t = \text{const}$, причем группа $SO(3)$ действует на сфере транзитивно.

Поэтому скалярные поля для сферически-симметричного решения должны были бы быть функциями только от r и t .

В искривленном пространстве-времени будем действовать точно так же.

Мы назовем метрику сферически-симметричной, если в ней имеются три пространственноподобных векторных поля Киллинга J_i , удовлетворяющих коммутационным соотношениям (10.2) алгебры Ли $so(3)$. Условие (10.3) для метрики выполняется в силу того, что J_i являются векторами Киллинга.

В более сложных случаях, когда кроме гравитационного поля есть еще какие-то поля, на них нужно наложить условие (10.3).

Самый простой способ построить сферически-симметричную метрику состоит в том, чтобы «расслоить» пространство-время на двумерные сферы со сферическими координатами на каждой.

На двумерных сферах мы выберем координаты ϑ, φ таким образом, чтобы векторы (10.7) были векторами Киллинга.

Две остальные координаты мы обозначим через t и r по аналогии с плоским пространством.

Немного ниже мы уточним их определение.

Потребуем, прежде всего, чтобы индуцированная метрика на сферах совпадала, с точностью до постоянного множителя, с метрикой на сфере в плоском пространстве:

$$ds^2|_{t,r=\text{const}} = g_{\vartheta\vartheta}(t, r)d\Omega^2$$

Этого еще, однако, недостаточно, чтобы векторы (10.7) были векторами Киллинга.

Дело в том, что условие (3.34) накладывается на соответствующие ковекторы $\bar{g}(J_i) = g_{\mu\nu}J_i^\nu dx^\mu$, так что необходимо, чтобы эти ковекторы оставались внутри сферы.

Иными словами, векторы ∂_t, ∂_r должны быть ортогональны векторам $\partial_\vartheta, \partial_\varphi : g_{t\vartheta} = g_{r\vartheta} = g_{t\varphi} = g_{r\varphi} = 0$. Это же условие достаточно для того, чтобы двумерные символы Кристоффеля на сферах совпадали с соответствующими четырехмерными.

Получаем

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{tr}dtdr + g_{rr}dr^2 + g_{\vartheta\vartheta}d\Omega^2$$

Для такой метрики удовлетворяются соотношения

$$J_{i\mu;\nu} + J_{i\nu;\mu} = 0, \quad \mu, \nu = \vartheta, \varphi$$

Чтобы удовлетворить остальным условиям, надо потребовать, чтобы все четыре функции $g_{tt}, g_{tr}, g_{rr}, g_{\vartheta\vartheta}$ зависели бы только от t и r . Иными словами

$$\partial_\vartheta g_{\mu\nu} = \partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0, \quad \mu, \nu = t, r, \vartheta, \varphi$$

Действительно, например, из условия $J_{zr;r} = 0$ находим

$$0 = J_{zr;r} = -\Gamma_{rr}^\varphi J_{z\varphi} = \Gamma_{rr}^\varphi g_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}g_{rr,\varphi}$$

Аналогично проверяется независимость остальных компонент от ϑ и φ . Заметим теперь, что метрика в факторпространстве $M/SO(3)$, где $SO(3)$ - группа вращений, порожденная векторами Киллинга, есть метрика общего вида.

Поэтому преобразованиями координат t, r мы можем зафиксировать две функции.

Во-первых, потребуем, чтобы направления ∂_t и ∂_r были ортогональны, а во-вторых, определим r условием, чтобы длина окружности на любой из сфер $t, r = \text{const}$ равнялась $2\pi r$. Это значит, что

$$g_{tr} = 0, \quad g_{\vartheta\vartheta} = -r^2$$

Оставшиеся компоненты метрики g_{tt}, g_{rr} удобно записать в экспоненциальном виде e^{2k}, e^{2h} . Окончательно, запишем сферически-симметричную метрику в виде

$$ds^2 = e^{2k(t,r)} dt^2 - e^{2h(t,r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Метрика в таких координатах имеет диагональный вид, так что обратную метрику легко найти:

$$g^{\bullet\bullet} = e^{-2k(t,r)} \partial_t \otimes \partial_t - e^{-2h(t,r)} \partial_r \otimes \partial_r - r^{-2} (\partial_\vartheta \otimes \partial_\vartheta + \sin^{-2} \vartheta \partial_\varphi \otimes \partial_\varphi)$$

Чтобы удовлетворить остальным условиям, надо потребовать, чтобы все четыре функции $g_{tt}, g_{tr}, g_{rr}, g_{\vartheta\vartheta}$ зависели бы только от t и r . Иными словами

$$\partial_\vartheta g_{\mu\nu} = \partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0, \quad \mu, \nu = t, r, \vartheta, \varphi$$

Действительно, например, из условия $J_{zr;r} = 0$ находим

$$0 = J_{zr;r} = -\Gamma_{rr}^\varphi J_{z\varphi} = \Gamma_{rr}^\varphi g_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} g_{rr,\varphi}$$

Аналогично проверяется независимость остальных компонент от ϑ и φ . Заметим теперь, что метрика в факторпространстве $M/SO(3)$, где $SO(3)$ - группа вращений, порожденная векторами Киллинга, есть метрика общего вида.

Поэтому преобразованиями координат t, r мы можем зафиксировать две функции.

Во-первых, потребуем, чтобы направления ∂_t и ∂_r были ортогональны, а во-вторых, определим r условием, чтобы длина окружности на любой из сфер $t, r = \text{const}$ равнялась $2\pi r$. Это значит, что

$$g_{tr} = 0, \quad g_{\vartheta\vartheta} = -r^2$$

Оставшиеся компоненты метрики g_{tt}, g_{rr} удобно записать в экспоненциальном виде e^{2k}, e^{2h} . Окончательно, запишем сферически-симметричную метрику в виде

$$ds^2 = e^{2k(t,r)} dt^2 - e^{2h(t,r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Метрика в таких координатах имеет диагональный вид, так что обратную метрику легко найти:

$$g^{\bullet\bullet} = e^{-2k(t,r)} \partial_t \otimes \partial_t - e^{-2h(t,r)} \partial_r \otimes \partial_r - r^{-2} (\partial_\vartheta \otimes \partial_\vartheta + \sin^{-2} \vartheta \partial_\varphi \otimes \partial_\varphi)$$

один ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\begin{aligned} R_t^t &= \left(-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2 \right) e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k') e^{-2h} \\ R_r^r &= \left(-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2 \right) e^{-2k} + (k'' + k'^2 - k'h' - 2r^{-1}h') e^{-2h} \\ R_r^t &= 2r^{-1} e^{-2k} \dot{h} \\ R_\vartheta^\vartheta &= R_\varphi^\varphi = -r^{-2} (1 + (rh' - rk' - 1) e^{-2h}) \end{aligned}$$

Решим уравнения Эйнштейна в вакууме $R_\mu^\mu = 0$. Из третьего уравнения немедленно имеем $\dot{h} = 0$, то есть $h = h(r)$. В первом и втором уравнениях выпадают все члены с производными по времени, и мы имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной r . Используя комбинации $R_t^t \mp R_r^r$, получаем

$$\begin{aligned} k' + h' &= 0 \\ k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}(k' - h') &= 0 \\ r(k' - h') &= e^{2h} - 1 \end{aligned}$$

Из первого уравнения немедленно имеем

$$k(t, r) = F(t) - h(r)$$

Функцию $F(t)$ можно устранить преобразованием координат $t' = \int dt e^{F(t)}$, поэтому без ограничения общности положим ее равной нулю.

Имеем

$$h = -k, \quad k'' + 2k'^2 + \frac{2k'}{r} = 0, \quad \frac{2dk}{e^{-2k} - 1} = \frac{dr}{r}$$

Третье уравнение легко решается

$$e^{2k} = 1 - \frac{r_g}{r}$$

где константа r_g должна быть положительной, чтобы решение имело смысл на больших расстояниях.

Подставляя во второе уравнение, убеждаемся, что оно тоже выполнено.

Итак, окончательно имеем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\Omega^2$$

(???)

Вид гравитационного радиуса

Величину r_g легко выразить через полную энергию (массу) системы.

Действительно, рассмотрим асимптотику решения Шварцшильда при $r \rightarrow \infty$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Эта асимптотика не соответствует виду (7.23), так как для нее $h = 0$ и, следовательно, $\psi_{rr} \neq 0$. Но ее можно привести к нужному виду малым калибровочным преобразованием $r \rightarrow r + \frac{r_g}{2}$. Тогда в первом порядке по r_g/r имеем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\Omega^2)$$

Теперь $h = 2r_g/r$, откуда находим $\psi_{rr} = \psi_{\vartheta\vartheta} = \psi_{\varphi\varphi} = 0, \psi_{tt} = h_{tt} - \frac{1}{2}h = -2r_g/r$. Это согласуется с асимптотическим решением (7.23) при $A = -2r_g$. Сравнивая с (7.27), получаем

$$r_g = 2GM$$

Из сферической симметрии решения физически ясно, что момент импульса системы, создающей гравитационное поле, равен нулю.

Это также строго следует из того, что в асимптотике $\psi_{0i} = 0$.

23.2.2 Typical Consequences of the Schwarzschild Metric

Важно отметить, что решение Шварцшильда является единственным (с точностью до преобразований координат) сферически-симметричным решением уравнений Эйнштейна в вакууме для любого сферического слоя.

Это значит, что радиальные движения сферически-симметричной материи, как и в ньютоновской теории, не влияют на гравитационное поле в пустом пространстве снаружи.

Свойства

(???? хз, пока не так читал)

Давайте изучим глобальные свойства решения (10.14).

Если размер гравитирующих тел больше r_g , то решение (10.14) хорошо определено.

Чтобы получить полное решение, мы должнышить его с решением в области, где $T^{\mu\nu} \neq 0$. В то же время, ничто не может гарантировать, что материя распределена достаточно неплотно.

Вполне возможно, что сил отталкивания не хватит, чтобы удержать материю за пределами сферы $r = r_g$, на которой метрика имеет особенность.

Более того, может так случиться, что при ненулевом, но небольшом тензоре энергии-импульса особенность просто сдвинется внутрь, но не исчезнет.

Поэтому попробуем понять смысл этой особенности.

Для этого найдем промежутки времени на прямых $r, \vartheta, \varphi = \text{const}$ и расстояния на плоскостях $t = \text{const}$.

Пусть частица неподвижно висит в шварцшильдовых координатах.

Пусть $\Delta t = t_2 - t_1$ - некоторый промежуток «глобального» координатного времени.

Промежуток физического времени по часам частицы (ее собственного времени) $\Delta\tau$ равен

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \Delta t$$

Эта величина стремится к нулю при $r \rightarrow r_g$. Это означает, что прямая $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$ изотропна.

Ниже мы увидим, что на самом деле эта прямая является в пространстве-времени единственной точкой.

Теперь перейдем к измерениям расстояний в пространственных слоях.

Так как система координат Шварцшильда имеет нулевые компоненты g_{0i} , пространственная часть метрики полностью определяет расстояния между точками.

Мы немедленно получаем, что расстояния между точками на любой сфере $r = \text{const}$, в том числе и на сфере Шварцшильда $r = r_g$, определяются стандартной метрикой на сфере радиуса r :

$$dl_{\text{сф}}^2 = r^2 d\Omega^2$$

Расстояния же вдоль радиуса растут с приближением к сфере Шварцшильда:

$$dl_{\text{ра}} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} dr$$

Нетрудно проверить, что расстояние от сферы Шварцшильда до любой близлежащей точки (и, следовательно, до любой вообще точки) конечно.

Пусть $r - r_g \ll r_g$. Тогда имеем

$$l_{\text{рад}}(r, r_g) = \int dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} \simeq \sqrt{r_g} \int \frac{dr}{\sqrt{r - r_g}} = 2\sqrt{r_g(r - r_g)}$$

Это значит, что сфера Шварцшильда не «утолщается» в пространственном направлении. мерным объектом в пространстве-времени.

Область $r < r_g$ вообще не имеет смысла.

Мы выяснили характер особенности координат Шварцшильда.

Теперь мы покажем, что эти координаты не покрывают все физическое пространственно-временное многообразие.

Для этого рассмотрим (светоподобные) изотропные кривые в плоскости (t, r) . В силу симметрии системы эти кривые должны быть геодезическими.

Полагая $d\vartheta = d\varphi = 0$ и $ds = 0$, получаем

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

Знак «+» отвечает «фотону», летящему из центра, а знак «-» фотону», летящему к центру.

Это уравнение нетрудно проинтегрировать, но даже без интегрирования ясно, что будет происходить с фотоном в будущем.

Фотон, удаляющийся от центра, постепенно выйдет на асимптотику $r = t$ и уйдет на бесконечность, в то время как «падающий» фотон будет приближаться к радиусу Шварцшильда по закону $r - r_g \sim e^{-t/r_g}$. Казалось бы, мы решили проблему сингулярности.

Никакая частица не может

обогнать свет и, тем самым, не может пересечь сферу Шварцшильда.

Тем самым, массы никогда не достигнут этой сферы и проблема сингулярности просто не возникнет.

Это так и не так.

Это так, если мы наблюдаем за системой издалека.

Действительно, удаленный наблюдатель будет видеть как частицы приближаются к сфере Шварцшильда, образуя вокруг нее тонкий слой, но никогда не пересекают ее.

В тоже время удаленный наблюдатель будет замечать, как замедляется течение времени на падающих часах (см.

(10.16)!).

замедление времени

На самом деле, это время будет замедляться так быстро, что падающая частица достигнет радиуса Шварцшильда (и окажется в абсолютном будущем для удаленного наблюдателя!) за конечное собственное время.

движение в метрике Шварцшильда

Чтобы убедиться в этом, найдем времениподобную геодезическую в плоскости (t, r) . Проще решить не уравнение геодезической (4.6), а уравнение Гамильтона-Якоби (4.19):

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = m^2$$

Умножив обе части на $1 - r_g/r$, мы получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = m^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2$$

Левая часть содержит только производную по t , а правая - только производную по r . Давайте искать решение в таком виде, чтобы обе части были равны константе.

Положим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$$

Константа E имеет смысл энергии системы, и связана с однородностью задачи по времени.

Так как энергия всюду входит в виде квадрата, мы будем считать ее положительной.

Теперь имеем

$$S(t, r) = -Et + S_r(r)$$

и уравнение превращается в уравнение для S_r :

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = E^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - m^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}$$

Отсюда получаем

$$S_r(r) = \pm \int dr \sqrt{\frac{r^2 E^2}{(r - r_g)^2} - \frac{r m^2}{r - r_g}}$$

Дифференцируя полное действие $S(t, r, E)$ по параметру E , имеем

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}$$

где t_0 - новая константа, имеющая смысл «начального» момента времени.

Итак

$$t - t_0 = \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}$$

Это алгебраическое уравнение, задающее мировую линию частицы.

Мы сейчас не будем изучать подробно это уравнение и свойства его решений.

Мы сделаем это в следующий раз.

Нас интересует собственное время и мы его выпишем:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\right)} - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} = \frac{m^2}{E^2} \frac{dr^2}{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}$$

Отсюда

$$ds = \frac{m}{E} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}$$

Найдем полное собственное время, которое требуется частице, чтобы переместиться из точки r_0 в точку r_g . Извлекая корень, находим

$$s_{\text{пад}} = \frac{m}{E} \int_{r_g}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}$$

Важно, что собственное время падения конечно, так как всюду конечно подинтегральное выражение при том условии, что оно было конечно в начальный момент времени.

Это всегда так, если $E > m$ (частица пришла из бесконечности).

Если же $E < m$, то имеется максимально удаленная точка, для которой знаменатель обращается в нуль.

Это соответствует финитному движению (частица взлетела, а потом начала падать).

идея выхода за Шварцшильдову карту???

Однако и эта корневая особенность интегрируема.

Чтобы построить координаты, выходящие за пределы шварцшильдовской карты, придется отказаться от статичности метрики.

Вместо координат (t, r) удобно будет использовать координаты светового конуса $x^\pm$. Потребуем, чтобы решения уравнения (10.17) записывались в виде $x^\pm = \text{const}$.

Отсюда

$$dx^\pm = dt \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

Явное интегрирование дает

$$x^\pm = t \pm r^*, \quad r^* = r + r_g \log \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right)$$

Эти уравнения определяют t, r как функции переменных $x^\pm$. Важно то, что любой паре вещественных чисел (x^-, x^+) можно сопоставить точку в области $r > r_g$. Бесконечному прошлому и бесконечному будущему в шварцшильдовой метрике отвечают пределы $x^- + x^+ \rightarrow \mp\infty$, бесконечно удаленной точке при конечном времени - предел $x^+ - x^- \rightarrow +\infty$, а сфере Шварцшильда - предел $x^+ - x^- \rightarrow -\infty$. Таким образом на $r = r_g$ один из параметров $x^\pm$ может оставаться конечным, но тогда на этом радиусе $t \rightarrow \pm\infty$.

Переменные $x^\pm$ дают возможность построить сразу несколько координатных систем. Начнем с простейшей.

Координаты Эддингтона-Финкельштейна

Выберем в качестве времени одну из координат светового конуса, например x^+ , а в качестве пространственной координаты оставим r . Тогда мы получим координаты Эддингтона-Финкельштейна:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^+)^2 - 2dx^+ dr - r^2 d\Omega^2$$

Метрика в этих координатах по-прежнему стационарна.

Однако на поверхности $r = r_g$ уже нет особенности: компоненты конечные и гладкие, а метрика невырождена, $g = -r^4 \sin^2 \vartheta \neq 0$.

Легко видеть, что кривые $r = r_g, \vartheta = \text{const}, \varphi = \text{const}$ являются изотропными геодезическими.

Эти геодезические входят в непрерывное семейство изотропных геодезических $x^- = \text{const}$, которые расходятся от центра

при $r > r_g$ и сходятся к центру при $r < r_g$ (Рис.10.2). (????)

О горизонте

Поверхность $r = r_g$ представляет собой горизонт событий будущего $\mathcal{H}^+$, из-за которого мы не можем получать никаких сигналов, так как все частицы, испущенные под горизонтом событий, не выходят из под него, а падают (причем за конечное собственное время!) на сингулярность, которая лежит на линии $r = 0$.

Область внутри горизонта событий будущего называют черной дырой.

Координаты Эддингтона-Финкельштейна сохраняют стационарность метрики, однако в них мы теряем симметрию по отношению к обращению времени.

Это связано с тем, что линия $r = r_g$ в этих координатах находится в абсолютном будущем по отношению ко всей области $r > r_g$ и в шварцшильдовых координатах находится в бесконечном будущем $t \rightarrow +\infty$.

Область $r > r_g$ представляет собой одну и ту же область и в координатах Эддингтона-Финкельштейна и в координатах Шварцшильда, но координаты Эддингтона-Финкельштейна растягивают двумерную сферу $r = r_g, t = +\infty$, которая «собирает» все изотропные геодезические типа $\mathcal{I}^-$, в трехмерный горизонт событий $\mathcal{H}^+$, и сжимают сферу Шварцшильда в двумерную сферу в бесконечном прошлом $x^+ = -\infty$.

Обозначим карту, покрываемую координатами Эддингтона-Финкельштейна через EF^+ , а карту, покрываемую координатами Шварцшильда через Sc .

Тогда $EF^+ \supset Sc$.

Обращению времени в этой конструкции отвечает замена $x^+ \rightarrow -x^-$, что дает альтернативную систему координат Эддингтона-Финкельштейна EF^- :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^-)^2 + 2dx^- dr - r^2 d\Omega^2$$

Эта система продолжает систему координат Шварцшильда в бесконечное прошлое.

В новой системе координат поверхность $r = r_g$ представляет собой горизонт событий прошлого $\mathcal{H}^-$.

Сингулярность $r = 0$ в этой области не поглощает частицы, а испускает их.

Область внутри горизонта событий прошлого называют белой дырой.

Карта Шварцшильда оказывается пересечением двух карт: $Sc = EF^+ \cap EF^-$.

Совмещение картин (???)

Как же совместить две картины (10.25) и (10.26)? Для этого надо полностью перейти к координатам светового конуса $x^\pm$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(x^-, x^+)}\right) dx^- dx^+ - r^2(x^-, x^+) d\Omega^2$$

Пока мы ничего нового, по сути, не внесли.

Новая идея состоит в том, чтобы осуществить отображение по-отдельности для переменных $x^\pm$ на полуось.

Это отвечает тому, что мы теперь воспринимаем плоскость (t, r) не как предел квадрата со сторонами, параллельными осям t и r , а как предел квадрата со светоподобными сторонами, параллельными осям x^- и x^+ .

В координатах Эддингтона-Финкельштейна мы спокойно «уходили на временную бесконечность» вблизи горизонта событий, оставляя конечными координаты x^+ и r .

Но в этой бесконечности координата x^- будет стремиться к бесконечности вместе с $t = (x^- + x^+)/2$.

Поэтому неплохо бы ее как-то «поджать».

Аналогично, в прошлом неплохо бы «поджать» x^+ .

Свойства по Тонгу

(скоро их разберу. пример применений связаностей, которые мне не зашли ещё)

The connection one-form and curvature two-form provide a slick way to compute the curvature tensor associated to a metric. The reason for this is that computing exterior derivatives takes significantly less effort than computing covariant derivatives. We will illustrate this for metrics of the form,

$$ds^2 = -f(r)^2 dt^2 + f(r)^{-2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

For later applications, it will prove useful to compute the Riemann tensor for this metric with general $f(r)$. However, if we want to restrict to the Schwarzschild metric we can take

$$f(r) = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}}$$

The basis of non-coordinate one-forms is

$$\hat{\theta}^0 = f dt, \quad \hat{\theta}^1 = f^{-1} dr, \quad \hat{\theta}^2 = r d\theta, \quad \hat{\theta}^3 = r \sin \theta d\phi$$

Note that the one-forms $\hat{\theta}$ should not be confused with the angular coordinate θ ! In this basis, the metric takes the simple form

$$ds^2 = \eta_{ab} \hat{\theta}^a \otimes \hat{\theta}^b$$

We now compute $d\hat{\theta}^a$. Calculationally, this is straightforward. In particular, it's substantially easier than computing the covariant derivative because there's no messy connection to worry about. The exterior derivatives are simply

$$d\hat{\theta}^0 = f' dr \wedge dt, \quad d\hat{\theta}^1 = 0, \quad d\hat{\theta}^2 = dr \wedge d\theta, \quad d\hat{\theta}^3 = \sin \theta dr \wedge d\phi + r \cos \theta d\theta \wedge d\phi$$

The first Cartan structure relation, $d\hat{\theta}^a = -\omega^a_b \wedge \hat{\theta}^b$, can then be used to read off the connection one-form. The first equation tells us that $\omega^0_1 = f' f dt = f' \hat{\theta}^0$. We then use the anti-symmetry (3.48), together with raising and lowering by the Minkowski metric $\eta = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ to get $\omega^1_0 = \omega_{10} = -\omega_{01} = \omega^0_1$. The Cartan structure equation then gives $d\hat{\theta}^1 = -\omega^1_0 \wedge \hat{\theta}^0 + \dots$ and the $\omega^1_0 \wedge \hat{\theta}^0$ contribution happily vanishes because it is proportional to $\hat{\theta}^0 \wedge \hat{\theta}^0 = 0$.

Next, we take $\omega^2_1 = f d\theta = (f/r)\hat{\theta}^2$ to solve the $d\hat{\theta}^2$ structure equation. The antisymmetry (3.48) gives $\omega^1_2 = -\omega^2_1 = -(f/r)\hat{\theta}^2$ and this again gives a vanishing contribution to the $d\hat{\theta}^1$ structure equation.

Finally, the $d\hat{\theta}^3$ equation suggests that we take $\omega^3_1 = f \sin \theta d\phi = (f/r)\hat{\theta}^3$ and $\omega^3_2 = \cos \theta d\phi = (1/r) \cot \theta \hat{\theta}^3$. These anti-symmetric partners $\omega^1_3 = -\omega^3_1$ and $\omega^2_3 = -\omega^3_2$ do nothing to spoil the $d\hat{\theta}^1$ and $d\hat{\theta}^2$ structure equations, so we're home dry. The final result is

$$\begin{aligned} \omega^0_1 &= \omega^1_0 = f' \hat{\theta}^0, & \omega^2_1 &= -\omega^1_2 = \frac{f}{r} \hat{\theta}^2 \\ \omega^3_1 &= -\omega^1_3 = \frac{f}{r} \hat{\theta}^3, & \omega^3_2 &= -\omega^2_3 = \frac{\cot \theta}{r} \hat{\theta}^3 \end{aligned}$$

Now we can use this to compute the curvature two-form. We will focus on

$$\mathcal{R}^0_1 = d\omega^0_1 + \omega^0_c \wedge \omega^c_1$$

We have

$$d\omega^0_1 = f' d\hat{\theta}^0 + f'' dr \wedge \hat{\theta}^0 = \left((f')^2 + f'' f \right) dr \wedge dt$$

The second term in the curvature 2-form is $\omega^0_c \wedge \omega^c_1 = \omega^0_1 \wedge \omega^1_1 = 0$. So we're left with

$$\mathcal{R}^0_1 = \left((f')^2 + f'' f \right) dr \wedge dt = \left((f')^2 + f'' f \right) \hat{\theta}^1 \wedge \hat{\theta}^0$$

The other curvature 2-forms can be computed in a similar fashion. We can now read off the components of the Riemann tensor in the non-coordinate basis using (3.49). (We should remember that we get a contribution from both R^0_{101} and $R^0_{110} = -R^0_{101}$, which cancels the factor of 1/2 in (3.49).) After lowering an index, we find that the non-vanishing components of

the Riemann tensor are

$$\begin{aligned}
 R_{0101} &= f f'' + (f')^2 \\
 R_{0202} &= \frac{f f'}{r} \\
 R_{0303} &= \frac{f f'}{r} \\
 R_{1212} &= -\frac{f f'}{r} \\
 R_{1313} &= -\frac{f f'}{r} \\
 R_{2323} &= \frac{1 - f^2}{r^2}
 \end{aligned}$$

We can also convert this back to the coordinates $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ using

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = e_\mu^a e_\nu^b e_\rho^c e_\sigma^d R_{abcd}$$

This is particularly easy in this case because the matrices e_a^μ defining the one-forms (3.53) are diagonal. We then have

$$\begin{aligned}
 R_{trtr} &= f f'' + (f')^2 \\
 R_{t\theta t\theta} &= f^3 f' r \\
 R_{t\phi t\phi} &= f^3 f' r \sin^2 \theta \\
 R_{r\theta r\theta} &= -\frac{f' r}{f} \\
 R_{r\phi r\phi} &= -\frac{f' r}{f} \sin^2 \theta \\
 R_{\theta\phi\theta\phi} &= (1 - f^2) r^2 \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

Finally, if we want to specialise to the Schwarzschild metric with $f(r)$ given by (3.52), we have

$$\begin{aligned}
 R_{trtr} &= -\frac{2GM}{r^3} \\
 R_{t\theta t\theta} &= \frac{GM(r - 2GM)}{r^2} \\
 R_{t\phi t\phi} &= \frac{GM(r - 2GM)}{r^2} \sin^2 \theta \\
 R_{r\theta r\theta} &= -\frac{GM}{r - 2GM} \\
 R_{r\phi r\phi} &= -\frac{GM \sin^2 \theta}{r - 2GM} \\
 R_{\theta\phi\theta\phi} &= 2GM r \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

Although the calculation is a little lengthy, it turns out to be considerably quicker than first computing the Levi-Civita connection and subsequently motoring through to get the Riemann tensor components.

23.2.3 Overview of Applications of the Schwarzschild Model

вообще, очень часто она встречается, так что с опытом укажу, где.
(пока не уверен)

23.2.4 Kruskal Coordinates

(тут подробно их обсуждаю)

Теория от Вергелеса

(потом вставляю теорию, пока тренироваться всё равно нужно)

координаты Крускала

Это достигается в координатах Крускала

$$u = -2r_g e^{-x^-/2r_g}, \quad v = 2r_g e^{x^+/2r_g}$$

которые остаются конечными на горизонтах событий.

Из (10.24) получаем

$$uv = -4r_g^2 e^{r/r_g} \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right)$$

То есть условию $r = r_g$ отвечают две поверхности $u = 0$ и $v = 0$.

Шварцшильдовской области $r > r_g$ отвечает квадрант $u < 0, v > 0$, причем значению $r = r_g$ при конечных t соответствует, как мы уже говорили, двумерная сфера $u = v = 0$.

Это немедленно сказывается на метрике.

Она перестает быть сингулярной на этой сфере:

$$ds^2 = \frac{r_g}{r(u, v)} e^{-\frac{r(u, v)}{r_g}} du dv - r^2(u, v) d\Omega^2$$

Здесь r записана как функция новых переменных u, v , которая решает уравнение (10.29).

неполнота шварцшильдовских координат

(не уверен, что тема эта раскрыта)

23.2.5 Penrose Diagrams

максимально расширенное многообразие Крускала.

диаграммы Пенроуза

Систему координат Крускала удобно изобразить графически с помощью диаграммы Пенроуза или конформной или причинной диаграммы.

Для этого от некомпактных координат u, v следует перейти к компактным переменным u', v' с помощью замены

$$\begin{aligned} u &= 2r_g \operatorname{tg} u', \\ v &= 2r_g \operatorname{tg} v' \end{aligned}$$

В двумерном пространстве (u, v) это преобразование является конформным и сохраняет изотропные направления.

Дополнительное преобразование Вейля

$$g'_{\mu\nu}(x) = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x)$$

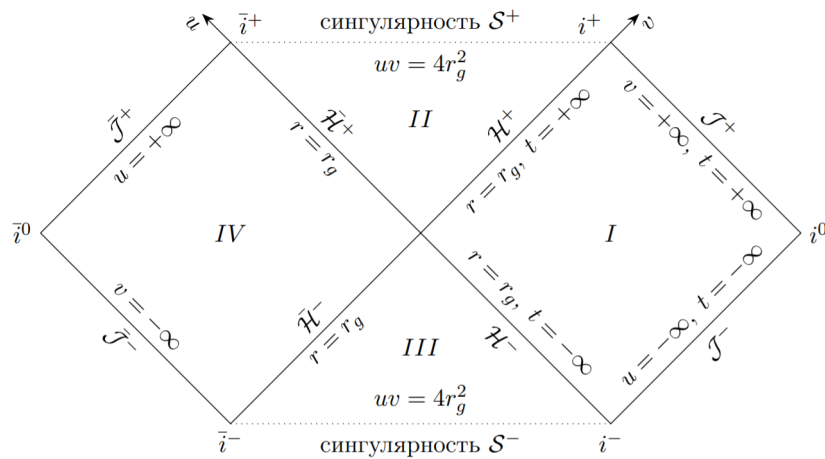
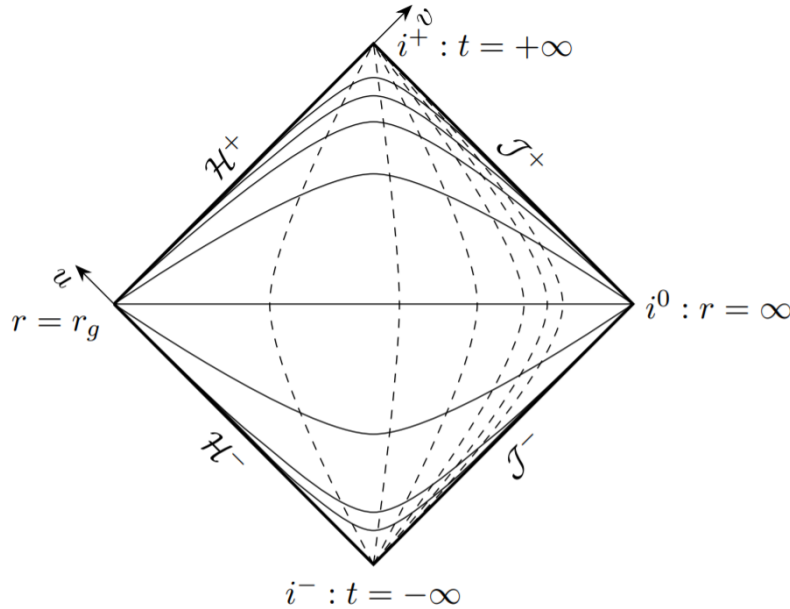
с множителем

$$\Omega(x) = \frac{r(u, v)}{r_g} e^{\frac{r(u, v)}{r_g}} \frac{1}{(1 + u^2/4r_g^2)(1 + v^2/4r_g^2)}$$

отобразит метрику $ds^2 = \frac{r_g}{r(u,v)} e^{-\frac{r(u,v)}{r_g}} du dv - r^2(u,v) d\Omega^2$ в плоскую метрику листа бумаги.
(?? почему??)

В общем случае диаграммы Пенроуза получаются сжатием («компактификацией») координат светового конуса, поэтому изотропные кривые всегда изображаются на них отрезками прямых, лежащими под углом 45° к горизонту, и причинная структура пространства-времени становится понятной.

Диаграмма Пенроуза для метрики Шварцшильда изображена на Рис. ниже.



Горизонт событий будущего $\mathcal{H}^+$ изображается лучом $u = 0, v > 0$, а горизонт событий прошлого $\mathcal{H}^-$ - лучом $v = 0, u < 0$.

Оба луча ограничивают внешнюю область $v > 0, u < 0$, что эквивалентно $r > r_g$ в шварцшильдовых координатах.

Эта область обозначена на конформной диаграмме 10.3 как область I .

Качественно координаты Шварцшильда на конформной диаграмме изображены на Рис. 10.4

отобразит метрику (10.30) в плоскую метрику листа бумаги.

В общем случае диаграммы Пенроуза получаются сжатием («компактификацией») координат светового конуса, поэтому изотропные кривые всегда изображаются на них

отрезками прямых, лежащими под углом 45° к горизонту, и причинная структура пространства-времени становится понятной.

Диаграмма Пенроуза для метрики Шварцшильда изображена на Рис. 10.3.

Горизонт событий будущего $\mathcal{H}^+$ изображается лучом $u = 0, v > 0$, а горизонт событий прошлого $\mathcal{H}^-$ - лучом $v = 0, u < 0$.

Оба луча ограничивают внешнюю область $v > 0, u < 0$, что эквивалентно $r > r_g$ в шварцшильдовых координатах.

Эта область обозначена на конформной диаграмме 10.3 как область I .

Качественно координаты Шварцшильда на конформной диаграмме изображены на Рис.

10.4

никакого взаимодействия $\frac{2}{4}$ но который обязан существовать.

Формально горизонт $\overline{\mathcal{H}}^+$ и бесконечность $\overline{\mathcal{J}}^+$ отображаются в область $t \rightarrow -\infty$, а горизонт $\overline{\mathcal{H}}^-$ и бесконечность $\overline{\mathcal{J}}^-$ - в область $t \rightarrow +\infty$, так что можно предположить, что время там течет в некотором смысле назад.

Однако, скорее всего, это относится к области умозрительных непроверяемых предположений.

О применениях (??)

23.2.6 Centrally Symmetric Gravitational Field (after Landau)

Обсудим подробно центрально-симметричное поле.

(тут у Ландау мб кое-что и новое, так что догружу лучше)

Theory

Центральная симметрия поля означает, что метрика пространствавремени, т.е. выражение для интервала ds , должна быть одинакова во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии от центра. В евклидовом пространстве это расстояние равно радиус-вектору; в неевклидовом же пространстве, каким оно является при наличии гравитационного поля, нет величины, которая обладала бы всеми свойствами евклидова радиус-вектора (одновременно равного расстоянию до центра и деленной на 2π длине окружности). Поэтому выбор "радиус-вектора" теперь произволен.

Если пользоваться "сферическими" пространственными координатами r, θ, φ , то наиболее общим центрально-симметричным выражением для ds^2 является

$$ds^2 = h(r, t)dr^2 + k(r, t) (\sin^2 \theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) + l(r, t)dt^2 + a(r, t)drdt \quad (100.1)$$

где a, h, k, l - некоторые функции от «радиус-вектора» r и «времени» t . Но, ввиду произвольности в выборе системы отсчета в общей теории относительности, мы можем еще подвергнуть координаты любому преобразованию, не нарушающему центральной симметрии ds^2 ; это значит, что мы можем преобразовать координаты r и t посредством формул

$$r = f_1(r', t'), \quad t = f_2(r', t')$$

где f_1, f_2 - любые функции от новых координат r', t' . Воспользовавшись этой возможностью, выберем координату r и время t таким образом, чтобы, во-первых, коэффициент $a(r, t)$ при $drdt$ в выражении для ds^2 обратился в нуль и, во-вторых, коэффициент $k(r, t)$ был равен просто - r^2 1). Последнее означает, что радиус-вектор r определен таким образом, чтобы длина окружности с центром в начале координат была

равна $2\pi r$ (элемент дуги окружности в плоскости $\theta = \pi/2$ равен $dl = r d\varphi$). Величины h и l нам будет удобно писать в экспоненциальном виде соответственно как $-e^\lambda$ и $c^2 e^\nu$, где λ и ν - некоторые функции от r и t . Таким образом, получим для ds^2 следующее выражение:

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2) - e^\lambda dr^2$$

Подразумевая под x^0, x^1, x^2, x^3 соответственно ct, r, θ, φ , мы имеем, следовательно, для отличных от нуля компонент метрического тензора выражения

$$g_{00} = e^\nu, \quad g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta.$$

Очевидно, что

$$g^{00} = e^{-\nu}, \quad g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2} \sin^{-2} \theta.$$

С помощью этих значений легко вычислить по формуле (86.3) величины Γ_{kl}^i . Вычисление приводит к следующим выражениям (штрих означает дифференцирование по r , а точка над буквой - дифференцирование по ct):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2}, \quad \Gamma_{10}^0 = \frac{\nu'}{2}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\lambda}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \operatorname{ctg} \theta, \quad \Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{\nu}}{2} \\ \Gamma_{10}^1 &= \frac{\dot{\lambda}}{2}, \quad \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Все остальные компоненты Γ_{kl}^i (кроме тех, которые отличаются от написанных перестановкой индексов k и l) равны нулю.

Для составления уравнений надо вычислить по формуле (92.7) компоненты тензора R_k^i . Простые вычисления приводят в результате к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{8\pi k}{c^4} T_1^1 &= -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \\ \frac{8\pi k}{c^4} T_2^2 &= \frac{8\pi k}{c^4} T_3^3 = -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right), \\ \frac{8\pi k}{c^4} T_0^0 &= -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \\ \frac{8\pi k}{c^4} T_0^1 &= -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} \end{aligned}$$

(остальные компоненты уравнения ур Эйнштейна тождественно обращаются в нуль).

Компоненты тензора энергии-импульса могут быть выражены с помощью формулы (94.9) через плотность энергии материк ε , ее давление p и радиальную скорость v .

Уравнения (100.4)-(100.7) могут быть проинтегрированы до конца т.е. вне создающих его масс.

Полагая тензор энергии-импульса равным нулю, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} &= 0 \\ e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} &= 0 \\ \dot{\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

(четвертое уравнение, т.е.

уравнение (100.5), можно не выписывать, так как оно является следствием трех остальных уравнений).

Из (100.10) мы видим, что λ не зависит от времени.

Далее, складывая уравнения (100.8) – (100.9), находим $\lambda' + \nu' = 0$, т.е.

$$\lambda + \nu = f(t)$$

где $f(t)$ – функция только от времени.

Но, выбрав интервал ds^2 в виде (100.2), мы оставили за собой еще возможность произвольного преобразования времени вида $t = f(t')$. Такое преобразование эквивалентно прибавлению к ν произвольной функции времени, и с его помощью можно всегда обратить $f(t)$ в (100.11) в нуль.

Итак, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda + \nu = 0$. Отметим, что центрально-симметричное гравитационное поле в пустоте автоматически оказывается статическим.

Уравнение (100.9) легко интегрируется и дает:

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{\text{const}}{r}$$

Как и следовало, на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) $e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1$, т.е.

вдали от гравитирующих тел, метрика автоматически оказывается галилеевой.

Постоянную const легко выразить через массу тела, потребовав, чтобы на больших расстояниях, где поле слабо, имел место закон Ньютона.

Именно, должно быть $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$, где потенциал φ равен своему ньютоновскому выражению (99.4) : $\varphi = -km/r$ (m – полная масса создающего поле тела).

Отсюда видно, что $\text{const} = -2 \text{ km}/c^2$. Эта величина имеет размерность длины; ее называют гравитационным радиусом тела r_g :

$$r_g = \frac{2km}{c^2}.$$

Таким образом, окончательно находим пространственно-временную метрику в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}.$$

Это решение уравнений Эйнштейна было найдено Шварцшильдом.

Им полностью определяется гравитационное поле в пустоте, создаваемое любым центрально-симметричным распределением масс.

Подчеркнем, что это решение справедливо не только для покоящихся, но и для движущихся масс, если только движение тоже обладает должной симметрией (скажем, центрально-симметричные пульсации).

Отметим, что метрика (100.14) зависит только от полной массы гравитирующего тела, как и в аналогичной задаче ньютоновской теории.

Свойства

(хз, потом разбирать буду)

Пространственная метрика определяется выражением для элемента пространственного расстояния:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)$$

Геометрический смысл координаты r определяется тем, что в метрике (100.15) длина окружности с центром в центре поля равна $2\pi r$. Расстояние же между двумя точками r_1 и r_2 на одном и том же радиусе дается интегралом

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} > r_2 - r_1$$

Далее мы видим, что $g_{00} \leq 1$.

В связи с формулой (84.1) $d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dt$, определяющей истинное время, отсюда следует, что

$$d\tau \leq dt$$

Знак равенства имеет место на бесконечности, где t совпадает с истинным временем.

Таким образом, на конечных расстояниях от масс происходит «замедление» времени по сравнению со временем на бесконечности.

Наконец, приведем приближенное выражение для ds^2 на больших расстояниях от начала координат:

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{2km}{c^2 r} (dr^2 + c^2 dt^2)$$

Второй член представляет собой малую поправку к галилеевой метрике ds_0^2 . На больших расстояниях от создающих поле масс всякое поле центрально-симметрично.

Поэтому (100.18) определяет метрику на больших расстояниях от любой системы тел. центрально-симметричного гравитационного поля внутри гравитирующих масс.

Из уравнения (100.6) видно, что при $r \rightarrow 0$ λ должно тоже обращаться в нуль, по крайней мере как r^2 ; в противном случае правая часть уравнения обратилась бы при $r \rightarrow 0$ в бесконечность, т.е.

T_0^0 имело бы в $r = 0$ особую точку.

Интегрируя формально уравнение (100.6) с граничным условием $\lambda|_{r=0} = 0$, получим:

$$\lambda = -\ln \left(1 - \frac{8\pi k}{c^4 r} \int_0^r T_0^0 r^2 dr \right)$$

Поскольку в силу (94.10) $T_0^0 = e^{-\nu} T_{00} \geq 0$, то отсюда видно, что $\lambda \geq 0$, т.е.

$$e^\lambda \geq 1$$

Далее, вычитая уравнение (100.6) почленно из уравнения (100.4), получим:

$$\frac{e^{-\lambda}}{r} (\nu' + \lambda') = \frac{8\pi k}{c^4} (T_0^0 - T_1^1) = \frac{(\varepsilon + p) \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \geq 0$$

т.е.

$\nu' + \lambda' \geq 0$. Но при $r \rightarrow \infty$ (вдали от масс) метрика переходит в галилееву, т.е.

$\nu \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$. Поэтому из $\nu' + \lambda' \geq 0$ следует, что во всем пространстве

$$\nu + \lambda \leq 0$$

Поскольку $\lambda \geq 0$, то отсюда следует, что $\nu \leq 0$, т.е.

$$e^\nu \leq 1$$

Полученные неравенства показывают, что указанные выше свойства (100.16)-(100.17) пространственной метрики и хода часов **B** центрально-симметричном поле в пустоте относятся в той же мере и к полю внутри гравитирующих масс.

Если гравитационное поле создается сферическим телом «радиуса» a , то при $r > a$ имеем $T_0^0 = 0$. Для точек с $r > a$ формула (100.19) поэтому дает:

$$\lambda = -\ln \left(1 - \frac{8\pi k}{c^4 r} \int_0^a T_0^0 r^2 dr \right)$$

С другой стороны, здесь можно применить относящееся к пустоте выражение (100.14), согласно которому

$$\lambda = -\ln \left(1 - \frac{2km}{c^2 r} \right).$$

Сравнивая оба выражения, найдем формулу

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^a T_0^0 r^2 dr$$

определяющую полную массу тела по его тензору энергии-импульса.

В частности, для статического распределения вещества в теле имеем $T_0^0 = \varepsilon$, так что

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^a \varepsilon r^2 dr$$

Поскольку в силу (94.10) $T_0^0 = e^{-\nu} T_{00} \geq 0$, то отсюда видно, что $\lambda \geq 0$, т. е.

$$e^\lambda \geq 1$$

Далее, вычитая уравнение (100.6) почленно из уравнения (100.4), получим:

$$\frac{e^{-\lambda}}{r} (\nu' + \lambda') = \frac{8\pi k}{c^4} (T_0^0 - T_1^1) = \frac{(\varepsilon + p) \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \geq 0$$

т.е.

$\nu' + \lambda' \geq 0$. Но при $r \rightarrow \infty$ (вдали от масс) метрика переходит в галилееву, т.е.

$\nu \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$.

Поэтому из $\nu' + \lambda' \geq 0$ следует, что во всем пространстве

$$\nu + \lambda \leq 0$$

Поскольку $\lambda \geq 0$, то отсюда следует, что $\nu \leq 0$, т.е.

$$e^\nu \leq 1$$

Полученные неравенства показывают, что указанные выше свойства (100.16)-(100.17) пространственной метрики и хода часов **B** центрально-симметричном поле в пустоте относятся в той же мере и к полю внутри гравитирующих масс.

Масса гравитирующего тела (???)

Если гравитационное поле создается сферическим телом «радиуса» a , то при $r > a$ имеем $T_0^0 = 0$. Для точек с $r > a$ формула (100.19) поэтому дает:

$$\lambda = -\ln \left(1 - \frac{8\pi k}{c^4 r} \int_0^a T_0^0 r^2 dr \right)$$

С другой стороны, здесь можно применить относящееся к пустоте выражение (100.14), согласно которому

$$\lambda = -\ln \left(1 - \frac{2km}{c^2 r} \right).$$

Сравнивая оба выражения, найдем формулу

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^a T_0^0 r^2 dr$$

определяющую полную массу тела по его тензору энергии-импульса.

В частности, для статического распределения вещества в теле имеем $T_0^0 = \varepsilon$, так что

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^a \varepsilon r^2 dr$$

Обратим внимание на то, что интегрирование производится по $4\pi r^2 dr$, между тем как элемент пространственного объема в метрике (100.2) есть $dV = 4\pi r^2 e^{\lambda/2} dr$, причем, согласно (100.20), $e^{\lambda/2} > 1$. Это различие выражает собой гравитационный дефект массы тела.

инварианты тензора кривизны для метрики Шварцшильда

Найти инварианты тензора кривизны для метрики Шварцшильда.

(думаю, это вообще не нужно, но задачка такая есть)

Вычисление по (92.1) $\mathbf{c}\Gamma_{kl}^i$ из (100.3) (или по формулам, полученным в задаче 2§92) приводит к следующим значениям отличных от нуля компонент тензора кривизны:

$$\begin{aligned} R_{0101} &= \frac{r_g}{r^3}, & R_{0202} &= \frac{R_{0303}}{\sin^2 \theta} = -\frac{r_g(r-r_g)}{2r^2} \\ R_{1212} &= \frac{R_{1313}}{\sin^2 \theta} = \frac{r_g}{2(r-r_g)}, & R_{2323} &= -rr_g \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Для инвариантов I_1 и I_2 (92.20) находим:

$$I_1 = \left(\frac{r_g}{2r^3} \right)^2, \quad I_2 = -\left(\frac{r_g}{2r^3} \right)^3$$

(произведения с участием дуального тензора $\bar{R}_{iklm}$ равны нулю тождественно).

Тензор кривизны относится к типу D по Петрову (с вещественными инвариантами $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = -r_g/2r^3$).

Отметим, что инварианты кривизны имеют особенность лишь в точке $r = 0$, но не при $r = r_g$.

пространственная кривизна

Для той же метрики определить пространственную кривизну.

Компоненты пространственного тензора кривизны $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ могут быть выражены через компоненты тензора $P_{\alpha\beta}$ (и тензор $\gamma_{\alpha\beta}$), так что достаточно вычислить только $P_{\alpha\beta}$ (см. задачу 1 §92).

Тензор $P_{\alpha\beta}$ выражается через $\gamma_{\alpha\beta}$ так же, как R_{lk} выражается через g_{ik} .

Со значениями $\gamma_{\alpha\beta}$ из (100.15) получим после вычисления:

$$P_{\theta}^{\theta} = P_{\varphi}^{\varphi} = \frac{r_g}{2r^3}, \quad P_r^r = -\frac{r_g}{r^3}$$

и $P_{\alpha}^{\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Отметим, что $P_{\theta}^{\theta}, P_{\varphi}^{\varphi} > 0, P_r^r < 0$, а $P \equiv P_{\alpha}^{\alpha} = 0$. По формуле, полученной в задаче (1) §92, найдем:

$$\begin{aligned} P_{r\theta r\theta} &= (P_r^r + P_{\theta}^{\theta}) \gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta} = -P_{\varphi}^{\varphi} \gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta} \\ P_{r\varphi r\varphi} &= -P_{\theta}^{\theta} \gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}, \quad P_{\theta\varphi\theta\varphi} = -P_r^r \gamma_{\theta\theta} \gamma_{\varphi\varphi} \end{aligned}$$

Отсюда следует (см. примечание на с. 336) (??), что для «плоскостей», перпендикулярных к радиусам, гауссова кривизна

$$K = \frac{P_{\theta\varphi\theta\varphi}}{\gamma_{\theta\theta} \gamma_{\varphi\varphi}} = -P_r^r > 0$$

(это значит, что для небольших треугольников, проведенных на участке «плоскости» вблизи ее пересечения с перпендикулярным к ней радиусом, сумма углов больше, чем π).

Для «плоскостей» же, проходящих через центр, гауссова кривизна $K < 0$; это значит, что сумма углов, проведенных в «плоскости» небольших треугольников, меньше, чем π (подчеркнем, однако, что последнее свойство не относится к треугольникам, охватывающим центр, - сумма углов в таком треугольнике больше, чем π).

Поверхность вращения, на которой геометрия была бы такой же, как на проходящей через начало координат плоскости в центрально-симметричном гравитационном поле в пустоте (????)

Определить форму поверхности вращения, на которой геометрия была бы такой же, как на проходящей через начало координат плоскости в центрально-симметричном гравитационном поле в пустоте.

Геометрия на поверхности вращения $z = z(r)$ (в цилиндрических координатах) определяется элементом длины

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2 = dr^2 (1 + z'^2) + r^2 d\varphi^2$$

Сравнивая с элементом длины (100.15) в «плоскости» $\theta = \pi/2$

$$dl^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

находим:

$$1 + z'^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}$$

откуда

$$z = 2\sqrt{r_g(r - r_g)}$$

При $r = r_g$ эта функция имеет особенность - точку разветвления.

Это обстоятельство связано с тем, что пространственная метрика (100.15) в противоположность пространственно-временной метрике (100.14) действительно имеет особенность при $r = r_g$.

Указанные в предыдущей задаче общие свойства геометрии на проходящих через центр «плоскостях можно найти также и путем рассмотрения кривизны полученной здесь наглядной модели,

Метрика Шварцшильда в конформно-евклидовом виде

Преобразовать интервал в метрике Шварцшильда к координатам, в которых пространственная метрика имела бы конформно-евклидов вид (т.е. dl^2 пропорционально своему евклидову выражению).

Полагая

$$r = \rho \left(1 + \frac{r_g}{4\rho} \right)^2$$

получим из (100.14):

$$ds^2 = \left[\frac{1 - \frac{r_g}{4\rho}}{1 + \frac{r_g}{4\rho}} \right]^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{4\rho} \right)^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Координаты ρ, θ, φ называют изотропными сферическими координатами; вместо них можно ввести также и изотропные декартовы координаты x, y, z . В частности, на больших расстояниях ($\rho \gg r_g$) имеем приближенно:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{\rho} \right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{\rho} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Уравнения центрально-симметричного гравитационного поля в веществе в сопутствующей системе отсчета

Получить уравнения центрально-симметричного гравитационного поля в веществе в сопутствующей системе отсчета.

Двумя возможными преобразованиями координат r, t в элементе интервала (100.1) воспользуемся для того, чтобы, во-первых, обратить в нуль коэффициент $a(r, t)$ при $drdt$ и, во-вторых, обратить в каждой точке в нуль радиальную скорость вещества (остальные компоненты скорости вообще отсутствуют в силу центральной симметрии).

После этого координаты r и t могут еще быть подвергнуты произвольному преобразованию вида $r = r(r')$, $t = t(t')$ Обозначим выбранные таким образом радиальную координату и время посредством R и τ , а коэффициенты h, k, l - соответственно $-e^\lambda, -e^\mu, e^\nu$ (λ, μ, ν - функции R и τ). Тогда для элемента интервала имеем:

$$ds^2 = c^2 e^\nu d\tau^2 - e^\lambda dR^2 - e^\mu (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Компоненты тензора энергии-импульса равны в сопутствующей системе отсчета:

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p$$

Вычисление приводит к следующим уравнениям поля:

$$\begin{aligned} -\frac{8\pi k}{c^4}T_1^1 &= \frac{8\pi k}{c^4}p = \frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu'\nu' \right) - e^{-\nu} \left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu} + \frac{3}{4}\dot{\mu}^2 \right) - e^{-\mu} \\ -\frac{8\pi k}{c^4}T_2^2 &= \frac{8\pi k}{c^4}p = \frac{1}{4}e^{-\lambda} (2\nu'' + \nu'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu'\nu' - \nu'\lambda' + \mu'\nu') + \\ &\quad + \frac{1}{4}e^{-\nu} \left(\dot{\lambda}\dot{\nu} + \dot{\mu}\dot{\nu} - \dot{\lambda}\dot{\mu} - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 - 2\ddot{\mu} - \dot{\mu}^2 \right) \\ \frac{8\pi k}{c^4}T_0^0 &= \frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon = -e^{-\lambda} \left(\mu'' + \frac{3}{4}\mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2}e^{-\nu} \left(\dot{\lambda}\dot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} \right) + e^{-\mu} \\ \frac{8\pi k}{c^4}T_0^1 &= 0 = \frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(2\dot{\mu}' + \dot{\mu}\mu' - \dot{\lambda}\mu' - \nu'\dot{\mu} \right) \end{aligned}$$

(штрих означает дифференцирование по R , а точка - по τ).

Некоторые общие соотношения для λ, μ, ν могут быть легко найдены, если исходить из содержащихся в уравнениях поля уравнений $T_{i;k}^k = 0$. Воспользовавшись формулой (86.11), получим следующие два уравнения

$$\dot{\lambda} + 2\dot{\mu} = -\frac{2\dot{\varepsilon}}{p + \varepsilon}, \quad \nu' = -\frac{2p'}{p + \varepsilon}$$

Если p известно как функция ε , то уравнения (6) интегрируются в виде

$$\lambda + 2\mu = -2 \int \frac{d\varepsilon}{p + \varepsilon} + f_1(R), \quad \nu = -2 \int \frac{dp}{p + \varepsilon} + f_2(\tau)$$

где функции $f_1(R)$ и $f_2(\tau)$ могут быть выбраны произвольным образом ввиду указанной выше возможности произвольных преобразований вида $R = R(R')$, $\tau = \tau(\tau')$ 6.

Статическое гравитационное поле в пустоте вокруг неподвижного аксиально-симметричного тела

Найти уравнения, определяющие статическое гравитационное поле в пустоте вокруг неподвижного аксиально-симметричного тела.

Статический элемент интервала в цилиндрических пространственных координатах $x^1 = \varphi, x^2 = \rho, x^3 = z$ ищем в виде

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\omega d\varphi^2 - e^\mu (d\rho^2 + dz^2)$$

где ν, ω, μ - функции ρ и z . Такое представление фиксирует выбор координат с точностью до преобразования $\rho = \rho(\rho', z'), z = z(\rho', z')$, умножающего квадратичную форму $d\rho^2 + dz^2$ лишь на общий множитель.

Из уравнений (??? выведу их!!)

$$\begin{aligned} R_0^0 &= \frac{1}{4}e^{-\mu} [2\nu_{,\rho,\rho} + \nu_{,\rho}(\nu_{,\rho} + \omega_{,\rho}) + 2\nu_{,z,z} + \nu_{,z}(\nu_{,z} + \omega_{,z})] = 0 \\ R_1^1 &= \frac{1}{4}e^{-\mu} [2\omega_{,\rho,\rho} + \omega_{,\rho}(\nu_{,\rho} + \omega_{,\rho}) + 2\omega_{,z,z} + \omega_{,z}(\nu_{,z} + \omega_{,z})] = 0 \end{aligned}$$

(где индексы, ρ и, z означают дифференцирование по ρ и z), взяв их сумму, находим:

$$\rho'_{,\rho,\rho} + \rho'_{,z,z} = 0$$

где обозначено $\rho'(\rho, z) = e^{\frac{\nu+\omega}{2}}$.

Таким образом, $\rho'(\rho, z)$ - гармоническая функция переменных ρ, z .

Согласно известным свойствам таких функций это значит, что существует сопряженная гармоническая функция $z'(\rho, z)$ такая, что $\rho' + iz' = f(\rho + iz)$, где f - аналитическая функция комплексной переменной $\rho + iz$.

Если теперь выбрать ρ', z' в качестве новых координат, то в силу конформности преобразования $\rho, z \rightarrow \rho', z'$ будет

$$e^\mu (d\rho^2 + dz^2) = e^{\mu'} (d\rho'^2 + dz'^2),$$

где $\mu'(\rho', z')$ - некоторая новая функция.

В то же время $e^\omega = \rho'^2 e^{-\nu}$; обозначив $\omega + \nu = \gamma$ и опустив далее все штрихи, напомним ds^2 в виде

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - \rho^2 e^{-\nu} d\varphi^2 - e^{\gamma-\nu} (d\rho^2 + dz^2)$$

Составив для этой метрики уравнения $R_0^0 = 0, R_3^3 - R_2^2 = 0, R_2^3 = 0$, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \nu}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial z} &= \rho \frac{\partial \nu}{\partial \rho} \frac{\partial \nu}{\partial z}, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} &= \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \nu}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Отметим, что (2) имеет вид уравнения Лапласа в цилиндрических координатах (для функции, не зависящей от φ). Если это уравнение решено, то функция $\gamma(\rho, z)$ целиком определяется уравнениями (2)-(3).

Вдали от создающего поле тела функции ν и γ должны стремиться к нулю.

(??? тут исследую эти ур-я потом)

23.2.7 Static Spherically Symmetric Body

(лашк л10, семинар. перенесу потом в другое место скорее всего.)

обзор

В случае статического сферически-симметричного тела задачу нахождения гравитационного поля можно решить точно.

условие статического равновесия Оппенгеймера-Волкова

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{(\rho + p)(m(r) + 4\pi r^3 p(r))}{r(r - 2Gm(r))}$$

критерий устойчивости состоит в том, что

$$K < \frac{1}{2G}.$$

Это условие выполнено при любых α . Масса такой звезды может быть сколь угодно велика и определяется только «обрезкой» на малых плотностях, где закон (10.37) перестает работать.

Поэтому предельная масса существенно зависит от уравнения состояния при малых плотностях.

модель

Тензором энергии-импульса имеет вид

$$T_0^0 = \rho(r), \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p(r)$$

Уравнения Эйнштейна принимают вид (?????!!!!)

$$\begin{aligned} \dot{h} &= 0 \\ r^{-1} e^{-2h} (k' + h') &= 4\pi G(\rho + p) \\ e^{-2h} (k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1} (k' - h')) &= 8\pi Gp \\ r^{-2} (1 - e^{-2h}) + r^{-1} (h' - k') e^{-2h} &= 4\pi G(\rho - p) \end{aligned}$$

Первое уравнение приводит к статичности метрики.

Уравнение для $h(r)$ отделяется и дает

$$e^{-2h} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r}, \quad m(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho(r)$$

С помощью четвертого уравнения отсюда легко найти $k'(r)$:

$$\frac{dk}{dr} = G \frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r(r - 2Gm(r))}$$

Подставляя ответ в третье уравнение, получаем условие статического равновесия Оппенгеймера-Волкова

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{(\rho + p)(m(r) + 4\pi r^3 p(r))}{r(r - 2Gm(r))}$$

На этом уравнении строится теория устойчивости звезд в случаях, когда вращением можно пренебречь.

Уравнение следует решать с граничным условием $p(R) = 0$, где R - радиус звезды.

Оценка предела устойчивости звезд (??!!)

Давайте оценим предел устойчивости звезд.

Критерий устойчивости звезды радиуса R имеет вид:

$$r > 2Gm(r) \quad \forall r < R$$

Проще всего найти критерий устойчивости для звезды, состоящей из несжимаемого вещества $\rho = \text{const}$.

В этом случае для предельной массы имеем

$$M_{\max} = \sqrt{\frac{3}{32\pi\rho G^3}}$$

Для нейтронной звезды с плотностью $\rho \simeq 3 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ имеем $M_{\max} \simeq 6.6 M_{\odot}$, где $M_{\odot}$ - масса Солнца.

Рассмотрим теперь звезду с уравнением состояния

$$p = \alpha \rho$$

В случае $\alpha = \frac{1}{3}$ мы имеем ультрарелятивистский идеальный газ.

Здесь имеется точное решение

$$m(r) = Kr, \quad K = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 6\alpha + 1} G^{-1}$$

и критерий устойчивости состоит в том, что

$$K < \frac{1}{2G}.$$

Это условие выполнено при любых α . Масса такой звезды может быть сколь угодно велика и определяется только «обрезкой» на малых плотностях, где закон (10.37) перестает работать.

Поэтому предельная масса существенно зависит от уравнения состояния при малых плотностях.

О применениях

(пока хз)

23.2.8 Typical Problems in Scope of Newton Gravity

(section for the problems in the 1st semester of Bachelor's)

23.2.9 Typical Problems in Scope of Newton Gravity from the GR Framework

(тут типичные примеры приведу. нпр то же падение камня на языке ОТО. потом.)

23.3 Gravitational Collapses

(see not on gravity about it for now. I'll learn this from LL2 better later)

24 Other about Gravity

(важное, ибо иначе писал бы в записи по ОТО, тем не менее, не ключевое)

24.1 Special, Useful Methods

24.1.1 Feynman Path integrals in GR (??)

(Мизнер и др. про это рассуждают, потом доработаю. пока вообще хз.)

Construction of Feynman Path integrals in GR

(write what is it and what is the idea?)

Application of Feynman Path integrals in gravitational lensing

(see my Bachelor's thesis and articles which are cited there)

24.2 Some Generalizations of General Relativity

I'll not write here all the generalizations, since I did it in my note on gravity. I'll discuss just some most famous.

(see note on Gravity for now!! and also a note on special field theories)

24.2.1 Newton–Cartan Theory $R_{\mu\nu} = 4\pi G\rho\Psi_\mu\Psi_\nu$

(??? бескоординатная теория Ньютоновской гравитации (???))

Обзор

24.2.2 Brans-Dicke Theory

Обзор

Уравнения поля в теории Бранса — Дикке имеют следующий вид:

$$\square\phi = \frac{8\pi}{3+2\omega}T,$$

$$G_{ab} = \frac{8\pi}{\phi}T_{ab} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\partial_a\phi\partial_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}\partial_c\phi\partial^c\phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_a\nabla_b\phi - g_{ab}\square\phi),$$

где ω - безразмерная константа связи Бранса - Дикке, g_{ab} - метрический тензор, $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$ - тензор Эйнштейна, $R_{ab} = R^m_{amb}$ - тензор Риччи, след тензора кривизны, $R = R^m_m$ - скаляр Риччи, след тензора Риччи, T_{ab} - тензор энергии-импульса, T - след T_{ab} , ϕ - скалярное поле, $\square$ - оператор Лапласа - Бельтрами или ковариантный волновой оператор, $\square\phi = \phi^a_{;a}$.

Part VII

Problems in Field Theory

Обсудим многие известные мне задачи по теории поля.

25 Special Relativity

25.1 Typical Problems in SR

25.1.1 Problems about Relativistic Lengths and Times

БЛ-1.3.14 О стержне и щели (?????)

На плоскости, имеющей щель ширины l , находится наблюдатель и видит, что со скоростью (V_x, V_y) в сторону щели летит стержень, который параллелен плоскости и имеет длину $L > l$ (ось x параллельна плоскости, а ось y перпендикулярна ей). Скорость стержня такова, что в системе отсчета наблюдателя стержень имеет длину чуть меньше. Пролетит ли стержень сквозь щель, если учесть, что в системе отсчета стержня сокращается как раз ширина щели? Какой конец стержня пролетит через щель первым, с точки зрения наблюдателя и с точки зрения стержня?

Solution

Пролетит ли стержень через щель, или столкнется с плоскостью не зависит от того, из какой системы отсчета наблюдается этот процесс. С точки зрения неподвижного наблюдателя очевидно, что стержень, длина которого меньше, чем ширина щели, свободно пролетит через нее. Поскольку по условию задачи стержень параллелен плоскости, то оба конца пролетят через щель одновременно.

С точки зрения наблюдателя, связанного со стержнем, длина стержня L больше, чем ширина щели l , но в системе стержня иначе определяется одновременность: события, одновременные для системы неподвижного наблюдателя, в системе стержня происходят тем раньше, чем больше они смещены вперед:

$$t' = \frac{t - Vr_{\parallel}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Таким образом, прохождение стержнем щели в системе самого стержня совершается не одновременно, как в системе неподвижного наблюдателя, а в разные моменты времени: для переднего конца раньше. То есть стержень в своей системе отсчета наклонен по отношению плоскости, за счет чего плоскость пролетает мимо него, не задевая стержень краями щели.

Vectorness of acceleration

Suppose, particle moves at $x(t) = t^3$, and in new coordinates $\tilde{x} = x^2$ the acceleration will be from one side $\tilde{a} = \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = \frac{d^2t^6}{dt^2} = 50t^4$, and from the other $\tilde{a} = \frac{d\tilde{x}}{dx}a = 2x \cdot 6t = 12t^4$. Why we have two values and what is a correct one?

(кст, в механике тоже укажу это.)

Solution

(I forgot this problem....)
(??? how to fix it??? have no idea)

Я. Обычный разгон электрона необычным способом (?????)

Рассчитать время, за которое электрон в постоянном электрическом поле ускорится до половины скорости света. Сделать это следующим образом: перейти в систему электрона, там рассчитать его время, потом перейти обратно в систему наблюдателя.

Solution

Осталось только самому когда-то это сделать)

БЛ-1.3.3 Приход к генератору поворотов

Показать, что матрица поворота $R_x(\varphi)$ на угол φ вокруг оси x может быть представлена в виде матричной экспоненты $R_x(\varphi) = \exp(\varphi b_x)$, где b_x - некоторая неизвестная матрица (генератор поворота вокруг оси x). Найти в явном виде матрицу b_x . Записать матрицы поворотов и генераторы поворотов вокруг осей y и z .

Solution

Предположим, что матрицу поворота на угол φ вокруг оси x , т.е. матрицу преобразования $\underline{x} = R_x(\varphi)\underline{x}'$, действительно можно записать в виде матричной экспоненты

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \exp(\varphi b_x).$$

Мы используем матрицы 4×4 , поскольку рассматриваем повороты, как преобразования четырехмерного пространства Минковского. Дифференцируя по углу φ , находим

$$\left. \frac{dR_x(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = b_x \exp(\varphi b_x)|_{\varphi=0} = b_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для проверки вычислим экспоненту в явном виде, учитывая, что

$$b_x^0 = E, \quad b_x^{2k} = (-1)^{k+1} b_x^2, \quad b_x^{2k-1} = (-1)^{k+1} b_x$$

для всех $k = 1, 2, \dots$. В результате имеем

$$\exp(\varphi b_x) = E + b_x \sin \varphi + b_x^2 (1 - \cos \varphi),$$

что и приводит к матрице $R_x(\varphi)$.

Циклически переставляя пространственные столбцы и строки в матрице b_x , можно найти генераторы поворотов вокруг осей y и z . (?? это пока не совсем могу обосновать, хотя понятно, что это и легко проверить. потом мб напишу четче.)

БЛ-1.3.5 Переход систему координат, движущуюся под углом (????)

Начало координат системы K' движется со скоростью v относительно системы K , а оси координат составляют со скоростью $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ те же самые углы, что и оси системы K . Записать преобразование Лоренца от системы K к системе K' .

Solution

Введем единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$ и будем работать в системе единиц, в которой $c = 1$. Разложим радиус-вектор $\mathbf{r}$ на продольную и поперечную компоненты по отношению к скорости:

$$r_{\parallel i} = n_i n_j r_j, \quad r_{\perp i} = r_i - r_{\parallel i} = (\delta_{ij} - n_i n_j) r_j$$

и, аналогично,

$$r'_{\parallel i} = n_i n_j r'_j, \quad r'_{\perp i} = r'_i - r'_{\parallel i} = (\delta_{ij} - n_i n_j) r'_j$$

в системах отсчета K и K' соответственно. В этих обозначениях преобразование Лоренца имеет вид

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - v_j r_j), \\ r'_{\parallel i} = \gamma(r_{\parallel i} - v_i t), \\ r'_{\perp i} = r_{\perp i}, \quad \text{где} \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}; \\ \begin{cases} t' = \gamma(t - v_i r_i), \\ r'_i = -\gamma v_i t + (\delta_{ij} + (\gamma - 1)n_i n_j) r_j. \end{cases} \end{cases}$$

В четырехмерных обозначениях $x^\mu = (t, r_i)$ получаем: $x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$, где матрица преобразования Лоренца (т.е. буста) имеет вид

$$\Lambda_\nu^\mu(-\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_j^0 \\ \Lambda_0^i & \Lambda_j^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_j \\ -\gamma v_i & \delta_{ij} + (\gamma - 1)n_i n_j \end{pmatrix}.$$

В нашей задаче $n_i = (n_1, n_2, 0) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$, где φ - угол между скоростью $\mathbf{v}$ и осями координат x и x' .

БЛ-1.3.6 Положение координатных осей движущейся системы (??)

Начало координат системы K' движется со скоростью v относительно системы K , а оси координат составляют со скоростью $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ те же самые углы, что и оси системы K . Определить положение осей (x', y') системы K' в системе K в момент времени $t = 0$ по часам системы K .

(?? если же тут система именно в пространстве, почему вообще оси повернуться?? неужели я это не понимаю еще???)

Solution

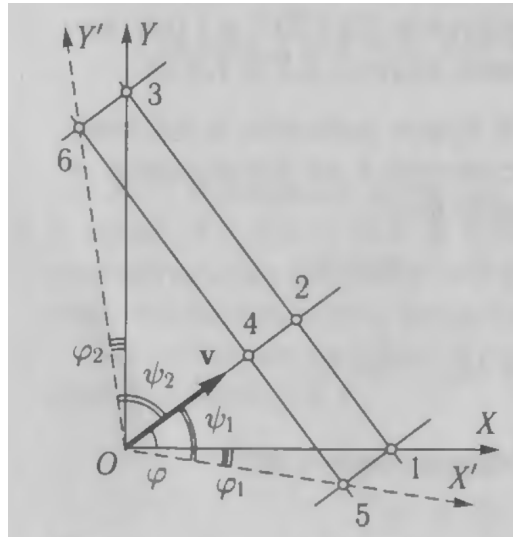
Уравнения, определяющие положение осей x' и y' в системе отсчета K в момент времени $t = 0$, имеют вид

$$\begin{aligned} y' = 0 &= y + (\gamma - 1)n_2(n_1x + n_2y) & (\text{ось } x'), \\ x' = 0 &= x + (\gamma - 1)n_1(n_1x + n_2y) & (\text{ось } y'), \end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} y &= -\frac{(\gamma - 1)n_1n_2}{1 + (\gamma - 1)n_2^2}x = -\frac{(\gamma - 1)\operatorname{tg} \varphi}{1 + \gamma \operatorname{tg}^2 \varphi}x & (\text{ось } x'), \\ y &= -\frac{1 + (\gamma - 1)n_1^2}{(\gamma - 1)n_1n_2}x = -\frac{1 + \gamma \operatorname{ctg}^2 \varphi}{(\gamma - 1)\operatorname{ctg} \varphi}x & (\text{ось } y'). \end{aligned}$$

Возможен геометрический способ решения этой задачи, использующий эффект лоренцева сокращения длины (рис. 1.1).



Проведем две прямые, перпендикулярные скорости v , на расстояниях l_{02} и $l_{04} = l_{02}\sqrt{1 - v^2}$ от общего в момент времени $t = t' = 0$ начала координат O и O' систем отсчета K и K' . 1-я из этих прямых будет пересекать оси x и y в точках 1 и 3. Затем через эти точки мы проведем прямые, параллельные скорости $\mathbf{v}$, до пересечения со второй прямой в точках 5 и 6. Тогда проходящие через точки 0 и 5 и точки 0 и 6 прямые и будут искомыми положениями осей x' и y' с точки зрения системы отсчета K в момент времени $t = 0$ по часам системы K . Обозначая $\angle 102 = \varphi$, $\angle 205 = \psi_1$, $\angle 206 = \psi_2$, $\angle 105 = \varphi_1 = \psi_1 - \varphi$, $\angle 603 = \varphi_2 = \psi_2 - (\pi/2 - \varphi)$, получим

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{l_{12}}{l_{04}} = \gamma \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{l_{23}}{l_{04}} = \gamma \operatorname{ctg} \varphi,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg}(\psi_1 - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \psi_1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \psi_1 \operatorname{tg} \varphi} = \frac{(\gamma - 1)\operatorname{tg} \varphi}{1 + \gamma \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \pi/2 + \varphi) = \frac{(\gamma - 1)\operatorname{ctg} \varphi}{1 + \gamma \operatorname{ctg}^2 \varphi}.$$

Последние две формулы и определяют положение осей системы отсчета K' .

Я.(3 мин?) Обычный разгон электрона

Пусть электрон помещен в постоянное электрическое поле. Сколько времени в ИСО пройдет, чтобы электрон разогнался до половины скорости света? Сколько времени в системе электрона? Как его скорость зависит от времени?

Solution

(Самому ещё потренироваться нужно в этом! А в своей СО сколько пройдет? Тут я сам хз еще.)

$$v = \frac{c \cdot q \cdot Et}{\sqrt{e^2 m^2 + q_e^2 E^2 t^2}} \text{ if } v = \frac{c}{2} \quad p = \frac{m \cdot c}{2\sqrt{1 - c_t^2}} = \frac{mc}{\sqrt{3}}$$

$$q_e Et \ll mc \quad v = \frac{q_e E \cdot t}{m} \quad \begin{cases} p = \frac{me}{\sqrt{3}} \\ p = q_e E \tau \end{cases} \quad \tau = \frac{m \cdot c}{\sqrt{3} \cdot q_e E}$$

Answer:

$$V = \frac{c \cdot q_e \cdot E \cdot t}{\sqrt{c^2 \cdot m^2 + q^2 \cdot E^2 \cdot t^2}} \quad \tau = \frac{m \cdot c}{\sqrt{3} \cdot q_e \cdot E}$$

(потом порешаю еще это, пока лень просто.)

25.1.2 Problems about Formalism of Relativity

BT1-3.12. преобразования Лоренца для произвольного 4-вектора

Записать формулы преобразования Лоренца для произвольного 4-вектора $A_i = (A_0, \mathbf{A})$ как функцию от A'_i , не предполагая, что скорость $\mathbf{V}$ системы S' относительно S параллельна оси x .

Solution

Суть решения в подстановке других знаков в уже выведенную формулу:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \gamma \frac{\mathbf{V}}{c} A'_0 + (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{A}' \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}}{V^2}, \quad A_0 = \gamma \left(A'_0 + \frac{\mathbf{A}' \cdot \mathbf{V}}{c} \right)$$

В задачке неверная формула в ответе, никаких векторных произведений тут нет.

BT1-3.11. Преобразования от S' к S для $\mathbf{r}$

Вывести формулы лоренцева преобразования от системы S' к системе S для радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и времени t , не предполагая, что скорость $\mathbf{V}$ системы S' относительно S параллельна оси x . Результат представить в векторной форме.

Указание. Разложить $\mathbf{r}$ на продольную и поперечную относительно $\mathbf{V}$ компоненты и воспользоваться преобразованиями Лоренца.

Solution

По сути можно просто переписать известную формулу, заменив в ней штрихи на отсутствие штрихов, а также v на $-v$.

Введем поперечную и продольную компоненты радиуса-вектора

$$r_{\parallel} = \mathbf{V} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{V^2}, \quad r'_{\parallel} = \mathbf{V} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}}{V^2};$$

$$r_{\perp} = \mathbf{r} - r_{\parallel}, \quad r'_{\perp} = \mathbf{r}' - r'_{\parallel}.$$

Применив к $r_{\parallel}$ и $r_{\perp}$ преобразования Лоренца (3.7), получим

$$r_{\parallel} = \gamma (r'_{\parallel} + \mathbf{V} t'), \quad r_{\perp} = r'_{\perp}$$

Окончательно:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \gamma \mathbf{V} t' + (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}}{V^2}, \quad t = \gamma \left(t' + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right).$$

Тут скалярное произведение легко раскрывается и сводится к полученной в теории формуле.

В задачке неверная формула в ответе, никаких векторных произведений тут нет. Проверю потом еще раз эту формулу.

БЛ-1.3.2 Приход к генератору бустов (?)

Показать, что матрица буста (преобразования Лоренца) вдоль оси x может быть представлена в виде матричной экспоненты $\Lambda_x(\theta) = \exp(\theta a_x)$, где θ - быстрота ($v/c = \text{th } \theta$), а a_x - неизвестная пока матрица (генератор буста вдоль оси x). Найти в явном виде матрицу a_x . Записать матрицы бустов и генераторы бустов вдоль осей y и z .

Solution

Предположим, в соответствии с условиями задачи, что матрицу буста для преобразования $\underline{x} = \Lambda_x \underline{x}'$ действительно можно записать в виде матричной экспоненты

$$\Lambda_x(\beta(\theta)) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(\theta a_x), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \text{th } \theta$$

где $\beta = v/c$. Продифференцируем это выражение по θ и положим $\theta = 0$:

$$\left. \frac{d\Lambda_x(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \frac{d\beta}{d\theta} \frac{d}{d\beta} \Lambda_x(\beta) \Big|_{\theta=0} = \frac{d}{d\beta} \Lambda_x(\beta) \Big|_{\beta=0} = a_x,$$

где мы учли, что $d\beta/d\theta|_{\theta=0} = 1$. Поскольку $d\gamma/d\beta|_{\beta=0} = 0$, мы находим генератор буста вдоль оси x :

$$\left. \frac{d\Lambda_x(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = a_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для проверки необходимо вычислить экспоненту в явном виде:

$$\exp(\theta a_x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} a_x^k.$$

Учитывая, что все нечетные степени a_x совпадают между собой, а также совпадают между собой все четные степени, кроме нулевой, т.е. $a_x^0 = E$, $a_x^{2k} = a_x^2$, $a_x^{2k-1} = a_x$ для всех $k = 1, 2, \dots$, получаем, что

$$\exp(\theta a_x) = E + a_x \text{sh } \theta + a_x^2 (\text{ch } \theta - 1) = \begin{pmatrix} \text{ch } \theta & \text{sh } \theta & 0 & 0 \\ \text{sh } \theta & \text{ch } \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где E - единичная матрица. Ясно, что $\gamma = \text{ch } \theta$, $\beta\gamma = \text{sh } \theta$, а поэтому условие $\beta = v/c = \text{th } \theta$ действительно позволяет параметризовать все относительные скорости систем отсчета, допустимые в специальной теории относительности, вещественными числами.

Переставляя столбцы и строки в матрицах, находим генераторы бустов для осей y и z :

$$a_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(!!? укажу в теорию теории поля лучше особенности бустов!)

25.1.3 Problems about Details of Poincare Group (!!???)

I.4 О связи параметров

Как связаны углы ϕ поворота в Евклидовом пространстве и некоторые компоненты матрицы $\omega_{\mu\nu}$ в пространстве Минковского?

25.1.4 Problems about Speeds, Time and Distances

BT1-3.5 Траектория равенства времен двух систем отсчета

Система S' движется относительно системы S со скоростью V . В момент, когда начала координат совпадали, находившиеся там часы обеих систем показывали одно и то же время $t = t' = 0$. Какие координаты в каждой из этих систем в дальнейшем будет иметь мировая точка, обладающая тем свойством, что находящиеся в ней часы систем S и S' показывают одно и то же время $t = t'$? Определить закон движения этой точки в обеих системах отсчета.

Solution

Суть решения в том, чтобы преобразования применить (???)
В системе S частица будет двигаться по закону

$$x = vt.$$

В системе S' частица будет двигаться по закону

$$x' = v't',$$

где скорость $v' = V_{\text{отн}}$ равна

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}}.$$

Координаты точки (x, t) и (x', t') всегда связаны как

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix},$$

где $\beta = \beta(V)$, $\gamma = \gamma(V)$. Отсюда так как $ct' = ct$,

$$ct = \gamma ct - \beta \gamma x = \gamma ct - \beta \gamma vt,$$

поэтому $v = c\beta \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$. Подставим, получим

$$v = \frac{c^2}{V} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right).$$

Из $v' = \frac{v-V}{1-\frac{Vv}{c^2}}$ находим

$$v' = -\frac{c^2}{V} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right).$$

Из этих формул видно, что точка, в которой $t = t'$, движется равномерно в каждой из систем S и S' . Если ввести систему отсчета, относительно которой эта точка неподвижна, то S и S' движутся в противоположные стороны с равными скоростями $V_0 = \frac{c^2}{V} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$. V_0 представляет собой релятивистскую «половину» скорости V в том смысле, что релятивистское сложение двух скоростей V_0 даст V .

BT1-3.9(м) Полет к системе Проксима-Центавра

Какой промежуток времени Δt занял бы по земным часам в годах полет ракеты до звездной системы Проксима-Центавра и обратно, если расстояние между ними 4 световых года, а полет бы осуществлялся с постоянной скоростью $v = \sqrt{0,9999}c$? Из расчета какой длительности путешествия следовало бы запастись продовольствием и снаряжением? Какова кинетическая энергия у ракеты в кВт·ч, если ее масса 10 т?

Примечание: 1 световой год - расстояние, на которое пролетает световой луч в вакууме за год, 1 кВт·ч = $3.6 \cdot 10^6$ Дж. Считать для простоты, что ракета мгновенно набирает скорость v , а также мгновенно поворачивает назад с той же скоростью. Пространство плоское и статичное. Скорость света считать равной $3 \cdot 10^8$ м/с, ответ если получен не точный, то округлить.

Solution

Суть решения в том, чтобы воспользоваться элементарными формулами:

$$\Delta t = 2 \frac{l}{v} = 2 \frac{4cT}{\sqrt{0,9999}c} \approx 8 \text{ лет.}$$

При расчете запасов снаряжения следует брать в основу промежутки времени по часам в ракете:

$$\Delta t_0 = 0,01 \Delta t \approx 1 \text{ месяц}$$

Кинетическая энергия это полная энергия минус собственная энергия:

$$T = \gamma mc^2 - mc^2 \approx 100 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 3^2 \cdot 10^{16} / (3.610^6) = 2,5 \cdot 10^{16} \text{ кВт-ч.}$$

Это количество энергии примерно в 100 раз превышает годовую выработку электроэнергии во всем мире в примерно 2020-м году, которое равно $140000 \text{ TWh} = 1.4 \cdot 10^5 \cdot 10^9 \text{ кВт-ч.}$

BT1-3.18(м) Длина палки в двигающейся навстречу системе

Две системы отсчета, каждая из которых имеет линейку масштаба l_0 , движутся навстречу друг другу с равными скоростями v относительно некоторой третьей системы отсчета. Какова масштаб линейки l из одной системы отсчета, измеренный в системе, движущейся навстречу первой?

Решение. Относительная скорость $V = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$, поэтому по $l = \frac{l_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$, получаем $l = l_0 \frac{1 - v^2/c^2}{1 + v^2/c^2}$.

BT1-3.20(м) Сравнение энергий налетающих частиц

Эффекты, возникающие при столкновении двух элементарных частиц, не зависят от равномерного движения этих частиц как целого; эти эффекты определяются лишь их относительной скоростью. Одну и ту же относительную скорость можно сообщить сталкивающимся частицам двумя способами (предполагается для простоты, что частицы обладают одинаковой массой m): а) два одинаковых ускорителя расположены так, чтобы частицы слетались направлены навстречу друг другу; каждый из ускорителей при этом должен разогнать частицы до энергии $\mathcal{E}_0$; б) один ускоритель разгоняет одну частицу до энергии $\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$, затем она ударяется о неподвижную такую же частицу.

Сравнить между собой значения $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_0$. Рассмотреть, в частности, ультрарелятивистский случай. Найти $\mathcal{E}$, если разгоняем электроны с $mc^2 = 0,5 \text{ МэВ}$, и $\mathcal{E}_0 = 50 \text{ МэВ}$?

Solution

Суть решения в том, чтобы вычислить энергии налетающих частиц в двух случаях, в обоих имеющих одинаковую скорость в СО мишени, используя формулы $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ и $V_{\text{отн}} = \frac{V+v}{1 + \frac{Vv}{c^2}}$.

Частицы должны сталкиваться с одной и той же скоростью в СО одной из частиц. В случае движения обеих частиц, скорость каждой частиц будет

$$v,$$

скорость их сближения $V \equiv V_{\text{отн}}$

$$V = \frac{v + v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

энергия каждой налетающей частицы

$$\mathcal{E}_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

отсюда

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2 c^4}{\mathcal{E}_0^2}.$$

В случае покоя одной частицы, налетающая частица должна иметь ту же скорость V , тогда ее энергия

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = mc^2 \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = mc^2 \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 \left[2 - \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)^2 \right] = mc^2 \left[2 \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 - 1 \right].$$

В ультрарелятивистском случае $\mathcal{E}_0 \gg mc^2$ и

$$\mathcal{E} \approx \frac{2\mathcal{E}_0^2}{mc^2}$$

Если ускорению подвергаются электроны ($mc^2 = 0,5$ МэВ), то, например, при $\mathcal{E}_0 = 50$ МэВ получается выигрыш мощности ускорителя в 200 раз: $\mathcal{E} = 10000$ МэВ

Сложности тут могут быть скорее всего, если запутаться в обозначениях или не понять, что конкретно имеется в виду в условиях задачи. Также, возможно, если не иметь готовыми обычные формулы СТО.

BT1-3.22. Квадрат 4-ускорения w_i^2

Определим 4-скорость и 4-ускорение как $u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)$, $w^i = \frac{du^i}{d\tau} = \frac{d^2x^i}{d\tau^2}$, где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ - трехмерная скорость частицы, $d\tau$ - дифференциал собственного времени.

Выразить компоненты четырехмерного ускорения w_i через обычное ускорение $\mathbf{v}$ и скорость $\mathbf{v}$ частицы. Найти w_i^2 . Пространственноподобно или времениподобно четырехмерное ускорение?

Solution

Тут нужно супер аккуратно преобразовать известные выражения. Очевидно также, что $\dot{\gamma}^2 = (????)$ (не записал это выражение), в итоге

$$\begin{aligned} w_i w^i &= \gamma^2 (\dot{\gamma}^2 c^2 - \dot{\gamma}^2 v^2 - 2\dot{\gamma} v \dot{v} - \gamma^2 a^2) = \\ &= \gamma^2 \left(\dot{\gamma}^2 \frac{c^2}{\gamma^2} - 2\dot{\gamma} v \dot{v} - \gamma^2 \dot{v}^2 \right) = \\ &= \gamma^2 \left(\gamma^4 \frac{v^2 \dot{v}^2}{c^2} - 2\dot{\gamma} \gamma^3 \frac{v^2 \dot{v}^2}{c^2} - \gamma^2 \dot{v}^2 \right) = \\ &= \gamma^6 \dot{v}^2 \left(\frac{v^2}{c^2} - 2\frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) = \\ &= -\gamma^4 \left[\dot{v}^2 + \gamma^2 v^2 \frac{\dot{v}^2}{c^2} \right] < 0 \end{aligned}$$

т.е. четырехмерное ускорение - пространственноподобный вектор. Это и очевидно, потому что в нерелятивистском случае производные от скоростей на пространственных компонентах, а нулевая компонента это ноль.

Мб потом перевыведу это, забыл тут, откуда одна формула берется. Чуть что вроде должен разобраться. Есть еще формула $w_i w^i = -\gamma^6 \left[\dot{v}^2 - \left(\dot{\mathbf{v}} \times \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 \right]$, откуда она???? я не знаю, ну и не важно.

BT1-3.25.(м) Время разгона Супер Соника

Ёж Соник для возвращения домой на планету Мобиус разгоняется до скорости $v = \sqrt{0,9999}c$. Ускорение соника $|\dot{\mathbf{v}}| = 20 \text{ м/с}^2$ в системе, мгновенно сопутствующей Соника. Сколько времени продлится его разгон по часам в неподвижной системе отсчета и по часам в ракете? Считать, что пространство плоское, гравитация на Соника не влияет, и он отталкивается от вакуума.

Solution.

Суть в том, что используем выведенную формулу $a = \gamma^{-3} a'$ и $dt = dv/a$, так что время разгона по часам в неподвижной системе:

$$T = \int \frac{dv}{a} = \frac{1}{|\dot{v}|} \int_0^v \frac{dv}{(1-v^2/c^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{v}{|\dot{v}| \sqrt{1-v^2/c^2}} = 47,5 \text{ лет.}$$

Тут я просто проверил, что тут производная от этого выражения равна подынтегральному выражению, пока не думал про то, как брать интеграл.

Время разгона по часам в системе, связанной с ракетой,

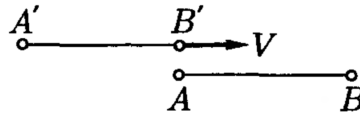
$$\tau = \frac{c}{2|\dot{v}|} \ln \left| \frac{1+v/c}{1-v/c} \right| = 2,5 \text{ года}$$

где $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$. Или можно воспользоваться выражением через уже найденное время $\tau = \int_0^T \frac{cdt}{\sqrt{c^2+a'^2 t^2}} = \frac{c}{a'} \text{ArcSh} \left(\frac{a'T}{c} \right)$.

У меня получился ответ, думаю, не сложно его чуть что воспроизвести, более точно писать нет времени. (????)

Жукарев-и-др.-2.1. Обычная синхронизация часов

Стержень $A'B'$ («поезд») движется с постоянной скоростью V относительно параллельного ему стержня AB («платформы»). Оба стержня имеют одинаковую собственную длину l_0 и на концах каждого из них установлены синхронизированные между собой часы: A с B и A' с B' .



Пусть в тот момент, когда часы B' поравнялись с часами A , совпадающие часы показывают одинаковое время t_0 . Определить показания всех часов в этот момент с точки зрения наблюдателя на «платформе» (система K) и с точки зрения наблюдателя в «поезде» (система K'). Определить в системах K и K' показания всех часов в моменты совпадения часов 1) A и A' , 2) B и B' , 3) B и A' .

Обзор решения.

Задача решается преобразованиями Лоренца для интервалов, просто мы находим от более «очевидной» точки к более далекой точке показаниях всех часов. Тут используются два эффекта: 1) что длина стержня сокращается, и 2) что время в точке системы K' , измеренное по часам в K будет отставать от точки, находящейся впереди вдоль скорости (соответственно, часы в точке впереди будут иметь больше времени). Это типичные свойства СТО.

Важно понимать, что когда мы фиксируем систему отсчета, мы 1) фиксируем тот момент, когда точки A и B' совпадали (потому что в другой системе отсчета это другой момент времени), 2) мы именно из этой системы отсчета мы и вычисляем времена в другой системе (каковы они относительно фиксированной?). Если бы мы фиксировали другую систему отсчета, то относительно нее все времена были бы другими. Также все (кроме двух) времена $t_A, t_B, t_{A'}, t_{B'}$ разные и разные в K и K' . Это потому что одновременное совпадение концов палки в одной системе отсчета не то же, что в другой системе отсчета.

По мелочам замечания следующие. Так как пунктов и вопросов в каждом пункте много, можно решать лишь пару из них. Время t_0 - просто тянем, хотя можно было бы и положить нулем и все. Важно писать ответы на каждый пункт, потому что вопросов много, легко запутаться в том, какой ответ на какой вопрос.

Solution в K .

Начало координат в системах K и K' выберем в точке совпадения часов A и B' . Обратим внимание на тот факт, что при выводе преобразований Лоренца считают, что при совпадении часов, расположенных в начале координат в системах K и K' , они показывают нуль.

Рассмотрим начальный момент времени. Для наблюдателя на «платформе» в начальный момент часы A и B' показывают t_0 по условию, часы B показывают t_0 согласно условию синхронизации. В системе K стержень $A'B'$ имеет длину $l_0\sqrt{1-\beta^2}$, где $\beta = V/c$, т.е. часы A' находятся в точке с координатой $\Delta x = -l_0\sqrt{1-\beta^2}$. Применяя преобразование Лоренца, находим добавление к отсчету часов A' : $\Delta t_{A'} = -\frac{V\Delta x}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{Vl_0}{c^2}$, то есть в начальный момент часы A' показывают $t_0 + Vl_0/c^2$.

Ответ для системы K , начального момента времени:

$$t_A = t_B = t_{B'} = t_0, t_{A'} = t_0 + Vl_0/c^2.$$

Рассмотрим момент совпадения часов A и A' . По часам системы K прошло время $t_{A=A'} = |A'B'|/V = l_0\sqrt{1-\beta^2}/V$. Поэтому синхронизированные между собой часы A и B показывают $t_0 + l_0\sqrt{1-\beta^2}/V$. По часам, движущимся в точках A' и B' , прошло время $d\tau = \frac{dt}{\gamma} = l_0(1-\beta^2)/V$, поэтому часы B' будут показывать $t_0 + l_0(1-\beta^2)/V$, а часы A' будут показывать на $\frac{Vl_0}{c^2}$ больше, то есть $t_0 + l_0/V$.

Ответ для системы K , совпадений A и A' :

$$t_A = t_B = t_0 + l_0\sqrt{1-\beta^2}/V, t_{A'} = t_0 + l_0/V, t_{B'} = t_0 + l_0(1-\beta^2)/V.$$

В момент совпадения часов B и B' в системе K прошло $t_{B=B'} = l_0/V$, а в системе K' прошло $d\tau_{B=B'} = t_{B=B'}/\gamma = l_0\sqrt{1-\beta^2}/V$. Поэтому часы A и B будут показывать $t_0 + l_0/V$, а показания часов B' и A' равны, соответственно $t_0 + l_0\sqrt{1-\beta^2}/V$ и $t_0 + l_0(\beta^2 + \sqrt{1-\beta^2})/V$.

Ответ для системы K , совпадений B и B' :

$$t_A = t_B = t_0 + l_0/V, t_{A'} = t_0 + l_0(\beta^2 + \sqrt{1-\beta^2})/V, t_{B'} = t_0 + l_0\sqrt{1-\beta^2}/V.$$

В момент совпадения часов **B** и **A'**, часы **A** и **B** показывают $t_0 + (l_0 + l_0/\gamma)/V = t_0 + l_0(1 + \sqrt{1 - \beta^2})/V$, часы **B'** показывают $t_0 + l_0\sqrt{1 - \beta^2}(1 + \sqrt{1 - \beta^2})/V$, а часы **A'** показывают $t_0 + l_0(1 + \sqrt{1 - \beta^2})/V$. (больше на Vl_0/c^2)

Ответ для системы K, совпадений B и A':

$$t_A = t_B = t_0 + l_0(1 + \sqrt{1 - \beta^2})/V, t_{A'} = t_0 + l_0(1 + \sqrt{1 - \beta^2})/V, t_{B'} = t_0 + l_0\sqrt{1 - \beta^2}(1 + \sqrt{1 - \beta^2})/V.$$

Solution в K'.

С точки зрения наблюдателя в «поезде», в начальный момент часы **A'**, **B'** и **A** показывают t_0 . Часы **B** движутся со скоростью $-V$ и находятся в точке с координатой $\Delta x' = l_0\sqrt{1 - \beta^2}$. Из преобразований Лоренца находим

$$\Delta t = \frac{V\Delta x'}{c^2\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{Vl_0}{c^2}.$$

Поэтому часы **B** показывают $t_0 + Vl_0/c^2$.

Ответ для системы K', начального момента:

Поступая аналогично предыдущему, находим, что при совпадении часов **A** и **A'** показания будут:

Ответ для системы K', совпадений A и A': $t_{A'} = t_{B'} = t_0 + l_0/V$; $t_A = t_0 + l_0\sqrt{1 - \beta^2}/V$; $t_B = t_0 + l_0(\beta^2 + \sqrt{1 - \beta^2})/V$.

При совпадении часов **B** и **B'** имеем

Ответ для системы K', совпадений B и B': $t_{A'} = t_{B'} = t_0 + l_0\sqrt{1 - \beta^2}/V$; $t_A = t_0 + l_0(1 - \beta^2)/V$; $t_B = t_0 + l_0/V$.

Читатель без труда найдет показания всех часов в системе **K'** при совпадении часов **B** и **A'**.

Ответ для системы K', совпадений B и A':

(со следующей тренировкой и найду.)

А что было бы, если бы были разные длины у палок?

(пока не решал, не сложно, просто не актуально. чуть созрею больше - впишу решение, те же формулы, только чуть сложнее!)

Жукарев-и-др.-2.2. Связь времени в 1-ой системе координат с временем в 3-ей (хорошая задача)

Системы координат **K'** и **K''** движутся относительно системы **K** со скоростями V_1 и V_2 вдоль оси X . С точки зрения системы **K** стрелка часов в системе **K'** делает один оборот за время Δt . Какой промежуток времени $\Delta t''$ проходит при этом в системе **K''**?

Solution.

Этот промежуток сходу пишется преобразованием Лоренца от заданного промежутка времени, главное увидеть в условии, что расстояние для преобразования Лоренца элементарно находится из скорости:

$$\Delta t'' = \frac{\Delta t - \Delta x V_2/c^2}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}, \quad \beta_2 = V_2/c.$$

Подставим $\Delta x = V_1 \Delta t$, получим

$$\Delta t'' = \left(1 - \frac{V_1 V_2}{c^2}\right) \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}, \quad \beta_2 = V_2/c.$$

Кстати, само время в **K'** нам не нужно знать, но чуть что оно $t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta_1^2}}$, $x = V_1 \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta_1^2}}$.

Жукарев-и-др.-2.3. Время в системе ракеты на равноускоренное прохождение расстояния

Космическая ракета движется с ускорением **W'**, одинаковым в каждой инерциальной системе, мгновенно сопутствующей ракете. Сколько времени по часам, находящимся в ракете, потребуется для преодоления расстояния S от места старта?

Указание: Если общая формула получается большой, то можно записать ее через некоторый параметр, для которого написать формулу.

Solution.

Находим аккуратно время в пути T' как функцию от конечной скорости V_f , последнюю выражаем через пройденное расстояние S .

С помощью $W = W' (1 - \beta^2)^{3/2}$ и $dt' = dt \sqrt{1 - \beta^2}$ считаем полное время по часам в ракете:

$$T' = \int dt' = \int dt \sqrt{1 - \beta^2} = \int \frac{dV \sqrt{1 - \beta^2}}{W} = \frac{1}{W'} \int \frac{dV}{1 - \beta^2} = \frac{c}{2W'} \ln \frac{1 + V_f/c}{1 - V_f/c},$$

где V_f - конечная скорость ракеты в K -системе.

В итоге пройденное от места старта расстояние

$$S = \int V dt = \int \frac{V dV}{W} = \frac{1}{W'} \int \frac{V dV}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \frac{c^2}{W'} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V_f^2/c^2}} - 1 \right).$$

Выражаем V_f^2/c и находим ответ.

$$\text{Ответ: } T' = \frac{1}{W'} \int \frac{dV}{1 - \beta^2} = \frac{c}{2W'} \ln \frac{1 + V_f/c}{1 - V_f/c}, \text{ где } \frac{V_f}{c} = \frac{\sqrt{(2 + W'S/c^2)(W'S/c^2)}}{1 + W'S/c^2}.$$

БЛ-1.3.7 Относительная скорость при непараллельном движении

Пусть у нас имеются 3 системы K_1, K_2 , и K' , и скорости всех их лежат в плоскости (x, y) лабораторной системы K . Скорость системы K_1 относительно K равна $\mathbf{v}_1 = (V_x, 0, 0)$, а скорость системы K' относительно K равна $\mathbf{V} = (V_x, V_y, 0)$. С какой скоростью $\mathbf{v}_2 = (V_{2x}, V_{2y}, 0)$ должна двигаться система K_2 относительно системы K_1 , чтобы она была неподвижна относительно системы K' , т.е. чтобы ее скорость относительно K была равна по модулю скорости K' ?

Solution

Задача в 1 строчку на релятивистский закон сложения скоростей.

Закон сложения скоростей имеет вид $v'_{\parallel} = \frac{v_{\parallel} - V}{1 - \frac{v_{\parallel} V}{c^2}}$, $v'_{\perp} = \frac{v_{\perp} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_{\parallel} V}{c^2}}$. Тут как раз $v'_{\parallel}, v'_{\perp}$ - компоненты требуемой относительной скорости, V - абсолютная скорость, равная скорости системы K , $v_{\parallel}, v_{\perp}$ - компоненты переносной скорости, то есть системы K_1 . Из условия задачи $v_{\parallel} = V_x, v_{\perp} = V_y, V = V_x, v'_{\parallel} = V_{2x}, v'_{\perp} = V_{2y}$, поэтому

$$V_{2x} = \frac{V_x - V_x}{1 - \frac{V_x^2}{c^2}} = 0, \quad V_{2y} = \frac{V_y \sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}{1 - \frac{V_x^2}{c^2}} = \frac{V_y}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}} = \gamma_x V_y.$$

То есть система K_2 будет двигаться относительно системы K_1 со скоростью $\gamma_x V_y$ вдоль оси Y .

БЛ-1.3.8(м) Поворота системы координат после буста (!??)

Пусть у нас имеются 3 системы K_1, K_2 , и K' , и скорости всех их лежат в плоскости (x, y) лабораторной системы K . Скорость системы K_1 относительно K равна $\mathbf{v}_1 = (V_x, 0, 0)$, а скорость системы K' относительно K равна $\mathbf{V} = (V_x, V_y, 0)$. Система K_2 движется относительно системы K_1 так, что она остается неподвижна относительно системы K' , т.е. ее скорость относительно K равна по модулю скорости K' . Можно показать, что в этом случае ее скорость относительно K_1 со равна $\gamma_x V_y$ и направлена вдоль оси Y . Оси координат K' составляют со скоростью $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ те же самые углы, что и оси системы K .

На какой угол будут повернуты оси координат системы отсчета K_2 по отношению к осям системы K' ?

Solution

(!!! суть решения укажу????!!!!)

(!! решу сперва 1.3.7)

Хотя системы K' и K_2 движутся относительно лабораторной системы координат K с одинаковыми скоростями, но их оси оказываются по разному ориентированными по отношению к направлению скорости $\mathbf{V} = (V_x, V_y, 0)$. Это связано с тем, что два последовательных преобразования Лоренца $K \rightarrow K_1 \rightarrow K_2$

с относительными скоростями, не параллельными друг другу, т.е. $\mathbf{v}_1 = (V_x, 0, 0)$ и $\mathbf{v}_2 = (0, \gamma_x V_y, 0)$ не эквивалентны одному преобразованию Лоренца, а требуют еще и поворота осей системы отсчета K_2 .

При переходе от системы K' к системе отсчета K имеем соотношение $\underline{x} = \Lambda(\mathbf{V})\underline{x}'$, где $\mathbf{V} = (V_x, V_y, 0)$, где $\Lambda(\mathbf{V})$ - матрица преобразования Лоренца (см. Задачу 1.3.5). (???? чего не со знаками -V????)

Далее, при переходе от системы K_2 к системе K_1 будет

$$\underline{x}_1 = \Lambda(\mathbf{v}_2)\underline{x}_2, \quad \text{где} \quad \mathbf{v}_2 = (0, \gamma_x V_y, 0).$$

И наконец для перехода от системы K_1 к K получим

$$\underline{x} = \Lambda(\mathbf{v}_1)\underline{x}_1, \quad \text{где} \quad \mathbf{v}_1 = (V_x, 0, 0).$$

Таким образом,

$$\underline{x} = \Lambda(\mathbf{v}_1)\underline{x}_1 = \Lambda(\mathbf{v}_1)\Lambda(\mathbf{v}_2)\underline{x}_2 = \Lambda(\mathbf{V})\underline{x}'.$$

Отсюда мы имеем следующее условие связи:

$$\underline{x}' = \Lambda(-\mathbf{V})\Lambda(\mathbf{v}_1)\Lambda(\mathbf{v}_2)\underline{x}_2.$$

Используя результаты задач 1.3.5 и 1.3.7, получаем, приравнявая результат матрице поворота в плоскости (x, y) :

$$\underline{x}' = \Lambda(-\mathbf{V})\Lambda(\mathbf{v}_1)\Lambda(\mathbf{v}_2)\underline{x}_2 = R(\theta)\underline{x}_2,$$

где θ - угол поворота вокруг оси z . В явном виде будем иметь

$$\begin{aligned} \underline{x}' &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & 0 \\ -\gamma\beta_x & \gamma n_x^2 + n_y^2 & (\gamma-1)n_x n_y & 0 \\ -\gamma\beta_y & (\gamma-1)n_x n_y & n_x^2 + \gamma n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_x & \gamma_x \beta_x & 0 & 0 \\ \gamma_x \beta_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma/\gamma_x & 0 & \gamma\beta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma\beta_y & 0 & \gamma/\gamma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_x}{\gamma} (n_x^2 + \gamma n_y^2) & \frac{\gamma_x}{\gamma} (\gamma-1)n_x n_y & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma_x}{\gamma} (\gamma-1)n_x n_y & \frac{\gamma_x}{\gamma} (n_x^2 + \gamma n_y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{V}/V$ - единичный вектор в направлении скорости $\mathbf{V}$ с компонентами $\mathbf{n} = (n_x, n_y, 0) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$, а также

$$\gamma_x = \frac{1}{(1 - \beta_x^2)^{1/2}} = \frac{\gamma}{\cos \varphi (1 + \gamma^2 \tan^2 \varphi)^{1/2}}, \quad \gamma = \frac{1}{(1 - (\beta_x^2 + \beta_y^2))^{1/2}}.$$

Угол поворота осей системы отсчета K_2 по отношению к осям системы K' определяется формулами

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{(\gamma-1) \sin \varphi}{(1 + \gamma^2 \tan^2 \varphi)^{1/2}}, \quad \cos \theta = \frac{\cos \varphi (1 + \gamma \tan^2 \varphi)}{(1 + \gamma^2 \tan^2 \varphi)^{1/2}}, \\ \tan \theta &= \frac{(\gamma-1) \tan \varphi}{1 + \gamma \tan^2 \varphi}; \quad \begin{cases} x' = \cos \theta x_2 + \sin \theta y_2, \\ y' = -\sin \theta x_2 + \cos \theta y_2. \end{cases} \end{aligned}$$

У Белоусова ужасно написано условие, плюс еще отсылка на другие задачи, такое невозможно решать.

Я. Поворота системы координат после буста (!??)

Пусть имеются две системы K' и K , причем K' движется со скоростью $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ относительно системы K . Система K' видит отдаляющуюся систему K со скоростью $-\vec{v}$, исходя из этого в ней наблюдатель выделяет инверсией направление $\vec{v}$. Оси координат K' составляют с этим направлением те же самые углы, что и оси системы K со скоростью $\vec{v}$. На какой угол будут повернуты оси координат системы отсчета K_2 по отношению к осям системы K' ?

(??? возможно, формулировка задачи кривая.)

Solution

(???? не знаю, я пока тренируюсь, не готов решать такое. потом будет свободное время - еще раз порешаю.)

Я хз, нулевой этот угол вообще или нет?

БЛ-1.3.9 Поворот спина под действием силы (????)

На частицу, движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$, действует сила, сообщающая ей ускорение $\dot{\mathbf{v}}$. Определить, с какой угловой скоростью будет поворачиваться спин частицы (прецессия Томаса) относительно лабораторной системы отсчета, если сила, действующая на частицу, не действует на ее спин.

Указание: под спином понимать просто направление, параллельное осям координат в плоскости, где происходит движение. Известно, что (?? результат 1.3.8)

Solution

(!?!?!? тут отсылка на 1.3.8 большая, так что сперва нужно ее понять, потом эту разобрать.)

Пусть частица движется со скоростью $\mathbf{v}$ вдоль положительного направления оси x лабораторной системы отсчета K (см. Задачу 1.3.8). Пусть за малый промежуток времени δt скорость частицы изменилась на величину $\delta \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} \delta t$. Если считать, что частица покоится в системе K_2 , а сила, действующая на нее (например, на ее заряд, если это электрическое поле), вызывает только изменение скорости, не затрагивая ее спин ¹⁾, то изменение направления спина при этом носит кинематический характер, связанный с релятивистским эффектом, описанным в задаче 1.3.8.

Направление спина остается неизменным в системе K_2 (инерциальная мгновенно сопутствующая система отсчета), но оси системы K_2 поворачиваются относительно системы K' (при $\delta \mathbf{v} = 0$ или $\delta t = 0$ направления осей в системах K_2, K' и в лабораторной системе K совпадают). Таким образом, имеет место прецессия мгновенно сопутствующей системы отсчета и, соответственно, прецессия спина (прецессия Томаса). Для вычисления скорости томасовской прецессии воспользуемся результатами задачи 1.3.8. В рамках нашей задачи будем считать, что

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \delta \mathbf{v} = (v + \delta v_x, \delta v_y, 0), \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}_{\parallel} = (v + \delta v_x, 0, 0),$$

$$\mathbf{v}_2 = \left(0, \frac{\delta v_y}{\sqrt{1 - \frac{(v + \delta v_x)^2}{c^2}}}, 0 \right).$$

Формула, связывающая угол поворота координатных осей θ с углом φ , определяющим направление скорости $\mathbf{V}$ ($\tan \varphi = V_y/V_x$)

$$\tan \theta = \frac{(\gamma - 1) \tan \varphi}{1 + \gamma \tan^2 \varphi}$$

при малых углах θ и φ (нас интересуют малые промежутки времени δt) дает

$$\theta \simeq (\gamma - 1)\varphi.$$

Учитывая, что $\theta = \omega \delta t$ (ω - угловая скорость прецессии Томаса), а также

$$\varphi \simeq \frac{\delta v_y}{v + \delta v_x} \simeq \frac{\delta v_y}{v} = \frac{w \delta t}{v},$$

где $w = |\dot{\mathbf{v}}|$ - абсолютная величина ускорения частицы, получим

$$\omega = (\gamma - 1) \frac{v \omega}{v^2} = \frac{\gamma^2 v \omega}{(1 + \gamma) c^2}$$

В векторной форме данное выражение имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma) c^2} [\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v}].$$

Мы учли, что θ - угол поворота системы K_2 относительно K' по часовой стрелке, т.е. $\boldsymbol{\omega} = -\omega \mathbf{e}_z$, $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$, $\dot{\mathbf{v}} = w \mathbf{e}_y$, где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ - орты системы отсчета K .

БЛ-1.3.10 Разность дохода сигналов от движущихся источников

Два движущихся с одинаковой скоростью v вдоль одной прямой источника одновременно (в системе источников) испускают световые импульсы. Расстояние между источниками (в системе источников) составляет l . С каким временным интервалом световые сигналы будут получены приемником, расположенным на прямой, по которой движутся источники, впереди по ходу движения?

Solution через координатный вывод формул.

Задача на эффект Доплера, можно зная его формулу из теории $l\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ сразу написать ответ. А можно вывести его

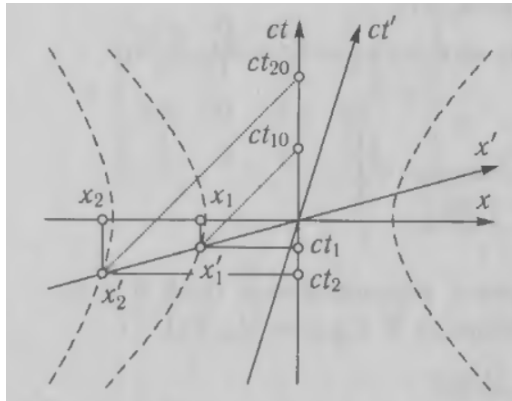
Испускание световых сигналов в системе K происходит не одновременно, а в моменты, которые можно найти через буст из K' :

$$\begin{aligned} ct_1 &= \gamma(ct'_1 + \beta x'_1), \\ ct_2 &= \gamma(ct'_2 + \beta x'_2), \end{aligned}$$

где $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. По условию $x'_2 = x'_1 - l$ и $t'_1 = t'_2$, откуда получаем

$$ct_2 - ct_1 = \gamma\beta(x'_2 - x'_1) = -\gamma\beta l.$$

Происходит следующая картина:



Прием наблюдателем световых сигналов произойдет при пересечении мировых линий сигналов $ct - ct_1 = x - x_1$ и $ct - ct_2 = x - x_2$ (ведь $c = \Delta x / \Delta t$) и мировой линии наблюдателя $x = 0$. Поэтому моменты приема сигналов t_{20}, t_{10} найдутся из:

$$ct_{20} = ct_2 - x_2, \quad ct_{10} = ct_1 - x_1.$$

Отсюда

$$t_{20} - t_{10} = t_2 - t_1 + (x_1 - x_2)/c,$$

где $x_1 - x_2 = \gamma\beta\Delta t' + \gamma\Delta l = \gamma\Delta l \equiv \gamma l$. Получаем:

$$t_{20} - t_{10} = \gamma\beta l/c + \gamma l/c = \frac{l}{c} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

Решение это очень замысловатое, прикольно его понять, но очевидно, что хотелось бы более легко воспроизводимое решение иметь.

Кстати, можно было написать, что (!!?)

$$x_1 - x_2 = (ct_1 - ct_2)\beta + l\sqrt{1-\beta^2} = l\gamma,$$

поскольку в системе K расстояние между источниками вследствие лоренцева сокращения есть $l\sqrt{1-\beta^2}$, но x_1 и x_2 взяты в разные моменты времени, и источники успевают сместиться на $(t_1 - t_2)v$. Я что-то не совсем знаком с такой логикой рассуждений, потом подумаю про них больше. Мб укажу, что так тоже можно рассуждать. А может, это полный бред, решение из Белоусова ведь, не удивительно.

Solution через 4-волновой вектор (???)

(??? когда-то потом посмотрю, про 4-волновой вектор еще не отработал метод, не актуально.)

Задачу можно решить проще, если ввести 4-мерный волновой вектор $\underline{k}$. Представим себе, что два световых импульса распространяются вместе с двумя последовательными максимумами радиоволны. Для этой волны в системе источников длина волны и период задаются расстоянием между источниками $\lambda' = cT' = l$, $\omega' = 2\pi c/l$, поэтому

$$\underline{k}' = (2\pi/l, 2\pi/l, 0, 0).$$

В системе отсчета наблюдателя получаем

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\pi/l \\ 2\pi/l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{l}\gamma(1+\beta) \\ \frac{2\pi}{l}\gamma(1+\beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В этой системе будет выполняться

$$\omega = \frac{2\pi c}{l}\gamma(1+\beta) = \frac{2\pi c(1+\beta)}{l\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2\pi}{T},$$

и мы приходим к тому же самому результату:

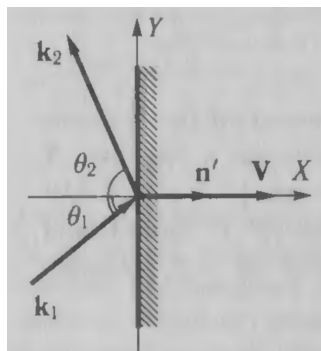
$$cT = l\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

25.1.5 Problems about Physical Effects of Relativity

Обсудим задачи про интересные модели и явления в рамках СТО.

БЛ-1.3.11 Отражение света от движущегося зеркала (????)

Плоское зеркало движется со скоростью v в направлении своей нормали. На зеркало падает монохроматическая волна с частотой ω_1 под углом θ_1 к нормали. Определить направление и частоту отраженной волны, считая, что для покоящегося зеркала справедлив обычный закон отражения. Указание: ввести 4-мерные волновые векторы.



(?? надо еще чуть потренироваться, перерешать ee!)

Solution через 3 матрицы преобразований.

Суть в том, что вводим 4 вектора и преобразуем их по смыслу задачи. (напишу потом, если не поленюсь.)

Solution через преобразования 4-векторов и 4-нормалей.

Суть в том, что мы можем записать закон отражения через 4-вектора волнового вектора и вектора нормали в подвижной системе, а далее через соображение ковариантности получить уравнение для отражения в неподвижной системе координат.

(снова задача на 4-волной вектор, мб пропишу уже этот метод в теорию? перепишу потом лучше решение!!!)

В системе покоя зеркала K' угол падения равен углу отражения, частота волны при отражении не меняется:

$$\begin{cases} \omega'_1 = \omega'_2, \\ (\mathbf{k}'_1 \mathbf{n}) = -(\mathbf{k}'_2 \mathbf{n}), \\ \mathbf{k}'_1 - (\mathbf{k}'_1 \mathbf{n}) \mathbf{n} = \mathbf{k}'_2 - (\mathbf{k}'_2 \mathbf{n}) \mathbf{n}. \end{cases}$$

Исключая из последней формулы $(\mathbf{k}'_2 \mathbf{n})$, получаем

$$\begin{cases} \omega'_2 = \omega'_1, \\ \mathbf{k}'_2 = \mathbf{k}'_1 - 2(\mathbf{k}'_1 \mathbf{n}) \mathbf{n}. \end{cases}$$

Для записи этих формул в 4-векторной форме введем в системе отсчета K' 4-вектор нормали к зеркалу $\underline{n}' = (0, \mathbf{n})$, где $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$. Это чисто пространственный вектор. В лабораторной системе K будем иметь

$$\begin{cases} n^0 = \gamma (n'^0 + \beta) = \gamma\beta, \\ n^1 = \gamma (1 + \beta n'^0) = \gamma, \\ n^2 = n'^2 = 0 \\ n^3 = n'^3 = 0 \end{cases}$$

То есть

$$\underline{n} = (\gamma\beta, \gamma\mathbf{n}),$$

где $\beta = V/c$.

Далее что происходит: у нас вектор нормали в K' постоянен и направлен вдоль оси X . Сопоставим ему 4-вектор. Первая его компонента ноль, потому что сам вектор расположен только в 3д пространстве (вдоль оси X), но не во времени. Далее преобразуем его к неподвижной системе обычными преобразованиями Лоренца, получаем 4-вектор в неподвижной системе. Далее, квадрат 4-вектора (в метрике Минковского) инвариантен, так что получаем следующую строчку тождеств. Вроде это не нужно.

Для иллюстрации понимания можно записать свойства 4-нормалей. Из $\mathbf{n}^2 = 1$ следует, что $\underline{n}'^2 = -\mathbf{n}^2 = -1 = \underline{n}^2 = \gamma^2 (\beta^2 - 1)$.

4-вектор $\underline{k} = (\omega/c, \mathbf{k}) = \omega/c(1, \mathbf{k}/k)$. В системе K' запишем в 4-форме полученное выше равенство, учтя знак минус в метрике Минковского:

$$\underline{k}'_2 = \underline{k}'_1 + 2 (\underline{k}'_1 \underline{n}') \underline{n}'.$$

В силу ковариантности последнего соотношения в лабораторной системе отсчета K оно такое же:

$$\underline{k}_2 = \underline{k}_1 + 2 (\underline{k}_1 \underline{n}) \underline{n}.$$

В компонентах эта формула имеет вид

$$\omega_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{n}_2 \end{pmatrix} = \omega_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{n}_1 \end{pmatrix} + 2\omega_1 \gamma^2 (\beta - (\mathbf{n}\mathbf{n}_1)) \begin{pmatrix} \beta \\ \mathbf{n} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{n}_1 = c\mathbf{k}_1/\omega_1, \mathbf{n}_2 = c\mathbf{k}_2/\omega_2$.

Для частот мы получаем следующее условие связи:

$$\omega_2 = (1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta_1) \gamma^2 \omega_1.$$

Для пространственных компонент получим условие после домножения на вектор $\mathbf{n}$. Используем по определению, что $(\mathbf{n}\mathbf{n}_2) = -\cos \theta_2$, здесь знак “-” важен. Получим

$$\cos \theta_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{(1 + \beta^2) \cos \theta_1 - 2\beta}{1 - \beta^2} = \frac{(1 + \beta^2) \cos \theta_1 - 2\beta}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta_1}.$$

Дальше, 4-волновой вектор можно записать в виде формулы, которая написана, заметив, что нулевая компонента вектора нормали в K' равна нулю, а для пространственных компонент мы уже имеем формулу выше. Минус из-за метрики Минковского учтен в скалярном произведении. В лабораторной системе это тождество такое, по той причине, которую я сказал на занятии, проверьте, если есть вопросы про это. Дальше просто подставляем вектора $\mathbf{k}$ и $\mathbf{n}$ по их смыслу и по формуле для $\mathbf{n}$. Тут плохо написано, потому что одни скобки означают скалярное произведение 3-векторов, а другие, где есть запятая, - 4-векторов.

Тут для 1-й компоненты - формула ниже, для пространственной домножаем скалярно на вектор и получаем следующую формулу. Тут в промежуточном равенстве, думаю, ошибка, косинус должен домножаться на скобку, которая в правом равенстве.

Дальше в тригонометрии ошибка, первый множитель в числителе в первой дроби должен быть другой. Далее после деления и перехода к тангенсам должен вылезти корень из первой дроби, а не она. Но вот и ответ.

Про то, что дальше написано, я тут подумал, не вижу в этом смысла.

Это и ответ. Но можно от косинуса перейти к тангенсу половинного угла.

$$1 - \cos \theta_2 = 2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} = \frac{(1 + \beta)^2 (1 - \cos \theta_1)}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta_1}$$

$$1 + \cos \theta_2 = 2 \cos^2 \frac{\theta_2}{2} = \frac{(1 - \beta^2) (1 + \cos \theta_1)}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta_1},$$

Тут $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$, так что

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}, \text{ и поэтому } \theta_2 > \theta_1.$$

В Белоусове в этой задаче много опечаток и какой-то лютой херни.

БЛ-1.3.12 Метрика во вращающейся системе отсчета

Перейдите в равномерно вращающуюся систему отсчета (систему отсчета наблюдателя, движущегося равномерно по окружности). Как в этой системе отсчета выглядит метрический тензор? Пусть один из близнецов остается в покое, а другой движется по окружности. Кто из близнецов будет младше, когда они встретятся?

Solution

Нужно аккуратно преобразовать метрику, сделав замену в цилиндрической системе координат. В системе наблюдателя, движущегося по окружности, $\varphi' = \varphi + \Omega t$. Положим $c = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2 = \\ &= dt^2 - dr^2 - r^2 (d\varphi' - \Omega dt)^2 - dz^2 = \\ &= (1 - r^2 \Omega^2) dt^2 + 2r^2 \Omega d\varphi' dt - dr^2 - r^2 d\varphi'^2 - dz^2 = \\ &= [1 - (x'^2 + y'^2) \Omega^2] dt^2 + \Omega (x' dy' - y' dx') dt - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \end{aligned}$$

Соответствующий метрический тензор задается матрицей

$$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - (x'^2 + y'^2) \Omega^2 & -\Omega y' & \Omega x' & 0 \\ -\Omega y' & -1 & 0 & 0 \\ \Omega x' & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Старше будет неподвижный близнец (интервал между двумя точками, разделенными времениподобным интервалом, максимален вдоль прямой).
(??? почему???)

БЛ-1.3.13 Эффект Саньяка

Определить разность фаз при распространении света с частотой ω по и против часовой стрелки по вращающемуся кольцевому волноводу радиуса R с коэффициентом преломления n . Данный эффект называется эффектом Саньяка и используется для определения угловой скорости вращения в лазерных гироскопах.

Solution

(в теории целый раздел про это)

Будем решать задачу в инерциальной (не вращающейся) системе, связанной с центром кольцевого волновода.

Волновой 4-вектор для света с частотой ω , распространяющегося вдоль оси x в неподвижной среде с коэффициентом преломления n , имеет вид

$$\underline{k}'_{\pm} = \frac{1}{c}(\omega, \pm n\omega, 0, 0).$$

Это соответствует волновому вектору в сопутствующей системе отсчета для света, распространяющегося по направлению вращения (+) и против направления вращения (-):

$$\underline{c}_{\pm} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \pm n\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\gamma(1 \pm n\beta) \\ \pm\omega\gamma(n \pm \beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, волновое число для света, распространяющегося по и против вращения, составляет по абсолютной величине

$$ck_{\pm} = \omega\gamma(n \pm \beta).$$

Будем считать, что датчик расположен в диаметрально противоположной точке по отношению к источнику. Чтоб достичь датчика, свет должен пройти половину окружности πR в ту или другую сторону. Набег фазы составляет

$$\varphi_{\pm} = k_{\pm} \pi R = \frac{\omega\gamma(n \pm \beta)\pi R}{c}.$$

Разность фаз будет равна

$$\delta\varphi = \varphi_{+} - \varphi_{-} = \frac{\omega\gamma 2\beta\pi R}{c}.$$

Если волновод вращается с угловой скоростью $\Omega = v/R$, то

$$\delta\varphi = \frac{2\gamma}{c^2} \omega \Omega \pi R^2 = \frac{2\gamma}{c^2} \omega \Omega S.$$

В низшем порядке по $\beta = v/c$ будет $\gamma \approx 1$, и мы получаем

$$\delta\varphi = \frac{2\omega\Omega S}{c^2}$$

Учет отличия γ от 1 был бы в данном случае превышением точности: в специальной теории относительности вращающееся тело не может иметь ту же геометрию, что и поступательно движущееся. Учет $\gamma \neq 1$ потребовал бы расчета релятивистских упругих деформаций во вращающемся интерферометре. Такой расчет существенно более сложен, и кроме того он зависит от конструкции интерферометра.

25.2 General Questions about SR and the Poincaré Group

25.2.1 Questions to Test Understanding of SR and the Poincaré Group

25.2.2 Short questions about SR

БЛ-1.3.1 Два преобразования Лоренца

Записать произведение двух последовательных преобразований Лоренца для скоростей $v_1/c = \tanh \theta_1$ и $v_2/c = \tanh \theta_2$, направленных вдоль оси x . Является ли результирующее преобразование преобразованием Лоренца? Если да, то какой скорости $\tau/c = \tanh \theta$ оно соответствует?

Answer

Является. $v/c = \tanh(\theta_1 + \theta_2)$.

БЛ-1.3.4 Инвариантность элемента объема

Показать, что элемент объема $d^4x = c dt dx dy dz$ инвариантен при поворотах, преобразованиях Лоренца и их комбинациях.

Answer

При замене координат элемент объема умножается на модуль якобиана: $d^4x = d^4x' \cdot |Dx/Dx'|$. Для поворотов и бустов $|Dx/Dx'| = 1$.

(добавлю потом явный вид соответствующих матриц в БЛ-1.3.2 и БЛ-1.3.3. ?? мб матан подтяну, решу задачу более красиво.)

25.2.3 Philosophical Questions about SR

Have we moved?

Suppose we are on a train and we are slowly started to move and then became moving with a constant speed. How can we prove that we are moving?

Solution

(да вот как-то вроде как никак, ибо у нас эквивалентная точно такая же физика, какая и была. честно, не знаю, потом подумаю про это.)

25.2.4 Questions about Well-known Details of Relativity

25.2.5 Questions about Other Details of Relativity and Consequences

Что особенного, если у нас система со спином $3/2$?

(напишу потом ответ, пока не до этого.)

Как будет выглядеть квантование спина не равного 1?

Ответ в том, что абсолютно так же, как и для любого другого.
(напишу с формулами, сравню.)

26 Free Fields

26.1 Problems on General Properties of Fields

26.1.1 Problems about Symmetries of Fields

Явно о токе

Глобальные калибровочные преобразования

$$\Phi^u(x) = e^{-ie u} \Phi(x), \quad \partial_\mu u \equiv 0,$$

имеем $dS_{mf} = du \cdot 0 = 0$

Покажите в явном виде для какой-то функции u , как меняются множители, и почему в итоге общий дифференциал действия такой же.

Solution

(????? проблема, что я не понимаю, что такое du , если производная ноль. не знаю, почитаю другое место про это, но идея задачи понятна. потом допишу ее.)

26.2 Properties of Free Fields

(Из Степаньянаца многое добавлю!!!)

26.2.1 Problems about Scalar Field

Я.(15 мин) Введение в скалярное поле

Из теории группы Пуанкаре следует, что для скалярного поля $\varphi(x)$, которое по определению отвечает представлению $(0,0)$ группы Лоренца, $J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} = (x_\nu p_\mu - x_\mu p_\nu)$. Вектор Паули-Любаньского равен $W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\nu J^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\nu (x^\beta P^\alpha - x^\alpha P^\beta) = 0$. Условие, определяющие массивное неприводимое представление $P^2 = m^2$, а в скалярном представлении $P_\mu = i\partial_\mu$, поэтому получаем

$$(\square + m^2) \varphi(x) = 0$$

Это уравнение называется уравнением Клейна-Гордона. При нулевой массе из него следует волновое уравнение.

Прокомментируйте все тут переходы. Что это за метод, почему такие мы пишем уравнение? Как могло бы быть иначе (напишите с формулами)? Напишите подробно, представив, что у вас об этом спрашивает школьник, который знает только преобразования Лоренца.

Комментирование

(да все по теории, о чем говорить?)

Пример скалярного поля: поле $\phi = \cos(x)$

(для такого поля плюс еще в какой-то коробке найти импульс, энергию, т.п. сделаю потом)
(вообще, пару еще задач такого характера добавлю и решу, потому что все-таки иллюстрация тут очень полезна)

26.2.2 Problems about Dirac Field (?)

(see the note on QFT about it!!)

FP-2.21

It is well known that the Lagrangian density of a field theory can be changed by adding a total divergence $\partial_\mu B^\mu$, since the Euler-Lagrange equations are unaffected. Show that the addition of $\frac{1}{2}\partial_\mu (\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)$ brings the action to the form

$$S' = - \int d^D x \left[\frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \right].$$

Here the antisymmetric derivative is defined as $A \overleftrightarrow{\partial}_\mu B \equiv A (\partial_\mu B) - (\partial_\mu A) B$.

The advantage of the form (2.61) of the Dirac theory is that the Lagrangian density $\mathcal{L}'$ is hermitian as an operator in Hilbert space.

FP-2.22

Show that the Noether stress tensor obtained using $\mathcal{L}'$ is

$$T'_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu \Psi + \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}'$$

Show that $T'_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} = \partial^\rho S_{\rho\mu\nu}$ where the tensor $S_{\rho\mu\nu}$ satisfies $S_{\rho\mu\nu} = -S_{\mu\rho\nu}$, as in the discussion of improved Noether currents in Sec. 1.3.

FP-2.23

Show that the addition of $\Delta T_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \partial^\rho (\bar{\Psi} \{ \Sigma_{\rho\mu}, \gamma_\nu \} \Psi)$ to $T'_{\mu\nu}$ produces the symmetric energy-momentum tensor

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \bar{\Psi} \left(\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \right) \Psi + \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}'$$

Note that symmetry currents are evaluated 'on-shell', i.e. one should assume that Ψ and $\bar{\Psi}$ satisfy the Dirac equation. The last term $\mathcal{L}'$ then vanishes.

FP-2.24

Consider the variation $\delta(\lambda)\Psi = -\frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma}(\Sigma_{\rho\sigma} + L_{[\rho\sigma]})\Psi$, where $L_{[\rho\sigma]}$ was defined in (1.38), under infinitesimal Lorentz transformations and the analogue for $\delta\bar{\Psi}$. These variations may be obtained using (2.21) and (2.23). Show that the Noether current and Lorentz generators $M_{[\rho\sigma]}$ can be written in the form of (1.74), but using the symmetric stress tensor (2.64).

26.2.3 Problems about other spinor fields (?)

26.2.4 Problems about Nonabelian Gauge Fields (?)

(???)

26.2.5 Typical Problems about the Standard Model (?)

(пока на всякий случай раздел создан)

26.3 General questions about free fields

(there are a lot of them, since there are a lot of problems like "what is going on???" so, maybe it is not a good idea to think about it in the beginning of learning)

26.3.1 Quick questions to test your understanding of the formalism of field theory

Приведу вопросы для проверки знаний, которые по идее должны отвечаться за минуты размышлений.

О виде уравнения Клейна-Гордона

Уравнения Клейна-Гордона можно записать в виде $\square\varphi(x) + m^2\varphi(x) = 0$, а можно в и виде $(p^2 - m^2c^2)\varphi(x) = 0$. Почему у массового члена разные знаки?

Ответ

Потому что у нас в определении импульса мнимая единица! Это может быть очевидно, если знаешь ответ, в то же время если не знаешь, можно прилично посидеть над этим, прежде чем понять, что всего-то в мнимой единице в определении оператора импульса дело.

Klein Gordon practice

Derive from Klein-Gordon equation its non relativistic limit and Shrodinger's equation. Use the anzatz $\Psi \sim e^{-ipx}$.

Ответ

(вообще это в теории написано будет. просто нужно не ошибиться с размерностями и понимать сразу, где скорость света у нас стоит и какие размерности чего!!!)

О способе взаимодействия частицы с полем

частица взаимодействует с полем?

кТП тут кстати нужно.

а вот хз.

откуда у поля сила?

в общем, про частицу в полях много вопросов, пока не прорабатывал.

Переход классического поля в квантовое

как классические поля становятся квантовыми?

Вопрос этот становится принципиально важным, когда рассматриваем явления, описываемые квантовой теорией поля

границы применимости классической электродинамики

мы привыкли пользоваться уравнениями Максвелла, но когда они применимы?

почему?

важный вопрос.

26.3.2 Questions about Features of Formalism of Field Theory

(про всякие мелочи тут соберу вопросы)

26.3.3 Questions about Constructing Field Theories

Вывести уравнения Максвелла из ничего

(вот так чисто с нуля. соберу этот метод.)

Как понять, поле в природе какого типа?

(давно остается этот вопрос)

Вывести уравнения Максвелла из лагранжиана

Пусть у нас есть тензор, зависящий от вектора пространства Минковского $A_\mu = (A_0, -A_\alpha)$ в виде

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Выведите уравнения, которые следуют из действия вида:

$$S_{\text{field}} = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Вывести уравнения Эйнштейна из лагранжиана

Рассмотрим действие как функцию от метрики:

$$S = \int R \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} d\Omega,$$

где $R = g^{ik} R_{ik}$, g^{ik} - метрический тензор, а

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l, \quad \Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$$

Получите уравнения движения для такого действия. Записать их в терминах R_{ik} и R .

Лагранжиан с корнем

Итак, выше мы познакомились с $g_{\mu\nu}, F_{\mu\nu}$. Посмотрите, какие законы и уравнения можно получить, проварьировав Лагранжиан вида:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\det (g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})}$$

Вывести уравнения Эйнштейна

(вот так чисто с нуля. соберу этот метод.)

Как создать теорию поля из самой изначальной идеи полевого описания?

Допустим, мы поняли, что можно ввести понятие поля. Как прийти к уравнениям его динамики?
(созрею - пропишу)

Как вывести вид взаимодействие полей в действии?

соображения размерностей и перенормировок

смотрим на размерности спиноров, а далее составляем член в действии такой, чтобы их размерность сравнивается с величиной размерности пространства.

теория перенормировок говорит, что так вот мы сравниваем две разные размерности.

какие физические границы полей?

реальное там поле или спадет или резко обрывается?

а когда распространяется, как его передовой фронт выглядит?

(завис вопрос, пока отвечаю, что там в реальности какие-то функции затухания и склейки с другими полями добавляются, вряд ли тут что-то есть интересное, просто хотелось бы почитать про это где-то.)

26.3.4 Typical Questions of Field Electrodynamics

(многое тут уже могу собрать, позже займусь - соберу)

О свойствах уравнений электродинамики

Как выглядят уравнения электродинамики в нестандартных конфигурациях?

(ЭД в искривленном пространстве указываю и в веществе. в этом много путаницы, так что четко с формулами тут напишу суть. все пояснения и подробное описание в разделах ниже написано.)

Есть ли в законе Гаусса для электрического поля магнитное поле в общем случае?

Оказывается, в случае искривленного пространства, оно есть и там даже какие-то есть явления, следующие из этого. Напишу потом, как статьи пройду.

Можно ли модифицировать закон Кулона, чтобы он не давал бесконечное поле в точке заряда?

да, нпр. теорией Борна-Инфельда. потом явно пропишу, как это сделать.

О простейших моделях электродинамики

(тут указание сути самых интересных задач каталога)

Рассеяние электромагнитной волны на металлическом шаре

(задача Киселева, максимально типичная для электродинамики! очень часто её могу спрашивать, очень четко она покажет, владеет человек электродинамикой или нет, потому что она простая и сразу приходящая на ум.)

(оказывается, сечение много меньше геометрических размеров шара.)

Как выглядит поле от обычной частицы с постоянной скоростью

(сразу опустить можно того, кто не ответит на этот вопрос. потом потренируюсь, в ЛЛ2 это отвечено) (мб во введение снова перенесу, пока сам еще раз прорешаю это!)

The Liénard-Wiechert potentials (6.34) and (6.35) have the same basic structure that we for the Coulomb law in electrostatics and the Biot-Savart law in magnetostatics. The difference lies in the need to evaluate the potentials at time t' . But there is also the extra factor $1/(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}/c)$. To get a feel for this, let's look at a simple example. We'll take a particle which moves at constant speed in the $\hat{\mathbf{z}}$ direction, so that

$$\mathbf{r}(t) = vt\hat{\mathbf{z}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(t) = v\hat{\mathbf{z}}$$

To simplify life even further, we'll compute the potentials at a point in the $z = 0$ plane, so that $\mathbf{x} = (x, y, 0)$. We'll ask how the fields change as the particle passes through. The equation (6.36) to determine the retarded time becomes

$$t' + \sqrt{x^2 + y^2 + v^2 t'^2}/c = t$$

Squaring this equation (after first making the right-hand side $t - t'$) gives us a quadratic in t' ,

$$t'^2 - 2\gamma^2 t t' + \gamma^2 (t^2 - r^2/c^2) = 0$$

where we see the factor $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, familiar from special relativity naturally emerging. The quadratic has two roots. We're interested in the one with the minus sign, corresponding to the retarded time. This is

$$t' = \gamma^2 t - \frac{\gamma}{c} \sqrt{v^2 t^2 + r^2/\gamma^2}$$

We now need to deal with the various factors in the numerator of the Liénard-Wiechert potential (6.34). Pleasingly, they combine together nicely. We have $R(t') = c(t - t')$. Meanwhile, $\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t') = (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{r}(t') \cdot \mathbf{v} = -v^2 t'$ since we've taken $\mathbf{x}$ to lie perpendicular to $\mathbf{v}$. Put together, this gives us

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[1 + v^2 t'/c(t - t')]} \frac{1}{c(t - t')} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c(t - t') + v^2 t'} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c(t - t'/\gamma^2)} \end{aligned}$$

But, using our solution (6.37), this becomes

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[v^2 t^2 + (x^2 + y^2)/\gamma^2]}$$

Similarly, the vector potential is

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{v}}{[v^2 t^2 + (x^2 + y^2)/\gamma^2]}$$

How should we interpret these results? The distance from the particle to the point $\mathbf{x}$ is $r^2 = x^2 + y^2 + v^2 t^2$. The potentials look very close to those due to a particle a distance r away, but with one difference: there is a contraction in the x and y directions. Of course, we know very well what this means: it is the usual Lorentz contraction in special relativity.

27 Gauge Fields

(I'll learn them later, it is more theoretical topic, then one for problem-solution part)

27.1 Problems on Gauge Field Models

27.1.1 Problems about Different Gauge-Field Models

(см. дополнения для ссылки на лекции Троицкого, если пока не проработал их еще)

Троицкий-л10-76.

Показать, что функции $F(r)$ и $H(r)$ стремятся к своим вакуумным значениям при $r \rightarrow \infty$ экспоненциально, если $m_H \sim m_W$. Исследовать их асимптотики в пределе Богомольного.

Троицкий-л10-77. Найти число нулевых мод для малых возмущений около монополя

Solution

(монополи заново учить нужно)

Троицкий-л10-78.

Показать, что нельзя причесать ежа, то есть перевести монополярную конфигурацию из калибровки $A_0 = 0$ в унитарную калибровку всюду регулярным калибровочным преобразованием.

Solution

Троицкий-л10-79.

Добавляя в теорию с монополем 'т Хоффа-Полякова новые скалярные поля без вакуумного среднего, преобразующиеся по всевозможным представлениям группы $SU(2)$, показать, что минимальный возможный электрический заряд в этой модели равен $g/2$, так что условие квантования Дирака выполняется уже на классическом уровне.

Solution

Троицкий-л10-80. Топологические солитоны (????)

Показать, что топологические солитоны возникают в моделях с нарушением любой компактной простой группы G до $U(1)$ по механизму Хиггса и что их магнитные заряды по этой $U(1)$ отличны от нуля. Изучить также случай полупростых групп G .

Solution

27.2 Problems on Special Fields and Rare Constructions

27.2.1 Problems about Fields in Dimension $d < 3$

27.2.2 Problems about Instantons, Monopoles, Solitons (???)

27.2.3 Problems about Higher-Rank Tensor Fields (?)

(it is maybe useless)

27.2.4 Problems about Field Theory in Curved Space (?)

(от степаньянца, я хз вообще.)

27.2.5 Problems about anomalies in field theory (???)

(мб в ктп это лучше писать.)

28 Electrodynamics

28.1 Formalism of electrodynamics

28.1.1 Problems on the properties of Maxwell's equations (!?)

(нужно бы потренироваться в них!!)

Б-1.4.2

Два уравнения Максвелла позволяют вычислить производные по времени от полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, если эти поля заданы в на некоторой гиперплоскости $t = \text{const}$:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \text{rot } \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \text{rot } \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{j}.$$

Другие два уравнения Максвелла

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho$$

не содержат производных по времени, поэтому их выполнение может быть проверено на отдельной гиперповерхности $t = t_0$. Пусть уравнения (2) проверены для начальных условий, заданных в некоторый момент времени $t = t_0$. Далее поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ вычислены для произвольных моментов времени с помощью уравнений (1). При каком условии уравнения (2) будут справедливы при произвольном t , отличном от t_0 ?

Solution

1.4.2. Уравнение $\text{div } \mathbf{H} = 0$ будет выполняться при всех t всегда. Уравнение $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho$ будет выполняться тогда и только тогда, когда всюду выполнено уравнение непрерывности $\partial \rho / \partial t + \text{div } \mathbf{j} = 0$.

Уравнения, включающие дивергенции полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, можно рассматривать не как динамические уравнения, а как уравнения, определяющие начальные условия.

Б-1.4.3 Добавление монополей

Модифицировать первую пару уравнений Максвелла, включив в нее плотность магнитных зарядов (магнитных монополей) ρ_m и плотность тока магнитных монополей $\mathbf{j}_m$ таким образом, чтобы для них выполнялось уравнение непрерывности. Решить задачу 1.4.2 для модифицированных уравнений.

Solution

1.4.3. Первая пара в присутствии магнитных монополей: $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m$, $\text{div } \mathbf{H} = 4\pi \rho_m$. В задаче 1.4.2 условием выполнения уравнения $\text{div } \mathbf{H} = 4\pi \rho_m$ станет уравнение непрерывности для монополей: $\partial \rho_m / \partial t + \text{div } \mathbf{j}_m = 0$.

Б-1.4.4

Переписать уравнения Максвелла в терминах комплексного векторного поля $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$. Как изменится такая форма уравнений Максвелла в присутствии магнитных монополей (см. задачу 1.4.3)?

Solution

1.4.4. Комплексная запись уравнений Максвелла: $\text{div } \mathbf{F} = 4\pi\rho$, $\text{rot } \mathbf{F} = \frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{4\pi i}{c} \mathbf{j}$. В присутствии магнитных монополей величины ρ_m и $\mathbf{j}_m$ входят в уравнения как мнимые части ρ и $\mathbf{j}$, т.е. $\rho = \rho_e + i\rho_m$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_e + i\mathbf{j}_m$. Здесь ρ_e и $\mathbf{j}_e$ - плотности электрических зарядов и токов.

Заметим, что комплексные уравнения Максвелла симметричны (в силу их линейности) относительно одновременного умножения $\mathbf{F}$, ρ и $\mathbf{j}$ на произвольный ненулевой комплексный множитель. В частности умножение на $-i$ соответствует переходу от тензора $F_{\mu\nu}$ к дуальному тензору $\tilde{F}_{\mu\nu}$.

Б-1.4.5

Подставив в уравнения Максвелла (в трехмерном виде) выражения для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ через потенциалы φ и $\mathbf{A}$, получить полевые уравнения для потенциалов. К какому виду при этом сводится первая пара уравнений Максвелла?

Solution

1.4.5. Первая пара уравнений Максвелла дает тождество. Из второй пары получаем

$$\Delta\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} = -4\pi\rho,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta + c^2 \text{grad div} \right) \mathbf{A} + c \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 4\pi c \mathbf{j}.$$

Б-1.4.6

Подставив в уравнения Максвелла (в четырехмерном виде) выражения для полей $F_{\mu\nu}$ через потенциалы A_μ , получить полевые уравнения для потенциалов.

К какому виду при этом сводится первая пара уравнений Максвелла?

Solution

1.4.6. Первая пара уравнений Максвелла дает тождество. Из второй пары получаем $-\partial_\nu \partial'' A^\mu + \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$, или $\square A^\mu + \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$.

Б-1.4.7

Какой вид принимают полевые уравнения для потенциалов при наложении калибровочного условия $\partial_\mu A^\mu = 0$, т.е. $\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0$ (калибровка Лоренца) в трехмерных и четырехмерных обозначениях?

Solution

1.4.7. В трехмерной записи:

$$\square\varphi = -4\pi\rho, \quad \square\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \text{где } \square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

В четырехмерной записи: $\square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$, где $\square = -\partial_\nu \partial^\nu$.

Б-1.4.8

Какой вид принимают полевые уравнения для потенциалов при наложении калибровочного условия $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (калибровка Кулона) в трехмерных обозначениях?

Solution

$$1.4.8. \Delta \varphi = -4\pi\rho, \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{A} + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Б-1.4.9

Какой вид принимают полевые уравнения для потенциалов при наложении калибровочного условия $\varphi = 0$ (калибровка Вейля) в трехмерных обозначениях?

Solution

$$1.4.9. \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -4\pi\rho, \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \operatorname{grad} \operatorname{div} \right) \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

Б-1.4.10

В калибровке $\varphi = 0$ параметризовать постоянное однородное электромагнитное поле общего вида ($\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ - два произвольных постоянных вектора) с помощью векторного потенциала $\mathbf{A}$.

Solution

$$1.4.10. \mathbf{A} = -ct\mathbf{E} + \frac{1}{2}[\mathbf{H} \times \mathbf{r}]$$

Б-1.4.11

Для потенциалов $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ общего вида найти калибровочные преобразования, после выполнения которых будут выполнены калибровочные условия:

- 1) $\partial_\mu A^\mu = 0$, т.е. $\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (калибровка Лоренца);
- 2) $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (калибровка Кулона);
- 3) $\varphi = 0$ (калибровка Вейля).

Solution

$$1.4.11. \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \operatorname{grad} f \text{ или } A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f. \quad 1) \square f = \partial_\nu A^\nu; \quad 2) \Delta f = \operatorname{div} \mathbf{A}; \quad 3) \frac{\partial f}{\partial t} = -c\varphi.$$

Б-1.4.12

Найти вид остаточных калибровочных преобразований (условие на функцию f) для каждой из калибровок:

- 1) $\partial_\mu A^\mu = 0$, т.е. $\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (калибровка Лоренца);
- 2) $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (калибровка Кулона);
- 3) $\varphi = 0$ (калибровка Вейля).

Solution

$$1.4.12. \quad 1) \square f = 0; \quad 2) \Delta f = 0; \quad 3) \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Б-1.4.13 Следствия калибровочной инвариантности

Показать, что из условия инвариантности действия для электромагнитного поля относительно калибровочных преобразований следует уравнение непрерывности для зарядов и токов.

Solution

1.4.13. Тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ инвариантен относительно калибровочных преобразований, поэтому единственный член, инвариантность которого надо проверить, - действие взаимодействия:

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \int_U A_\mu j^\mu d^4x,$$

где U - четырехмерная область интегрирования в пространстве-времени.

При калибровочных преобразованиях изменяется четырехмерный потенциал: $\delta A_\mu = \partial_\mu f$, вследствие этого происходит изменение действия:

$$\delta S_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \int_U (\partial_\mu f) j^\mu d^4x = \frac{1}{c} \int_U (-\partial_\mu (f j^\mu) + f \partial_\mu j^\mu) d^4x.$$

Первый член в полученном равенстве является полной 4-дивергенцией, его можно переписать как интеграл по границе области U - трехмерной поверхности ∂U , поэтому

$$\delta S_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \oint_{\partial U} f j^\mu dV_\mu + \frac{1}{c} \int_U f (\partial_\mu j^\mu) d^4x.$$

Выберем функцию f так, чтобы она обращалась в нуль на границе U . Теперь условие инвариантности действия при калибровочном преобразовании сводится к равенству

$$\delta S_{\text{int}} = \frac{1}{c} \int_U f (\partial_\mu j^\mu) d^4x = 0.$$

Это условие должно выполняться для произвольной функции f , обращающейся в нуль на границе области интегрирования. Таким образом, всюду в области интегрирования должно выполняться уравнение непрерывности для зарядов и токов:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0,$$

и это является еще одной иллюстрацией теоремы Нётер: инвариантности теории относительно калибровочных преобразований отвечает закон сохранения электрического тока.

Б-1.4.14 Тензор энергии-импульса в электродинамике

Действие для электромагнитного поля имеет вид (см. (I.11))

$$S_{\text{field}} [A(x)] = - \int \frac{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{16\pi c} d^4x = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d^4x.$$

Получить тензор энергии импульса $\tilde{T}^{\mu\nu}$ согласно формуле (I.13). Является ли данный тензор калибровочно-инвариантным?

Solution

Известная формула из теории.

1.4.14. В соответствии с формулой (I.13) имеем

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= -\delta \frac{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{16\pi} = -\frac{F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}}{8\pi} = -\frac{F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu)}{8\pi} = -\frac{F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu}{4\pi}; \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\lambda)} &= -\frac{F^{\mu\lambda}}{4\pi}, \end{aligned}$$

откуда получаем выражение для канонического тензора энергии-импульса:

$$\tilde{T}^\mu_\nu = -\frac{F^{\mu\lambda}}{4\pi} \partial_\nu A_\lambda + \delta^\mu_\nu \frac{F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda}}{16\pi}.$$

Тензор $\tilde{T}^\mu_\nu$ не является калибровочно-инвариантным, поскольку выражение $\partial_\nu A_\lambda$ не является калибровочно-инвариантным.

Б-1.4.15 Симметризация тензора энергии-импульса в электродинамике

Подобрать такую добавку $\delta T^{\mu\nu}$ к тензору энергии-импульса из задачи 1.4.14, чтобы новый тензор энергии импульса $T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} + \delta T^{\mu\nu}$ был симметричен, причем $\partial_\mu \delta T^{\mu\nu} = 0$ при условии выполнения уравнений Максвелла без источников. Является ли тензор $T^{\mu\nu}$ калибровочно-инвариантным? Проверить, что $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ в отсутствие источников поля.

Solution

Известная формула из теории.

1.4.15. Естественно попробовать модифицировать тензор $\tilde{T}^\mu{}_\nu$ из предыдущей задачи так, чтобы он полностью выражался через тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. Для этого надо дополнить выражение $\partial_\nu A_\lambda$ до $F_{\nu\lambda} = \partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu$. То есть мы предполагаем, что новый тензор имеет вид

$$T^\mu{}_\nu = -\frac{F^{\mu\lambda}F_{\nu\lambda}}{4\pi} + \delta^\mu{}_\nu \frac{F^{*\lambda}F_{x\lambda}}{16\pi}, \quad \delta T^\mu{}_\nu = \frac{F^{\mu\lambda}}{4\pi} \partial_\lambda A_\nu.$$

Поднимая второй индекс, получим

$$T^{\mu\nu} = -\frac{F^{\mu\lambda}F^{\nu\lambda}}{4\pi} + g^{\mu\nu} \frac{F^{*\lambda}F_{x\lambda}}{16\pi}, \quad \delta T^{\mu\nu} = \frac{F^{\mu\lambda}}{4\pi} \partial_\lambda A^\nu.$$

Используя четырехмерную запись уравнений Максвелла и полагая $j^\mu = 0$, проверяем, что $\partial_\mu \delta T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu}$. (См. также решение задачи 1.4.16). Тензор $T^{\mu\nu}$ калибровочно-инвариантен в силу того, что выражается через калибровочно-инвариантный тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$.

Б-1.4.16 Баланс энергии-импульса

Вычислить $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ для тензора из задачи 1.4.15 при наличии зарядов и токов. Получить уравнения баланса энергии-импульса.

Solution

1.4.16. Дифференцируя тензор энергии-импульса, имеем

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^\mu{}_\nu &= -\partial_\mu \frac{F^{\mu\lambda}F_{\nu\lambda}}{4\pi} + \partial_\nu \frac{F^{\mu\lambda}F_{\mu\lambda}}{16\pi} = \\ &= -\frac{(\partial_\mu F^{\mu\lambda})}{4\pi} F_{\nu\lambda} - F^{\mu\lambda} \frac{\partial_\mu F_{\nu\lambda}}{4\pi} + F^{\mu\lambda} \frac{\partial_\nu F_{\mu\lambda}}{8\pi} = \\ &= -\frac{1}{c} j^\lambda F_{\nu\lambda} - F^{\mu\lambda} \frac{1}{8\pi} (2\partial_\mu F_{\nu\lambda} - \partial_\nu F_{\mu\lambda}) = \\ &= -\frac{1}{c} j^\lambda F_{\nu\lambda} - F^{\mu\lambda} \frac{1}{8\pi} (\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}) = -\frac{1}{c} j^\lambda F_{\nu\lambda}, \end{aligned}$$

и это полностью соответствует (I.16). Здесь были использованы уравнения Максвелла. При $\nu = 0$ отсюда можно получить уравнение баланса энергии, а при $\nu = n = 1, 2, 3$ - уравнение баланса импульса (см. (I.17)).

Б-1.4.17

Найти след тензора энергии-импульса $T^\mu{}_\mu$ для электромагнитного поля.

Solution

1.4.17. $T^\mu{}_\mu = 0$.
(?? а почему???)

Б-1.4.18 Давление на конденсатор

Найти давление на обкладку плоского тонкого конденсатора без диэлектрика.

Solution

1.4.18. Вне тонкого плоского конденсатора электрическое поле $E = 0$. Внутри $E = 4\pi\sigma$, где σ - поверхностная плотность заряда на пластине. Таким образом, если пластины лежат в плоскостях $z = 0$ (положительно заряженная) и $z = a$ (отрицательно заряженная), то электрическое поле и плотность заряда имеют вид

$$\mathbf{E} = 4\pi\sigma\mathbf{e}_z\theta(z)\theta(a-z), \quad \rho = \sigma(\delta(z) - \delta(z-a)).$$

Здесь $\theta(z)$ - θ -функция Хевисайда (Д.13). 1) На поверхности пластины электрическое поле испытывает скачок, поэтому мы не можем непосредственно воспользоваться формулой Для плотности силы $\rho\mathbf{E}$, поскольку произведение данных обобщенных функций не определено (разрывы θ -функций приходится как раз на поверхности, на которых локализован заряд). Чтобы доопределить произведение $\rho\mathbf{E}$, можно рассуждать двумя способами. а) Поле $\mathbf{E}$ представляет собой суперпозицию полей, создаваемых отдельными пластинами, причем силу взаимодействия пластины с собственным полем следует считать равной нулю. Таким образом,

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho_1 = \sigma\delta(z), \quad \rho_2 = -\sigma\delta(z-a), \\ \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{E}_1 = 2\pi\sigma\mathbf{e}_z \operatorname{sgn}(z), \quad \mathbf{E}_2 = 2\pi\sigma\mathbf{e}_z \operatorname{sgn}(a-z).$$

Произведения $\mathbf{E}_1\rho_2$ и $\mathbf{E}_2\rho_1$ хорошо определены. Давление, действующее на первую пластину, равно

$$P_1 = \int \rho_1 E_{2z} dz = 2\pi\sigma^2.$$

б) Мы можем рассмотреть бесконечно тонкую пластину, как предельный случай пластины конечной толщины d , равномерно заряженной по объему. В этом случае внутри пластин поле будет изменяться линейно от нуля до максимального значения. Регуляризованные таким образом величины имеют вид

$$\mathbf{E} = 4\pi\sigma\mathbf{e}_z \begin{cases} 0, & z < -d, \\ (z+d)/d, & -d \leq z \leq 0, \\ 1, & 0 < z < a, \\ (z-a)/d, & a \leq z \leq a+d, \\ 0, & z > a+d, \end{cases} \\ \rho = \frac{\sigma}{d}(\theta(z+d)\theta(-z) - \theta(z-a)\theta(a+d-z)).$$

Давление, действующее на первую пластину, равно

$$P_1 = \int_{-d}^0 \rho E_z dz = 2\pi\sigma^2.$$

2) Компонента σ_{zz} тензора напряжений Максвелла соответствует давлению (отрицательное давление - это натяжение) вдоль оси z и имеет вид

$$\sigma_{zz} = -\frac{E^2}{8\pi} = -2\pi\sigma^2\theta(z)\theta(a-z).$$

Перепад давления на поверхности равен давлению, действующему на данную поверхность:

$$P_1 = \sigma_{zz}(0-\varepsilon) - \sigma_{zz}(0+\varepsilon) = 2\pi\sigma^2.$$

Б-1.4.19 Давление на соленоид

Найти давление на стенку соленоида без сердечника:

- 1) исходя из плотности силы $\frac{1}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$;
- 2) исходя из перепада давления магнитного поля.

Solution

Ход решения практически полностью совпадает с ходом решения задачи I.4.18.

Вне длинного соленоида магнитное поле $H = 0$. Внутри $H = (4\pi/c)J$, где J - поверхностная плотность тока в обмотке соленоида. Таким образом, если обмотка лежит на поверхности цилиндра $r = a$ ($r^2 = x^2 + y^2$) и образует правый винт с осью z , то

$$\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}J\mathbf{e}_z\theta(a-r), \quad \mathbf{j} = J1\delta(a-r), \quad \mathbf{1} = (-y/r, x/r, 0).$$

1) На поверхности обмотки магнитное поле испытывает скачок, поэтому мы не можем прямо воспользоваться формулой для плотности силы $\frac{1}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$, так как произведение данных обобщенных функций не определено (разрывы θ -функций приходится как раз на поверхности, на которых локализован ток). Чтобы доопределить произведение $\frac{1}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$, можно рассуждать двумя способами. а) Поле $\mathbf{H}$ представляет собой суперпозицию полей, создаваемых отдельными участками обмотки, причем силу взаимодействия участка обмотки с собственным полем следует считать равной нулю. В отличие от задачи 1.4.18 обмотка связана и не может быть естественным образом разбита на два участка. Выделим маленький участок обмотки с размерами много меньше a .

Поле, создаваемое всеми остальными участками на поверхности рассматриваемого участка, будет непрерывным. Сам участок в малой окрестности (много меньше его размеров) создает поле, аналогичное полю бесконечной плоскости, по которой течет однородный поверхностный ток $\mathbf{J}$. Так, если мы выделили участок обмотки вокруг точки $(a, 0, 0)$, то ток на этом участке (в малой окрестности) равен

$$\mathbf{j}_1 = J\mathbf{e}_y\delta(x-a),$$

а создаваемое этим участком поле (в малой окрестности) равно

$$\mathbf{H}_1 = 2\pi J\mathbf{e}_z \operatorname{sgn}(a-x).$$

Вычитая $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H} - \mathbf{H}_1$, получаем, что магнитное поле, создаваемое остальными участками намотки, есть среднее арифметическое между полями внутри и снаружи соленоида.

Произведение $\frac{1}{c}[\mathbf{j}_1 \times \mathbf{H}_2]$ хорошо определено. Давление, действующее на обмотку, направлено наружу и равно

$$P_1 = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} j_{1y} H_{2z} dx = \frac{2\pi}{c^2} J^2.$$

б) Мы можем рассмотреть бесконечно тонкую обмотку, как предельный случай обмотки конечной толщины d с постоянной плотностью тока. Аналогично задаче 1.4.18, в этом случае внутри обмотки поле меняется линейно от нуля до максимального значения, и мы легко получаем тот же ответ. 2) Компоненты $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ тензора напряжений Максвелла соответствуют давлению вдоль осей x и y :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{H^2}{8\pi} \theta(a-r) = \frac{2\pi}{c^2} J^2 \theta(a-r).$$

Поскольку $\sigma_{xy} = 0$, а $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, в плоскости (x, y) давление изотропно. Перепад давления на поверхности задает давление, действующее на данную поверхность:

$$P = \sigma_{yy}(a-\epsilon) - \sigma_{yy}(a+\epsilon) = \frac{2\pi}{c^2} J^2.$$

28.1.2 Problems about the free electromagnetic field

(тут будут задачи из Белоусова и мб что-нибудь еще)

Б-1.7.1 О свойствах волны

Каким условиям должны удовлетворять комплексная амплитуда плоской монохроматической волны $A_0^\mu = (A_0^0, \mathbf{A}_0)$ и волновой 4-вектор $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$?

1.7.1. Амплитуда волны и волновой 4-вектор должны удовлетворять условиям: $A_0^\mu k_\mu = 0$ и $k^\mu k_\mu = 0$, или в трехмерных обозначениях: $A_0^0 \omega - (\mathbf{A}_0 \mathbf{k}) = 0$ и $(1/c^2) \omega^2 - \mathbf{k}^2 = 0$.

Б-1.7.2

Найти тензор энергии-импульса плоской линейно поляризованной монохроматической бегущей волны.

1.7.2. Для плоской волны, бегущей вдоль оси z , отличны от нуля следующие компоненты тензора энергии-импульса: - $T^{00} = w = (E^2 + H^2)/(8\pi) = E^2/(4\pi)$ - плотность энергии; - $T^{03} = T^{30} = S_z/c = w$ - плотность потока энергии (S_z) и объемная плотность импульса (S_z/c^2) вдоль оси z ; - $T^{33} = \sigma_{zz} = w$ - давление вдоль оси z .

Б-1.7.3

Найти тензор энергии-импульса плоской линейно поляризованной монохроматической стоячей волны.

Solution

1.7.3. Зададим стоячую волну потенциалом

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos(\omega t) \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}).$$

Если $\omega = ck$ и $(\mathbf{A}_0\mathbf{k}) = 0$, то потенциал удовлетворяет волновому уравнению и калибровке Лоренца (или Кулона, поскольку при $\varphi = 0$ они не различаются). В этом случае напряженности полей равны $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t) \cos(\mathbf{k}\mathbf{r})$, $\mathbf{E}_0 = \frac{\omega \mathbf{A}_0}{c}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t) \sin(\mathbf{k}\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_0 = [\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0]$, выполняется условие $|\mathbf{E}_0| = |\mathbf{H}_0|$, и векторы $\mathbf{E}_0$, $-\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{k}$ образуют правую тройку. Выберем направление осей x, y и z вдоль этих векторов. В результате будем иметь (см. (I.14))

$$w = \sigma_{22} = \frac{E_0^2}{8\pi} \{ \sin^2(\omega t) \cos^2(\mathbf{k}\mathbf{r}) + \cos^2(\omega t) \sin^2(\mathbf{k}\mathbf{r}) \} = \frac{E_0^2}{16\pi} \{ 1 - \cos(2\omega t) \cos(2\mathbf{k}\mathbf{r}) \}$$

$$S_z = -\frac{cE_0^2}{16\pi} \sin(2\omega t) \sin(2\mathbf{k}\mathbf{r})$$

$$\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = \frac{E_0^2}{8\pi} \{ -\sin^2(\omega t) \cos^2(\mathbf{k}\mathbf{r}) + \cos^2(\omega t) \sin^2(\mathbf{k}\mathbf{r}) \} = \frac{E_0^2}{16\pi} \{ \cos(2\omega t) - \cos(2\mathbf{k}\mathbf{r}) \}$$

Остальные компоненты тензора энергии-импульса равны нулю.

Б-1.7.4

Показать, что скалярный потенциал произвольного свободного электромагнитного поля можно обратить в нуль с помощью остаточного калибровочного преобразования, не нарушая калибровки Лоренца.

Solution

1.7.4. Искомая калибровочная функция находится стандартным образом:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \text{grad } f, \quad \varphi = \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad f(\mathbf{r}, t) = c \int_{-\infty}^t \varphi'(\mathbf{r}, t') dt'.$$

Б-1.7.5 Уравнения Максвелла для Фурье

Записать уравнения Максвелла для амплитуд Фурье, получающихся при разложении произвольной плоской волны по монохроматическим плоским волнам.

Solution

Решаем прямолинейно, можно было бы даже сразу написать ответ, помня заготовленные формулы для Фурье.

Для случая, когда заряды и токи равны нулю, сделаем преобразование Фурье уравнения Максвелла $\text{div } \mathbf{E} = 0$:

$$\iint \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3\mathbf{r} dt = \int dt \oint e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} (\mathbf{E} d\mathbf{S}) - \iint (\mathbf{E} \nabla) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3\mathbf{r} dt = i(\mathbf{k} \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}) = 0.$$

Здесь мы считаем, что интеграл по бесконечно удаленной замкнутой поверхности равен нулю.

Рассмотрим преобразование Фурье второго уравнения этой же пары. Для левой части соответствующего уравнения Максвелла получаем

$$\begin{aligned} \iint \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3\mathbf{r} dt &= \int dt \int [\nabla \times \mathbf{H}] e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3\mathbf{r} = \\ &= - \int dt \oint e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} [\mathbf{H} \times d\mathbf{S}] + \iint [\mathbf{H} \times \nabla] e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3\mathbf{r} dt = -i[\mathbf{H}_{\mathbf{k}, \omega} \times \mathbf{k}]. \end{aligned}$$

Правая часть этого же уравнения дает

$$\frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} dt = -i\frac{\omega}{c} \iint \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3\mathbf{r} dt = -i\frac{\omega}{c} \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}.$$

Таким образом, имеем

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{H}_{\mathbf{k},\omega}] = -\frac{\omega}{c} \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}.$$

Совершенно аналогично проводится преобразование Фурье для других двух уравнений Максвелла:

$$(\mathbf{k} \mathbf{H}_{\mathbf{k},\omega}) = 0, \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{H}_{\mathbf{k},\omega}.$$

Б-1.7.6 Фурье для монохроматической волны

Получить выражение для амплитуд Фурье плоской монохроматической волны.

Solution

1.7.6. Запишем для определенности электрическое поле плоской монохроматической волны:

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right\} = \mathbf{e}_1 |E_1| \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t - \alpha) \mp \mathbf{e}_2 |E_2| \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t - \alpha).$$

Необходимо проделать преобразование Фурье для косинуса и синуса:

$$\begin{aligned} & \iint \cos(\mathbf{k}'\mathbf{r} - \omega't - \alpha) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t - \alpha)} d^3\mathbf{r} dt = \\ &= \frac{1}{2} \iint e^{i[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r} - (\omega+\omega')t - \alpha]} d^3\mathbf{r} dt + \frac{1}{2} \iint e^{i[(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r} - (\omega-\omega')t + \alpha]} d^3\mathbf{r} dt = \\ &= \frac{1}{2} (2\pi)^4 [\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega') e^{-i\alpha} + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') e^{i\alpha}]. \end{aligned}$$

Выражение для фурье-образа синуса очевидно. Подставляя полученные выражения (2) в формулу преобразования Фурье поля (1), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} = \frac{1}{2} (2\pi)^4 [(\mathbf{e}_1 |E_1| \mp i\mathbf{e}_2 |E_2|) e^{-i\alpha} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega') + \\ + (\mathbf{e}_1 |E_1| \pm i\mathbf{e}_2 |E_2|) e^{i\alpha} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega')]. \end{aligned}$$

Выражение (3) можно переписать в виде

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} = \frac{1}{2} (2\pi)^4 [\mathbf{E}_0^* \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega') + \mathbf{E}_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega')].$$

МФТИ.кр. Физические поля по вектор-потенциалу

Вектор-потенциал электромагнитного поля имеет следующую зависимость от координаты и времени: $\vec{A} = \vec{A}_0 \frac{\exp[i(kr - \omega t)]}{r}$, где $\vec{A}_0, k = |\vec{k}|, \omega$ - постоянные.

(!!! тут самое главное отработать теорию, чтобы решалось всё быстро!! пока быстро не умею решать.)

Найти магнитное поле $\vec{H}(\vec{r}, t)$.

$$\begin{aligned} &= \frac{[A \times i]}{r^3} e^{i(kr - \omega t)} + \frac{i\omega}{c} \left[A, \frac{\vec{r}}{r} \right] e^{i(kr - \omega t)} = \\ &= e^{-(\psi r - \omega t)} \frac{[\vec{A} \times \vec{v}]}{r} \left(\frac{1}{r^2} - ik \right) \end{aligned}$$

Используя условие калибровки Лоренца, найти скалярный потенциал $\varphi(\vec{r}, t)$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} A &= \left(\nabla, \frac{A_0}{r} \exp(i(ur - \omega t)) \right) = \\ &= \frac{A_{ni}}{r^2(-1)} \frac{x_i}{r} \exp(i(ur - \omega t)) + \frac{A_0}{r} (ik) \exp(i(kr - \omega t)) \frac{x_i}{r} = \\ &= \frac{1}{r} e^{i(ur - \omega t)} \left\{ iK - \frac{1}{r} \right\} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{A}_0)}{r^2} \\ \varphi &= -c^2 \int \frac{(\vec{A}_0, \vec{r})}{r^2} e^{i\omega r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) e^{-i\omega t} dt = \\ &= c^2 \frac{(\vec{A}_0 \vec{r})}{r^2} e^{iur - i\omega t} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{1}{(i\omega)} + \text{const} \end{aligned}$$

Найти электрическое поле $\vec{E}(\vec{r}, t)$.

$$\begin{aligned} E &= -\nabla \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}; \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\vec{A}}{r} i(ur - \omega t) \cdot (-i\omega). \\ \nabla \varphi &= \left(\nabla e^{i(kr - i + t)} \cdot \left(\frac{\vec{A}_0 \vec{r}}{r^2} \frac{c^2}{i\omega} \left(i4 - \frac{1}{r} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{i\omega r - i\omega t} \frac{c^2}{i\omega} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} + e^{iur - i\omega t} \frac{c^2}{i\omega} \left(ik - \frac{i}{r} \right) \nabla \left(\frac{\vec{A}_0 \vec{r}}{\sigma^2} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

МФТИ.кр.

Вектор-потенциал электромагнитного поля имеет следующую зависимость от координаты и времени: $\vec{A} = \vec{A}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$, где $\vec{A}_0, \vec{k}, \omega$ — постоянные.

- (3 балла) Используя условие калибровки Лоренца, найти скалярный потенциал $\varphi(\vec{r}, t)$.
- (3 балла) Найти электрическое поле $\vec{E}(\vec{r}, t)$.
- (3 балла) Найти магнитное поле $\vec{H}(\vec{r}, t)$.
- (3 балла) Вычислить плотность заряда $\rho(\vec{r}, t)$.

МФТИ.Иванов.28.

* Вектор-потенциал для произвольного магнитного поля. Прямыми вычислениями доказать, что векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\int_0^1 [\mathbf{r} \times \mathbf{B}(tr)] t dt$ описывает магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ при условии $\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$.

28.2 Typical effects

28.2.1 Problems about the static electromagnetic field 1

(по идее тут много жестких задач, но пока мне бы Белоусова порешать, потом уже пойду в что-то большее)

Б-1.6.1 Квадрупольный момент эллипсоида

Определить квадрупольный момент однородно заряженного эллипсоида относительно его центра.
(?? не выучен этот раздел, типичная так-то задача)

Solution

1.6.1. Исходим из известного выражения для тензора квадрупольного момента (I.27)

$$Q_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{R}) (3X_i X_j - \delta_{ij} \mathbf{R}^2) d^3 \mathbf{R}$$

Введем вспомогательный тензор

$$\tilde{Q}_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{R}) 3X_i X_j d^3 \mathbf{R}, \quad \text{т. е.} \quad Q_{ij} = \tilde{Q}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tilde{Q}_{kk}.$$

Заметим, что $\tilde{Q}_{ij}$ ведет себя, как тензор относительно более широкого класса преобразований координат, чем Q_{ij} : помимо поворотов он допускает произвольные линейные преобразования координат, в частности, растяжения.

Расположим оси x, y, z вдоль полуосей эллипсоида a, b, c . Перейдем к координатам

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}, \quad z' = \frac{z}{c}$$

и получим $\rho' = \rho abc$, причем в новой системе координат эллипсоид выглядит, как шар единичного радиуса. В штрихованных координатах компоненты тензора $\tilde{Q}_{ij}$ равны

$$\begin{aligned} \tilde{Q}'_{ij} &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \tilde{Q}'_{kk} = \delta_{ij} \int_{R' < 1} \rho'(\mathbf{R}') \mathbf{R}'^2 d^3 \mathbf{R}' = \\ &= \delta_{ij} \rho abc \int_{R' < 1} R'^2 4\pi R'^2 dR' = \delta_{ij} \rho abc \int_{R' < 1} R'^2 d^4 \mathbf{R}'. \end{aligned}$$

После вычисления интеграла мы получим

$$\tilde{Q}'_{ij} = \delta_{ij} \rho abc \frac{4\pi}{5} = \frac{3}{5} q \delta_{ij}.$$

В исходных (не штрихованных) координатах для компонент тензора $\tilde{Q}_{ij}$ находим

$$\tilde{Q}_{ii} = \frac{1}{5} q \begin{pmatrix} 3a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3c^2 \end{pmatrix}.$$

Окончательный результат для тензора Q_{ij} имеет вид

$$Q_{xx} = \frac{q}{5} (2a^2 - b^2 - c^2), \quad Q_{yy} = \frac{q}{5} (2b^2 - a^2 - c^2), \quad Q_{zz} = \frac{q}{5} (2c^2 - a^2 - b^2),$$

где $q = (4\pi/3)abc\rho$.

Б-1.6.2 Поле эллипсоида на больших расстояниях

Найти электрическое поле однородно заряженного по объему эллипсоида на больших расстояниях с точностью до четвертого порядка по $1/R$.

Solution

(?? типичная же задача?? разве что там умф может понадобиться, а у меня рука вообще еще не набита. доработать нужно еще это!!!)

1.6.2. Определение поля $\mathbf{E}$ с точностью до четвертого порядка по $1/R$ соответствует определению потенциала с точностью до третьего порядка по $1/R$, т.е. с точностью до квадрупольных членов. Поскольку дипольный момент эллипсоида относительно центра равен нулю (в силу центральной симметрии распределения зарядов), получаем

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{R}) &\approx \frac{q}{R} + \frac{Q_{ij}X_iX_j}{2R^5} \\ E_k = -\nabla_k\varphi &\approx \frac{q}{R^2}\nabla_kR + 5\frac{Q_{ij}X_iX_j}{2R^6}\nabla_kR - \frac{Q_{ij}\delta_{ik}X_j}{2R^5} - \frac{Q_{ij}X_i\delta_{jk}}{2R^5} = \\ &= \frac{qX_k}{R^3} + 5\frac{Q_{ij}X_iX_j}{2R^7}X_k - \frac{Q_{kj}X_i}{R^5}.\end{aligned}$$

Если считать вектор $\mathbf{R}$ столбцом, то на матрично-векторном языке напряженность поля $\mathbf{E}$ будет иметь вид

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{R}}{R^3} + 5\frac{\mathbf{R}^T Q \mathbf{R}}{2R^7}\mathbf{R} - \frac{Q\mathbf{R}}{R^5}.$$

Мы можем переписать выражение без помощи матриц, если введем единичные собственные векторы $\mathbf{e}_i$ тензора Q и собственные числа λ_i (из задачи 1.6.1 следует, что $\lambda_1 = q/5(2a^2 - b^2 - c^2)$ и т. д.):

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{R}}{R^3} + 5\frac{\sum_i \lambda_i (\mathbf{e}_i \mathbf{R})^2}{2R^7}\mathbf{R} - \frac{\sum_i \lambda_i (\mathbf{e}_i \mathbf{R}) \mathbf{e}_i}{R^5}.$$

С учетом выбора осей координат вдоль осей эллипсоида (см. задачу 1.6.1) собственные векторы $\mathbf{e}_i$ - это базисные векторы используемой системы координат. Окончательно получаем

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{R}}{R^3} + 5\frac{\sum_i \lambda_i X_i^2}{2R^7}\mathbf{R} - \frac{\sum_i \lambda_i X_i \mathbf{e}_i}{R^5}$$

Б-1.6.3 Квадрупольный момент заряженной нити (??)

Определить квадрупольный момент равномерно заряженной нити длиной l , если ее заряд равен q . Поместить начало координат в середину нити.

Solution

(?? плохо проработан раздел про квадрупольный момент)

1.6.3. Выберем ось x вдоль нити. Тогда, учитывая, что $dq = \frac{q}{l}dx$, получаем

$$\begin{aligned}Q_{yy} = Q_{zz} &= \int_{-l/2}^{l/2} (3yy - x^2) \frac{q}{l} dx = -\frac{q}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = -\frac{ql^2}{12}, \\ Q_{xx} &= -Q_{yy} - Q_{zz} = \frac{ql^2}{6}.\end{aligned}$$

Недиагональные элементы тензора Q_{ij} равны нулю.

Б-1.6.4 Квадрупольный момент четырех зарядов (??)

Вычислить тензор квадрупольного момента нейтральной системы зарядов, в которой два заряда $+q$ помещены в точках $(+a, +a, 0)$ и $(-a, -a, 0)$, а два заряда $-q$ помещены в точках $(+a, -a, 0)$ и $(-a, +a, 0)$. Найти систему координат, в которой искомый тензор имеет диагональный вид.

Solution

1.6.4. Единственные ненулевые компоненты квадрупольного момента $Q_{xy} = Q_{yx} = 12qa^2$. Чтобы диагонализировать матрицу, необходимо повернуть систему координат в плоскости (x, y) на угол $\pi/4$. Пусть ось x' проходит через положительные заряды, а ось y' - через отрицательные. Тогда $Q_{x'x'} = -Q_{y'y'} = 12qa^2$, $Q_{z'z'} = Q_{zz} = 0$.

Б-1.6.5 Энергия момент четырех зарядов (??)

Определить энергию системы зарядов, в которой два заряда $+q$ помещены в точках $(+a, +a, 0)$ и $(-a, -a, 0)$, а два заряда $-q$ помещены в точках $(+a, -a, 0)$ и $(-a, +a, 0)$, помещенной во внешнее однородное электрическое поле $\mathbf{E}$.

Solution

1.6.5. Для однородного поля $\mathbf{E}$ могут отличаться от нуля только потенциал φ и его первые производные $\nabla_k \varphi = -E_k$. В мультипольном разложении для энергии (I.29) они взаимодействуют с суммарным зарядом и дипольным моментом, которые для рассматриваемой системы равны нулю. Ответ: 0.

Б-1.6.6 Two Particles on a Rod

Два разноименных и одинаковых по величине заряда жестко закреплены на расстоянии l друг от друга. Найти силу и момент силы, действующих на данную систему, помещенную в поле точечного заряда на расстоянии $R \gg l$.

Solution

The question is about the dipole.

1.6.6. Потенциальная энергия диполя в поле заряда q имеет вид

$$U = -(\mathbf{d}\mathbf{E}) = \frac{q(\mathbf{d}\mathbf{R})}{R^3}.$$

Дифференцируя данное выражение, находим силу:

$$F_i = -\nabla_i U = -\nabla_i \frac{qd_k R_k}{R^3} = 3 \frac{qd_k R_k R_i}{R^5} - \frac{qd_i}{R^3},$$

$$\mathbf{F} = q \frac{3(\mathbf{d}\mathbf{R})\mathbf{R} - \mathbf{d}R^2}{R^5}.$$

Здесь $\mathbf{d} = e\mathbf{l}$, где вектор $\mathbf{l}$ направлен от заряда $-e$ к заряду e .

Б-1.6.7 Energy of interaction of two dipoles

Записать энергию $\mathcal{E}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{R})$ взаимодействия диполя $\mathbf{d}_1$, находящегося в начале координат, и диполя $\mathbf{d}_2$, находящегося в точке $\mathbf{R}$.

Solution

$$1.6.7. \mathcal{E} = \frac{(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2)R^2 - 3(\mathbf{d}_1 \mathbf{R})(\mathbf{d}_2 \mathbf{R})}{R^5}.$$

28.2.2 Problems about the static electromagnetic field 2**Б-1.6.8 Гармоники от диполя**

Пусть диполь $\mathbf{d}_1$ направлен вдоль оси z . Получить разложение энергии $\mathcal{E}(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{R})$ взаимодействия диполя $\mathbf{d}_1$, находящегося в начале координат, и диполя $\mathbf{d}_2$, находящегося в точке $\mathbf{R}$, при фиксированных $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, |\mathbf{R}|$ по сферическим гармоникам.

Solution

1.6.8. Энергия взаимодействия диполей имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{d_{1z}d_{2z} - 3d_{1z} \cos \theta (d_{2x} \sin \theta \cos \varphi + d_{2y} \sin \theta \sin \varphi + d_{2z} \cos \theta)}{R^3}.$$

Учитывая явный вид сферических функций:

$$Y_2^{(0)} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (1 - 3 \cos^2 \theta), \quad Y_2^{(\pm 1)} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta \cdot e^{\pm i\varphi}$$

и вводя обозначение $d_{2\pm} = d_{2x} \pm id_{2y}$, получим

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \left\{ \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{d_{1z}d_{2z}}{R^3} Y_2^{(0)} - \frac{d_{1z}d_{2-}}{R^3} Y_2^{(+1)} - \frac{d_{1z}d_{2+}}{R^3} Y_2^{(-1)} \right\}$$

Б-1.6.9 Разложение симметричной системы

Потенциал $V(\mathbf{r})$ аксиально-симметричной системы зарядов на оси z имеет вид

$$V(0, 0, z) = V_0 \left(1 - \frac{z^2 - a^2}{z\sqrt{z^2 + a^2}} \right), \quad z > a.$$

Найти два главных члена разложения $V(r, \theta)$ в области $r \gg a$.
(??? not clear, what is needed???)

Solution

1.6.9. Представим потенциал взаимодействия в виде

$$V(0, 0, z) = V_0 \left(1 - \frac{z^2 - a^2}{z\sqrt{z^2 + a^2}} \right) = V_0 \left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right].$$

Учитывая условие $r \gg a$, находим приближенное выражение:

$$V(0, 0, z) \approx V_0 \left[\frac{3}{2} \frac{a^2}{z^2} - \frac{7}{8} \frac{a^4}{z^4} \right].$$

Общее выражение для энергии взаимодействия системы зарядов с потенциалом внешнего поля (O_{ijk} — октупольный момент)

$$V(r, \theta) \approx \frac{q}{R} + \frac{(\mathbf{dr})}{r^3} + \frac{Q_{ij}x_i x_j}{2r^5} + \frac{O_{ijk}x_i x_j x_k}{6r^7}$$

при $\theta = 0$, т.е. на оси z , принимает вид

$$V(r, 0) \approx \frac{q}{R} + \frac{d_z}{r^2} + \frac{Q_{zz}}{2r^3} + \frac{O_{zzz}}{6r^4}.$$

Сравнивая данное выражение с (1), находим

$$q = 0, \quad d_z = \frac{3}{2} V_0 a^2, \quad Q_{zz} = 0, \quad O_{zzz} = -\frac{21}{4} V_0 a^4.$$

Исходя из аксиальной симметрии и свойства $Q_{kk} = 0$, получаем

$$d_x = d_y = 0, \quad Q_{ij} = 0.$$

Из аксиальной симметрии, полной симметрии октупольного момента относительно перестановок индексов ($O_{ijk} = O_{jik} = O_{ikj} = O_{kji}$) и свойства $O_{kki} = 0$ следует, что у октупольного момента отличны от нуля компонента O_{zzz} и компоненты

$$O_{xxz} = O_{xzx} = O_{zxx} = O_{yyz} = O_{yzy} = O_{zyy} = -\frac{O_{zzz}}{2}.$$

Подставляя $z = r \cos \theta, x = r \sin \theta, y = 0$ (по причине аксиальной симметрии мы можем положить угол $\varphi = 0$) получаем

$$V(r, \theta) \approx \frac{d_z}{r^2} \cos \theta + \frac{O_{22z}}{6r^4} \cos \theta \left(\cos^2 \theta - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right).$$

Б-1.6.10

Тело, ограниченное близкой к сфере поверхностью (сфероид) с уравнением

$$R(\theta) = R_0 [1 + \beta P_2(\cos \theta)],$$

заряжено с постоянной плотностью ($P_2(x)$ — полином Лежандра). Полный заряд равен q . Найти мультипольные моменты сфероида в линейном порядке по β .

Solution.

1.6.10. При $\beta = 0$ (для равномерно заряженного шара) все мультипольные моменты кроме суммарного заряда обращаются в нуль (это соответствует нулевому порядку по β). Остальные мультипольные моменты создаются распределением зарядов, которое является разностью плотности зарядов сфероида и шара, такое распределение отлично от нуля в тонком слое у поверхности сферы. Объем этой области линеен по β , откуда следует, что при вычислении интегралов по этой области достаточно определить подынтегральное выражение в нулевом порядке по β , т.е. можно пренебречь отличием координат точки в слое от координат точки на поверхности сферы. Таким образом, мы можем заменить интегрирование по объему интегрированием по поверхности сферы, считая, что на ней имеется поверхностный заряд с плотностью

$$\begin{aligned}\sigma &= \rho R_0 \beta P_2(\cos \theta) = \rho R_0 \beta \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad \text{где } \rho = \frac{q}{4\pi R_0^3/3} \\ Q_{zz} &= \int \sigma (3z^2 - R_0^2) ds = \int_{-1}^{+1} \rho R_0^5 \beta \frac{1}{2} (3x^2 - 1)^2 2\pi dx = \frac{8}{5} \pi \rho R_0^5 \beta \\ Q_{zz} &= \frac{6}{5} q R_0^2 \beta, \quad Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{zz}.\end{aligned}$$

Заметим, что поверхностная плотность заряда $\sigma(\theta)$ пропорциональна сферической гармонике $Y_2^{(0)}$. Все остальные мультипольные моменты равны нулю (в линейном порядке по β) в силу ортогональности сферических гармоник.

Б-1.6.11

Показать, что однородное магнитное поле $\mathbf{H}$, направленное по оси z , может быть описано векторным потенциалом $\mathbf{A}_1 = (0, Hx, 0)$. Градиентным преобразованием перейти к погенциалу $\mathbf{A}_2 = \frac{1}{2}[\mathbf{H} \times \mathbf{r}]$.

Solution.

1.6.11. Нетрудно убедиться непосредственной проверкой в том, что $\text{rot } \mathbf{A}_1 = \text{rot } \mathbf{A}_2 = \mathbf{H}$, где $\mathbf{A}_1 = (0, Hx, 0)$, $\mathbf{A}_2 = \frac{1}{2}[\mathbf{H} \times \mathbf{r}] = (-\frac{1}{2}Hy, \frac{1}{2}Hx, 0)$, $\mathbf{H} = (0, 0, H)$. Градиентное преобразование не должно изменять наблюдаемых величин — напряженностей электромагнитного поля, поэтому полагаем $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 + \text{grad } f$ и имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{2}Hy + \frac{\partial}{\partial x}f \\ Hx = \frac{1}{2}Hx + \frac{\partial}{\partial y}f, \\ 0 = 0 + \frac{\partial}{\partial z}f \end{cases} \Rightarrow f = f(x, y) = \frac{1}{2}Hxy + c.$$

Б-1.6.12

Магнитное поле, имеющее составляющую вдоль оси z , убывает вдоль этой оси с постоянным градиентом $\partial H_z / \partial z = -h = \text{const}$. Может ли такое поле быть параллельным оси z во всем пространстве? Найти радиальные компоненты поля вне оси z . Представить картину силовых линий.

Solution.

1.6.12. Нам надо найти свободное (без источников) магнитное поле, удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = -h, \quad \text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

Такое поле определяется неоднозначно. Для уменьшения этой неоднозначности введем дополнительное условие - аксиальную симметрию (симметрию относительно поворотов вокруг оси z на произвольный угол). Аксиально-симметричное поле удобно описывать в цилиндрической системе координат. При этом компоненты поля не зависят от угла φ :

$$H_\rho = u(\rho, z), \quad H_\varphi = v(\rho, z), \quad H_z = w(\rho, z).$$

Интеграл по окружности $\rho = \text{const}$, $z = \text{const}$ пропорционален $H_\varphi(\rho, z)$, однако, поскольку $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, этот интеграл должен равняться нулю, таким образом, $H_\varphi \equiv 0$.

Поскольку $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, мы можем искать поле $\mathbf{H}$, как градиент некоторого скаляра:

$$\mathbf{H} = \text{grad } \psi(\rho, z).$$

Уравнение $\text{div } \mathbf{H} = 0$ требует, чтобы скаляр ψ удовлетворял уравнению Лапласа:

$$\text{div } \mathbf{H} = \text{div grad } \psi = \Delta \psi(\rho, z) = 0$$

В цилиндрических координатах получаем

$$\Delta \psi(\rho, z) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -h.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \psi = -h \quad \text{и} \quad H_\rho = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \frac{1}{2} h \rho + \frac{f(z)}{\rho}.$$

Поскольку поле должно быть конечно во всех точках, получаем $f(z) = 0$, т. е.

$$H_\rho = \frac{1}{2} h \rho, \quad \psi = \frac{h}{4} \rho^2 + \varphi(z), \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \varphi''(z) = -h.$$

Отсюда находим

$$H_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -hz + c = -h(z - z_0),$$

где мы положили $c = h z_0$. На силовой линии должно выполняться условие $d\mathbf{r} \parallel \mathbf{H}$, т.е. касательная к силовой линии должна быть направлена вдоль магнитного поля. Поэтому

$$\frac{d\rho}{H_\rho} = \frac{dz}{H_z}, \quad \text{или} \quad \frac{2d\rho}{\rho} + \frac{dz}{z - z_0} = 0,$$

откуда находим уравнение силовой линии:

$$\rho^2 (z - z_0) = c.$$

Схема силовых линий приведена на рис. 1.10. Поскольку $H_\rho = (1/2)h\rho$, то при $\rho \neq 0$ радиальная компонента поля H_ρ не может обратиться в нуль, т.е. поле не может во всем пространстве оставаться параллельным оси z . Заметим также, что при $z = z_0$ составляющая поля H_z обращается в нуль, и поле целиком определяется радиальной составляющей.

Б-1.6.13

Получить формулу $\mathbf{F} = (\mu \nabla) \mathbf{H}$ для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном поле.

Solution.

1.6.13. Пусть система заряженных частиц совершает финитное движение в магнитном поле в ограниченной области пространства. Определим усредненную по времени силу, действующую на одну из частиц (для нескольких частиц нужно будет лишь просуммировать выражение по номеру частицы):

$$\bar{\mathbf{F}} = \overline{\frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}(t))]}.$$

Введем обозначение $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$, где $\mathbf{R}$ - радиус-вектор фиксированной внутренней точки рассматриваемой области пространства. Считаем поле слабонеоднородным, т.е. расстояние, на котором такое поле существенно (на величину $\sim H$) меняется по модулю и направлению, гораздо больше размеров области, занятой частицами. Для напряженности поля используем разложение по $\mathbf{r}$ до первой

производной: $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{R} + \mathbf{r}') = \mathbf{H}(\mathbf{R}) + (\mathbf{r}' \nabla) \mathbf{H}(\mathbf{R})$, где оператор ∇ действует на координаты фиксированной точки с радиус-вектором $\mathbf{R}$. Тогда будем иметь

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{e}{c} \overline{[\dot{\mathbf{r}}' \times \mathbf{H}] + [\dot{\mathbf{r}}' \times (\mathbf{r}' \nabla) \mathbf{H}]},$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \mathbf{H}$. При усреднении по бесконечному (на практике - большому) временному интервалу полной производной по времени от любой финитной функции $f(t)$ получаем ноль:

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{df}{dt} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} f \Big|_{t_0}^{t_0+T} = 0.$$

Таким образом, для средней силы имеем выражение

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{e}{c} \overline{[\dot{\mathbf{r}}' \times (\mathbf{r}' \nabla) \mathbf{H}]},$$

или, в записи по компонентам:

$$\bar{F}_i = \frac{e}{c} \overline{e_{ijk} \dot{x}'_i x'_m \nabla_m H_k} = \frac{e}{c} e_{ijk} \overline{\dot{x}'_i x'_m} \nabla_m H_k.$$

Поскольку выполняется равенство $\overline{\frac{d}{dt} x'_j x'_m} = 0$, мы можем представить интересующее нас среднее в виде

$$\overline{\dot{x}'_j x'_m} = \frac{1}{2} \overline{(\dot{x}'_j x'_m - x'_j \dot{x}'_m)} = \frac{1}{2} \overline{\dot{x}'_l x'_n} (\delta_{lj} \delta_{nm} - \delta_{lm} \delta_{nj}) = \frac{1}{2} \overline{\dot{x}'_l x'_n} e_{lnp} e_{jmp}.$$

Подставляя это соотношение в выражение для средней силы, получим

$$\begin{aligned} \bar{F}_i &= -\frac{e}{2c} e_{iik} e_{imp} \overline{\dot{x}'_l x'_n} e_{lnp} \nabla_m H_k = -\frac{e}{2c} (\delta_{im} \delta_{kp} - \delta_{ip} \delta_{km}) \overline{\dot{x}'_l x'_n} e_{lnp} \nabla_m H_k = \\ &= -\frac{e}{2c} e_{lnk} \overline{\dot{x}'_l x'_n} \nabla_i H_k + \frac{e}{2c} \overline{\dot{x}'_l x'_n} e_{lni} \nabla_k H_k. \end{aligned}$$

В данном выражении второе слагаемое обращается в нуль, поскольку $\nabla_k H_k = \text{div } \mathbf{H} = 0$, а первое описывает вклад магнитного момента $\mu = \frac{1}{2c} [\mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{r}}']$ в среднюю силу. Таким образом, имеем

$$\bar{\mathbf{F}} = \nabla(\bar{\mu} \mathbf{H}),$$

где мы считаем $\bar{\mu} = \text{const}$.

Полученное нами выражение $\nabla(\mu \mathbf{H})$ отличается от выражения $(\mu \nabla) \mathbf{H}$, которое фигурирует в условии задачи. В силу очевидного соотношения $\nabla(\mu \mathbf{H}) - (\mu \nabla) \mathbf{H} = [\mu \times [\nabla \times \mathbf{H}]]$ два выражения будут совпадать, когда $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, т.е. когда внешние токи (создающие магнитное поле) отсутствуют в области движения частиц.

28.2.3 Problems about the static electromagnetic field 3

Б-1.6.14

Найти в полярных координатах уравнение силовой линии магнитного диполя. Определить, как меняется поле вдоль силовой линии.

Solution.

1.6.14. Поле магнитного диполя имеет вид

$$\mathbf{H} = \frac{3(\mu \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mu}{r^3}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Пусть диполь направлен вдоль оси z декартовой системы координат: $\mu = (0, 0, \mu)$. Будем вести рассмотрение в сферической системе координат, считая, что длина определяется выражением $dl^2 = dl_r^2 + dl_\theta^2 + dl_\varphi^2$, где $dl_r = dr$, $dl_\theta = r d\theta$, $dl_\varphi = r \sin \theta d\varphi$. В таком случае метрический тензор является единичной матрицей, и мы можем не различать верхние и нижние индексы в таких

сферических координатах. Получим в явном виде компоненты ортонормированных базисных векторов сферической системы координат:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_r = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{r} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \\ \mathbf{n}_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{r} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{r} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \end{cases}$$

Напряженность магнитного поля диполя имеет в такой системе координат следующие компоненты:

$$H_r = (\mathbf{n}_r \mathbf{H}) = \mu \frac{2 \cos \theta}{r^3}, \quad H_\theta = (\mathbf{n}_\theta \mathbf{H}) = -\mu \frac{\sin \theta}{r^3}, \quad H_\varphi = (\mathbf{n}_\varphi \mathbf{H}) = 0.$$

Абсолютная величина напряженности поля равна

$$H = \sqrt{H_r^2 + H_\theta^2 + H_\varphi^2} = \frac{\mu \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}}{r^3}.$$

На силовой линии магнитного поля должно выполняться условие $d\mathbf{l} \parallel d\mathbf{H}$, т.е. касательная к силовой линии должна быть направлена вдоль магнитного поля. Таким образом, уравнение касательной имеет вид

$$d\mathbf{l} = \lambda \mathbf{H}.$$

Отсюда с учетом (1) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{H_r} = \frac{rd\theta}{H_\theta}, \text{ или } \frac{dr}{rd\theta} = \frac{H_r}{H_\theta} = 2 \operatorname{ctg} \theta.$$

Интегрируя данное уравнение при условии $r(\pi/2) = r_0$, находим уравнение силовой линии магнитного диполя:

$$r(\theta) = r_0 \sin^2 \theta.$$

На этой силовой линии (рис. 1.11) компоненты магнитного поля и его модуль ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{\mu}{r_0^3} \frac{2 \cos \theta}{\sin^6 \theta}, \quad H_\theta = \frac{\mu}{r_0^3} \frac{1}{\sin^5 \theta}, \\ H &= \frac{\mu}{r_0^3} \frac{\sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}}{\sin^6 \theta}. \end{aligned}$$

Б-1.6.15

Определить энергию взаимодействия магнитного диполя μ , движущегося со скоростью $v \ll c$ с неподвижным ядром с зарядом Ze .

Solution.

1.6.15. В системе отсчета, связанной с ядром, имеем

$$\mathbf{E} = -\nabla \frac{Ze}{r} = \frac{Ze}{r^3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{H} = 0.$$

В движущейся системе отсчета, в которой в данный момент времени диполь покоится, определяем компоненты магнитного поля при помощи членами $(v/c)^2$:

$$\mathbf{H}' = -\frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] = \frac{Ze}{c} \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]}{r^3} = \frac{Ze\mathbf{l}}{mcr^3}.$$

Поэтому энергия взаимодействия магнитного диполя с внешним полем, вычисленная в движущейся системе, есть

$$\mathcal{E}' = -(\mu \mathbf{H}') = \frac{1}{c} (\mu [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]).$$

Нетрудно показать, что в том же приближении можно получить $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$. Следовательно, окончательно находим

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} (\mu [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]) = \frac{1}{c} ([\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{v}] \mathbf{E}) = -\frac{Ze}{mcr^3} (\boldsymbol{\mu} \mathbf{l}).$$

Видим, что движущийся магнитный момент по отношению к внешнему полю $\mathbf{E}$ эквивалентен электрическому дипольному моменту:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}].$$

Киселев-ЭД.37 Дипольный момент двух полусфер (!?!?!)

Вычислить дипольный момент двух полусфер, разделенных бесконечно тонким изолятором, если их потенциалы равны $\pm\phi_0$ соответственно.

Solution

Задача является аксиально-симметричной. Поэтому потенциал на фиксированном расстоянии, как мы видели, можно представить в виде суммы вкладов мультипольных моментов, зависящих только от $\cos\theta$, где θ - угол между вектором координаты точки наблюдения и осью симметрии. Такая сумма в общем случае соответствует разложению по полиномам Лежандра:

$$\phi(\cos\theta) = \sum_l \varphi_l P_l(\cos\theta).$$

В этой задаче нам необходимо знать, что, во-первых, такое представление функции (наподобие ряда Фурье) является полным в определенном классе функций, к которому мы и будем относить потенциал. С физической точки зрения, такое положение вещей естественно, так как в соответствии с принципом суперпозиции любой потенциал физической системы есть сумма потенциалов мультиполей. Во-вторых, каждому 2^l -тому мультипольному моменту соответствует по построению l -тая функция Лежандра, для которых имеется соотношение ортогональности:

$$\int_{-1}^{+1} P_l(\eta) P_k(\eta) d\eta = \delta_{lk} \frac{2}{2l+1}.$$

Для рассмотренных выше монополя, диполя, квадруполь и октуполь соответствующие полиномы Лежандра:

$$P_0(\eta) = 1, \quad P_1(\eta) = \eta, \quad P_2(\eta) = \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1), \quad P_3(\eta) = \frac{1}{2}(5\eta^3 - 3\eta).$$

Причем, эти полиномы нормированы условием $P_l(1) = 1$.

В частности, вклад диполя в потенциал на расстоянии, равном радиусу сферы a , равен

$$\phi_d = \frac{d_z}{a^2} P_1(\cos\theta), \quad P_1(\cos\theta) = \cos\theta,$$

т.е. соответствующий член разложения потенциала на фиксированном расстоянии в общем виде

$$\varphi_1 = \frac{d_z}{a^2}$$

С другой стороны, в силу ортогональности полиномов Лежандра и нормировки (8.13)

$$\int_{-1}^{+1} \phi(\eta) P_1(\eta) d\eta = \varphi_1 \frac{2}{3}$$

Таким образом,

$$d_z = \frac{3}{2} a^2 \int_{-1}^{+1} \phi(\eta) P_1(\eta) d\eta.$$

По условию задачи потенциал двух полусфер имеет вид тета функции Хевисайда

Поэтому

$$\int_{-1}^{+1} \phi(\eta) P_1(\eta) d\eta = 2 \int_0^1 \phi_0 \eta d\eta = \phi_0,$$

и дипольный момент

$$d_z = \frac{3}{2} a^2 \phi_0.$$

МФТИ.тп.кр. Заряд на отрезке с кубической плотностью

Заряд распределен по отрезку $-a \leq x \leq a$ с плотностью на единицу длины отрезка $\rho(x, y, z) = \rho x^3 / a^3 \delta(y) \delta(z)$.

- Найти полный электрический заряд системы.
- Записать скалярный потенциал (статический) в произвольной точке пространства в виде интеграла с учетом вида $\rho(x, y, z)$.
- Найти дипольный момент этой системы зарядов.
- Записать скалярный потенциал (статический) в произвольной точке пространства в дипольном приближении.

Пусть заряд, с определенной выше плотностью, осциллирует с частотой ω : $\rho(x, y, z, t) = \rho(x, y, z) \exp(-i\omega t)$.

- Записать вектор-потенциал в дипольном приближении.
- Найти интегральную интенсивность излучения.
- Записать выражение для дифференциальной интенсивности излучения

Solution.

МФТИ.тп.кр. Заряд на отрезке с угловой плотностью

Заряд распределен по отрезку $-a \leq x \leq a$ с плотностью на единицу длины отрезка $\kappa_1(x) = N_0(1 - 2|x|/a)\delta(y)\delta(z)$

- Найти первый ненулевой мультипольный момент (все элементы тензора).
- Записать выражение для скалярного потенциала системы в мультипольном приближении.
- Найти интегральную интенсивность излучения системы.
- Записать выражение для дифференциальной интенсивности излучения

Solution.

28.2.4 Problems about Radiation 1**ЛЛ2-? Поле равномерно движущихся зарядов**

Определим поле, создаваемое зарядом e , движущимся равномерно со скоростью V .

Неподвижную систему отсчета будем называть системой K ; систему отсчета, движущуюся вместе с зарядом, системой K' .

Пусть заряд находится в начале координат системы K' ; система K' движется относительно K параллельно оси x ; оси y и z параллельны y' и z' .

В момент времени $t = 0$ начала обеих систем совпадают.

Координаты заряда в системе K , следовательно, $x = Vt, y = z = 0$.

В системе K' мы имеем постоянное электрическое поле с векторным потенциалом $\mathbf{A}' = 0$ и скалярным $\varphi' = e/R'$, где $R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$.

В системе K согласно формулам (24.1)??? с $\mathbf{A}' = 0$

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{e}{R' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Мы должны теперь выразить R' через координаты x, y, z в системе K .

Согласно формулам преобразования Лоренца

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

и отсюда

$$R'^2 = \frac{(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

$$\varphi = \frac{e}{R^*}, \quad R^{*2} := (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)$$

Векторный потенциал в системе K равен

$$\mathbf{A} = \varphi \frac{\mathbf{V}}{c} = \frac{e\mathbf{V}}{cR^*}$$

В системе K' магнитное поле $\mathbf{H}'$ отсутствует, а электрическое

$$\mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{R}'}{R'^3}$$

По формулам (24.2) находим:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x = \frac{ex'}{R'^3} \\ E_y &= \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{ey'}{R'^3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ E_z &= \frac{ez'}{R'^3 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда R', x', y', z' , выраженные через x, y, z , находим:

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{e\mathbf{R}}{R^{*3}}$$

где $\mathbf{R}$ - радиус-вектор от заряда e к точке наблюдения x, y, z поля (его компоненты равны $x - Vt, y, z$).

Это выражение для $\mathbf{E}$ можно написать в другом виде, введя угол θ между направлением движения и радиус-вектором $\mathbf{R}$. Очевидно, что $y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \theta$ и потому R^{*2} можно написать в виде

$$R^{*2} = R^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right).$$

Тогда для $\mathbf{E}$ имеем:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}$$

При заданном расстоянии R от заряда величина поля E возрастает с увеличением θ от нуля до $\pi/2$ (или при уменьшении от π до $\pi/2$).

Наименьшее значение поле имеет в направлении, параллельном направлению движения ($\theta = 0, \pi$); оно равно

$$E_{\parallel} = \frac{e}{R^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$$

Наибольшим же является поле, перпендикулярное к скорости ($\theta = \pi/2$), равное

$$E_{\perp} = \frac{e}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Отметим, что при увеличении скорости поле $E_{\parallel}$ падает, а $E_{\perp}$ возрастает.

Можно сказать наглядно, что электрическое поле движущегося заряда как бы «сплющивается» по направлению движения.

При скоростях V , близких к скорости света, знаменатель в формуле (38.8) близок к нулю в узком интервале значений θ вокруг значения $\theta = \pi/2$.

Ширина этого интервала порядка величины

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Таким образом, электрическое поле быстро движущегося заряда, на заданном расстоянии от него, заметно отлично от нуля лишь в узком интервале углов вблизи экваториальной плоскости,

причем ширина этого интервала падает с увеличением V как $\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Магнитное поле в системе K равно

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{E}]$$

(см.

(24.5)).

В частности, при $V \ll c$ электрическое поле приближенно дается обычной формулой закона Кулона $\mathbf{E} = e\mathbf{R}/R^3$, и тогда магнитное поле

$$\mathbf{H} = \frac{e}{\varepsilon} \frac{[\mathbf{V}\mathbf{R}]}{R^3}$$

Б-1.8.1

Определить электрическое и магнитное поле гармонически колеблющегося диполя на расстояниях r , много больших размера диполя a , но не обязательно больших длины волны λ .

Solution

1.8.1. В соответствии с условием задачи полагаем, что дипольный момент $\mathbf{d}$ зависит от времени гармонически, т.е.

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}, \text{ поэтому } \mathbf{d}(t') = \mathbf{d}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \mathbf{d}_\omega e^{-i(\omega t - kr)},$$

где $t' = t - r/c$ - запаздывающее время, r - расстояние от диполя до точки наблюдения поля, $k = \omega/c$. Будем считать, что расстояние до точки наблюдения много больше линейных размеров диполя ($r \gg a$). Кроме того предполагается, что $a \ll \lambda$, где λ - характерная длина волны излучаемых электромагнитных волн. Эти два условия обеспечивают возможность применения дипольного приближения. В формуле (1) величина $\mathbf{d}_\omega$, вообще говоря, комплексная, т.е. на окончательном этапе от выражения необходимо брать действительную часть.

Векторный потенциал диполя на больших расстояниях имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \dot{\mathbf{d}}(t') = -\frac{ik}{r} \mathbf{d}(t').$$

Подставляя в условие калибровки Лоренца данный вектор-потенциал, получим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{1}{cr} \dot{\mathbf{d}}(t') \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi + \operatorname{div} \frac{\mathbf{d}(t')}{r} \right) = 0.$$

Это значит, что $\varphi(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{div}(\mathbf{d}(t')/r)$ с точностью до константы интегрирования, не зависящей от времени, которая здесь нас не интересует. В итоге имеем для скалярного потенциала

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{d}(t')}{r} \right) = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}(t'))}{r^2} (1 - i(kr)),$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Переходим к вычислению напряженностей полей:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi = \frac{1}{r^3} \{ (3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d})(1 - i(kr)) + (kr)^2 [\mathbf{n} \times [\mathbf{d} \times \mathbf{n}]] \},$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = -ik \left[\nabla \times \frac{\mathbf{d}}{r} \right] = \frac{1}{r^3} [\mathbf{n} \times \mathbf{d}] (i(kr) + (kr)^2), \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}(t').$$

Как видно, в окончательном результате существенную роль играет параметр $kr \sim r/\lambda$. В зависимости от значения данного параметра электромагнитное поле может иметь различный вид на разных расстояниях при $r \gg a$ (рис. 1.12). сти можно пренебречь эффектами запаздывания, тогда напряженности полей

$$\mathbf{E} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}}{r^3}, \quad \mathbf{H} = 0$$

отвечают полю квазистатического электрического диполя, в пределе $kr \rightarrow 0$ мы получаем просто статический диполь.

женности полей имеют вид

$$\mathbf{E} = \frac{k^2}{r} [\mathbf{n} \times [\mathbf{d} \times \mathbf{n}]] = [\mathbf{H} \times \mathbf{n}], \quad \mathbf{H} = \frac{k^2}{r} [\mathbf{n} \times \mathbf{d}].$$

Напряженности полей убывают с расстоянием, как $1/r$, а кроме того они связаны между собой так же, как они связаны в поле плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль единичного вектора $\mathbf{n}$. в) Промежуточная (индукционная) зона: $a \ll r \sim \lambda (kr \sim 1)$. В этой области важны все члены в исходных выражениях для полей: эффекты запаздывания существенны, но поле излучения еще не сформировано.

Б-1.8.2 Иногда излучение не дипольное

Доказать, что у замкнутой системы заряженных частиц с одинаковым отношением заряда к массе отсутствует дипольное электрическое и дипольное магнитное излучение.

Solution

Это известная модель теории излучения, нужно найти дипольный момент, взять производные, получить выражение, которое может быть нулем при некоторых условиях.

Пусть в системе для всех частиц выполняется: $e_i/m_i = \alpha = \text{const}$. Тогда считаем:

$$\mathbf{d} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i = \alpha \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \alpha \mathbf{R} \sum_i m_i, \quad \mathbf{R} := \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

В замкнутой системе, где отсутствуют внешние силы, полный импульс сохраняется: $\dot{\mathbf{R}} = \text{const}$, $\ddot{\mathbf{R}} = 0$, поэтому $\ddot{\mathbf{d}} = 0$, следовательно, $I_d = 0$. Полный магнитный момент можно записать в виде

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2c} \sum_i e_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i] = \frac{\alpha}{2c} \sum_i [\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i] = \frac{\alpha}{2c} \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} := \sum_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i].$$

Если суммарный момент внешних сил равен нулю, то в изолированной системе $\dot{\mathbf{M}} = 0$, $\ddot{\mathbf{M}} = 0$, следовательно, $I_\mu = 0$.

(!!! напишу точнее, как это дает требуемое свойство!)

Б-1.8.3 Падение двух зарядов друг на друга (!?!?!)

Два разноименных заряда (e_1, m_1) и (e_2, m_2) обращаются один вокруг другого под действием кулоновского притяжения по круговой орбите радиуса R (атом Резерфорда). Определить энергию, теряемую на излучение за один оборот. Найти зависимость расстояния между зарядами от времени. Определить время, за которое один заряд упадет на другой.

Solution

Это известная модель теории, нужно найти дипольный момент, взять производные, подставить в известную формулу дипольного излучения, она же дает энергию.

Мы имеем задачу двух тел. Переходя в систему центра инерции и вводя обозначения

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

где $\mathbf{R}$ - радиус-вектор центра инерции системы, $\mathbf{r}$ - радиус-вектор относительного движения зарядов, μ - приведенная масса, получаем

$$\mathbf{r}_1 = (\mu/m_1) \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = (\mu/m_2) \mathbf{r}$$

$$\mathbf{d} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 = \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \mathbf{r}.$$

Уравнение движения эффективной частицы с приведенной массой в поле неподвижного кулоновского центра имеет вид

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = - \frac{|e_1 e_2|}{r^3} \mathbf{r}$$

Вычислим интенсивность дипольного излучения (энергию, теряемую системой в единицу времени), предполагая, что потери энергии за один оборот малы по сравнению с полной энергией:

$$I = - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{2 \ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} = \frac{2 |e_1 e_2|^2}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{1}{r^4}.$$

Энергия, излучаемая системой за один оборот, будет равна

$$\delta \mathcal{E} = I \cdot \frac{2\pi r}{v} = I \cdot \frac{2\pi \mu^{1/2}}{|e_1 e_2|^{1/2}} r^{3/2} = \frac{4\pi \mu^{1/2} |e_1 e_2|^{3/2}}{3c^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{1}{r^{5/2}},$$

поскольку из условия $\mu v^2/r = |e_1 e_2|/r^2$ (ускорение - центростремительное, движение плоское) следует, что скорость частицы на орбите равна

$$v = \frac{|e_1 e_2|^{1/2}}{\mu^{1/2} r^{1/2}}.$$

Анализ двух последних формул показывает, что энергия, излучаемая системой за оборот, действительно мала, как и предполагалось:

$$\delta\mathcal{E} \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{|e_1 e_2|}{r} \ll \mathcal{E} \quad \text{при} \quad \frac{v}{c} \ll 1.$$

Найдем далее изменение расстояния между частицами и время падения одной частицы на другую (фактически, время жизни атома в классической электродинамике). Поскольку кинетическая энергия системы теряется на излучение, то

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -I = \frac{d\mathcal{E}}{dr} \frac{dr}{dt}, \quad \text{где} \quad \mathcal{E} = \frac{\mu v^2}{r} - \frac{|e_1 e_2|}{r} = -\frac{|e_1 e_2|}{2r}.$$

В результате мы получаем следующее уравнение:

$$\frac{|e_1 e_2|}{2r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{2(e_1 e_2)^2}{3c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{1}{r^4}.$$

Интегрируя это уравнение (с начальным условием $r(0) = r_0$), находим закон изменения радиуса орбиты:

$$r(t) = \left(r_0^3 - \frac{4|e_1 e_2|^2}{c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 t \right)^{1/3}.$$

В момент падения частиц друг на друга $r(t_{\text{пад}}) = 0$, т.е. время падения равно

$$t_{\text{пад}} = \frac{r_0^3 c^3}{4|e_1 e_2|} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^{-2}.$$

Наиболее наглядный вид полученные результаты приобретают, если их выразить через приведенные величины: $\rho = r/r_0$, $\tau = t/t_{\text{пад}}$, $u = v/v_0$, $J = I/I_0$ (рис. 1.13), т.е.

$$\rho = (1 - \tau)^{1/3}, \quad u = \frac{1}{(1 - \tau)^{1/6}}, \quad J = \frac{1}{(1 - \tau)^{4/3}}.$$

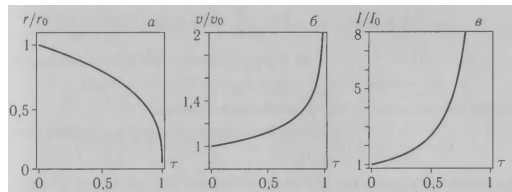
В заключение приведем некоторые численные оценки для атома водорода, полагая, что $e_1 = e_2 = e - 3$ зряд электрона, $m_1 = m$ - масса электрона ($m_1 \ll m_2$) и $r_0 = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см - размер атома. В этом случае время жизни такого атома будет равно

$$t_{\text{пад}} \simeq \frac{m^2 c^3 r_0^3}{4e^4} \simeq 3,2 \cdot 10^{-13} \text{ с}.$$

Предположения, в рамках которых рассматривалась задача (малость энергетических потерь за период вращения), нарушаются при условии, что электрон в атоме перестает быть нерелятивистским, т.е. $v \rightarrow c$. Это может произойти в случае (см. (1)), если

$$r_0 \lesssim r_{\text{К}\pi} = \frac{e^2}{mc^2} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

т.е. на очень малых расстояниях ($r_{\text{кл}}$ - классический радиус электрона). На расстояния $\sim 10^{-13}$ см, строго говоря, уже становится неприменимой сама классическая электродинамика, ибо она становится внутренне противоречивой. В частности, на рисунках 1.13, б и в видно, что вблизи момента падения (при $t \rightarrow t_{\text{пад}}$ или $\tau \rightarrow 1$) скорость частицы, как и излучаемая ею энергия, бесконечно растут.



Кстати, данный результат (очень маленькое время жизни атома), указывает на неправильность классических представлений (в данном случае, о движении электрона в атоме). Поэтому люди открыли и исследовали квантовую механику.

Б-1.8.4 Классический гелий

Рассмотрим классическую модель атома гелия, представляющую собой бесконечно тяжелое ядро с зарядом $+2e$, вокруг которого на противоположных концах диаметра вращаются два электрона с зарядами $-e$. Чему равны интенсивности дипольного и магнитного дипольного излучения системы? Чему равна интенсивность квадрупольного излучения? Как будет меняться со временем радиус орбиты?

Solution

Как и в предыдущей задаче, вычислим интенсивность для невозмущенного движения (без учета потерь на излучение). Если электроны вращаются вокруг ядра гелия, все время находясь на противоположных концах диаметра, то электрический дипольный момент тождественно равен нулю и электрическое дипольное излучение отсутствует. Магнитный дипольный момент для невозмущенного движения постоянен, поэтому магнитное дипольное излучение также отсутствует. Найдем вклад квадрупольного излучения.

Пусть $\mathbf{n}$ - единичный вектор, направленный от ядра к первому электрону, а $\mathbf{N}$ - единичный вектор, направленный вдоль оси вращения. В силу симметрии собственные направления квадрупольного момента задаются единичными векторами $\mathbf{n}, \mathbf{N}, \mathbf{l} = [\mathbf{N} \times \mathbf{n}]$. Соответствующие собственные числа равны $-2Q_0, Q_0, Q_0$, где $Q_0 = 2eR^2$. Тензор квадрупольного момента можно выразить через компоненты собственных единичных векторов:

$$Q_{ij} = Q_0 (-2n_i n_j + N_i N_j + l_i l_j).$$

Для вычисления интенсивности квадрупольного излучения нам нужно вычислить Q_{ij} для невозмущенной траектории (считая, что R постоянно). При этом $\mathbf{N} = 0$, а векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{l}$ вращаются вокруг $\mathbf{N}$ с постоянной угловой скоростью ω . Это означает, что

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}}{dt} &= \dot{\mathbf{n}} = \omega[\mathbf{N} \times \mathbf{n}] = \omega\mathbf{l}, & \frac{d\mathbf{l}}{dt} &= \dot{\mathbf{l}} = \omega[\mathbf{N} \times \mathbf{l}] = -\omega\mathbf{n} \\ \dot{Q}_{ij} &= Q_0 \omega (-2n_i l_j - 2l_i n_j - n_i l_j - l_i n_j) = -3Q_0 \omega (n_i l_j + l_i n_j) \\ \ddot{Q}_{ij} &= 6Q_0 \omega^2 (n_i n_j - l_i l_j), & \ddot{Q}_{ij} &= 12Q_0 \omega^3 (l_i n_j + n_i l_j) \end{aligned}$$

Полная интенсивность квадрупольного излучения:

$$I_Q = \frac{\ddot{Q}_{ii} \ddot{Q}_{jj}}{180c^5} = \frac{(12)^2 \cdot 2Q_0^2 \omega^6}{6^2 \cdot 5c^5} = \frac{32e^2 R^4 \omega^6}{5c^5} = \frac{32e^2 R (R\omega^2)^3}{5c^5}.$$

Ускорение электрона при круговом движении $R\omega^2$ вычислим из закона Кулона и второго закона Ньютона:

$$R\omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{2e^2}{R^2} - \frac{e^2}{(2R)^2} \right) = \frac{7e^2}{4mR^2}.$$

Полная интенсивность излучения дает нам скорость потери энергии:

$$I_Q = -\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{7^3 e^8}{10c^5 m^3 R^5}.$$

Полная энергия системы будет равна

$$\mathcal{E} = 2 \frac{mv^2}{2} - 2 \frac{2e^2}{R} + \frac{e^2}{2R} = m(R\omega)^2 - \frac{7e^2}{2R} = mR \frac{7e^2}{4mR^2} - \frac{7e^2}{2R} = -\frac{7e^2}{4R},$$

где мы учли соотношение (1). Получаем дифференциальное уравнение относительно $R = R(t)$:

$$\frac{7^3 e^8}{10c^5 m^3 R^5} = -\frac{7e^2}{4R^2} \dot{R}, \quad \Rightarrow \quad 4R^3 \dot{R} = -\frac{8 \cdot 7^2 e^6}{5c^5 m^3}.$$

Интегрируя данное уравнение (при условии $R(0) = R_0$), окончательно находим

$$R^4(t) = R_0^4 - \frac{392e^6}{5c^5 m^3} t.$$

Б-1.8.5 Излучение при столкновении зарядов (??)

Два одноименных заряда (e_1, m_1) и (e_2, m_2) испытывают лобовое столкновение. Определить полную излученную энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$. Рассмотреть дипольный ($e_1/m_1 \neq e_2/m_2$) и квадрупольный ($e_1/m_1 = e_2/m_2$) случаи.

Обзор решения

Это типичная модель теории. Считаем дипольный момент, по нему дипольное излучение, интегрируем по всему времени, переходим к интегралу по скорости, ее находим из закона сохранения энергии.

Solution для дипольного случая

Предположим, что суммарные потери энергии малы по сравнению с начальной кинетической энергией системы. Поэтому определим интенсивность электромагнитного излучения исходя из того, что движение частиц происходит под действием электростатических сил (без учета потерь энергии на излучение).

Движение двух взаимодействующих частиц сводится к равномерному движению их центра масс и движению частицы с приведенной массой μ в поле силы взаимодействия двух частиц. Пусть частицы движутся по оси x , причем начало координат совпадает с положением центра масс системы. Обозначим R - расстояние между частицами, считаем в СЦМ:

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0; \quad x_1 = -R \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad x_2 = +R \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

$$d_x = x_1 e_1 + x_2 e_2 = R \frac{m_1 e_2 - m_2 e_1}{m_1 + m_2} = Rq, \quad d_y = d_z = 0$$

$$I_d = \frac{2}{3c^3} (\ddot{\mathbf{d}})^2 = \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{R}^2.$$

Полная потеря энергии за счет электрического дипольного излучения удобно вычисляются, если перейти от интегрирования по времени к интегрированию по скорости $v = \dot{R}$:

$$\delta \mathcal{E}_d = \int_{-\infty}^{+\infty} I_d dt \stackrel{dt=dv/\dot{R}}{=} \int_{-v_\infty}^{+v_\infty} \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{R}^2 \frac{dv}{\dot{R}} = \int_{-v_\infty}^{+v_\infty} \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{R} dv = \frac{2q^2 e_1 e_2}{3\mu c^3} \int_{-v_\infty}^{+v_\infty} \frac{dv}{R^2}.$$

Здесь $\ddot{R}$ находится из уравнения движения в СЦМ:

$$\ddot{R} = \frac{e_1 e_2}{\mu R^2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Из закона сохранения энергии (опять не учитывая потери на излучение) получаем

$$\frac{\mu v_\infty^2}{2} = \frac{\mu v^2}{2} + \frac{e_1 e_2}{R}, \quad \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{\mu}{2e_1 e_2} (v_\infty^2 - v^2).$$

Для полной излученной энергии находим

$$\delta \mathcal{E}_d = \frac{q^2 \mu}{6c^3 e_1 e_2} \int_{-v_\infty}^{+v_\infty} (v_\infty^2 - v^2)^2 dv = \frac{q^2 \mu v_\infty^5}{6c^3 e_1 e_2} \int_{-1}^{+1} (1 - u^2)^2 du = \frac{q^2 \mu v_\infty^5}{6c^3 e_1 e_2} \frac{16}{15},$$

где $u = v/v_\infty$ - нормированная скорость. Взяв определенный интеграл, получаем полную энергию, излученную в дипольной моде:

$$\delta \mathcal{E}_d = \frac{16}{45} \frac{q^2}{e_1 e_2} \frac{\mu v_\infty^2}{2} \left(\frac{v_\infty}{c} \right)^3 \sim \frac{\mu v_\infty^2}{2} \left(\frac{v_\infty}{c} \right)^3 \ll \frac{\mu v_\infty^2}{2}.$$

Дипольный момент обращается в ноль, если удельные заряды равны, т.е. если $e_1/m_1 = e_2/m_2$. В этом случае нам нужно рассмотреть следующий член мультипольного разложения, который учитывает электрическую квадрупольную и магнитную дипольную моды.

Solution для квадрупольного случая

Для равных удельных зарядов магнитный момент пропорционален моменту импульса и сохраняется вместе с ним.

Квадрупольный момент, из соображений симметрии, диагонален:

$$Q_{zz} = Q_{yy} = -\frac{Q_{xx}}{2} = -e_1 x_1^2 - e_2 x_2^2 = -R^2 \frac{m_1^2 e_2 + m_2^2 e_1}{(m_1 + m_2)^2} \equiv -R^2 q'.$$

$$I_Q = \frac{\ddot{Q}_{ii}\ddot{Q}_{ij}}{180c^5} = \frac{6\ddot{Q}_{2z}^2}{180c^5} = \frac{q'^2}{30c^5} \left(\frac{d^3 R^2}{dt^3} \right)^2.$$

Находим третью производную по времени, учитывая (1):

$$\frac{d^3 R^2}{dt^3} = 2\ddot{R}R + 6\dot{R}\dot{R} = 2\frac{d}{dt}\ddot{R}R + 6\dot{R}\dot{R} = 2\frac{d}{dt}\left(\frac{e_1 e_2}{\mu R^2}\right)R + 6\dot{R}\dot{R} = 2(-2)\frac{e_1 e_2}{\mu R^3}\dot{R}R + 6\dot{R}\dot{R} = (6-4)\dot{R}\dot{R} = 2\dot{R}\dot{R}.$$

Далее вычисления проводим аналогично дипольному случаю:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{E}_Q &= \int_{-\infty}^{+\infty} I_Q dt = \int_{-v_\infty}^{+v_\infty} \frac{4q'^2 v^2 \ddot{R}^2}{30c^5} \frac{dv}{\dot{R}} = \frac{2q'^2 e_1 e_2}{15\mu c^5} \int_{-v_\infty}^{+v_\infty} \frac{v^2 dv}{R^2} = \\ &= \frac{q'^2 \mu}{30e_1 e_2 c^5} \int_{-v_\infty}^{+v_\infty} v^2 (v_\infty^2 - v^2)^2 dv = \frac{q'^2 \mu v_\infty^7}{30e_1 e_2 c^5} \int_{-1}^{+1} u^2 (1-u^2)^2 du.\end{aligned}$$

Полная энергия квадрупольного излучения равна

$$\delta\mathcal{E}_Q = \frac{16}{1575} \frac{q'^2}{e_1 e_2} \frac{\mu v_\infty^2}{2} \left(\frac{v_\infty}{c} \right)^5 \sim \frac{\mu v_\infty^2}{2} \left(\frac{v_\infty}{c} \right)^5 \ll \delta\mathcal{E}_d \ll \frac{\mu v_\infty^2}{2},$$

и вновь оказывается много меньше исходной энергии частицы.

Б-1.8.6 Излучение пульсирующего сфероида (????)

Тело, ограниченное близкой к сфере поверхностью (сфероид) с уравнением

$$R(\theta) = R_0 [1 + \beta P_2(\cos \theta)],$$

заряжено с постоянной плотностью. Полный заряд равен q . Малый параметр $\beta (\beta \ll 1)$ гармонически меняется во времени с частотой ω . Удерживая низшие члены разложения по β , вычислить в длинноволновом приближении угловое распределение и полную мощность излучения.

Solution

Используем формулу квадратичного излучения, нужно только посчитать аккуратно квадрупольный момент.

Электрический дипольный момент сфероида равен нулю. Магнитный дипольный момент также равен нулю в силу центральной симметрии зарядов и токов. Электрический квадрупольный момент имеет следующие ненулевые компоненты (см. задачу 1.6.10):

$$Q_{zz} = \frac{6}{5} q R_0^2 \beta = \frac{6}{5} q R_0^2 \beta_0 \cos(\omega t), \quad Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{zz}.$$

Магнитное поле квадрупольной волны имеет вид ($\mathbf{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения)

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_Q &= \frac{|\mathbf{Q} \times \mathbf{n}|}{6c^3 r}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{e}_\alpha Q_{\alpha\beta} n_\beta. \\ \mathbf{H}_Q &= \frac{|\mathbf{Q} \times \mathbf{n}|}{6c^3 r}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{e}_\alpha Q_{\alpha\beta} n_\beta. \\ dI_Q &= \frac{\mathbf{Q}^2 - (\ddot{\mathbf{Q}})^2}{36c^5} \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{n_i \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ik} n_k - (n_i \ddot{Q}_{ij} n_j)^2}{36c^5} \frac{d\Omega}{4\pi}.\end{aligned}$$

В рассматриваемом здесь аксиально-симметричном случае:

$$dI_Q = \frac{\ddot{Q}_{zz}^2 (\cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta) - \ddot{Q}_{zz}^2 (\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta)^2}{36c^5} \frac{d\Omega}{4\pi},$$

$$\frac{dI_Q}{d\Omega} = \frac{\ddot{Q}_{zz}^2}{64\pi c^5} \cos^2 \theta \sin^2 \theta.$$

$$I_Q = \frac{\ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij}}{180c^5} = \frac{\ddot{Q}_{zz}^2}{120c^5}, \quad \ddot{Q}_{zz} = \frac{6}{5} q R_0^2 \ddot{\beta} = \frac{6}{5} q R_0^2 \beta_0 \omega^3 \sin(\omega t).$$

Б-1.8.7 Заряд на штанге

На невесомой штанге длиной l помещен заряд e с массой m и вращается в невесомости вокруг точки крепления штанги.

1) Найти закон изменения угловой скорости $\omega(t)$, если в начальный момент времени $\omega(0) = \omega_0$.

2) Определить интенсивность излучения $\overline{dI/d\Omega}$ и $\bar{I}$.

Указание: считать, что заря на штанге - диполь с отрицательным зарядом равным нулю.

Solution

Запишем баланс энергии с учетом потерь на излучение в дипольном приближении:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dt} &= -I_d, \\ \varepsilon &= \frac{ml^2}{2}\omega^2, \quad I_d = \frac{2}{3c^3}\ddot{d}^2 = \frac{2e^2l^2}{3c^3}\omega^4. \\ ml^2\omega\dot{\omega} &= -\frac{2e^2l^2}{3c^3}\omega^4, \quad \Rightarrow \quad -2\frac{\dot{\omega}}{\omega^3} = \frac{d}{dt}\frac{1}{\omega^2} = \frac{4e^2}{3c^3m}.\end{aligned}$$

Интегрируя данное уравнение с начальным условием $\omega(0) = \omega_0$, находим

$$\omega(t) = \left(\frac{1}{\omega_0^2} + t \frac{4e^2}{3c^3m} \right)^{-1/2}.$$

Полная интенсивность излучения изменяется только за счет уменьшения частоты $\omega(t)$. Распределение интенсивности по углам меняется с частотой ω , поскольку вектор вращается. Поэтому

$$\frac{dI_d}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} \left(\ddot{\mathbf{d}}^2 - (\dot{\mathbf{d}})^2 \right),$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор, задающий направление излученной волны.

Пусть штанга вращается вокруг оси z . Поскольку после усреднения по времени должно получиться аксиально симметричное распределение, вектор $\mathbf{n}$ можно взять в плоскости (x, z) , т.е. $\mathbf{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$, тогда, очевидно, $\ddot{\mathbf{d}} = -\omega^2 el(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$. Следовательно, для углового распределения имеем

$$\begin{aligned}\frac{dI_d}{d\Omega} &= \frac{e^2l^2\omega^4}{4\pi c^3} (1 - \cos^2(\omega t) \sin^2 \theta). \\ \overline{\frac{dI_d}{d\Omega}} &= \frac{e^2l^2\omega^4}{4\pi c^3} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta).\end{aligned}$$

Б-1.8.8 Вращающий излучающий электрон

Электрон вращается по окружности в однородном магнитном поле $\mathbf{H}$. Найти зависимость от времени кинетической энергии электрона $\mathcal{E}(t)$. Определить траекторию электрона при $v \ll c$.

Solution

Запишем баланс энергии с учетом потерь на излучение в дипольном приближении ($\mathbf{w}$ - ускорение электрона):

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dt} &= -I_d = -\frac{2}{3c^3}\ddot{d}^2 = -\frac{2e^2\mathbf{w}^2}{3c^3}, \\ \mathbf{w} &= \frac{e}{mc}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{H}, \quad \mathbf{w}^2 = \frac{e^2H^2}{m^2c^2}v^2 = \frac{2e^2H^2}{m^3c^2}\mathcal{E}. \\ \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= -\frac{4e^4H^2}{3m^3c^5}\mathcal{E}, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp\left(-\frac{4e^4H^2}{3m^3c^5}t\right).\end{aligned}$$

(?? а траектория - спираль что ли? додумая когда-то.)

Б-1.8.9 Излучение двух зарядов на окружности

Определить интенсивность излучения $\overline{dI/d\Omega}$ и $\bar{I}$ для двух одинаковых зарядов e , движущихся равномерно с $v \ll c$ и с угловой скоростью ω по окружности радиуса a . Заряды находятся на противоположных концах диаметра.

Solution

Это типичный случай, когда дипольный момент равен нулю, считаем квадрупольный момент, усредняем, подставляем в формулу для квадрупольной интенсивности.

Электрический дипольный момент равен нулю, магнитный дипольный момент постоянен, лидирующий член - квадрупольный. Мгновенное распределение зарядов аксиально симметрично (ось симметрии соединяет заряды). В базисе, образованном собственными осями, квадрупольный момент имеет вид

$$Q_{ij} = Q_{\perp} \text{diag}(1, -1/2, -1/2), \quad Q_{\perp} = 4ea^2.$$

В лабораторной системе выразим квадрупольный момент через собственные векторы $\mathbf{e}_{\alpha}$:

$$Q_{ij} = 4ea^2 \left(\mathbf{e}_{1i}\mathbf{e}_{1j} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_{2i}\mathbf{e}_{2j} - \frac{1}{2}\mathbf{e}_{3i}\mathbf{e}_{3j} \right).$$

Собственные векторы вращаются с угловой скоростью ω . Ось вращения перпендикулярна $\mathbf{e}_1$, будем считать, что она параллельна $\mathbf{e}_3$. В этом случае $\dot{\mathbf{e}}_1 = \omega\mathbf{e}_2$, $\dot{\mathbf{e}}_2 = -\omega\mathbf{e}_1$, $\dot{\mathbf{e}}_3 = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{ij} &= 6ea^2\omega(e_{1i}e_{2j} + e_{2i}e_{1j}), \\ \ddot{Q}_{ij} &= 12ea^2\omega^2(-e_{1i}e_{1j} + e_{2i}e_{2j}), \\ \ddot{Q}_{ij} &= -24ea^2\omega^3(e_{1i}e_{2j} + e_{2i}e_{1j}). \end{aligned}$$

$$I_Q := \frac{\ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}_{ij}}{180c^5} = \frac{2(24)^2e^2a^4\omega^6}{180c^5} = \frac{32e^2a^4\omega^6}{5c^5} = \frac{2Q_{\perp}^2\omega^6}{5c^5}.$$

$$dI_Q := \frac{n_i\ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}_{ik}n_k - (n_i\ddot{Q}_{ij}n_j)^2}{36c^5} \frac{d\Omega}{4\pi},$$

$$\ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}_{jk} = (24ea^2\omega^3)^2(e_{1i}e_{1k} + e_{2i}e_{2k}),$$

$\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ - единичный вектор в направлении точки наблюдения.

Удобно проводить вычисления, предполагая, что в данный момент времени векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ направлены вдоль осей x, y . При этом вместо усреднения по времени можно усреднить по углу φ :

$$\begin{aligned} dI_Q &= \frac{24^2e^2a^4\omega^6}{36c^5} \sin^2\theta \left[1 - \frac{1}{4}\sin^2\theta\sin^2(2\varphi) \right] \\ \frac{dI_Q}{d\Omega} &= \frac{4e^2a^4\omega^6}{\pi c^5} \sin^2\theta \left[1 - \frac{1}{8}\sin^2\theta \right] \end{aligned}$$

Б-1.8.10 Два заряда не на диаметре окружности

Два одинаковых заряда движутся равномерно нерелятивистски с угловой скоростью ω по окружности радиуса a . Насколько расположение зарядов должно отличаться от диаметрального, чтобы интенсивности электрического дипольного, квадрупольного излучений были равны?

Solution

Аккуратно считаем дипольный и квадрупольный моменты через угол между зарядами, по ним интенсивность, сравниваем, используем приближения малых скоростей. (?? не сложная задача, еще раз решу! формулы готовыми должны быть!)

Пусть 2α - угол между направлениями на заряды. Чтобы вычислить дипольный и квадрупольный моменты, выберем начало координат в центре окружности, ось z направим по оси вращения, ось x - по биссектрисе угла между зарядами. Тогда имеем

$$\begin{aligned} d_x &= 2ea\cos\alpha, \quad Q_{xx} = 4ea^2\cos^2\alpha, \\ Q_{zz} &= -2ea^2, \quad Q_{yy} = -Q_{xx} - Q_{zz} = 2ea^2(1 - 2\cos^2\alpha). \end{aligned}$$

Остальные компоненты $\mathbf{d}$ и Q_{ij} обращаются в нуль. Для решения задачи необходимо вычислить интенсивность дипольного I_d и квадрупольного I_Q излучения. С этой целью в лабораторной (не

вращающейся) системе выразим мультипольные моменты через собственные векторы $\mathbf{e}_i$ тензора Q_{ij} . Поскольку (см. задачу 1.8.9) $\dot{\mathbf{e}}_1 = \omega \mathbf{e}_2$, $\dot{\mathbf{e}}_2 = -\omega \mathbf{e}_1$, $\dot{\mathbf{e}}_3 = 0$, получим для дипольного излучения:

$$\mathbf{d} = 2ea \cos \alpha \mathbf{e}_1,$$

$$I_d = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 = \frac{2e^2 a^2 \omega^4}{3c^3} \cos^2 \alpha,$$

и для квадрупольного излучения:

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= 2ea^2 [2 \cos^2 \alpha e_{1i} e_{1j} - e_{2i} e_{2j} + (1 - 2 \cos^2 \alpha) e_{3i} e_{3j}] \\ \ddot{Q}_{ij} &= -8ea^2 \omega^3 (1 + 2 \cos^2 \alpha) [e_{1i} e_{2j} + e_{2i} e_{1j}] \\ I_Q &= \frac{\ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij}}{180c^5} = \frac{32e^2 a^4 \omega^6}{45c^5} (1 + 2 \cos^2 \alpha)^2 \end{aligned}$$

Приравняем интенсивности:

$$\frac{128e^2 a^4 \omega^6}{45c^5} (1/2 + \cos^2 \alpha)^2 = \frac{2e^2 a^2 \omega^4}{3c^3} \cos^2 \alpha.$$

Введем обозначение

$$K := \frac{15}{64} \left(\frac{c}{a\omega} \right)^2 \gg 1, \quad u := \cos^2 \alpha \quad 0 \leq u \leq 1$$

и получим квадратное уравнение $u^2 - (K-1)u + 1/4 = 0$ для определения $\cos^2 \alpha$. В интервал $[0, 1]$ попадает один корень:

$$u = \frac{1}{2} [K - 1 - \sqrt{K^2 - 2K}] = \frac{1}{2} [K(1 - \sqrt{1 - 2/K}) - 1].$$

С учетом малости величины $1/K$ разложим корень в ряд:

$$u \approx \frac{1}{2} \left[K \left(1 - 1 + \frac{1}{K} + \frac{1}{2K^2} \right) - 1 \right] = \frac{1}{4K} = \frac{16}{15} \left(\frac{a\omega}{c} \right)^2.$$

Окончательно находим

$$\cos \alpha = \frac{4a\omega}{\sqrt{15}c} \ll 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{4a\omega}{\sqrt{15}c}.$$

Б-1.8.11 Диполь на окружности

Точечный диполь $\mathbf{d}$ вращается по окружности радиуса R с угловой скоростью ω , причем $\mathbf{d} \perp \mathbf{R}$. Найти интенсивность электрического дипольного, квадрупольного и магнитного дипольного излучения при $R \ll \lambda = 2\pi c/\omega$.

Solution

1.8.11. При вращении выполняется соотношение $\ddot{\mathbf{d}} = -\omega^2 \mathbf{d}$, поэтому

$$I_d = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 = \frac{2\omega^4}{3c^3} \mathbf{d}^2.$$

Пусть начало координат совпадает с центром окружности, а вращение происходит вокруг оси z . В момент времени, когда $\mathbf{d} \parallel x$, выпишем квадрупольный и магнитный дипольные моменты. Для этого представим диполь как пару зарядов величины $\pm d/\varepsilon$, находящихся на расстоянии ε друг от друга и перейдем к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$. Для магнитного момента будем иметь

$$\mu = \frac{1}{2c} \frac{d}{\varepsilon} \omega [(R + \varepsilon)^2 - R^2] \mathbf{e}_z \rightarrow \frac{dR\omega}{c} \mathbf{e}_z.$$

Магнитный дипольный момент $\boldsymbol{\mu}$ от времени не зависит, поэтому магнитное дипольное излучение отсутствует:

$$I_\mu = 0.$$

Далее

$$Q_{xx} = 2 \frac{d}{\varepsilon} [(R + \varepsilon)^2 - R^2] \rightarrow 4dR, \quad Q_{yy} = Q_{zz} = -\frac{Q_{xx}}{2} \rightarrow -2dR.$$

Окончательно получим (по аналогии с задачей 1.8.9, допишу потом решение!)

$$I_Q = \frac{32d^2 R^2 \omega^6}{5c^5}.$$

28.2.5 Problems about Radiation 2

Б-1.8.12 Два диполя на штанге

Два одинаковых диполя $\mathbf{d}$ находятся на расстоянии R от центра невесомой штанги и направлены в противоположные стороны вдоль штанги. Определить зависимость угловой скорости от времени $\omega(t)$, если в начальный момент времени $\omega(0) = \omega_0$, масса диполя m , $R \ll c/\omega$.

Solution

Угловая скорость находится из уравнения баланса энергии, нужно только верно найти квадрупольный момент системы.

Суммарный дипольный момент системы $\mathbf{d} = 0$. Квадрупольный момент в два раза больше, чем в задаче 1.8.11, соответственно интенсивность квадрупольного излучения больше в четыре раза. (! потом сюда допишу целостное решение!)

Запишем уравнение баланса энергии:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -I_Q, \quad \mathcal{E} = mR^2\omega^2, \quad I_Q = \frac{128d^2R^2\omega^6}{5c^5}.$$

Получаем дифференциальное уравнение для $\omega(t)$:

$$\begin{aligned} 2mR^2\omega\dot{\omega} &= -\frac{128d^2R^2\omega^6}{5c^5}, \\ -4\frac{\dot{\omega}}{\omega^5} &= \frac{d}{dt}\frac{1}{\omega^4} = \frac{256d^2}{5mc^5}, \\ \omega(t) &= \left(\frac{1}{\omega_0^4} + \frac{256d^2}{5mc^5}t\right)^{-1/4}. \end{aligned}$$

Б-1.8.13 Угловое распределение излучения

Скорость заряженной частицы убывает от v_0 до 0 за время τ . Найти угловое распределение тормозного излучения, считая ускорение постоянным. Какая длительность импульса излучения Δt будет зарегистрирована покоящимся прибором, расположенным под углом θ к направлению движения частицы?

Solution

Это известный вопрос теории.
(допишу потом решение!)

Ответ: $dI_d = \left(\frac{ev_0}{\tau}\right)^2 \sin^2\theta \frac{d\Omega}{4\pi c^3}$, $\Delta t = \tau \left(1 - \frac{v_0}{2c} \cos\theta\right)$.

Б-1.8.14 Столкновение электрона и диполя

Электрон испытывает лобовое столкновение с неподвижным (бесконечно тяжелым) точечным диполем $\mathbf{d}$. Определить потерю энергии на излучение в результате столкновения. Движение электрона происходит вдоль прямой.

Solution

Решение задачи во многом похоже на решение задачи 1.8.5.

Интенсивность излучения и полная излученная энергия даются формулами

$$I_d = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{R}^2, \quad \Delta\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I_d dt = \int_{-v_\infty}^{v_\infty} I_d \frac{dv}{\dot{R}} = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{-v_\infty}^{v_\infty} \ddot{R} dv.$$

Электрон будет лететь по прямой только, если он летит вдоль вектора $\mathbf{d}$. Электрон отразится только в том случае, если он подлетит к диполю со стороны «минуса» и оттолкнется от него. Учитываем уравнение

движения электрона и закон сохранения энергии:

$$\ddot{R} = \frac{E|e|}{m} = \frac{2d|e|}{R^3m} > 0, \text{ откуда } \Delta\mathcal{E} = \frac{4|e|^3d}{3mc^3} \int_{-v_\infty}^{v_\infty} \frac{1}{R^3} dv,$$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{|e|d}{R^2} = \frac{mv_\infty^2}{2}, \text{ откуда } \frac{1}{R^2} = \frac{m(v_\infty^2 - v^2)}{2|e|d},$$

и для полной потери энергии на излучение получаем окончательно

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{c^3} \sqrt{\frac{2|e|^3m}{d}} \int_{-v_\infty}^{v_\infty} (v_\infty^2 - v^2)^{3/2} dv = \frac{v_\infty^4}{c^3} \sqrt{\frac{2|e|^3m}{d}} \int_{-1}^1 (1 - u^2)^{3/2} du;$$

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{3\pi}{8} \frac{v_\infty^4}{c^4} \sqrt{\frac{2|e|^3mc^2}{d}}.$$

Б-1.8.15 Вращение заряженной штанги

Равномерно заряженная штанга с линейной плотностью заряда ρ длиной l в начальный момент времени вращается с угловой скоростью ω_0 относительно конца штанги. Найти зависимость от времени $\omega(t)$, если масса штанги равна m .

Solution

Дипольный момент относительно неподвижного конца штанги равен $d = \rho l^2/2$. Кинетическая энергия $-\mathcal{E} = m\omega^2 l^2/6$. Решение полностью аналогично решению задачи 1.8.7 (с заменой $m \rightarrow m/3, e \rightarrow \rho l/2$). Поэтому приводим результат:

$$\omega(t) = \left(\frac{1}{\omega_0^2} + t \frac{\rho^2 l^2}{c^3 m} \right)^{-1/2}.$$

Б-1.8.16

Равномерно заряженная штанга с линейной плотностью заряда ρ длиной $2l$ в начальный момент времени вращается с угловой скоростью ω_0 относительно оси, проходящей через ее середину. Найти зависимость от времени угловой скорости $\omega(t)$, если масса штанги равна $2m$.

Solution

1.8.16. Квадрупольный момент вдоль оси штанги относительно ее неподвижного центра равен $Q_{\parallel} = 4\rho l^3/3$. Кинетическая энергия равна $\mathcal{E} = m\omega^2 l^2/3$. Решение полностью аналогично решению задачи 1.8.12 (с заменой $d \rightarrow \rho l^2/6, m \rightarrow \rho m/3$). В результате:

$$\omega(t) = \left(\frac{1}{\omega_0^4} + \frac{64\rho^2 l^4}{15mc^5} t \right)^{-1/4}.$$

Б-1.8.17

Нейтральная система четырех заряженных частиц жестко закрепленных в вершинах квадрата со стороной $2a$ (две частицы с зарядами $+q$ на одной диагонали, и две с зарядами $-q$ на другой, квадрат лежит в плоскости (x, y) , центр квадрата - на оси z) вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω . Найти зависимость от времени угловой скорости вращения, если массы частиц равны m , а угловая скорость в начальный момент времени равна ω_0 .

Solution

1.8.17. Собственные оси квадрупольного момента направлены по диагоналям квадрата и по оси z . Соответствующие собственные числа равны $Q_{11} = -Q_{22} = 12qa^2, Q_{33} = 0$ (см. задачу 1.6.5). Обозначим единичные собственные векторы $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3)$. Тогда для них выполняется: $\dot{\mathbf{e}}_1 = \omega \mathbf{e}_2, \dot{\mathbf{e}}_2 = -\omega \mathbf{e}_1, \dot{\mathbf{e}}_3 = 0$. Далее:

$$Q_{ij} = 12qa^2 (e_{1i}e_{1j} - e_{2i}e_{2j}), \quad \ddot{Q}_{ij} = 96qa^2 \omega^3 (-e_{1i}e_{2j} - e_{2i}e_{1j})$$

Интенсивность излучения и уравнение баланса энергии:

$$I_Q = \frac{\ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}_{ij}}{180c^5} = \frac{1024}{15} \frac{q^2 a^4 \omega^6}{c^5} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad \mathcal{E} = 4ma^2\omega^2.$$

Окончательно имеем

$$\omega(t) = \left(\frac{1}{\omega_0^4} + \frac{512}{15} \frac{q^2 a^2}{mc^5} t \right)^{-1/4}.$$

Б-1.8.18 Прецессия магнитного момента

Магнитный момент μ в начальный момент времени направлен перпендикулярно внешнему однородному магнитному полю $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ и прецессирует вокруг него. Найти $\mu_z(t)$, если гиромагнитное отношение равно γ .

Solution

У нас имеется магнитное излучение, а сам магнитный момент меняется по закону гиромагнитного отношения.

Уравнение движения (без учета радиационного трения) описывает прецессию магнитного момента вокруг поля $\mathbf{H}$ (ниже $\mathbf{M}$ обозначает механический момент):

$$\frac{d\mu}{dt} = \gamma \frac{d\mathbf{M}}{dt} = [-\gamma \mathbf{H} \times \mu] = [\boldsymbol{\omega} \times \mu].$$

Находим интенсивность излучения дипольного магнитного момента:

$$I_\mu = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mu}^2 = \frac{2\omega^4}{3c^3} (\mu^2 - \mu_z^2) = \frac{2\gamma^4 H^4}{3c^3} (\mu^2 - \mu_z^2) = -\frac{d\mathcal{E}}{dt},$$

$$\mathcal{E} = -(\mu \mathbf{H}) = -H\mu_z.$$

Получаем дифференциальное уравнение относительно μ_z :

$$\frac{d\mu_z}{dt} = \frac{2\gamma^4 H^3}{3c^3} (\mu^2 - \mu_z^2). \quad \mu_z(0) = 0$$

$$\mu_z(t) = \mu \operatorname{th} \left(\frac{\gamma^4 H^3}{6\mu c^3} t \right).$$

Б-1.8.19 Добротность конденсатора с катушкой

Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивности. Частота собственных колебаний равна ω_0 . Пусть катушка идеальная (без потерь), а конденсатор состоит из двух параллельных пластин площадью s , расстояние между которыми a . Размеры конденсатора малы по сравнению с $\lambda = 2\pi c/\omega$. Определить добротность контура. Добротность контура определяется как отношение запасенной энергии к потерям за период.

Solution

Тут самое главное - понять, что контур это тоже диполь.

Электрический дипольный момент конденсатора равен $d = qa$. Вычисляем интенсивность дипольного излучения (при гармонических колебаниях) и усредняем ее по периоду колебаний:

$$I_d = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2 = \frac{2a^2\omega^4}{3c^3} q^2,$$

$$\overline{I_d} = \frac{a^2\omega^4}{3c^3} q_0^2,$$

где q_0 - амплитуда колебаний заряда на конденсаторе. Энергия конденсатора равна $\mathcal{E}_C = 2\pi q^2 a/s$. Полная энергия колебательного контура есть $\mathcal{E} = 2\pi q_0^2 a/s$. Уравнение, описывающее баланс энергии, имеет вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx -\overline{I_d}, \quad \text{или} \quad \dot{q}_0 = \frac{as\omega^4}{12\pi c^3} q_0.$$

Находим решение уравнения:

$$q_0 = q_0(0) \exp\left(-\frac{as\omega^4}{12\pi c^3}t\right), \quad \mathcal{E} = \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{as\omega^4}{6\pi c^3}t\right).$$

Добротность будет равна

$$Q = \frac{6\pi c^3}{as\omega^3} = \frac{3}{4\pi^2} \frac{\lambda^3}{as} \gg 1.$$

Добротность велика, поскольку размеры конденсатора много меньше длины волны. Это позволяет считать, что заряд на конденсаторе колеблется почти гармонически (затухая за $Q/(2\pi)$ периодов) с частотой $\omega \approx \omega_0$.

Б-1.8.20 Добротность катушки с конденсатором

Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивности. Частота собственных колебаний равна ω_0 . Конденсатор идеальный (без потерь), а катушка (без сердечника) состоит из N витков площадью s каждый, длина катушки a . Размеры катушки малы по сравнению с $\lambda = 2\pi c/\omega$. Определить добротность контура.

Solution

1.8.20. Ход решения аналогичен ходу решения задачи 1.8.19.

Магнитный момент катушки равен $\mu = INs$ /с. Получаем интенсивность магнитного дипольного излучения (при гармонических колебаниях) и усредняем ее по периоду:

$$I_\mu = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mu}^2 = \frac{2N^2 s^2 \omega^4}{3c^5} I^2, \quad \text{поэтому} \quad I_\mu = \frac{N^2 s^2 \omega^4}{3c^5} I_0^2,$$

где I_0 - амплитуда колебаний тока в катушке. Энергия катушки равна $\mathcal{E}_L = 2\pi N^2 s I^2 / (ac^2)$. Полная энергия колебательного контура равна $\mathcal{E} = 2\pi N^2 s I_0^2 / (ac^2)$. Записываем дифференциальное уравнение баланса энергии и решаем его:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx -\bar{I}_\mu, \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_0 = -\frac{as\omega^4}{12\pi c^3} I_0, \quad I_0 = I_0(0) \exp\left(-\frac{as\omega^4}{12\pi c^3}t\right).$$

Находим закон изменения энергии и добротность:

$$\mathcal{E} = \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{as\omega^4}{6\pi c^3}t\right), \quad Q = \frac{6\pi c^3}{as\omega^3} = \frac{3}{4\pi^2} \frac{\lambda^3}{as} \gg 1.$$

Заметим, что формула для добротности оказывается такой же, как и в задаче 1.8.19.

Б-1.8.21

Нерелятивистская заряженная частица с зарядом q и массой m скользит без трения по поверхности вращения (ось вращения вертикальна) в горизонтальной плоскости. На частицу действует сила тяжести mg и сила нормальной реакции опоры. Частица теряет энергию за счет электромагнитного излучения, но потери за один оборот малы. Определить зависимость $z(t)$.

- 1) Для поверхности конуса $z = kr$.
- 2) Для поверхности параболоида $z = r^2/a$.

Solution

1.8.21. Частица будет скользить в горизонтальной плоскости при условии взаимной компенсации силы тяжести mg и вертикальной составляющей $\mathbf{N}_\perp$ силы реакции опоры $\mathbf{N}$. Центробежное ускорение создается горизонтальной составляющей $\mathbf{N}_\parallel$. 1) Коническая поверхность. $k = N_\parallel/N_\perp = mw/(mg) = w/g$, где w - ускорение частицы. Находим далее ускорение и кинетическую энергию:

$$w = kg = \frac{v^2}{r} = v^2 \frac{k}{z}, \quad T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgz.$$

Интенсивность излучения и полная энергия равны

$$I_d = \frac{2}{3c^2} \ddot{\mathbf{d}}^2 = \frac{2q^2}{3c^3} w^2 = \frac{2k^2 q^2 g^2}{3c^3} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad \mathcal{E} = T + U = \frac{3}{2}mgz.$$

Записываем дифференциальное уравнение и решаем его:

$$\dot{z} = -\frac{4k^2 q^2 g}{9mc^3}, \text{ откуда } z(t) = z_0 - \frac{4k^2 q^2 g}{9mc^3} t.$$

2) Параболоид вращения. Общий ход решения аналогичен, поэтому приведем только основные формулы. Находим ускорение, полную механическую энергию и интенсивность излучения:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= 2\frac{r}{a} = \frac{N_{\parallel}}{N_{\perp}} = \frac{mw}{mg} = \frac{w}{g}, \\ w &= 2g\frac{r}{a} = 2g\sqrt{\frac{z}{a}} = \frac{v^2}{r}, \quad T = \frac{1}{2}mv^2 = mgz, \\ I_d &= \frac{2q^2}{3c^3}w^2 = \frac{8q^2g^2}{3c^3a}z = -\frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \varepsilon = T + U = 2mgz. \end{aligned}$$

Записываем дифференциальное уравнение и решаем его:

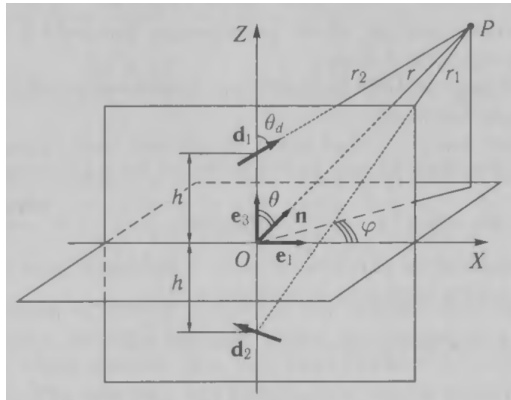
$$\dot{z} = -\frac{4q^2g}{3mc^3a}z, \quad \Rightarrow \quad z(t) = z_0 \exp\left(-\frac{4q^2g}{3mc^3a}t\right).$$

Б-1.8.22(Киселев-сем-с12/15.39) Излучение диполя вблизи плоскости (!?)

Гармонически колеблющийся диполь помещен на высоте h над идеально проводящей металлической плоскостью. Для случаев $h \ll \lambda$ и $h \gg \lambda$ найти интенсивность излучения диполя в зависимости от угла наблюдения и угла между диполем и нормалью к плоскости.

Solution

Пусть в соответствии с условием задачи диполь $\mathbf{d}_1$ расположен в плоскости (x, z) на расстоянии h от идеально проводящей плоскости (т.е. плоскости (x, y)):



При решении задачи используется так называемый метод изображений, в соответствии с которым исходная задача с граничными условиями (в нашем случае граничные условия нужно ставить на плоскости (x, y)) заменяется на эквивалентную задачу определения поля в расширенной области без граничных условий, но с учетом зарядов-изображений - фиктивных зарядов, расположенных таким образом, чтобы обеспечить выполнение необходимых граничных условий.

В данной задаче система зарядов вблизи проводящей плоскости обладает зеркальной симметрией, поэтому можно заменить проводящую плоскость «отражением» в ней исходного диполя, т.е. диполем $\mathbf{d}_2$, расположенным, как и диполь $\mathbf{d}_1$, в плоскости (x, z) , но в полупространстве $z < 0$ (рис. 114). При этом мы учитывали, что зеркальным изображением положительного заряда является отрицательный и наоборот. В итоге мы имеем конфигурацию двух гармонически колеблющихся диполей, изображенную на рис. 1.14. Пусть расстояние от средней точки между диполями (она находится в начале координат) до точки наблюдения в волновой зоне равно r . Расстояния от диполей до точки наблюдения можно записать в виде

$$r_{1,2} = r \pm h(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3),$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор, направленный от центра системы в точку наблюдения. При этом считается, что $h \ll r$.

Далее мы рассмотрим общий случай, когда длина волны поля излучения может быть сравнима по величине с расстоянием между диполями: $\lambda \sim h$ (при условии, что $\lambda \ll r$). С учетом введенных обозначений (рис. 1.14) выражения для диполей $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$ можно записать в виде

$$\mathbf{d}_1 = d \cos \theta_d \mathbf{e}_3 + d \sin \theta_d \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{d}_2 = d \cos \theta_d \mathbf{e}_3 - d \sin \theta_d \mathbf{e}_1$$

где d - величина диполя, θ_d - угол между диполем и нормалью к проводящей плоскости, т.е. е 3. Временную зависимость диполей при гармонических колебаниях задаем следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_1(t) &= \mathbf{d}_{01} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r_1}{c} \right) \right] = \mathbf{d}_{01} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega h (\mathbf{ne}_3)}{c} \right] \\ \mathbf{d}_2(t) &= \mathbf{d}_{02} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r_2}{c} \right) \right] = \mathbf{d}_{02} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega h (\mathbf{ne}_3)}{c} \right].\end{aligned}$$

Полная напряженность магнитного поля в волновой зоне равна сумме вкладов от каждого диполя в отдельности:

$$\mathbf{H} = -\frac{\omega^2}{c^2 r} \left\{ [\mathbf{d}_{01} \times \mathbf{n}] \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega h (\mathbf{ne}_3)}{c} \right] + [\mathbf{d}_{02} \times \mathbf{n}] \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega h (\mathbf{ne}_3)}{c} \right] \right\}$$

Здесь мы пренебрегли слагаемыми $\pm h (\mathbf{ne}_3)$ (см. (1)) в знаменателе, но не можем отбросить их в запаздывающем времени, потому что именно благодаря этим слагаемым проявляется интерференция между полями излучения истинного и фиктивного диполей. Учитывая (2), приводим выражение для магнитного поля к виду

$$\mathbf{H} = \frac{2\omega^2 d_0}{c^2 r} \left\{ [\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3] \cos \theta_d \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \cos \left[\frac{\omega h (\mathbf{ne}_3)}{c} \right] + [\mathbf{n} \times \mathbf{e}_1] \sin \theta_d \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left[\frac{\omega h (\mathbf{ne}_3)}{c} \right] \right\},$$

где d_0 - амплитуда колебаний диполя. Для углового распределения интенсивности излучения, усредненного за период колебаний, имеем

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\omega^4 d_0^2}{2\pi c^3} \left\{ [\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3]^2 \cos^2 \theta_d \cos^2 (\alpha (\mathbf{ne}_3)) + [\mathbf{n} \times \mathbf{e}_1]^2 \sin^2 \theta_d \sin^2 (\alpha (\mathbf{ne}_3)) \right\}.$$

Здесь мы ввели обозначение $\alpha = \omega h / c = h / \lambda$, где $\lambda = \lambda / (2\pi)$. Вводя далее сферические углы вектора $\mathbf{n}$ (см. рис.) и интегрируя по углу φ , получаем для полной интенсивности

$$I = \frac{2\omega^4 d_0^2}{c^3} \int_0^1 \left[\cos^2 \theta_d (1 - x^2) \cos^2 (\alpha x) + \frac{\sin^2 \theta_d}{2} (1 + x^2) \sin^2 (\alpha x) \right] dx,$$

причем интегрирование по углу θ производится только по верхнему полупространству. Отсюда находим общий результат:

$$I = \frac{\omega^4 d_0^2}{c^3} \left\{ \left(\cos^2 \theta_d - \frac{\sin^2 \theta_d}{2} \right) \left[\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - \frac{1}{3} \right] + \left(\cos^2 \theta_d + \frac{\sin^2 \theta_d}{2} \right) \left[1 - \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{4\alpha^3} \right) \sin 2\alpha - \frac{1}{2\alpha^2} \cos 2\alpha \right] \right\}.$$

Теперь рассмотрим некоторые предельные случаи выражения (3). Во-первых, исследуем случай $h \ll \lambda$, что соответствует $\alpha \rightarrow 0$. В этом пределе находим

$$I = \frac{4\omega^4 d_0^2}{3c^3} \cos^2 \theta_d.$$

В данном случае истинный и фиктивный диполи представляют собой единую систему, размеры которой малы по сравнению с длиной волны. Поэтому запаздывание поля излучения между диполями не играет никакой роли. Это означает, что вместо того, чтобы складывать магнитные поля, можно не просто вычислить вначале полный дипольный момент системы, а затем найти интенсивность излучения. Эту программу действительно несложно реализовать. Учитывая (2), легко находим, что суммарный дипольный момент равен

$$\mathbf{d} = 2d \cos \theta_d \mathbf{e}_3.$$

Вычисление полной интенсивности с таким значением $\mathbf{d}$ действительно приводит к результату (4). Из выражения (4) также видно, что эта интенсивность обращается в ноль, если диполь расположен параллельно плоскости: $\cos \theta_d = 0$. Это значит, что в данном случае необходимо найти вклад квадрупольного излучения. Здесь мы этого делать не будем, ибо ограничиваемся исследованием только дипольного излучения. Второй предельный случай: $h \gg \lambda$, и это соответствует условию $\alpha \rightarrow \infty$. В таком пределе из (3) получается следующий результат:

$$I = \frac{2\omega^4 d_0^2}{3c^3}.$$

То есть, система диполей в таком приближении излучает в точности так же, как один диполь, причем излучение не зависит от ориентации диполя (нет зависимости от угла θ_d). Это происходит потому, что условие $h \gg \lambda$ фактически означает, что зеркальная поверхность удалена от излучающего диполя на столь большое расстояние, что уже не оказывает на его излучение никакого влияния.

28.2.6 Problems about Electromagnetic Field of Relativistic Particles

Б-1.9.1 Произвольное движение

Определить напряженности электрического и магнитного поля произвольно движущегося заряда.

Solution

Используя $A^\mu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{j^\mu\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, вычислим поле, создаваемое точечной заряженной частицей, движение которой задано функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$, при этом $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ - скорость частицы. Вначале перепишем (1) в следующем эквивалентном виде:

$$A^\mu(\underline{x}) = \frac{1}{c^2} \int d^4x' \frac{j^\mu(\underline{x}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right).$$

$$j^\mu(\underline{x}) = e \frac{dx^\mu}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)),$$

$$A^\mu(\underline{x}) = \frac{e}{c} \int \frac{dx^\mu}{dt'} \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} dt' = \frac{e}{c} \int \frac{dx^\mu}{dt'} \frac{\delta(t - t')}{|f'(t')|} \frac{dt'}{R(t')}.$$

Здесь мы применили формулу (Д.7) для δ -функции от сложного аргумента, и под величиной t' мы понимаем решение уравнения

$$f(t') = 0, \quad \text{или} \quad t' + \frac{R(t')}{c} - t = 0,$$

где $\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')$, $R(t') = |\mathbf{R}(t')|$. И, наконец, учитывая, что

$$f'(t') = \frac{df(t')}{dt'} = \left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right) \Big|_{t'}, \quad \mathbf{n} := \mathbf{R}/R$$

$$A^0(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R(1 - (\mathbf{n}\mathbf{v})/c)} \Big|_{t'}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{v}}{cR(1 - (\mathbf{n}\mathbf{v})/c)} \Big|_{t'}.$$

Потенциалы (4) называются потенциалами Лиенара-Вихерта. Время t' есть запаздывающее время, поскольку разность времен $t - t' = R(t')/c$ в точности равна времени распространения электромагнитного поля из точки формирования (местоположение частицы $\mathbf{r}_0(t')$) до точки наблюдения поля. Заметим, что все величины в правых частях (4) берутся в запаздывающий момент t' .

Напряженности полей в точке наблюдения можно вычислить по известным формулам:

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

В целом данное вычисление не составляет проблемы, но является несколько громоздким. Поэтому ограничимся некоторыми указаниями. Прежде всего необходимо представить напряженности полей в виде

$$\mathbf{H} = \frac{e[\nabla t' \times \mathbf{w}]}{cR\left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right)} + \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times \frac{e\mathbf{v}}{c\left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right)} \right] + \frac{e[\nabla(\mathbf{n}\mathbf{v}) \times \mathbf{v}]}{c^2 R \left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right)^2},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\frac{e}{\left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right)} \nabla \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{e\nabla(\mathbf{n}\mathbf{v})}{cR\left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right)^2} - \\ & - \frac{1}{c} \frac{\partial t'}{\partial t} \left\{ \frac{e\mathbf{w}}{cR\left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right)} + \frac{e\mathbf{v}}{c\left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right)} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{e\mathbf{w}}{c^2 R \left(1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right)^2} \frac{\partial(\mathbf{n}\mathbf{v})}{\partial t'} \right\}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}$ - ускорение частицы. Затем можно воспользоваться некоторыми вспомогательными формулами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial t'}{\partial t} &= \frac{1}{(1 - (\mathbf{nv})/c)}, & \nabla t' &= -\frac{\mathbf{n}}{(1 - (\mathbf{nv})/c)}, & \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{R} \right) &= \frac{(\mathbf{nv})}{R^2} \\ \nabla \left(\frac{1}{R} \right) &= -\frac{\mathbf{n}}{R^2(1 - (\mathbf{nv})/c)}, & \frac{\partial(\mathbf{nv})}{\partial t'} &= (\mathbf{nw}) + \frac{\mathbf{v}[\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v})]}{R} \\ \nabla(\mathbf{nv}) &= -\frac{\mathbf{n}((\mathbf{nw}) - \mathbf{v}^2/R)/c + \mathbf{n}(\mathbf{nv})/R}{(1 - (\mathbf{nv})/c)} + \frac{\mathbf{v}}{R}\end{aligned}$$

Здесь две первые формулы получаются путем почленного дифференцирования соотношения (3). Остальные результаты следуют из первых двух формул. После проведения вычислений получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{e \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c})}{R^2 \left(1 - \frac{(\mathbf{nv})}{c}\right)^3} + \frac{e [\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{w}]]}{c^2 R \left(1 - \frac{(\mathbf{nv})}{c}\right)^3} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{e \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) [\mathbf{v} \times \mathbf{n}]}{c R^2 \left(1 - \frac{(\mathbf{nv})}{c}\right)^3} + \frac{e(c[\mathbf{w} \times \mathbf{n}] + [\mathbf{n} \times \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\] \times \mathbf{n})}{c^3 R \left(1 - \frac{(\mathbf{nv})}{c}\right)^3}.\end{aligned}$$

Заметим, что в этих формулах все величины в правых частях берутся в запаздывающий момент времени t' . Нетрудно проверить, что всегда выполняется $\mathbf{H} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$.

Каждое из выражений (5) и (6) для напряженностей полей содержит два слагаемых: первые слагаемые зависят только от скорости частицы и не зависят от ускорения, а вторые слагаемые пропорциональны ускорению $\mathbf{w}$ частицы. Первые слагаемые имеют квазистатический характер, убывая с расстоянием, как R^{-2} , в то время, как члены, зависящие от ускорения, описывают поперечное поле излучения, для которого поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ ортогональны друг другу и радиус-вектору $\mathbf{R}$, и изменяются, как R^{-1} с ростом R .

Б-1.9.2 Равномерное движение

Определить электромагнитное поле, создаваемое электроном, движущимся равномерно с $\mathbf{v}$.

Solution

Известны формулы в общем случае, есть ли проблемы написать их в простейшем случае?

Если ускорение частицы равно нулю, то в формулах (5) и (6) задачи 1.9.1 остаются только первые слагаемые. Именно они и описывают статические поля, создаваемые равномерно движущимся зарядом. Запишем эти поля в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R)}{\left(R - \frac{(\mathbf{Rv})}{c}\right)^3} \Bigg|_{t'}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{[\mathbf{R} \times \mathbf{E}]}{R}.$$

Заметим, что в формулах (1) поля выражены в терминах запаздывающего времени t' . Установим, как они будут выглядеть в момент времени наблюдения t . Воспользуемся следующими геометрическими соображениями.

На рис. 1.15: O - точка наблюдения, S - точка, в которой заряд находится в момент времени t , S' - точка, в которой он находился в соответствующий запаздывающий момент t', θ' - угол между направлением движения и радиус-вектором $\mathbf{R}(t')$ положения частицы в момент t' . Начало отсчета времени выбрано так, что в момент $t = 0$ заряд находится на кратчайшем расстоянии (равном ρ) от точки наблюдения.

Расстояние $S'M$ равно $(\nu R(t')/c) \cos \theta' = (\mathbf{R}(t') \mathbf{v})/c$, поэтому отрезок OM равен $R(t') - (\mathbf{R}(t') \mathbf{v})/c$. Эта величина входит в знаменатель формулы (1). Из треугольников OMS и $S'SM$ следует, что

$$\left(R(t') - \frac{(\mathbf{R}(t') \mathbf{v})}{c}\right)^2 = OM^2 = R^2(t) - MS^2 = R^2(t) - \left(\frac{\nu R(t')}{c}\right)^2 \sin^2 \theta'.$$

Из рисунка видно, что $R(t') \sin \theta' = \rho = R(t) \sin \theta$, а также

$$\mathbf{R}(t') - \frac{\mathbf{v}}{c} R(t') = \mathbf{R}(t).$$

Объединяя все эти результаты и подставляя их в (1), окончательно находим выражения для напряженностей полей в следующем виде;

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}],$$

где все величины в правой части взяты в момент времени t . Данный результат можно получить также и из статического кулоновского поля заряда, используя преобразование Лоренца.

Б-1.9.3 Взаимодействие двух параллельных электронов (!?!?!?!?)

Определить силу взаимодействия $\mathbf{F}$ двух электронов, движущихся параллельно друг другу с одинаковыми скоростями $\mathbf{V}$.

Указание: использовать результат предыдущей задачи (напишу его сюда тоже).

Solution

1.9.3. Приводим ответ:

$$F_x = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cos \theta}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}, \quad F_y = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \sin \theta}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}},$$

где $\mathbf{R}$ - радиус-вектор от e_2 к e_1 , θ - угол между векторами $\mathbf{R}$ и $\mathbf{V}$, заряды движутся вдоль оси x .

Б-1.9.4 Излучение ускоряющейся частицы

Найти мгновенное угловое распределение мощности излучения заряженной релятивистской частицы $dW/d\Omega$ в двух случаях:

- 1) скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ частицы параллельны в некоторый момент запаздывающего времени t' ;
- 2) скорость и ускорение взаимно перпендикулярны в момент запаздывающего времени t' .

Проанализировать нерелятивистский $v/c \ll 1$ и ультрарелятивистский $v/c \sim 1$ пределы.

Solution в общем случае

1.9.4. Как следует из формул (5), (6) задачи 1.9.1 (см. также (I.62)), на больших расстояниях от частицы выражения для напряженностей полей выглядят следующим образом:

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2 R (1 - (\mathbf{nv})/c)^3} [\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{w}]], \quad \mathbf{H} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}],$$

т.е. содержат только волновые поля (поля, спадающие, как $1/R$ и создающие конечный поток энергии на бесконечности).

Общее выражение для углового распределения мощности излучения имеет вид (в соответствии с (1.66))

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{\|\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \mathbf{w}]\|^2}{(1 - (\mathbf{nv})/c)^5} \Big|_{t'},$$

где все величины в правой части взяты в запаздывающий момент времени t' . Здесь $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ - скорость и ускорение частицы, $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ - единичный вектор в направлении наблюдения.

Далее мы будем считать, что заряд ускоряется в течение короткого интервала времени, при этом скорость и ускорение не успевают существенно измениться, тем самым мы будем рассматривать мгновенное угловое распределение мощности.

1) Скорость $\mathbf{v}$ параллельна ускорению $\mathbf{w}$ (в момент времени t').

При этом угловое распределение мощности излучения имеет вид

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{|\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{w}]|^2}{(1 - (\mathbf{nv})/c)^5} = \frac{e^2 \mathbf{w}^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^5},$$

причем угол θ отсчитывается от направления $\mathbf{w}$ или $\mathbf{v}$.

2) Скорость $\mathbf{v}$ перпендикулярна ускорению $\mathbf{w}$ (в момент времени t').

Выберем систему координат так, чтобы ось z была направлена вдоль скорости, угол θ будет отсчитываться от направления скорости, азимутальный угол φ отсчитывается от направления ускорения. Угловое распределение мощности будет иметь вид

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2 w^2}{4\pi c^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^3} \left\{ 1 - \frac{(1 - v^2/c^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2} \right\}$$

3) В ы в о ды (рис. 1.16).

При $v/c \ll 1$ оба распределения переходят в нерелятивистскую формулу для интенсивности дипольного излучения. На рис. 1.16 соответствующие диаграммы изображены штриховой линией.

Рис. 1.16. Угловое распределение мощности излучения релятивистской заряженной частицы: a - скорость параллельна ускорению ($\gamma = 2$), σ скорость перпендикулярна ускорению ($\gamma = 1, 2$); штриховая линия отвечает случаю $v/c \ll 1$

При $v/c \rightarrow 1$ (ультрарелятивистский предел) диаграмма излучения «вытягивается» в направлении движения частицы. Наблюдается «прожекторный эффект», сопровождающий излучение релятивистских частиц: основная часть излучения происходит в конус очень узкого раствора $\delta\theta \lesssim 1/\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2} = mc^2/\mathcal{E}$, ось которого направлена вдоль скорости. В этом можно убедиться, анализируя знаменатели в угловых распределениях. В самом деле, раствор конуса по порядку величины можно определить из следующего приближенного соотношения:

$$1 - \frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c} = 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \simeq 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2} \simeq \frac{1}{2} (\gamma^{-2} + \theta^2).$$

откуда и следует приведенная выше оценка. Вне этого конуса мощность излучения очень быстро спадает.

Б-1.9.5 Электрон в ускорителе

Найти энергию излучения релятивистского электрона в однородном магнитном поле за один оборот. Найти полную мощность (в мегаваттах) синхротронного излучения в ускорителе на встречных пучках электронов и позитронов с энергией 100 ГэВ. Длина окружности ускорителя 30 км, число ускоряемых частиц в кольце $5 \cdot 10^{12}$. Оценить характерную длину волны излучения,

Solution

Как следует из формулы (1.66) (см. также (1.63) и (1.65)), скорость полных потерь энергии заряженной релятивистской частицей за счет излучения получается в результате интегрирования по углам соответствующего углового распределения мощности:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = W = \int \frac{dW}{d\Omega} d\Omega = \frac{e^2}{4\pi c^3} \int \frac{\|[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \mathbf{w}]]\|^2}{(1 - (\mathbf{n}\mathbf{v})/c)^5} d\Omega$$

где $\mathbf{v}$ - скорость, $\mathbf{w}$ - ускорение частицы, $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении наблюдения.

Далее прежде всего заметим, что мощность излучения или потеря энергии частицей в единицу запаздывающего времени (1) является релятивистским инвариантом. Для того, чтобы убедиться в этом, вначале перейдем в собственную (мгновенно сопутствующую) инерциальную систему отсчета K_0 , где мгновенная скорость частицы равна нулю ($\mathbf{v}_0 = 0$). Выполняя интегрирование по углам в выражении (1) в этой системе, получим

$$-\left. \frac{d\mathcal{E}}{dt'} \right|_{K_0} \equiv -\frac{d\mathcal{E}_0}{dt'_0} = \int_0^\pi \frac{e^2 \mathbf{w}_0^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3} 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{2e^2 \mathbf{w}_0^2}{3c^3},$$

где $\mathbf{w}_0$ - ускорение частицы в мгновенно сопутствующей системе отсчета, $dt'_0 = d\tau$ - интервал собственного времени частицы, θ - угол между ускорением $\mathbf{w}_0$ и направлением наблюдения излучения $\mathbf{n}$ в момент времени t'_0 . Отсюда видно, что излучение в мгновенно сопутствующей системе отсчета фактически имеет дипольный характер, ибо подынтегральное выражение в (2) переходит в известное угловое распределение интенсивности излучения дипольного момента при замене $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}_0$. Полная скорость потерь энергии в системе K_0 описывается нерелятивистской формулой для полной интенсивности дипольного излучения. Далее вспомним, что наряду с энергией излучение уносит также и импульс, причем в волновой зоне импульс поля, излучаемый в промежуток времени dt' в телесный угол $d\Omega$, направлен по вектору $\mathbf{n}$ (по

радиус-вектору точки наблюдения). В этой связи рассмотрим четырехмерный вектор потерь энергии-импульса частицы за время dt' :

$$dP^\mu = (-d\mathcal{E}/c, -d\mathbf{p}).$$

В силу симметрии углового распределения дипольного излучения относительно замены $\theta \rightarrow \pi - \theta$ полная потеря импульса частиц в системе K_0 равна нулю: $d\mathbf{p} = 0$. Поэтому в мгновенно сопутствующей системе отсчета

$$dP_0^\mu = (-d\mathcal{E}_0/c, 0).$$

Перейдем далее в лабораторную систему отсчета (в которой скорость частицы равна v), используя преобразование Лоренца. Учитывая, что $-d\mathcal{E} = -d\mathcal{E}_0\gamma$, и, соответственно, $dt'_0 = d\tau = dt'/\gamma$, где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, получим, что скорость потерь энергии является лоренц-инвариантом:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = -\frac{d\mathcal{E}_0}{d\tau} = -\frac{d\mathcal{E}_0}{dt'_0} = \frac{2e^2\mathbf{w}_0^2}{3c^3}$$

(формула Лармора). Формулу (3) можно записать в релятивистскиинвариантном виде, заменяя $\mathbf{w}_0^2$ релятивистским инвариантом, переходящим в $\mathbf{w}_0^2$ в системе отсчета K_0 . Таким инвариантом является четырехмерный квадрат 4-ускорения частицы $w^\mu = du^\mu/ds$ (см. (I.68)), где $u^\mu = dx^\mu/ds$ — 4-скорость частицы. В мгновенно сопутствующей системе отсчета $w^\mu = (0, \mathbf{w}_0/c^2)$, поэтому $w^\mu w_\mu = -\mathbf{w}_0^2/c^4$. Таким образом, в лабораторной системе скорость потерь энергии имеет вид

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = -\frac{2e^2c}{3}w^\mu w_\mu.$$

Заметим, что тот же самый результат можно было бы получить, непосредственно проводя интегрирование в (1), однако это потребовало бы существенно БОльших технических усилий.

В рамках нашей задачи ускорение частицы создается внешним электромагнитным полем — на частицу действует сила Лоренца:

$$w^\mu = \frac{e}{mc}F^{\mu\nu}u_\nu = \frac{e\gamma}{mc^2}\left(\frac{1}{c}(\mathbf{E}\mathbf{v}), \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]\right).$$

В случае синхротронного излучения, т.е., когда частица движется в однородном магнитном поле по круговой траектории, выполняется $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{H}$, и поэтому (4) приводится к виду

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = W = \frac{2e^4\gamma^2}{3m^2c^5}v^2H^2.$$

Для электрона, движущегося в ускорителе в однородном магнитном поле с постоянной по модулю скоростью, имеют место следующие соотношения: $\omega = \frac{eH}{mc\gamma}$, $R = \frac{v}{\omega} = \frac{mc^2v\gamma}{ceH}$, т. е. $eH = \frac{mcv\gamma}{R}$, $L = 2\pi R$, где ω — частота вращения, R — радиус круговой траектории, L — длина окружности ускорителя. Движение электрона мы считаем релятивистским, т.е. $v \sim c$ или $\gamma = \varepsilon/(mc^2) \gg 1$. При выполнении всех этих условий формула (5) принимает вид

$$W \simeq \frac{8\pi^2}{3} \frac{e^2c}{L^2} \gamma^4 = \frac{8\pi^2}{3} \frac{e^2c}{L^2} \left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^4.$$

Форма частотного спектра существенно зависит от соотношения между характерным углом раствора конуса $\delta\theta$, в котором находится основная часть излучения релятивистской частицы (см. задачу 1.9.4), и полным углом $\Delta\theta$, на который отклоняется вектор скорости за все время движения частицы (или за период движения, например, в ускорителе).

Для синхротронного излучения, испускаемого электроном, движущимся по круговой траектории в магнитном поле, выполняется условие $\Delta\theta \gg \gamma^{-1}$. При этом излучение в заданном направлении $\mathbf{n}$ (в конус с раствором $\delta\theta \sim \gamma^{-1}$ и осью вдоль направления наблюдения $\mathbf{n}$) определяется участком траектории, на котором вектор скорости поворачивается на угол $\delta\theta \sim \gamma^{-1}$. Длина этого участка, очевидно, равна $\sim l = R/\gamma$ и называется длиной формирования излучения или длиной когерентности. Итак, при наблюдении синхротронного излучения в заданном направлении $\mathbf{n}$ будет регистрироваться последовательность коротких импульсов. Оценим их длительность. В конус с углом раствора γ^{-1} частица излучает в течение промежутка времени

$$\Delta t' = \frac{l}{v} \simeq \frac{R}{\gamma v} \simeq \frac{R}{\gamma c},$$

так как $v \sim c$. Наблюдатель регистрирует это излучение в течение интервала времени (см. (I.59))

$$\Delta t = (1 - (\mathbf{n}\mathbf{v})/c)\Delta t' \simeq \gamma^{-2}\Delta t'.$$

Или, окончательно, с учетом того, что частота обращения по окружности равна $\omega_0 = eHc/\mathcal{E} = v/R \simeq c/R$, имеем

$$\Delta t = \frac{\gamma^{-3}R}{c} \simeq \frac{\gamma^{-3}}{\omega_0}.$$

Это и есть длительность импульса излучения, фиксируемая наблюдателем. Между длительностью импульса и шириной его спектра имеется известное из теории интеграла Фурье соотношение $\Delta\omega\Delta t \sim 1$ (аналогичное по происхождению соотношению неопределенности в квантовой механике $\Delta E\Delta t \sim \hbar$). Это значит, что импульс длительностью Δt можно разложить в спектр частот шириной вплоть до частот порядка

$$\omega_c \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \gamma^3 \omega_0 = \left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^3 \omega_0.$$

При малых частотах мощность излучения растет с ростом частоты ω , поэтому (6) есть оценка положения максимума в спектре излучения. Наблюдатель регистрирует не только излучение на основной частоте обращения электрона, но также и высшие ее гармоники, которые в зависимости от энергии частицы могут попадать в область видимого света («светящийся электрон») или лежать выше - вплоть до рентгеновской области.

Итак, характерная длина волны синхротронного излучения (соответствующая частоте ω_c)

$$\lambda_c \simeq \frac{c}{\omega_c} \simeq R \left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^3 \simeq 0,006\text{Å}.$$

Среднее расстояние между частицами по окружности ускорителя $L/N \sim \sim 60\text{Å}$. При случайном, но равномерном распределении частиц по траектории излучение некогерентно ($L/N \gg \lambda$), поэтому полная мощность излучения

$$W^{\text{полн}} = NW = \frac{8\pi^2 e^2 c}{3 L^2} \left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^4 N \simeq 15\text{МВ}.$$

Б-1.9.6

Пучок релятивистских электронов пролетает через плоский конденсатор (электрический ондулятор), к которому приложено переменное напряжение с частотой ω_0 . Найти частоту излучения электронов (ондуляторного излучения) в зависимости от угла θ между наблюдателем и направлением движения пучка.

Solution

1.9.6. Ондулятор представляет собой устройство, обеспечивающее периодическое движение заряда по траектории, близкой к прямой (рис. 1.17). Будем считать, что движение электрона по оси ондулятора (вдоль оси x) происходит с большой (вообще говоря, релятивистской) скоростью.

Однородное периодически изменяющееся во времени электрическое поле, приложенное в перпендикулярном к движению электрона направлении (вдоль оси y), вызывает малые колебания частицы в поперечном направлении. Используемое приближение предполагает, что эти колебания практически не влияют на движение электрона со скоростью $v \sim$ вдоль оси ондулятора (скорость движения частицы вдоль оси y много меньше скорости вдоль оси x).

Рассмотрим данную задачу в системе отсчета K' , которая движется относительно лабораторной системы вдоль оси x со скоростью $\bar{v}_x$, где $\bar{v}_x$ - продольная скорость частицы, усредненная по периоду поперечных колебаний (условно можно назвать эту систему "системой пучка"). В системе K' электрическое поле на разных участках конденсатора колеблется уже не синхронно. Чтобы определить частоту поля в системе пучка, введем четырехмерный волновой вектор стоячей волны в конденсаторе, который в лабораторной системе имеет компоненты

$$k_{\text{сТ}}^\mu = (\omega_0/c, 0, 0, 0).$$

С помощью преобразования Лоренца получаем тот же вектор в движущейся системе K' :

$$k_{\text{сТ}}'^\mu = \frac{1}{c} (\gamma\omega_0, -\beta\gamma\omega_0, 0, 0),$$

где $\beta = v/c$. Для достаточно слабого поля (если в движущейся системе K' электроны остаются нерелятивистскими) частота ондуляторного излучения в системе пучка не зависит от направления и совпадает с частотой вынуждающей силы $k_{\text{сТ}}'^0 = \gamma\omega_0/c$.

Далее рассмотрим волновой 4-вектор ондуляторного излучения в системе K' . В предположении о том, что излучение испускается в плоскости (x, y) , он имеет следующие компоненты:

$$k'^\mu = \frac{1}{c} (\gamma\omega_0, \gamma\omega_0 \cos \theta', \gamma\omega_0 \sin \theta', 0),$$

где θ' - угол между волновым вектором $\mathbf{k}'$ и осью x . При помощи обратного преобразования Лоренца переходим в лабораторную систему:

$$k^\mu = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \gamma^2 \omega_0 (1 + \beta \cos \theta') \\ \gamma^2 \omega_0 (\beta + \cos \theta') \\ \gamma \omega_0 \sin \theta' \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \omega \\ \omega \cos \theta \\ \omega \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем связь между углами в лабораторной и в движущейся системах отсчета:

$$\cos \theta = \frac{k^1}{k^0} = \frac{\beta + \cos \theta'}{1 + \beta \cos \theta'}, \quad \cos \theta' = \frac{-\beta + \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta},$$

а также искомую частоту ондуляторного излучения:

$$\omega = ck^0 = \gamma^2 \omega_0 (1 + \beta \cos \theta') = \frac{\omega_0}{1 - \beta \cos \theta'}.$$

Как следует из формулы (1), для ондуляторного излучения характерна пространственная дисперсия: под фиксированным углом к оси ондулятора испускается определенная частота. Кроме того, как видно из (1), с точки зрения спектрального состава ондуляторное излучение существенно отличается от синхротронного. В самом деле, в случае релятивистского движения фактор $(1 - (\mathbf{nv})/c) \sim (1 - \beta \cos \theta) \sim \gamma^{-2}$ (см. задачу 1.9.5), следовательно максимум мощности излучения должен приходиться на частоты порядка

$$\omega_c \sim \omega_0 \gamma^2 \simeq \omega_0 \left(\frac{\varepsilon}{mc^2} \right)^2$$

(ср. с формулой (6) задачи 1.9.5). Указанное отличие двух видов излучения связано с разными условиями формирования синхротронного и ондуляторного излучения. Для ондуляторного излучения полный угол $\Delta\theta$, на который отклоняется вектор скорости за все время движения частицы, невелик и удовлетворяет условию $\Delta\theta < \gamma^{-1} \ll 1$. Это означает, что длина формирования ондуляторного излучения, вообще говоря, больше, чем для синхротронного: излучение собирается не с малого участка траектории, а фактически со всей траектории движения. Общий характер излучения остается синхротронным: все излучение направлено в узкий конус вперед по движению, однако максимум мощности падает на несколько другую величину.

Б-1.9.7

Определить зависимость от времени энергии релятивистского электрона в однородном магнитном поле (скорость электрона перпендикулярна полю). Проверить, что в пределе $t \rightarrow \infty$ зависимость согласуется с результатом для нерелятивистского электрона.

1.9.7. Мощность синхротронного излучения (или полное количество потерь энергии на излучение заряженной частицей в единицу запаздывающего времени) имеет вид (см. формулу (5) задачи 1.9.5)

$$W_{\text{синхр}} = -\frac{d\varepsilon}{dt'} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 \mathbf{w}^2 = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^5} \gamma^2 v^2 = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^3} (\gamma^2 - 1).$$

Полагая, что потери энергии за период движения в магнитном поле малы, приходим к дифференциальному уравнению

$$\varepsilon = mc^2 \gamma, \quad \frac{d\varepsilon}{dt'} = mc^2 \dot{\gamma} = -W_{\text{синхр}}, \quad \text{или} \quad \frac{\dot{\gamma}}{1 - \gamma^2} = \frac{2e^4 H^2}{3m^3 c^5}.$$

Решая данное уравнение, находим зависимость энергии от времени:

$$\gamma = \frac{\mathcal{E}}{mc^2} = \text{cth} \left(\frac{t' - t_0}{\tau} \right), \quad \tau = \frac{3m^3 c^5}{2e^4 H^2}.$$

В пределе больших $t - t_0$ находим для кинетической энергии

$$T = \mathcal{E} - mc^2 = mc^2 \left\{ \text{cth} \left(\frac{t' - t_0}{\tau} \right) - 1 \right\} \approx \varepsilon_0 \exp \left(-2 \frac{t}{\tau} \right).$$

Это соответствует формуле для энергии нерелятивистского электрона в магнитном поле, полученной в задаче 1.8.8.

Б-1.9.8

Считая, что в линейном ускорителе частица движется вдоль прямой под действием постоянной силы, определить потери энергии на излучение. Определить КПД для ультрарелятивистской частицы.

Solution

1.9.8. Полагая, что векторы скорости и ускорения сонаправлены, т.е. $\mathbf{w} \parallel \mathbf{v}$, имеем

$$\mathbf{w} = \frac{e\mathbf{E}}{m\gamma^3}.$$

Мощность электромагнитного излучения, определяющая энергетические потери для частицы в единицу времени, постоянна и может быть представлена в виде

$$W_{\text{синхр}} = \frac{2e^2}{3c^3} \left\{ \gamma^4 \mathbf{w}^2 + \gamma^6 \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}\mathbf{w})^2 \right\} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 \mathbf{w}^2 = \frac{2e^4 E^2}{3m^2 c^3}.$$

Мощность силы, действующей на ультрарелятивистскую частицу в электрическом поле, т.е. работа, совершаемая электрическим полем в единицу времени, равна

$$(e\mathbf{E}\mathbf{v}) \simeq |e|Ec, \quad \text{КПД} \simeq 1 - \frac{2|e|^3 E}{3m^2 c^4}.$$

28.2.7 Problems about Scatterings 1**Б-1.10.1**

Определить поляризацию рассеянного электромагнитного поля для следующих случаев:

- 1) при рассеянии линейно поляризованной плоской монохроматической волны свободным электроном;
- 2) при рассеянии циркулярно поляризованной плоской монохроматической волны свободным электроном.

Solution**Киселев-сем-ЭД.311 Рассеяние на металлическом шарике (!?!?!?)**

Вычислить сечение рассеяния линейно поляризованной электромагнитной волны на идеально проводящем металлическом шарике радиуса $a \ll \lambda$.

Solution

Поскольку длина волны много больше размера шарика, электрическое поле, действующее на шарик, можно считать однородным и слабо меняющимся. Очевидно, что под воздействием электрического поля шарик поляризуется.

Вычислим электрический дипольный момент поляризованного внешним полем шарика. Из соображений симметрии задачи диполь должен быть ориентирован по электрическому полю и располагаться в центре шарика. Поле диполя вне шарика (см. (8.8)) -

$$\mathcal{E}_{(d)} = \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{R^3}.$$

Условие идеальной проводимости шарика означает, что суммарное электрическое поле $\mathcal{E}$, касательное к поверхности шарика, должно быть равно нулю, так как иначе возникали бы бесконечные токи. На поверхности шарика поле (14.8) имеет две компоненты: по нормали к поверхности шарика $\mathbf{n}$ и по направлению самого диполя. Рассмотрим, например, суммарное поле на северном полюсе шарика, где $(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) = 0$:

$$\mathcal{E}_{(d)} + \mathcal{E}_0 = -\frac{d}{a^3} + \mathcal{E}_0,$$

причем в этой точке оба вектора, и диполь, и внешнее электрическое поле, - касательные к поверхности, т.е. их сумма должна быть равна нулю,

$$-\frac{d}{a^3} + \mathcal{E}_0 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad d = a^3 \mathcal{E}_0.$$

При таком значении дипольного момента суммарное электрическое поле на поверхности шарика

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{(d)} + \mathcal{E}_0 = \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{a^3}$$

в любой точке направлено по нормали к поверхности шарика, так что это значение дипольного момента шарика удовлетворяет искомому условию зануления электрического поля, касательногок его поверхности. Другими словами, суммарное электрическое поле $\mathcal{E}$ ортогонально поверхности: $[\mathcal{E}, \mathbf{n}] = 0$. Исходя из этого условия с учетом (14.8) на расстоянии радиуса шарика легко получить величину электрического дипольного момента шарика в общем виде без наводящих соображений, приведенных выше. Действительно, на поверхности шарика

$$[\mathcal{E}, \mathbf{n}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\mathcal{E}_0 a^3 - \mathbf{d}, \mathbf{n}] = 0,$$

причем векторы $\mathcal{E}_0$ и $\mathbf{d}$ - постоянные, а $\mathbf{n}$ имеет произвольное направление, так что равенство имеет место только при

$$\mathbf{d} = a^3 \mathcal{E}_0$$

Медленно меняющееся электрическое поле плоской волны приводит к перераспределению зарядов, то есть к возникновению токов. В идеально проводящей среде протекают токи, которые компенсируют магнитное поле, проникающее в среду, так чтобы его поперечная компонента обращалась в нуль (магнитное поле не проникает в сверхпроводник). Поэтому для суммарного магнитного поля необходимо занулить поперечную составляющую: $\mathcal{H} \cdot \mathbf{n} = 0$. Вводя магнитный дипольный момент шарика $\boldsymbol{\mu}$, запишем стандартное выражение для магнитного поля диполя

$$\mathcal{H}_{(\boldsymbol{\mu})} = \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}}{R^3},$$

так что условие для суммарного магнитного поля на поверхности шарика приводит к

$$\mathcal{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n}) + a^3 (\mathcal{H}_0 \cdot \mathbf{n}) = 0$$

где $\mathcal{H}_0$ - магнитное поле падающей на шарик плоской волны. С учетом произвольности направления $\mathbf{n}$ получим величину магнитного дипольного момента шарика

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{1}{2}a^3 \mathcal{H}_0$$

В итоге, суммарное магнитное поле на поверхности шарика

$$\mathcal{H} = \frac{3}{2} [\mathcal{H}_0 - \mathbf{n} (\mathcal{H}_0 \cdot \mathbf{n})]$$

Поскольку электрическое и магнитное поля в плоской волне равны по модулю, мы видим, что электрический и дипольный момент идеально проводящего шарика в плоской волне оказываются величинами одного порядка. Это несколько противоречит наивным ожиданиям, так как наше построение разложения излучения замкнутой системой зарядов по мультипольным моментам показывало, магнитное дипольное излучение подавлено по сравнению с электрическим дипольным дополнительным фактором малости, а именно; квадратом отношения скорости движения зарядов к скорости света. Однако для идеально проводящей среды в поле электромагнитной волны, как оказалось, магнитный дипольный момент шарика одного порядка величины с электрическим диполем. Такой результат является следствием приближения, основанного на почти мгновенной компенсации магнитного поля, проникающего в проводник, за счет индуцированных токов.

Подчеркнем, что для идеально проводящего шарика мы получили точные значения дипольных моментов, а высшие мультиполи тождественно равны нулю (иначе возникали бы касательные к поверхности шарика электрическое и нормальное магнитное поля). Поэтому в этой задаче применимы формулы дипольного излучения.

Для упрощения выкладок проведем сначала расчет с учетом только электрического дипольного момента. Зная дипольный момент шарика, легко определить интенсивность излучения при падении линейно поляризованной волны ${}^4\mathcal{E}_0 \| x$:

$$d^2 \mathfrak{J} = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{d}}, \mathbf{n}]^2 d \cos \theta d\phi,$$

где для гармонических колебаний в волне

$$\ddot{\mathbf{d}}(\omega) = -\omega^2 \mathbf{d}(\omega) = -\omega^2 a^3 \mathcal{E}_0(\omega)$$

Как обычно,

$$[\ddot{\mathbf{d}}, \mathbf{n}]^2 = |\ddot{\mathbf{d}}|^2 \sin^2 \psi,$$

где угол ψ уже вводился чуть выше, так что в полной аналогии с расчетом сечения рассеяния на квазиупругом диполе найдем

$$\frac{d^2\sigma}{d\cos\theta d\phi} = \frac{1}{c^4} \omega^4 a^6 (1 - \sin^2\theta \cos^2\phi)$$

Интегрируя по углу ϕ , получаем

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2\pi}{c^4} \omega^4 a^6 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2\theta\right) = \frac{\pi}{c^4} \omega^4 a^6 (1 + \cos^2\theta).$$

И, наконец, после интегрирования по $\cos\theta$ находим полное сечение

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^4}{c^4} a^6.$$

Как мы помним, величина

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

есть обратная длина волны, и

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 a^2.$$

Для учета магнитного дипольного момента шарика запишем выражения для магнитного поля в волновой зоне за счет электрического диполя

$$\mathcal{H}_{[d]} = \frac{1}{c^2 R} [\ddot{\mathbf{d}}, \mathbf{n}]$$

и за счет магнитного диполя

$$\mathcal{H}_{[\mu]} = \frac{1}{c^2 R} [[\ddot{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{n}], \mathbf{n}]$$

и учтем их интерференцию

$$\mathcal{H}_{\text{s.s.}} = \frac{1}{c^2 R} [\ddot{\mathbf{d}} + [\ddot{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{n}], \mathbf{n}],$$

где единичный вектор $\mathbf{n}$ уже обозначает направление излучения электромагнитной волны. Поток энергии в волновой зоне определяется квадратом магнитного поля, который мы вычислим в явном виде покомпонентно:

$$c^4 R^2 |\mathcal{H}_{\text{s.s.}}|^2 = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \left(\ddot{d}_\gamma + \epsilon_{\gamma ij} \ddot{\mu}_i n_j \right) \cdot \epsilon_{\alpha\lambda\rho} n_\lambda \left(\ddot{d}_\rho + \epsilon_{\rho kl} \ddot{\mu}_k n_l \right) =$$

$$n^2 \ddot{\mathbf{d}}^2 - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}})^2 + 2n^2 (\ddot{\mathbf{d}} \cdot [\ddot{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{n}]) + n^2 \{ n^2 \ddot{\boldsymbol{\mu}}^2 - (\ddot{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{n})^2 \},$$

где мы учли, что $(\mathbf{n} \cdot [\ddot{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{n}]) = 0$. Затем следуя введенными нами при рассмотрении рассеяния на квазиупругом диполе обозначениями углов, положим также, что электрическое поле в падающей волне направлено по оси x , магнитное - по оси y , а вектор Пойнтинга - по оси z , и найдем

$$c^4 R^2 |\mathcal{H}_{\text{s.s.}}|^2 = |\ddot{\mathbf{d}}|^2 (1 - \sin^2\theta \cos^2\phi) + |\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2 (1 - \sin^2\theta \sin^2\phi) - 2|\ddot{\mathbf{d}}||\ddot{\boldsymbol{\mu}}| \sin\theta \cos\phi.$$

Сравнивая с расчетом дваждыдифференциального сечения рассеяния при наличии только электрического дипольного момента, приведенного выше,

$$\frac{d^2\sigma}{d\cos\theta d\phi} = \frac{1}{c^4} \omega^4 a^6 (1 - \sin^2\theta \cos^2\phi)$$

с учетом отношения

$$\frac{|\ddot{\boldsymbol{\mu}}|}{|\ddot{\mathbf{d}}|} = \frac{1}{2}$$

находим, что полное выражение

$$\frac{d^2\sigma}{d\cos\theta d\phi} = \frac{1}{c^4} \omega^4 a^6 \left\{ (1 - \sin^2\theta \cos^2\phi) + \frac{1}{4} (1 - \sin^2\theta \sin^2\phi) - \sin\theta \cos\phi \right\}.$$

$$\int d\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2\pi}{c^4} \omega^4 a^6 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sin^2\theta + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2\theta \right) \right\} = \frac{5\pi}{4c^4} \omega^4 a^6 (1 + \cos^2\theta).$$

$$\sigma = \frac{10\pi}{3} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 a^2.$$

В сравнении с геометрическим размером поперечного сечения шарика πa^2 полное сечение подавлено четвертой степенью малого отношения радиуса шарика к длине падающей электромагнитной волны. Сечение приближается к геометрическому, если радиус шарика и длина волны становятся сравнимы, но в этом случае сделанное нами приближение диполя не верно, и шарик просто начинает отражать волну на своей поверхности.

Качественное объяснение рассеяния на шаре (!!!!!)

И почему качественно мы говорим, что волна огибает шар?? где там в формулах это?? (в 1й части это тоже укажу!)

Б-1.10.2 Рассеяние осциллятором

- 1) Найти дифференциальные и полные сечения рассеяния линейно поляризованного и естественного света осциллятором с затуханием (затухание обусловлено вязким трением).
- 2) Найти полное сечение поглощения.
- 3) Определить поляризацию рассеянной волны.

Solution

Б-1.10.3 Циркулярно поляризованная волна и электрон

Определить дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma/d\Omega$ плоской монохроматической циркулярно поляризованной электромагнитной волны электроном, находящимся в сильном однородном магнитном поле $\mathbf{H}_0$, с учетом радиационного трения. Рассмотреть случаи $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$ и $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}_0$, где $\mathbf{k}$ - волновой вектор падающей волны

Solution

Б-1.10.4 Неполаризованная волна на осцилляторе в магнитном поле

Определить дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma/d\Omega$ плоской монохроматической непolarизованной электромагнитной волны заряженным гармоническим осциллятором, находящимся в сильном однородном магнитном поле $\mathbf{H}_0$, с учетом радиационного трения. Рассмотреть случаи $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$ и $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}_0$.

Solution

Запишем уравнения движения осциллятора в поле $\mathbf{H}_0$ и поле волны:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2\mathbf{r} + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{r}} + e\mathbf{E}_B + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{H}_B + \mathbf{H}_0)],$$

$$\mathbf{E}_B = E_n \operatorname{Re} \left(\mathbf{e} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right), \quad (\mathbf{e}\mathbf{e}^*) = 1, \quad (\mathbf{e}\mathbf{k}) = 0,$$

где $\mathbf{e}$ - вектор поляризации падающей волны (по условию задачи поляризация должна быть циркулярной).

Далее мы делаем стандартные приближения (см. задачу 1.10.2): пренебрегаем магнитной составляющей силы Лоренца, а также опускаем $\mathbf{k}\mathbf{r} \ll 1$ в показателе экспоненты. Для режима установившихся колебаний $\mathbf{r} \sim e^{-i\omega t}$, поэтому $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2\mathbf{r}$. Считаем, что внешнее поле $\mathbf{H}_0$ направлено по оси z . В итоге уравнение приводится к виду

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_H[\mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{r}}] = \frac{eE_n}{m} \operatorname{Re} (\mathbf{e} e^{-i\omega t}),$$

$$\gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}, \quad \omega_H = \frac{eH_0}{mc},$$

где $\mathbf{e}_z$ - вещественный единичный вектор вдоль оси z . Будем искать решение для установившихся колебаний в виде $\mathbf{r}(t) = \rho_0 e^{-i\omega t}$. Усредненная по периоду плотность потока энергии в падающей волне и усредненная интенсивность рассеянной дипольной волны в направлении $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ имеют вид

$$\overline{S_n} = \frac{cE_n^2}{8\pi}, \quad \overline{dI_d} = \frac{e^2\omega^4}{8\pi c^3} \left(|\rho_0|^2 - (\rho_0 \mathbf{n}) (\rho_0^* \mathbf{n}) \right) d\Omega,$$

поэтому дифференциальное сечение рассеяния:

$$d\sigma = \frac{\overline{dI_d}}{|\overline{S_i}|} = \frac{e^2\omega^4}{c^4 E_{11}^2} (\delta_{ij} - n_i n_j) \rho_{0i} \rho_{0j}^* d\Omega$$

Уравнение движения для комплексной амплитуды ρ_0 приводится к виду

$$-\omega^2 \rho_0 + \omega_0^2 \rho_0 - i\omega\gamma\rho_0 - i\omega\omega_H[\mathbf{e}_z \times \rho_0] = \frac{eE_n}{m} \mathbf{e}$$

Для компоненты ρ_{0z} вклад векторного произведения обнуляется, и мы получаем

$$\rho_{0z} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \frac{eE_n}{m} e_z,$$

где e_z есть проекция вектора e на ось z . Проекция уравнения (1) на плоскость (x, y) дает

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma & -i\omega\omega_H \\ i\omega\omega_H & \omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{0x} \\ \rho_{0y} \end{pmatrix} = \frac{eE_n}{m} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$$

где e_x, e_y - проекции вектора поляризации e . Обращая матрицу, получаем решение для амплитуды:

$$\begin{pmatrix} \rho_{0x} \\ \rho_{0y} \end{pmatrix} = \frac{eE_n}{m} \frac{\begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma & i\omega\omega_H \\ -i\omega\omega_H & \omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma \end{pmatrix}}{[\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma]^2 - \omega^2\omega_H^2} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}.$$

а) Случай $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$.

При этом вектор поляризации ортогонален направлению поля: $(\mathbf{e}\mathbf{H}_0) = 0$. Выберем для циркулярной поляризации $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1^{(\pm)} = (1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$. Получаем

$$\rho_0 = \frac{eE_n (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma \mp \omega\omega_H) \mathbf{e}_1^{(\pm)}}{m ([\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma]^2 - \omega^2\omega_H^2)} = \frac{eE_n \mathbf{e}_1^{(\pm)}}{m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma \pm \omega\omega_H)}$$

Тогда дифференциальное сечение рассеяния для правой (левой) циркулярной поляризации будет иметь вид

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\pm)} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2 \pm \omega\omega_H)^2 + \omega^2\gamma^2} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta).$$

Заметим, что полученные дифференциальные сечения содержат знаменатели, обладающие характерным резонансным поведением. Так в случае слабого поля ($\omega_H \ll \omega_0$) для падающей волны правой (левой) циркулярной поляризации резонансное условие выполняется для частот $\omega \simeq \omega_0 \pm \omega_H/2$, и это полностью соответствует расщеплению частот во внешнем магнитном поле, имеющему место в эффекте Зеемана.

В пределе сильного поля нужно считать, что $\omega_H \gg \omega, \omega_H \gg \omega_0, \omega_H \gg \gamma$. В этом приближении находим следующее выражение:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{(\pm)} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{\text{ест}} \simeq r_{K\pi}^2 \frac{\omega^2}{\omega_H^2} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta).$$

которое является справедливым как для циркулярно поляризованного, так и для естественного света.

б) Случай $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}_0$.

Тогда для циркулярной поляризации выберем вектор поляризации в виде $\mathbf{e} = \mathbf{e}_2^{(\pm)} = (0, 1, \pm i)/\sqrt{2}$. Считая, что ω_n много больше чем ω, ω_0, γ , находим

$$\rho_0 = \frac{eE_n}{\sqrt{2}m} \begin{pmatrix} \frac{i\omega\omega_H}{[\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma]^2 - \omega^2\omega_H^2} \\ \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}{[\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma]^2 - \omega^2\omega_H^2} \\ \frac{\pm i}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \end{pmatrix} \approx \frac{\pm eE_n i}{\sqrt{2}m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

По существу мы получили, что сильное магнитное поле «замораживает» движение осциллятора в перпендикулярном к полю направлении и при этом не влияет на его продольное движение. Для обеих циркулярных поляризаций получается одинаковое сечение рассеяния, которое также совпадает с сечением для неполяризованного света:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{2} r_{K\pi}^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} (1 - \cos^2 \theta).$$

Б-1.10.5 Циркулярно поляризованная волна и магнитный момент

Найти дифференциальное сечение рассеяния циркулярно поляризованной плоской монохроматической электромагнитной волны с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$ на системе, обладающей магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$ с гиромангнитным отношением γ_e , в случае если магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$ совершает под действием падающей волны малые колебания около среднего положения $\boldsymbol{\mu}_0 \perp \mathbf{k}$. Рассмотреть случай малого гиромангнитного отношения. Каков критерий малости в этой задаче?

Solution

Используем формулу для интенсивности излучения магнитного диполя, там производная магнитного момента выражается через гиромангнитное соотношение и поле, остается аккуратно усреднить и подставить в сечение. (??? додумая еще раз!!!)

Для магнитного дипольного рассеяния

$$|\overline{\mathbf{S}}| = \frac{cH^2}{4\pi}, \quad dI_\mu = \frac{d\Omega}{4\pi c^3} (\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2 - (\ddot{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{n})^2), \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\overline{dI_\mu}}{c^4 H^2}.$$

Здесь $\boldsymbol{\mu}$ - магнитный дипольный момент, $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении наблюдения. Уравнение эволюции во времени магнитного дипольного момента имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \gamma_e \dot{\mathbf{M}} = \gamma_e [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}].$$

Магнитное поле циркулярно поляризованной волны вращается вокруг волнового вектора: $\partial \mathbf{H} / \partial t = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}]$, где $\boldsymbol{\omega} = \pm \omega \mathbf{k} / k = \pm \omega \mathbf{k}^0$, $\mathbf{k}^0 = (0, 0, 1)$. (Волновой вектор направлен по оси z .) Поэтому

$$\ddot{\boldsymbol{\mu}} = \gamma_e ([\dot{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{H}] + [\boldsymbol{\mu} \times \dot{\mathbf{H}}]) = \gamma_e^2 [[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}] \times \mathbf{H}] + \gamma_e [\boldsymbol{\mu} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}]].$$

Критерий малости гиромангнитного отношения в данной задаче: $\gamma_e H \ll \omega$. Он означает, что угловая скорость прецессии магнитного момента в поле $\mathbf{H}$ мала по сравнению с частотой падающей волны. Для малого гиромангнитного отношения имеем

$$\ddot{\boldsymbol{\mu}} \approx \gamma_e [\boldsymbol{\mu} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}]] = \gamma_e [\omega(\boldsymbol{\mu} \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\boldsymbol{\mu} \omega)] = \gamma_e \omega(\boldsymbol{\mu} \mathbf{H}) \approx \gamma_e \omega(\boldsymbol{\mu}_0 \mathbf{H}).$$

Таким образом, магнитный дипольный момент совершает малые колебания в плоскости, натянутой на векторы $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{k}^0$ и $\boldsymbol{\mu}_0$. Поскольку магнитный момент совершает малые колебания около среднего положения, при усреднении по времени $\boldsymbol{\mu}$ заменяем на $\boldsymbol{\mu}_0$:

$$(\boldsymbol{\mu}_0 \mathbf{H})^2 = \mu_{0i} \mu_{0j} \overline{H_i H_j}.$$

Усредним теперь произведение $H_i H_j$ по времени:

$$\langle H_i H_j \rangle \equiv \left\langle \begin{pmatrix} H \cos \omega t \\ H \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} (H \cos \omega t, H \sin \omega t, 0) \right\rangle = \left\langle H^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \omega t & \cos \omega t \sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t \cos \omega t & \sin^2 \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Учитывая что $\mu_z = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \overline{(\boldsymbol{\mu}_0 \mathbf{H})^2} &= \mu_{0i} \mu_{0j} H^2 \frac{1}{2} [\text{diag}(1, 1, 0)]_{ij} = \frac{1}{2} H^2 \mu_0^2 = \frac{1}{2} H^2 \mu^2, \\ d\sigma &= \frac{\gamma_e^2 \omega^2 \mu^2}{2c^4} (1 - (\mathbf{n} \mathbf{k}^0)^2) d\Omega = \frac{\gamma_e^2 \omega^2 \mu^2}{2c^4} \sin^2 \theta d\Omega. \end{aligned}$$

В силу того, что вектор $\ddot{\boldsymbol{\mu}}$ совершает гармонические колебания, оставаясь параллельным оси z , диаграмма направленности рассеянной волны отвечает магнитному дипольному излучению с осью симметрии z .

28.2.8 Problems about Scatterings 2

Б-1.10.6 Линейно поляризованная волна и конденсатор (???????)

Найти дифференциальное и полное сечение рассеяния линейно поляризованной плоской монохроматической электромагнитной волны с частотой ω на конденсаторе. Конденсатор - две параллельные пластины площадью s каждая, расположенные на расстоянии a друг от друга, пластины закорочены. Электрическое поле падающей волны перпендикулярно пластинам. Размеры конденсатора малы по сравнению с длиной волны.

Solution

У нас по сути обычное рассеяние на диполе, разве что дипольный момент определяется из свойств конденсатора. Важно, что конденсатор закорочен, и колеблется под полем (?? да???)

Поле падающей волны внутри конденсатора компенсируется полем зарядов, наведенных на обкладках конденсатора. Плотность наведенных зарядов и их дипольный момент имеют вид

$$\frac{q}{s} = \frac{E}{4\pi}, \quad \mathbf{d} = \frac{as\mathbf{E}}{4\pi} = \left(\frac{as\mathbf{E}_0}{4\pi} \right) \cos(\omega t).$$

Находим далее угловое распределение интенсивности дипольного излучения (ниже θ - угол между радиус-вектором точки наблюдения $\mathbf{R}$ и вектором $\mathbf{E}_0$ падающей волны) и сечение рассеяния:

$$\frac{\overline{dI_d}}{d\Omega} = \frac{\overline{d}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta = \frac{1}{8\pi c^3} \left(\frac{as\omega^2}{4\pi} E_0 \right)^2 \sin^2 \theta,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{|\mathbf{S}_{||}|} \frac{\overline{dI_d}}{d\Omega} = \frac{a^2 s^2 \omega^4}{16\pi^2 c^4} \sin^2 \theta, \quad \sigma = \int d\sigma = \frac{a^2 s^2 \omega^4}{6\pi c^4}.$$

Б-1.10.7 Линейно поляризованная волна и катушка (???????)

Найти дифференциальное и полное сечение рассеяния линейно поляризованной плоской монохроматической электромагнитной волны с частотой ω на катушке. Катушка состоит из N витков площадью s , длина катушки - a , катушка закорочена. Магнитное поле падающей волны направлено параллельно оси катушки. Размеры катушки малы по сравнению с длиной волны.

Solution

Имеем по сути рассеяние на магнитном диполе, магнитный момент дается полем (????).

Поле падающей волны внутри катушки компенсируется полем токов, наведенных в обмотке. Наведенный ток и соответствующий магнитный дипольный момент:

$$I = \frac{caH}{4\pi N}, \quad \mu = -\frac{as\mathbf{H}}{4\pi} = -\left(\frac{as\mathbf{H}_0}{4\pi} \right) \cos(\omega t).$$

Угловое распределение интенсивности магнитного дипольного излучения (ниже θ - угол между радиус-вектором точки наблюдения $\mathbf{R}$ и вектором $\mathbf{H}_0$ падающей волны) и сечение рассеяния:

$$\frac{\overline{dI}_\mu}{d\Omega} = \frac{\overline{\mu}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta = \frac{1}{8\pi c^3} \left(\frac{as\omega^2}{4\pi} H_0 \right)^2 \sin^2 \theta,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{|\mathbf{S}_{||}|} \frac{\overline{dI}_\mu}{d\Omega} = \frac{a^2 s^2 \omega^4}{16\pi^2 c^4} \sin^2 \theta, \quad \sigma = \int d\sigma = \frac{a^2 s^2 \omega^4}{6\pi c^4}.$$

Б-1.10.8

Оценить плотность вещества в солнечной короне, если яркость короны, наблюдаемой во время затмения, в 10^6 раз ниже яркости фотосферы (видимой поверхности) Солнца.

Solution

1.10.8. Для грубой оценки можно считать угловое распределение рассеянного света по направлениям близким к изотропному. Это должно быть справедливо для близких к Солнцу участков короны, которые освещаются фотосферой практически изотропно из нижней (со стороны Солнца) полусферы. Толщину ближайших к Солнцу слоев короны D оценим как диаметр Солнца. Корону считаем практически прозрачной. Яркость соответствует энергии, излучаемой в единицу времени с единицы наблюдаемой площади. Полная интенсивность света, рассеянного участком короны вдоль луча зрения, равна интенсивности на один электрон I_e умноженной на число электронов:

$$I_{\text{полн расс}} = I_e n s D.$$

Здесь n - плотность электронов в короне, s - площадь малого участка короны, перпендикулярного лучу зрения. Отношение яркостей равно

$$10^{-6} = \varepsilon = \frac{I_{\text{полн расс}}/s}{I_{\odot}/(4\pi R_{\odot}^2)} = \frac{I_e n D}{I_{\odot}/(4\pi R_{\odot}^2)} = \sigma_T n D,$$

где σ_T - томсоновское сечение рассеяния для свободной частицы (I.72), $R_\odot$ - радиус Солнца, $I_\odot$ - полная интенсивность излучения (светимость) Солнца. В итоге

$$n = \frac{\varepsilon}{\sigma_T D} = \frac{\varepsilon}{D} \frac{3}{8\pi} \left(\frac{mc^2}{e^2} \right)^2 = 5 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}.$$

Б-1.10.9

У сравнительно молодых звезд (так называемых новых), светимость (полная энергия, излучаемая в единицу времени) резко меняется в течение нескольких суток: вначале очень быстро растет, а затем медленно убывает до начального значения. Механизм этого явления - отрыв газовой оболочки звезды в результате нарушения равновесия: световое давление на газовую (плазменную) оболочку, состоящую на 3/4 из ионизированных атомов водорода, становится больше, чем гравитационное притяжение. Оценить критическую светимость звезды массы M и радиуса R .

Solution

1.10.9. Для оценки критической светимости звезды приравняем силу, действующую на систему электронов и протонов, связанных кулоновскими силами, со стороны излучения фотосферы (видимой поверхности) звезды, т.е. световое давление - силе гравитационного притяжения звездой.

Сила светового давления на систему зарядов есть средняя по времени сила радиационного трения, и ее можно представить в виде (см. (I.73))

$$\bar{\mathbf{F}} = \sigma_T \bar{\omega} \mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении распространения волны, падающей на систему зарядов, $\bar{\omega} = \bar{E}^2/(4\pi)$ - средняя плотность энергии в этой волне, $\sigma_T = 8\pi r_0^2/3$ - сечение томсоновского рассеяния волны на заряде, $r_0 = e^2/mc^2$ - классический радиус электрона.

Так как $\sigma_T \sim 1/m^2$, и масса протона много больше массы электрона ($m_p \gg m_e$), а сила гравитационного притяжения $GmM/R^2 \sim m$, где G - гравитационная постоянная, M - масса звезды, R - радиус ее фотосферы, то выражая среднюю плотность энергии поля $\bar{\omega}$ через светимость звезды согласно $I = 4\pi R^2 \bar{\omega} c$, получаем

$$\sigma_T^{(e)} \bar{\omega} = \sigma_T^{(e)} \frac{I_{\text{кр}}}{4\pi R^2 c} = \frac{Gm_p M}{R^2}$$

где $\sigma_T^{(e)}$ - сечение томсоновского рассеяния на электронах оболочки (атмосферы) звезды. Поэтому критическая светимость будет равна

$$I_{\text{кр}} = \frac{4\pi c G m_p M}{\sigma_T^{(e)}} \simeq 0,6 \cdot 10^5 M.$$

Отметим, что в формулу не входит R - радиус фотосферы звезды. Это связано с тем, что световое давление, как и гравитационное притяжение пропорциональны R^{-2} . Для Солнца получаем отношение светимости $I_\odot$ к критической $I_{\odot \text{ кр}}$:

$$\frac{I_\odot}{I_{\odot \text{ кр}}} = \frac{4 \cdot 10^{33}}{0,6 \cdot 10^5 M_\odot} = \frac{4 \cdot 10^{33}}{1,3 \cdot 10^{38}} \sim 0,3 \cdot 10^{-4},$$

т.е. человечество в этом плане может не беспокоиться.

Б-1.10.10

Определить дифференциальное и полное сечение рассеяния линейно поляризованной монохроматической электромагнитной волны на сверхпроводящей сфере радиуса $r \ll \lambda$. Поля зарядов и токов, наводимые на поверхности сферы внешним электромагнитным полем волны, полностью компенсируют внешние поля внутри сферы.

Solution

1.10.10. В силу условия $r \ll \lambda$ внешнее поле вблизи сферы считаем практически однородным, и предполагаем, что рассеянная волна создается дипольными электрическим и магнитным моментами, которые индуцируются падающей волной.

Полное электрическое поле в центре сферы должно быть равно нулю, из этого условия получаем дипольный электрический момент:

$$\mathbf{E}_0 \cos(\omega t) + \int \frac{-\mathbf{r} d\rho}{r^3} = 0, \quad \mathbf{d} = \int \mathbf{r} d\rho = r^3 \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$$

Магнитное поле в центре сферы должно быть равно нулю, поэтому $\mathbf{H}_0 \cos(\omega t) + \int \frac{[\mathbf{v} \times (-\mathbf{r})] d\rho}{cr^3} = 0$, $\mu = \int \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]}{2c} d\rho = -\frac{r^3}{2} \mathbf{H}_0 \cos(\omega t)$. Электрический и магнитный дипольные моменты оказались одного порядка, поэтому необходимо учесть как электрическое, так и магнитное дипольные излучения. При этом угловое распределение интенсивности и дифференциальное сечение рассеяния будут содержать интерференционный член. Запишем магнитное поле в волновой зоне:

$$\mathbf{H}_{\text{волн}} = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}})}{c^2 R} + \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]}{c^2 R},$$

и найдем интенсивность излучения магнитного и электрического моментов в телесный угол $d\Omega$:

$$dI = (\mathbf{S}_{\text{волн}} (\mathbf{n} R^2) d\Omega) = \frac{cd\Omega}{4\pi} R^2 \mathbf{H}_{\text{волн}}^2 = \frac{d\Omega}{4\pi c^3} [\mathbf{n}(\mathbf{n} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}}) + [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]]^2,$$

$$dI = \frac{d\Omega}{4\pi c^3} [\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2 - (\ddot{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{n})^2 + \ddot{\mathbf{d}}^2 - (\ddot{\mathbf{d}} \mathbf{n})^2 + 2(\ddot{\boldsymbol{\mu}} [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}])]$$

Последнее слагаемое в (1) - интерференционный член. Пусть амплитуда поля $\mathbf{E}_0$ направлена вдоль оси x , а амплитуда $\mathbf{H}_0$ - вдоль оси y , тогда, поскольку $\mu = d/2$ (см. формулы выше), имеем

$$dI = \frac{d\Omega}{4\pi c^3} \ddot{d}^2 \left[\frac{4}{5} - (\mathbf{n} \mathbf{e}_x)^2 - \frac{1}{4} (\mathbf{n} \mathbf{e}_y)^2 + (\mathbf{n} \mathbf{e}_z)^2 \right],$$

$$\overline{dI} = \frac{d\Omega}{8\pi c^3} r^6 \omega^4 \mathbf{E}_0^2 \left[\frac{4}{5} - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos \theta \right],$$

$$d\sigma = \frac{r^6 \omega^4}{c^4} \left[\frac{4}{5} - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos \theta \right] d\Omega.$$

При интегрировании по телесному углу оказывается, что вклад интерференционного члена равен нулю, поэтому

$$\sigma = \frac{32\pi}{15} \frac{r^6 \omega^4}{c^4}.$$

28.3 Specific Problems from Real Applications

(I'll try to do it later ones)

28.4 Specific Problems from Hypothetical Applications

28.4.1 Some Problems on Nonstandard Constructions of Electrodynamics

(на все это отдельные разделы, тут только самое интересное)

Свет в оптоволокне в гравитационной волне

Как записать и решить уравнения Максвелла в оптоволокне в присутствии гравитационной волны? (пока в теории об этом)

Магнитогравитационные явления

(1-2 задачи про ур Максвелла в искр пр-ве. тоже про это в теории раздел есть.)

28.5 General Questions about ED

28.5.1 Questions about Understanding Main Ideas of ED

28.5.2 Short Questions for Testing Basic Knowledge of ED

(i'll select good ones later)

28.5.3 Questions for Testing Deep Knowledge of ED

(i'll select good ones later)

28.5.4 Problems on the Construction and Properties of Electrodynamics

МФТИ.Иванов.46. Нелинейная электродинамика.

Рассмотрим следующее действие, переходящее в пределе малых полей в действие для электромагнитного поля

$$S[A_i(\underline{x})] = - \int \sqrt{1 + \frac{F^{ij}F_{ij}}{8\pi}} d^4\underline{x}, \quad F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

а) Выведите аналоги уравнений Максвелла. б*) Найдите решение уравнений поля, переходящее на бесконечности в поле точечного заряда. в*) Какое распределение зарядов соответствовало бы полю из пункта в линейной электродинамике?

Solution

(?? решаю потом)

МФТИ.кр.1/3. невозможность некоторого ускорения

Допустим, что некоторое неизвестное поле $F^\mu(x^\nu)$ сообщает частице с массой m , находящейся в точке x^ν , 4-ускорение $w^\mu \equiv d^2x^\mu/ds^2 = F^\mu(x^\nu)/m$. Докажите, что существование такого поля противоречит специальной теории относительности.

Solution

МФТИ.кр.3/3. Модифицированная электродинамика

Если учесть, что с очень низкой вероятностью фотоны рассеиваются на фотонах за счёт обмена виртуальными электронами, низкоэнергетическое эффективное действие свободного электромагнитного поля запишется в следующем виде:

$$S = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x \left[F_{ij}F^{ij} - \frac{\alpha^2}{90m^4} (F_{ij}F^{ij})^2 - \frac{7\alpha^2}{360m^4} (F_{ij}\tilde{F}^{ij})^2 \right]$$

где $\alpha = 1/137$ - постоянная тонкой структуры, а m - масса электрона. Как модифицируются уравнения Максвелла за счёт этой нелинейной добавки?

Solution

28.6 Specific Problems from Theoretical Research

(see also note on specific field theories)

28.6.1 Typical Problems of Modified Theories of Electrodynamics

(???)

29 Gravity [SEE NOTE ON GRAVITY FOR NOW]

(задачник Лейтмана добавлю немного. подробно - в записи по ОТО)

29.1 Typical Technical Questions about Gravity

29.1.1 Problems about Particles in Gravity

МФТИ.кр.2/3. На край Вселенной

Ракета движется с постоянным ускорением, равным ускорению свободного падения у поверхности Земли $g = 9.8 \text{ m/c}^2$. Сколько времени пройдёт по собственным часам космонавтов, пока они удалятся от Земли на расстояние 9.3×10^{10} световых лет? Расширением Вселенной пренебречь.

Указание. Один световой год $\approx c^2/g \approx 9.5 \times 10^{15} \text{ M}$.

Solution

(в СТО скорее всего перенесу, подумаю еще раз про нее)

29.2 General Problems of Gravity

29.2.1 Questions on Understanding the Nature of Gravity

Большое ли гравитационное поле Земли?

(?? там мб ответ, что оно малое, потому что локально у нас вообще нет гравитации по принципу эквивалентности, но это напишу потом.)

29.2.2 Typical Problems to Test Knowledge of Typical Gravity

(write from some exams)

29.2.3 Questions on Understanding Details of GR

(there are a lot of them)

29.2.4 Questions on Understanding Modifications of GR

(there are a lot of them, okay, I'll write something later)

29.3 Some Other Problems of Gravity

(подробнее в записи по ОТО, тут чуть лишь соберу)

29.3.1 Typical Cosmology Problems

29.3.2 Typical problems of modified gravity theories

(???? there are a lot of them, maybe I'll look at them and then I'll write them first in the note on gravity)

30 Other Problems and Questionss

30.1 General Questions About Detail of Typical Field Theories

30.1.1 Questions about Checking Basic Knowledge of Gauge Fields

(????)

30.1.2 Questions about Checking Knowledge of Details of Gauge Fields

(???)

30.2 Advanced Problems About Detail of Typical Field Theories

30.2.1 Technical tasks for the Poincare Group

(у Киселева спису)

Технические задачи, решенные в теории

(сборка вопросов на проверку.)

Вывести основное

1. Доказать коммутационное соотношение между генераторами $J_{\mu\nu}$ группы Лоренца

$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = i(\eta_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma})$$

2. Доказать, что $C = W^\mu W_\mu$ это оператор Казимира в группе Пуанкаре

Здесь W_μ - вектор Паули-Любанского:

$$W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}P^\nu J^{\lambda\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}J^{\lambda\sigma}P^\nu$$

3. Найти структурные константы в группе Лоренца

30.2.2 Problems about Representations of the Poincare group

(очень много про это можно всякого задать, это же в КТП. потом напишу.)

30.2.3 Questions about rare constructions of the SR and the Poincare group (!!??)

I.1 Spin matrices for bigger spin

What are the angular momentum matrices characteristic of a particle of (say) spin $\frac{3}{2}$?

Solution.

(в теории написан метод Крамерса, вот его и напишу сюда потом пока в теории про это думаю..)

I.2 Нет ли в теории вращений группы Лоренца противоречий?

Мы знаем, что преобразование Лоренца может быть записано как

$$\begin{aligned}x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x) \\x' &= \gamma(x - \beta x_0) \\y' &= y \\z' &= z,\end{aligned}$$

и это симметричное преобразование по X и t . Также мы установили, что

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu,$$

то есть бесконечно малые преобразования имеют вид

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu}.$$

Здесь

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu},$$

антисимметричный.

Вопрос: нет ли в этом ошибок и противоречий? Покажите в явном виде, как связаны одни параметры и один подход с другим.

I.3 Каким свойством обладает тензор, у которого $\omega^{\nu}_{\mu} = \omega^{\mu}_{\nu}$ в случае произвольной метрики?

Желательно в явном виде написать эти матрицы для общего случая.

I.5 Возможная скрытая связь электродинамики и группы Лоренца

Есть утверждение, что матрицу преобразования Лоренца можно записать через генераторы в матричном виде как

$$\Lambda(\zeta, \theta) = e^{-\zeta \cdot \mathbf{K} + \theta \cdot \mathbf{J}}$$

где

$$-\zeta \cdot \mathbf{K} + \theta \cdot \mathbf{J} = -\zeta_x K_x - \zeta_y K_y - \zeta_z K_z + \theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z = \begin{pmatrix} 0 & -\zeta_x & -\zeta_y & -\zeta_z \\ \zeta_x & 0 & -\theta_z & -\theta_y \\ \zeta_y & \theta_z & 0 & -\theta_x \\ \zeta_z & \theta_y & \theta_x & 0 \end{pmatrix}$$

1) Показать, как это следует из обсужденного нами формализма, а также проверить, верное ли это утверждение? Нет ли в нем ошибок?

Представим, что один человек увидел, что эта матрица почти похожа на тензор электромагнитного поля, который он записал как:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & -B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

2) Он прав? Похожи ли они?

3) Если да, то неужели электродинамика как-то связана с преобразованиями Лоренца некоторым образом, который отражен в наличии такой схожести?

4) Что общего у электродинамики и группы Лоренца, что отражает такую схожесть матриц?

4. Особое квантование спина (????)

Обозначим максимальное значение проекции спина на ось z символом s . Докажите, что оно может принимать только целое или полуцелое значение: $s = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, сколько имеется компонент спина для векторного поля?

Есть исследования по частицам с нецелым и полуцелым спином, по так называемым энионам и, возможно, плектонам. В частности, нобелевский лауреат 1972-го года Джон Роберт Шриффер занимался их исследованиями. Неужели в нашем доказательстве квантования спина есть ошибка?

Solution

(не знаю и не планирую заниматься вопросом со звездой)

30.2.4 Questions about Specific Details of Field Theories

Какие особенности электродинамики в искривленном пространстве

(их много, уже начал читать статью)

Могут ли гравитационные волны генерировать электромагнитные?

(в одной статье написано, что да. напишу с формулами. на квантовом языке кстати это что, генерация гравитоном фотона?)

О получении ненулевого поля в законе Кулона от нулевого заряда

(из статьи Борна ход, я так и не понял, где там ошибка)

30.3 Special Problems about Mathematics for Field Theory

30.3.1 Problems about Mathematics of Spinors

(Более подробно о них и не такие важные задачи - в записи по математике.)

30.3.2 Problems about the motion of a charged particle in fields

(какие-то добавлю, вообще, это механика, так что про это там пока пишу.)

Part VIII

Special Field Theories in a Nutshell

(!!!! for now I write a separate note about it, later from it I'll add here main ideas)

31 Other Properties of Fields and Methods for Them, in a Nutshell

31.1 Deeper understanding of the formalism

31.1.1 Choice of Fields for Elementary Particles and Collective Phenomena

(just an overview)

Об элементарных частицах

Об электроне

(все о нем.)

(абзац про то, что всегда есть coupling, так что это не только дир поле, т.п.)

Об позитроне

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

обладает свойством

$$\hat{\epsilon} \cdot \sigma^* \cdot \hat{\epsilon}^{-1} = -\sigma,$$

так что умножение уравнения (II.5.4) на спинорную метрику и введение сопряженного спинора

$$\psi_{\text{NR}}^{-e} \equiv \hat{\epsilon} \cdot \chi_{(-)}^*$$

приводит к уравнению Паули для спинора ψ_{NR}^{-e} , который описывает частицу со спином 1/2 и зарядом $-e$, т.е. античастицу,

$$i\partial_t \psi_{\text{NR}}^{-e} = -e\mathcal{A}_0 \psi_{\text{NR}}^{-e} + \frac{1}{2m}(-i\boldsymbol{\partial} + e\mathbf{A})^2 \psi_{\text{NR}}^{-e} + \frac{e}{2m}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{H}) \psi_{\text{NR}}^{-e}.$$

Как и в случае скалярного поля, в нерелятивистском пределе уравнения Дирака положительночастотные моды описывают частицы с положительной кинетической энергией, а отрицательночастотные моды - античастицы с положительной кинетической энергией, причем волновая функции нерелятивистской частицы входит в релятивистский спинор линейно, а волновая функция нерелятивистской античастицы берется комплексно сопряженной,

$$\psi = \hat{A}_{(+)} e^{-imt} \psi_{\text{NR}}^e + \hat{A}_{(-)} (e^{-imt} \psi_{\text{NR}}^{-e})^*,$$

$\hat{A}_{(\pm)}$ - это матрицы, которые переводят двухкомпонентные волновые функции в четырехкомпонентное поле.

$$(i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - m) \psi^C = 0$$

получаем из

$$\psi^+ C = \gamma_0 C^\dagger \psi^*,$$

(!! додумаю!)

Об протоне

Об мюоне

О нейтрине

Обзор эффективных полей в конденсированных средах

(пока см. запись по конд средам, потом сюда напишу с ключевыми формулами!)

О полевом подходе к сверхпроводимости

(выпишу потом про это все)

31.1.2 Geometric Ideas in Field Theory

(??? I don't understand them, they are about advanced understanding of the field theory)

On geometry ideas (?!?!?!)

(додумаю еще!!!)

В случае главного расслоения все наши формулы могут быть описаны на двух языках: геометрическом и физическом:

Выбор локального цилиндра (локальная тривиализация)	$U_i \times G$ $(U_i \times S^1)$	Калибровка
Локальная форма связности	$\omega_i = A_\mu^i dx^\mu$	4-потенциал электромагнитного поля в данной калибровке
Связность	∇	Электромагнитное поле
Локальная форма кривизны связности	Ω_i	Тензор электромагнитного поля в данной калибровке
Тензор кривизны связности	$\bar{K}$	Тензор электромагнитного поля
Тождество Бьянки	$D\Omega_i = 0$	Фарадеева часть уравнений Максвелла
Пространство расслоения	$P(\mathbb{R}^4 \times S^1)$	Фазовое пространство физической системы
База расслоения	$B(\mathbb{R}^4)$	Пространство-время
Структурная группа расслоения	$G(U(1))$	Группа «вращений» в зарядовом пространстве.

Последняя строчка словарика требует пояснения. Дело в том, что структурная группа $U(1)$ появляется в описании электромагнитного поля в связи с тем, что физическая ситуация не должна зависеть от выбора фазы (выбора направления в зарядовом пространстве), что соответствует инвариантности относительно калибровочных преобразований вида $g_{ij} = \exp(is(x))$ со значениями в $U(1)$.

which is still infinite. We recognize it as the sum of ground state energies for each harmonic oscillator. But $\mathcal{E}_0 \rightarrow \infty$ due to the $|\vec{p}| \rightarrow \infty$ limit of the integral. This is a high frequency - or short distance - infinity known as an ultra-violet divergence.

О вакуумных эффектах (!!!!!)

(суть в обзорном формате книги Гриба, Мамаева, мб потом другие параграфы создам с указаниями на разные методы из нее или эффекты.)

О смысле параметров полей (!!!!!)

(напишу потом основные в отдельные параграфы.)

О массе в теории поля (??)

(просто мб на половину страницы рассуждения, что с одной стороны по Хиггсу ее получают как-то, с другой - через группу Пуанкаре, с третьей - она еще и бегать может, в теории отдельный раздел, обсуждение всего этого.)

О вариационных методах в теории поля (!!!!!)

(пока все это только тут, вряд ли где-то еще это есть смысл писать.)

(абзац про то, что часто вариация от производной, тогда заменяем под ней функцию на вариацию новой функции, напишу пример про это)

(еще после Б-И лагранжиана это напишу лучше!!)

О причинности (!?)

(потом буду с опытом дополнять этот раздел, в КТП тоже очень схожий раздел!)

Об идейном описании конфаймента (!!!!!!!?)

(вопрос важный, ибо без этого понимания казалось бы, ну волны и волны, а типично объет покоится и не нужна теория поля, казалось бы. так что потом изучу и обязательно напишу!)

31.1.4 Stress–Energy Tensor, Energy, Momentum, and Conservation Laws (!!!?)

Об импульсе поля (!?)

(!!! скоро напишу, в КТП тоже схожее!!!)

О тензорах энергии-импульса, импульсе, энергии (!!)

(!!! скоро напишу, важная доработка!!!)

(??? у Степаньянца об этом много написано.)

О каноническом тензоре энергии-импульса

$$T_{\mu}^{\nu}(\text{can}) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\nu} \Phi_{\lambda}} \partial_{\mu} \Phi_{\lambda} - \mathcal{L} \delta_{\mu}^{\nu},$$

$$W := T^{00}, \quad S^i := T^{0i} = T^{i0}, \quad \sigma^{ik} := -T^{ik} \quad (i, k = 1, \dots, d-1)$$

не калибровочно инвариантный.

и не симметричный в общем случае.

нужно добавить тензор спина.

$$T_{\mu\text{non-abel}}^\nu := \partial_\mu \phi^r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi^r)} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} + \partial_\lambda f_\mu^{\nu\lambda},$$

$$f_\mu^{\nu\lambda} \equiv -f_\mu^{\lambda\nu}.$$

(????)

$$\delta_g S_m := -\frac{1}{2c} \int T^{\mu\nu}(x) \delta g_{\mu\nu}(x) \sqrt{-g(x)} d^{(4)}x$$

$T^{\mu\nu}$ - тензор энергии-импульса материи.

переменные $\Phi \mapsto \mathcal{A}_\lambda$,

Рассмотрим сдвиг координат пространства при трансляциях, то есть пусть параметр $a = a^\mu$, запишем его в виде: $x^\nu \mapsto x^\nu - a^\nu$, и $\mathcal{A}_\lambda \mapsto \mathcal{A}_\lambda$.

Поэтому выполняется:

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial a^\mu} = -\delta_\mu^\nu, \quad \frac{\partial \mathcal{A}_\lambda}{\partial a^\mu} = 0$$

Подставив в теорему Нетер, видим, что сохраняется величина:

которая называется Канонический тензор энергии-импульса векторного поля.

О T^{00} , нулевой компоненте ТЭИ

Даже из названия понятно, что она имеет что-то общее с энергией, так и есть. Она чаще других компонент используется.

$$P_\nu = \int d^3x T_\nu^0 = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \Phi^i} \partial_\nu \Phi^i - \mathcal{L} \delta_\nu^0 \right)$$

Нулевая компонента

$$P_0 = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}^i} \dot{\Phi}^i - \mathcal{L} \right)$$

Определим по аналогии с классической механикой обобщенные импульсы $\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}^i}$, тогда

$$P_0 = \int d^3x \left(\pi_i \dot{\Phi}^i - \mathcal{L} \right) = H$$

H - классическая функция Гамильтона, то есть энергия.

Таким образом компоненты P_0 вектора P_ν - это энергия.

Тогда в силу релятивистской ковариантности вектор P_ν есть вектор энергии-импульса.

ТЭИ ЭМ поля

$$\begin{aligned} T^{ik} &= \frac{1}{4\pi} \left(-F^{il} F_l^k + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A^l}{\partial x_i} F_l^k + \frac{1}{16\pi} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} := \frac{1}{4\pi} \left\{ E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + H^2) \right\}.$$

(??? applications???)

Если векторы **E** и **H** взаимно перпендикулярны и равны по величине, то тензор T^{ik} не может быть приведен к диагональному виду. Отличные от нуля его компоненты в этом случае равны

$$T^{00} = T^{33} = T^{30} = W$$

(потом подумаю про это)

Об энергии полей

Обсудим, что из себя представляет энергия полей.

О других тензорах энергии-импульса

(о метрическом ТЭИ тут абзац)

О случаях применения

используется в ОТО много где. и вроде крутейшая вещь.
(пока не четко вижу)

О законе сохранения 4-импульса поля

Уравнение непрерывности $\partial_\mu{}^\mu\nu = 0$ подразумевает сохраняющийся 4-вектор; также, как и в случае любой непрерывной симметрии теорема Нётер даёт нам сохраняющиеся заряды.

Во-вторых, это очевидно из наших построений локальной теории поля в лагранжевом формализме.

$$0 = \int d_4 \cdot \partial_\mu T_\nu^\mu = \int d\sigma_\mu T_\nu^\mu = \int d_3 x \partial_0 T_\nu^0 \Big|_{t=t_2} - \int d_3 x \partial_0 T_\nu^0 \Big|_{t=t_1}$$

Отсюда получаем сохранение 4-импульса поля

$$P^\mu = \int d_3 x T^{0\mu} = \text{const}$$

Об импульсе полей

(???)

Импульс можно найти из тензора энергии-импульса как

$$P^\mu = \int d^{d-1} x T^{\mu 0}$$

тут формула через плотность импульса тоже будет.

Об ТЭИ частиц и в механике (??)

(пока не четко понимаю, почему там его нет было, но лекции ЛШК как-то меня натолкнули на эту мысль)

(мб что в нерел случае все компоненты кроме 00 равны нулю просто? и почему кст?)

$$T^{ik} = \mu c \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} = \mu c u^i u^k \frac{ds}{dt}$$

ТЭИ для частицы:

$$T^{\mu\nu} = \int ds \delta_g(x, x(s)) m \dot{x}^\mu(s) \dot{x}^\nu(s) = \sum_n m_n c^2 \int ds_n \cdot u_n^\mu u_n^\nu$$

$\delta_g(x, x(s)) = (-g(x))^{-1/2} \delta^{(4)}(x - x_n)$ действительно
(д-во в пару строчек потом впишу, см. ниже)

$$T^{ik} = (p + \varepsilon) u^i u^k - p g^{ik}$$

$$W = \frac{\varepsilon + p \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \mathbf{S} = \frac{(p + \varepsilon) \mathbf{v}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = -\frac{(p + \varepsilon) v_\alpha v_\beta}{c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})} - p \delta_{\alpha\beta}$$

$$T^{ik} = \mu_0 c^2 u^i u^k$$

$$T_i^i = \varepsilon - 3p.$$

$$\varepsilon - 3p = \sum m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}$$

Для идеального газа:

$$T^{ik} = n m c \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{ds}$$

$$\varepsilon = n m \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p = \frac{n m}{3} \frac{v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Это обобщение $p = n m \overline{v^2}/3$.

Законы сохранения в электродинамике

(!!! это же коротко в самом первом тут разделе, про ЭМ поле!!!)

О ТЭИ электромагнитного поля (!!!)

(скоро пропишу, еще чуть над этим поработать нужно.)

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\gamma\tau} F^{\gamma\tau}.$$

Закон сохранения заряда

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} j = 0.$$

Смысл в том, что заряд $q = \int dV \rho$ в некотором объеме V меняется только лишь за счет того, что через поверхность ∂V протекают токи, плотностью $j = \rho v$, ρ - плотность заряда, а v - скорость зарядов: $\partial_t q = - \oint_{\partial V} d^2 \Sigma \cdot j$. После теоремы Гаусса и приходим к этому закону.

Или

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

$\partial_\mu = (\frac{\partial_t}{c}, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$ и плотность тока $j^\mu = (c\rho, v\rho)$.

Поскольку закон сохранения заряда во всех системах отсчета имеет один и тот же вид $\partial_\mu j^\mu = 0$, т.е. он является инвариантом при преобразованиях координат и времени, а ∂_μ преобразуется как четырехмерный ковектор в пространственно-временном континууме $x^\mu = (x_0, r)$, мы заключаем, что инвариантность закона сохранения может иметь место только в случае, если j^μ преобразуется как 4-вектор.

Закон сохранения через ТЭИ

Баланс энергии

$$\mathcal{E} \cdot j + \frac{d}{dt} cT_0^0 + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0$$

It is obtained from time shift: $\frac{dS}{da^0} = \int dt \frac{dp_0}{dt} + \int d^4x \partial_\nu T_0^\nu = 0$,

$$\frac{dp_0}{dt} + \int d^3r c \partial_0 T_0^0 + \int d^3r c \nabla_\alpha T_0^\alpha = 0$$

$$cT_0^0 = \frac{1}{4\pi} F^{0\beta} F_{\beta 0} + \frac{1}{16\pi} 2 (\mathcal{H}^2 - \mathcal{E}^2) = \frac{1}{8\pi} (\mathcal{H}^2 + \mathcal{E}^2)$$

$$cT_0^\alpha = \frac{1}{4\pi} F^{\alpha\beta} F_{\beta 0} = \frac{1}{4\pi} (-\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}^\gamma) (-\mathcal{E}^\beta) = \frac{1}{4\pi} (\mathcal{E} \times \mathcal{H})^\alpha$$

$$E = p_0 c,$$

$$\frac{d}{dt} \left(E + \int d^3r c T_0^0 \right) + \int d^3r \operatorname{div} \mathbf{S} = 0, \quad \mathbf{S} := \frac{c}{4\pi} (\mathcal{E} \times \mathcal{H}).$$

$$\frac{dE}{dt} \equiv \int d\mathbf{e} \mathcal{E} \cdot \mathbf{v} = \int d^3r \mathcal{E} \cdot \mathbf{v} \rho = \int d^3r \mathcal{E} \cdot \mathbf{j}$$

□

Баланс импульса

$$\frac{dp_\beta}{dt} + \int d^3r c \partial_0 T_\beta^0 + \int d^3r c \nabla_\alpha T_\beta^\alpha = 0$$

$$p_\beta = -p^\beta, \quad T_\beta^0 = -S^\beta/c^2.$$

It is obtained from spartial shift:

$$\frac{d}{dt} \left(p^\beta + \frac{1}{c^2} \int d^3r S^\beta \right) = \int d^3r c \nabla_\alpha T_\beta^\alpha$$

так что вектор $\mathbf{S}/c^2$ имеет смысл плотности импульса, а член справа описывает силы, действующие на систему, причем по теореме Гаусса он сводится к интегралу по поверхности, охватывающей объем с частицами и полем:

$$\int d^3r c \nabla_\alpha T_\beta^\alpha = \oint d^2\Sigma^\alpha c T_\beta^\alpha$$

Так как действие равно противодействию, воздействие системы на ее окружение соответствует силам

$$F^\beta := - \oint d^2\Sigma^\alpha c T_\beta^\alpha$$

Диагональные элементы тензора cT_β^α , например cT_x^x , отвечают силе на единицу площади, направленной ортогонально этой площади, т.е. по вектору нормали к площади, в частности $ds^x = dy dz$. Другими словами, это - давление, которое создает система: $p_x = -cT_x^x$ и т.п. Недиagonalные компоненты, типа $-cT_y^x$, задают силу, которая действует на единицу площади, в направлениях, параллельных площади, в частности по оси y , т.е. скручивающие силы. Поэтому тензор cT_β^α называют тензором напряжений. В явном виде,

$$cT_\beta^\alpha = \frac{1}{4\pi} (\mathcal{E}^\alpha \mathcal{E}^\beta + \mathcal{H}^\alpha \mathcal{H}^\beta) - \frac{1}{8\pi} (\mathcal{H}^2 + \mathcal{E}^2) \delta_\beta^\alpha$$

Баланс импульса можно записать локально, если принять во внимание выражение для силы Лоренца $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int d^3r (\mathcal{E}\rho + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathcal{H})$, так что

$$\frac{1}{c} (j_0 \mathcal{E} + \mathbf{j} \times \mathcal{H})^\beta + \frac{1}{c^2} \frac{dS^\beta}{dt} = c \nabla_\alpha T_\beta^\alpha$$

О моменте импульса

Основные формулы момента импульса

$$J^{\mu\nu} := \int d^{d-1}x (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0})$$

Момент импульса появляется при применении поворота

$$x_a = x - ya, \quad y_a = y + xa, \quad t_a = t$$

к теореме Нетер: (? формула!??)

$$\ell_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(-y) + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}x = xp_y - yp_x \equiv \ell_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z$$

(? потренируюсь в этом потом)

Запишем динамические инварианты соответствующие симметрии относительно трансляций.

Они обозначаются P^ν и согласно чему-то из теоремы Нетер имеют вид

$$P_\nu = \int d\sigma_\mu T_\nu^\mu$$

О случаях применения

(а вот хз, зачем нужен он все-таки)

О силах, моменты сил от полей (????)

(редко нужно)

Механические силы при воздействии полей

часто есть задачи о поиске силы, так что подготовимся и соберем все нужные методы.
(пока хз)

Момент сил

(???? не знаю пока, читать еще раз темы нужно.)

Теория поля на языке тензора энергии-импульса (??)

(я пока хз, слышал, что так можно сделать, ну и все. потом мб разберусь, напишу.)

Основные формулы**31.1.5 Unit Systems and Practical Applications of Field Theory (!!!?)**

(думаю, без одного раздела никак, пока не до этого, но потом займусь этим.)

О системах единиц в электродинамике (???)

(!!! важно дописать это, тут все, что требуется знать про системы единиц!!!!)

В системе Хевисайда в действии константа $a = -1/4$, в ней в уравнениях поля нет 4π , но зато 4π входит в закон Кулона.

В гауссовой системе единиц уравнения поля содержат 4π , а закон Кулона имеет простой вид.

Естественная система единиц

$$\hbar = 1; \quad c = 1,$$

В ней:

масса $[m] = m$; энергия $[E] = m$; импульс $[p] = m$;
производная по координате $[\partial_\mu] = m$; вектор-потенциал $[A_\mu] = m$;
координата $[x] = 1/m$; время $[t] = 1/m$; действие $[S] = 1$; заряд $[q] = 1$;
ток $[j^\mu] = m^3$; тензор напряженности $[F_{\mu\nu}]^2 = m^2$;
гравитационная постоянная $[G] = m^{-2}$.
(тут абзац про СГС)
(тут абзац про СИ)

31.1.6 Quantum Corrections and Field Quantization (!!!?)

(очень коротко, идейно, потому что в 1й части ктп именно про это подробные указания.)

О квантовании полей

(просто укажу с ключевыми формулами, что такое-то есть там.)

О квантовых поправках (!???)

(важные физические следствия, тоже укажу с основными формулами.)

31.1.7 Typical Mathematics of and for Spinors, γ -matrices (!!?)

(тут то же, что в КТП, только короче)

Еще раз определения и идея спиноров

(пока об этом выше в разделе про поле Дирака, потом придумаю, как короче это переписать сюда!)

Идея спиноров в двух словах

Извлечение корня в общем случае (!!!!!!!)

Смысл и идея γ_5 матрицы (!!!!!!!)

(думаю, это важный вопрос для понимания, хотя бы полстраницы это стоит того.)

Основные свойства σ -матриц и 4-матриц $\bar{\sigma}$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \cdot 1 + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} (\sigma_\mu)_{\gamma\delta} = 2 \varepsilon_{\alpha\gamma} \varepsilon_{\beta\delta}.$$

(!! ниже по идее для задач в плане извлечения корня заготовка! напишу потом четко это!!!)

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix},$$

$$u^\dagger u = (\xi^\dagger \sqrt{p \cdot \sigma}, \xi^\dagger \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} = 2 E_{\mathbf{p}} \xi^\dagger \xi.$$

Основные свойства α , β -матриц

$$\hat{\alpha}_k \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_k = 0.$$

$$\hat{\beta}^2 = \mathbb{1}_D,$$

Алгебра антикоммутаторов матриц Дирака остается верной и после произвольного обратимого преобразования $\hat{U}$

$$\hat{\alpha}_k \mapsto \hat{\alpha}_k^U = \hat{U} \cdot \hat{\alpha}_k \cdot \hat{U}^{-1}, \quad \hat{\beta} \mapsto \hat{\beta}^U = \hat{U} \cdot \hat{\beta} \cdot \hat{U}^{-1},$$

и матрицы Дирака в представлении U эрмитовы, если матрица $\hat{U}$ унитарна.

$$c u_i^\dagger \hat{\alpha} u_i = \frac{p c^2}{E} u_i^\dagger u_i$$

Это одна из ключевых формул для парадокса Клейна по Грейнеру. (??????? как ее вывести - еще вопрос)

Основные свойства γ -матрицКомбинации: $(\mathbb{1}, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma_5 \gamma^\mu, \hat{\sigma}^{\mu\nu})$

1	1 матрица
γ^μ	4 матрицы
$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \equiv \gamma^{[\mu} \gamma^{\nu]} \equiv -i\sigma^{\mu\nu}$	6 матриц
$\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu} \gamma^\nu \gamma^{\rho]}$	4 матрицы
$\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} = \gamma^{[\mu} \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^{\sigma]}$	1 матрица
	(16 total)

For example, $\gamma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = -\gamma^{\nu\mu}$, $\gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -\frac{i}{24} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta$

$$\begin{aligned}\gamma^j &\equiv i\sigma^j \\ \{\gamma^i, \gamma^j\} &= -2\delta^{ij} \\ \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 &= (\gamma^\mu)^+\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\gamma^0)^2 &= 1 \Rightarrow \text{Real Eigenvalues} \\ (\gamma^i)^2 &= -1 \Rightarrow \text{Imaginary Eigenvalues}\end{aligned}$$

So we could pick γ^0 to be hermitian, but we can only pick γ^i to be anti-hermitian. Indeed, in the chiral representation $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$, the matrices have this property: $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ and $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$. In general there is no way to pick γ^μ such that $S^{\mu\nu}$ are anti-hermitian.

(???????)

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma_5 = 0$$

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p), \quad (\text{Gordon ident.})$$

$q := (p' - p)$, $\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. (??? слова про то, оно нужно, где-то в КТП его видел, допишу???)

$$\begin{aligned}\gamma^{0i} &= \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}; \quad \gamma^{ij} = -i\varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}; \\ \gamma_5 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Also

$$(\gamma_0)^2 := \gamma_0 \gamma_0 = 1, \quad (\gamma_1)^2 := \gamma_1 \gamma_1 = -1, \quad (\gamma_2)^2 := \gamma_2 \gamma_2 = -1, \quad (\gamma_3)^2 := \gamma_3 \gamma_3 = -1,$$

(?!?! еще это на задачах потренирую!)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

Следы:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(1) &= 4; & \mathrm{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4\eta^{\mu\nu} & \mathrm{tr}(\gamma^{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta}) &= 4(\eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta}) \\ \mathrm{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) &= 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}) \\ \mathrm{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5) &= 0; & \mathrm{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5) &= -4i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\end{aligned}$$

След произвольного произведения нечетного числа γ^μ матриц равен 0.

Тождество Фирца - условие полноты с учетом следов: (????)

$$(1)_a{}^b (1)_c{}^d + (\gamma_5)_a{}^b (\gamma_5)_c{}^d + (\gamma^\mu)_a{}^b (\gamma_\mu)_c{}^d - (\gamma^\mu \gamma_5)_a{}^b (\gamma_\mu \gamma_5)_c{}^d - \frac{1}{2} (\gamma^{\mu\nu})_a{}^b (\gamma_{\mu\nu})_c{}^d = 4\delta_a{}^d \delta_c{}^b.$$

Следствия: (??? выведу их!???)

$$\chi_a \bar{\psi}^b = -\frac{1}{4} \delta_a^b (\bar{\psi} \chi) - \frac{1}{4} (\gamma_5)_a{}^b (\bar{\psi} \gamma_5 \chi) - \frac{1}{4} (\gamma^\mu)_a{}^b (\bar{\psi} \gamma_\mu \chi) + \frac{1}{4} (\gamma^\mu \gamma_5)_a{}^b (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \chi) + \frac{1}{8} (\gamma^{\mu\nu})_a{}^b (\bar{\psi} \gamma_{\mu\nu} \chi)$$

$$M = \frac{1}{4} \mathrm{tr} M + \frac{1}{4} \gamma_5 \mathrm{tr} (M \gamma_5) + \frac{1}{4} \gamma^\mu \mathrm{tr} (M \gamma_\mu) - \frac{1}{4} \gamma^\mu \gamma_5 \mathrm{tr} (M \gamma_\mu \gamma_5) - \frac{1}{8} \gamma^{\mu\nu} \mathrm{tr} (M \gamma_{\mu\nu}).$$

$$\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = g^{\mu_1 \mu_2} \mathrm{tr}(\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_n}) - g^{\mu_1 \mu_3} \mathrm{tr}(\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_n}) + \dots$$

$$\mathrm{tr}(A) = \frac{1}{4} \mathrm{tr}(A \gamma^\mu \gamma_\mu) = \frac{1}{4} \mathrm{tr}(\gamma_\mu A \gamma^\mu)$$

О билинейных формах Дирака

(тоже известные темы, когда-то допишу, пока не нужны они были)

Другие свойства γ -матриц

Переходы между представлениями и их смысл

$$\gamma^\mu \rightarrow M \gamma^\mu M^{-1}$$

Полезная метематика для спиноров

Если $[A, B_i] = c_i^j B_j$, A, B_i - некоторые матрицы, а c_i^j - (комплексные) числа, то

$$e^{-A} B_i e^A = (e^{-c})_i{}^j B_j$$

31.1.8 General Properties of Spinors

Физические свойства дираковских спиноров

Разложения

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) &= \begin{pmatrix} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \\ \theta_\alpha \end{pmatrix} = \psi_D \\ \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Это представление называется представлением Вейля или киральным представлением.

Свойства мод

$$\bar{u}^r(p)u^s(p) = 2m\delta^{rs} \quad \text{или} \quad u^{r\dagger}(p)u^s(p) = 2E_p\delta^{rs}.$$

Idea of helicity and chirality (!!!!!!!)

(?? додумаю этот раздел! важный для общего понимания!)

Из уравнения Дирака следует уравнение Клейна-Гордона после действия слева оператором $(-i\gamma^\mu\partial_\mu - m)$:

$$0 = (-i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi = (\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = \left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\psi = (\partial^2 + m^2)\psi$$

Можно прийти к уравнению Дирака, потребовав, чтобы оно для некоторых матриц имело вид

$$i\partial_t\psi = (\hat{\alpha} \cdot \hat{p} + m \cdot \hat{\beta})\psi$$

(добавлю пару строчек по Киселеву про завершение его вывода)

(тут про вывод этого, откуда вообще мы приходим к этому??? напишу потом)

Comparison with chirality (wiki)

In this sense, helicity can be contrasted ^[2] to chirality, which is Lorentz invariant, but is not a constant of motion for massive particles. For massless particles, the two coincide: The helicity is equal to the chirality, both are Lorentz invariant, and both are constants of motion.

In quantum mechanics, angular momentum is quantized, and thus helicity is quantized as well. Because the eigenvalues of spin with respect to an axis have discrete values, the eigenvalues of helicity are also discrete. For a massive particle of spin S , the eigenvalues of helicity are $S, S-1, S-2, \dots, -S$.^{[3]:12} For massless particles, not all of spin eigenvalues correspond to physically meaningful degrees of freedom: For example, the photon is a massless spin 1 particle with helicity eigenvalues -1 and +1, but the eigenvalue 0 is not physically present.^[4]

All known spin 1/2 particles have non-zero mass; however, for hypothetical massless spin 1/2 particles (the Weyl spinors), helicity is equivalent to the chirality operator multiplied by $1/2\hbar$. By contrast, for massive particles, distinct chirality states (e.g., as occur in the weak interaction charges) have both positive and negative helicity components, in ratios proportional to the mass of the particle.

A treatment of the helicity of gravitational waves can be found in Weinberg.^[5] In summary, they come in only two forms: +2 and -2, while the +1, 0 and -1 helicities are "non-dynamical" (they can be removed by a gauge transformation).

Генераторы для преобразований спиноров

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \sigma^k$$

Явно:

$$S^{0i} = \frac{i}{4} [\gamma^0, \gamma^i] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix},$$

$$S^{ij} = \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \Sigma^k.$$

$$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

$$\left(1 + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma}\right) \gamma^\mu \left(1 - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma}\right) = \left(1 - \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} \mathcal{J}^{\rho\sigma}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu$$

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp \left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \right)$$

О положительночастотных и отрицательночастотных решениях

$$\gamma^0 i \hbar \partial_0 \psi^\pm = \pm mc \lambda_P^\pm \psi^\pm$$

$$\lambda_P^\pm = \pm 1,$$

$$\gamma^0 i \hbar \partial_0 \psi^\pm - mc \psi^\pm = 0$$

$$\gamma_0 u_\pm(\mathbf{0}) = +u_\pm(\mathbf{0})$$

$$\gamma_0 v_\pm(\mathbf{0}) = -v_\pm(\mathbf{0})$$

В системе покоя (?????)

$$\gamma^0 = \frac{1}{mc} k_\mu \gamma^\mu$$

$$\Lambda k_\mu \gamma^\mu \Lambda^{-1} \Lambda u_\pm(\mathbf{0}) = mc \Lambda u_\pm(\mathbf{0}), \quad \Lambda k_\mu \gamma^\mu \Lambda^{-1} \Lambda v_\pm(\mathbf{0}) = -mc \Lambda v_\pm(\mathbf{0})$$

$$(p_\mu \gamma^\mu - mc) u_\pm(\mathbf{p}) = 0, \quad (p_\mu \gamma^\mu + mc) v_\pm(\mathbf{p}) = 0$$

О зарядовом сопряжении и зарядово сопряженном спиноре

Матрица зарядового сопряжения определяется по:

$$C \gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T; \quad C^{-1} = C^+ = -C^*.$$

В дирако-степаньянцевом представлении:

$$C = i \gamma^0 \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а при переходе к другому представлению для γ -матриц $C \rightarrow M^* C M^{-1}$, благодаря чему равенство $C = i \gamma^0 \gamma^2$ будет справедливо только для вещественной матрицы M .

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^C \chi^C &= \bar{\chi} \psi; & \bar{\psi}^C \gamma_5 \chi^C &= \bar{\chi} \gamma_5 \psi; \\ \bar{\psi}^C \gamma^\alpha \chi^C &= -\bar{\chi} \gamma^\alpha \psi; & \bar{\psi}^C \gamma^\alpha \gamma_5 \chi^C &= \bar{\chi} \gamma^\alpha \gamma_5 \psi; \\ \bar{\psi}^C \gamma^{\alpha\beta} \chi^C &= -\bar{\chi} \gamma^{\alpha\beta} \psi, \end{aligned}$$

$$\vec{b}^C = \psi^T C,$$

Поскольку в представлении $\psi_M \equiv M \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \psi$ матрица C записывается как

$$C_{Mf} = M^* C M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\psi^C)^C = \psi$$

(см Степаньянца про это, потом слова добавлю!)

$$\bar{\psi}^C = \psi^T C,$$

$$\psi^C = \gamma_0 C^\dagger \psi^*$$

$$(i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - m) \psi^C = 0$$

О комплексном сопряжении

$$(\psi_1 \psi_2)^* \equiv \psi_2^* \psi_1^*.$$

(??? обоснование добавлю??)

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\chi)^* &= \bar{\chi}\psi; & (\bar{\psi}\gamma_5\chi)^* &= -\bar{\chi}\gamma_5\psi \\ (\bar{\psi}\gamma^\mu\chi)^* &= \bar{\chi}\gamma^\mu\psi; & (\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\chi)^* &= \bar{\chi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \\ (\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\chi)^* &= -\bar{\chi}\gamma^{\mu\nu}\psi. \end{aligned}$$

Поэтому выражения $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ и $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ являются вещественными, а выражения $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ и $\bar{\psi}\gamma^{\mu\nu}\psi$ - чисто мнимыми.

О P-, T-, CPT-преобразованиях

$$\begin{aligned} P : \psi(x') &\rightarrow \psi'(x') = \psi'(t, -\mathbf{x}) = i\gamma^0\psi(t, \mathbf{x}) = i\gamma^0\psi(x) \\ T : \psi(x') &\rightarrow \psi'(x') = \psi'(-t, \mathbf{x}) = \gamma^1\gamma^3\psi^*(t, \mathbf{x}) = \gamma^1\gamma^3\psi^*(x). \\ P : \psi'(t, \mathbf{x}) &= i\gamma^0\psi(t, -\mathbf{x}); \quad T : \psi'(t, \mathbf{x}) = \gamma^1\gamma^3\psi^{**}(-t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(t, \mathbf{x}) &\rightarrow i\gamma_5\psi(-t, -\mathbf{x}) \\ A^\mu(t, \mathbf{x}) &\rightarrow -A^\mu(-t, -\mathbf{x}) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(-t, -\mathbf{x}) \end{aligned}$$

(не до этого, потом у Степаньянца выпишу ответ на это. Мб у Киселева тоже доучу это, но вроде у него не такая нужная теория. вообще не нужно это сейчас.)

О понятии спина

Суть спина полей

(тут абзац нормального текста, а не односторонне-математического, как ниже)

вот есть векторное поле

смотрим действие группы вращений на поле

спины - матрицы, но преобразуются как вектор, то есть это вектор, хотя и представляет из себя матрицу.

возьмем дуальный объект для генератора спина, это будет пространственная часть тензора спина.

еще с бустами можно сделать то же самое, там временная часть тензора спина.

из 1-формы мы получаем 2-форму.

Появление понятия спина из вращения поля

(тут типичная эта конструкция, это уже написано в квантмехе, сюда потом переставлю.)

О связи спина со статистикой (??)

(пропишу, важное понимание, в квантмехе, КТП подробнее про это!)

31.1.9 Typical Numerical Methods for Field-Theory Equations (!!!!)

(разберусь потом, очень важная часть минимальной теории. может, во 2й 1й тоже будет раздел - подробнее про эти методы.)

Обзор основных численных методов для уравнения Максвелла

Обзор основных численных методов для уравнения Клейна-Городона

Обзор основных численных методов для уравнения Дирака (!?)

Обзор других численных методов для типичных уравнений теории поля

31.1.10 Some Physical ideas about fields (??)

(переназvu потом раздел, укажу в названии, что за идеи?)

Massive gravitinos from dimensional reduction

(???? причем тут вообще гравитоны????)

Dimensional reduction for scalar fields

О применениях к элементарным частицам со спинам 3/2 (Ω -мезоны)

Еще там можно ввести суперсимметрию, но отдельная заморочка - разбираться, как и почему, статья про это есть. (мб потом напишу строчкой, идейно, почему так?)

31.2 Other useful math tricks for analysis

31.2.1 Differential Geometry, Vector Analysis for Field Theory (!??!)

(see note on GR and diff geom about it for now)

О векторных операциях

(??? напишу потом, это важно!!!)

Об индексах и знаках +, - от них

Позиция индексов. Чаще всего позиция индексов не указывается явно, потому что мы берем просто компоненты тензоров и не следим за тем, строка они или столбцы, а для тензора в общем случае вообще нет понятие строки. Если уж хотим, то 1-й (левый) индекс - столбец, 2-й - строка:

$$dx^\alpha \equiv dx^{\alpha\bullet} \mapsto (dx^T)^{\bullet\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} dx^{\alpha\bullet}.$$

$$dC^2 = g'_{\alpha'\beta'} dr'^{\alpha'} dr'^{\beta'} = g'_{\alpha'\beta'} \Lambda_{\bullet}^{\alpha'} \Lambda_{\bullet}^{\beta'} dr^\alpha dr^\beta = g_{\alpha\beta} dr^\alpha dr^\beta,$$

Преобразуем так:

$$\begin{aligned} dx'^T &= dx^T \circ \Lambda^T, \\ (dx'^T)^{\bullet\alpha} &= (dx')^{\alpha\bullet} = \Lambda^{\alpha}_{\bullet} dx^{\beta\bullet} = (dx^T)^{\bullet} (\Lambda^T)^{\bullet}_{\beta} = (dx^T \circ \Lambda^T)^{\bullet\alpha}, \end{aligned}$$

$$\hat{g} = \Lambda^T \circ \hat{g} \circ \Lambda,$$

Особенности метрики (+, −, −, −)

(???? later)

Особенности метрики (−, +, +, +)

(???? later)

Переход из одной метрики в другую (???)

(?? Тут мб добавлю короткий обзор формул и переходов из одной метрики в другую. там просто много их, и все равно нужно отдельно про это думать чуть что.)

О других формах индексной записи (???)

А еще компоненты антисимметричного 4-тензора можно представить в виде таблицы или как два вектора:

$$(A^{ik}) = \begin{bmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_x & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a}), \quad A_{ik} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a})$$

(?????)

Типичные соотношения векторной алгебры для задач теорпола

$$\text{grad } |\mathbf{r}| = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \equiv \mathbf{n}$$

$$\text{div rot } \mathbf{a} = 0,$$

$$\text{ибо } \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{a} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} a_{\gamma}$$

$$\text{rot}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] = 2\boldsymbol{\omega}, \quad \omega = \text{const.}$$

$$\text{Смешанное произведение: } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} := \det \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & a^{(3)} \\ b^{(1)} & b^{(2)} & b^{(3)} \\ c^{(1)} & c^{(2)} & c^{(3)} \end{pmatrix}.$$

О лапласиане

$$\Delta f(x) \equiv \nabla \cdot \nabla f(x).$$

О дивергенции

$$\text{div } \mathbf{a} \equiv \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a} = \partial_{\alpha} a^{\alpha}.$$

В частности,

$$\text{div } \mathbf{r} = \partial_{\alpha} r^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\alpha} = 3.$$

О роторе

$$\text{rot } \mathbf{a} \equiv [\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{a}], \quad (\text{rot } \mathbf{a})_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_{\beta} a_{\gamma}$$

О других векторных операциях

Antisymmetric derivative:

$$A \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu B := A (\partial_\mu B) - (\partial_\mu A) B$$

О символе Кронекера, тензоре Леви-Чивиты

$$\delta_{\alpha\beta} := \mathbb{I}_{\alpha\beta}$$

$$\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}, \quad \delta_{\alpha\alpha} = \text{tr } \mathbb{I} = 3, \quad \delta_{\alpha\beta}u_{\beta\lambda} = u_{\alpha\lambda}.$$

$$\varepsilon_{ij} := \begin{cases} +1 & \text{if } (i, j) = (\text{even}) \\ -1 & \text{if } (i, j) = (\text{odd}) \\ 0 & \text{if } i = j \end{cases}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\alpha'} & \delta_{\alpha\beta'} & \delta_{\alpha\gamma'} \\ \delta_{\beta\alpha'} & \delta_{\beta\beta'} & \delta_{\beta\gamma'} \\ \delta_{\gamma\alpha'} & \delta_{\gamma\beta'} & \delta_{\gamma\gamma'} \end{pmatrix}.$$

In particular:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma} &= \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'} - \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\beta\alpha'}, \\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta\gamma} &= 2\delta_{\alpha\alpha'}, \\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} &= 6. \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n v_1 \dots v_p} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n \rho_1 \dots \rho_p} = -p!n! \delta_{v_1 \dots v_p}^{\rho_1 \dots \rho_p}, \quad p = D - n$$

The antisymmetric p-index Kronecker δ is in turn defined by

$$\delta_{v_1 \dots v_p}^{\rho_1 \dots \rho_p} \equiv \delta_{v_1}^{[\rho_1} \delta_{v_2}^{\rho_2} \dots \delta_{v_p}^{\rho_p]},$$

which includes a signed sum over $p!$ permutations of the lower indices, each with a coefficient $1/p!$, such that the 'total weight' is 1 (as in (A.8)). (???? ну такое есть, потом подумаю еще про это.)

В пространстве Минковского

$$e^{0123} = +1, \quad e_{0123} = -1.$$

Свойства:

$$\begin{aligned} e^{iklm}e_{prst} &= - \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \\ \delta_p^l & \delta_r^l & \delta_s^l & \delta_t^l \\ \delta_p^m & \delta_r^m & \delta_s^m & \delta_t^m \end{vmatrix}, & e^{iklm}e_{prsm} &= - \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k \\ \delta_p^l & \delta_r^l & \delta_s^l \end{vmatrix}, \\ e^{iklm}e_{prlm} &= -2 (\delta_p^i \delta_r^k - \delta_r^i \delta_p^k), & e^{iklm}e_{pklm} &= -6\delta_p^i. \\ e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} &= -Ae_{iklm}, & e^{iklm}e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} &= 24A, \end{aligned}$$

A - определитель, составленный из величин A_{ik} .

Обратная матрица

$$(A^{-1})_{\alpha\beta} = \frac{1}{2! \det A} \epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\beta\beta_2\beta_3} A_{\beta_2\alpha_2} A_{\beta_3\alpha_3},$$

дифференциал детерминанта (???? додумаю это!!!)

$$A_{\beta\alpha} \cdot 3 \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\beta\beta_2\beta_3} A_{\beta_2\alpha_2} A_{\beta_3\alpha_3} = dA_{\beta\alpha} M_{\alpha\beta} = \det A (A^{-1})_{\alpha\beta} dA_{\beta\alpha}$$

в частности, для метрики

$$d \det g = \det g \cdot g^{\alpha\beta} dg_{\beta\alpha}.$$

(??? тут плохо еще понимаю их свойства)

Тензор Леви-Чивиты в искривленном пространстве:

(!?!?)

(? что еще про него знаем?)

Некоторые общие свойства векторных операций для теорполя

О площадях (!?)

По определению:

$$d^2 \Sigma = d\mathbf{a} \times d\mathbf{b} \equiv d^2 \Sigma_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} da^\alpha \wedge db^\beta$$

О векторах, тензорах, формах

Суть векторов и тензоров

При преобразованиях координат $x' = f(x)$:

Вектор - объект, который преобразуется с новыми координатами в числителе:

$$a'^\alpha = \frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} a^\beta.$$

(?? укажу про другие определения)

Ковектор (1-форма) - объект, который преобразуется с новыми координатами в знаменателе:

$$\partial'_\alpha f = \frac{\partial r^\beta}{\partial r'^\alpha} \partial_\beta f$$

(?? укажу про другие определения)

Тензор (!?!?!?! тут раздел в общем случае про тензоры!!!!)

О дискретных преобразованиях и псевдовекторности (??????)

(разберу четко наконец-то, уже почти дошел!)

Связь координатного и инвариантного подхода (!!?)

(пока не готов написать суть.)

Об усреднении

$$\langle n_\alpha n_\beta \rangle = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta},$$

$$\langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\lambda \rangle = \frac{1}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\lambda} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\gamma}),$$

$$\underbrace{\langle n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_k} \rangle}_{k - \text{even}} = \frac{1}{(k+1)!!} \left(\delta_{\alpha_1 \alpha_2} \dots \delta_{\alpha_{k-1} \alpha_k} + \text{perm.} \right).$$

$$\underbrace{\langle n_{\alpha_1} \dots n_{\alpha_k} \rangle}_{k - \text{odd}} \equiv 0,$$

(тут еще про усреднение по плоскости.)

Также есть общая формула, которая в КТП много дает усреднений: (???) (мб теорему Вика укажу, по ней по идее тоже можно считать, но я так еще не делал)

Также есть общие формулы (намек на излучение грав волн, словами укажу, что там вообще, во 2й 1й - с формулами)

О дифференциальных операциях и теоремах о формах

(О Стоксе, все такое)

О внешнем дифф, внутр умн, т.п.....

О метрике для теории поля

Основные свойства метрики

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n,$$

О метриках Евклидова пространства и пространства Минковского

Метрика Минковского:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

(по идее какие-то основные свойства тут будут.)

Сферические координаты:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$d\mathbf{r}^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

метрика считается по $\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}$ от декартовой. Например, $\frac{\partial x^\alpha}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$,

поэтому $\gamma_{rr} = (\sin \theta \cos \phi)^2 + (\sin \theta \sin \phi)^2 + \cos^2 \theta = 1$.

(??? тут из каталога моделей ОТО добавлю еще, потом)

Об объемах и интегрировании

Проекция (???) объема параллелепипеда в 4-пространстве (т.е. «площади» гиперповерхности), построенного на трех 4-векторах dx^i, dx^j, dx^k :

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx^j & dx^k \\ dx^i & dx^j & dx^k \\ dx^i & dx^j & dx^k \end{vmatrix}$$

Метрика никакую роль тут не играет (??? почему - не разобрался)

(?? тут такой чисто математический вопрос, как считать н мерные площади, сперва в математике это напишу, потом сюда абзац добавлю!)

31.2.2 Other mathematical Tricks For Gravity

Mathematical tricks

(about indexes tricks and multiplication!!)

Multiply by frame e (???)

Torsion appears from (???), so we expect (???)

31.3 Special Spinors and Methods for Them (!?)

(Тут очень многое по Проену напишу, это у него лучше, чем где угодно написано!!! самые важные - в 1 части!)

31.3.1 Weyl, Majorana Spinors: Other Properties

(мб пару разделов сделаю, просто это вообще не применяющиеся темы тем, кто не занимается только моделями с ними)

3.3.2 Symplectic Majorana spinors (???????)

(??? хз, что тут, особая конструкция какая-то)
Symplectic Majorana spinors satisfy the condition

$$\chi^i = \varepsilon^{ij} (\chi^j)^C = \varepsilon^{ij} B^{-1} (\chi^j)^*.$$

Dimensions of minimal spinors

$$\begin{array}{ll} t_1 = -1, & t_0 = 1 : \text{Majorana,} \\ & t_0 = -1 : \text{pseudo-Majorana,} \\ t_1 = 1 : & \text{symplectic Majorana.} \end{array}$$

Table 3.2 Irreducible spinors, number of components and symmetry properties.

dim	spinor	min # components	antisymmetric
2	MW	1	1
3	M	2	1,2
4	M	4	1,2
5	S	8	2,3
6	SW	8	3
7	S	16	0,3
8	M	16	0,1
9	M	16	0,1
10	MW	16	1
11	M	32	1,2

4.4 Internal symmetry for Majorana spinors (!?!?!?!?)

Majorana spinors in physical theories

(???? не писал еще лагр для майораны, потом подумаю.)

3.4.1 Variation of a Majorana Lagrangian

In this section we consider a prototype action for a Majorana spinor field in dimension $D = 2, 3, 4 \bmod 8$. Majorana and Dirac fields transform the same way under Lorentz transformations, but Majorana spinors have half as many degrees of freedom, so we write

$$S[\Psi] = -\frac{1}{2} \int d^D x \bar{\Psi} [\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi(x)$$

$$\delta S[\Psi] = - \int d^D x \delta \bar{\Psi} [\gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi(x).$$

Exercise 3.40 Show that the Euler-Lagrange equations that follow from the variation of the second form of the action in (3.91) are

$$\not{P}_L \Psi = m P_R \Psi, \quad \not{P}_R \Psi = m P_L \Psi.$$

Derive $\square P_{L,R}\Psi = m^2 P_{L,R}\Psi$ from the equations above.
and its adjoint. The Majorana condition $\Psi = B^{-1}\Psi^* = \gamma^0\gamma^1\gamma^3\Psi^*$ requires that Ψ take the form

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}.$$

With (3.93) and (2.55) in view we define the two-component Weyl fields

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix}.$$

Using the form of γ^μ (2.19) and γ_* (3.34) in the Weyl representation, we see that we can identify

$$\begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} = P_L\Psi, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} = (P_L\Psi)^C = P_R\Psi.$$

The equations of motion (3.92) can then be rewritten as

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi = m\tilde{\psi}, \quad \sigma^\mu \partial_\mu \tilde{\psi} = m\psi$$

U(1) symmetries of a Majorana field

Exercise 3.42 Show that the axial current

$$J_*^\mu = \frac{1}{2}i\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_*\Psi$$

is the Noether current for the chiral symmetry defined above. Use the equations of motion to show that

$$\partial_\mu J_*^\mu = -im\bar{\Psi}\gamma_*\Psi.$$

The current is conserved only for massless Majorana fermions.

О других свойствах спиноров

Об инверсиях и симметриях

$$\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \xleftrightarrow{\mathbb{P}} \theta_\alpha, \quad \chi^\alpha \xleftrightarrow{\mathbb{P}} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}},$$

$$\mathfrak{s} \xleftrightarrow{\mathbb{P}} -\mathfrak{s}, \quad P_L \xleftrightarrow{\mathbb{P}} P_R, \quad \gamma_5 \xleftrightarrow{\mathbb{P}} -\gamma_5.$$

$$\psi^{\mathbb{P}}(t, \mathbf{r}) = \gamma_0 \psi(t, -\mathbf{r})$$

$$\mathbb{C}\psi = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\epsilon} \\ -\hat{\epsilon} & 0 \end{pmatrix} \psi^*$$

О спинорах в пространствах большей размерности

(потом пропишу, когда темы до этого станут лучше написаны)

О приложениях спиноров (???)

31.3.2 Spinors in D dimensionsО спинорах в D -мерном пространстве

(я хз, мб увеличу раздел, пока такой вот, не такой используемый он ведь, а на это все отдельная запись есть.)

2.6 Weyl spinor fields in even spacetime dimension

$$\psi(x) = \int \frac{d^{(D-1)}\vec{p}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(D-1)}\sqrt{2E}} [e^{ip \cdot x} c(\vec{p}, -) + e^{-ip \cdot x} d(\vec{p}, +)^*] \xi(\vec{p}, -)$$

wave equation $\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi(x) = m\psi(x)$ is not Lorentz invariant. (?????)

The Dirac Lagrangian in (2.32) can be rewritten in terms of $\psi, \bar{\chi}$ and their adjoints as

$$\mathcal{L} = i [-\psi^\dagger \bar{\sigma} \cdot \partial \psi + \bar{\chi}^\dagger \sigma \cdot \partial \chi - m \bar{\chi}^\dagger \psi + m \psi^\dagger \bar{\chi}] .$$

Show that each of the four terms is a Lorentz scalar. Note that the result in (2.13) holds for all even $D = 2m$.

3.2 Spinors in general dimensions

(тут комментарий про индексы, что так вот работают они, понятно как)

$$\bar{\chi} \gamma_\mu \lambda = \chi^\alpha (\gamma_\mu)_\alpha{}^\beta \lambda_\beta,$$

(???? что там с Фирцом - я хз, но это об этом тут указание.)

Let's proceed to derive the basic Fierz identity. Using spinor indices, we can regard the quantity $\delta_\alpha{}^\beta \delta_\gamma{}^\delta$ as a matrix in the indices $\gamma\beta$ with the indices $\alpha\delta$ as inert 'spectators'. We apply (3.28) in the detailed form $\delta_\alpha{}^\beta \delta_\gamma{}^\delta = \sum_A (m_A)_\alpha{}^\delta (\gamma_A)_\gamma{}^\beta$. The coefficients are $(m_A)_\alpha{}^\delta = 2^{-m} \delta_\alpha{}^\beta \delta_\gamma{}^\delta (\gamma_A)_\beta{}^\gamma = 2^{-m} (\gamma_A)_\alpha{}^\delta$. Therefore, we obtain the basic rearrangement lemma

$$\delta_\alpha{}^\beta \delta_\gamma{}^\delta = \frac{1}{2^m} \sum_A (\gamma_A)_\alpha{}^\delta (\gamma^A)_\gamma{}^\beta.$$

Note that the 'column indices' on the left- and right-hand sides have been exchanged. Exercise 3.26 Derive the following result:

$$(\gamma^\mu)_\alpha{}^\beta (\gamma_\mu)_\gamma{}^\delta = \frac{1}{2^m} \sum_A v_A (\gamma_A)_\alpha{}^\delta (\gamma^A)_\gamma{}^\beta,$$

and prove that the explicit values of the expansion coefficients are given by $v_A = (-)^{r_A} (D - 2r_A)$, where r_A is the tensor rank of the Clifford basis element γ_A .

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 M \lambda_2 \bar{\lambda}_3 M' \lambda_4 &= -\frac{1}{2^m} \sum_A \bar{\lambda}_1 M \gamma_A M' \lambda_4 \bar{\lambda}_3 \gamma^A \lambda_2 \\ &= -\frac{1}{2^m} \sum_A \bar{\lambda}_1 \gamma_A M' \lambda_4 \bar{\lambda}_3 \gamma^A M \lambda_2. \end{aligned}$$

Вещественность полей в общем смысле (!!!!!!!)

(давно понять это нужно уже!!!)

First we define the charge conjugate of any spinor as

$$\lambda^C \equiv B^{-1} \lambda^*.$$

The barred charge conjugate spinor is then, using (3.50) and (3.47),

$$\overline{\lambda^C} = (-t_0 t_1) i \lambda^\dagger \gamma^0.$$

Note that this is the Dirac conjugate as defined in (2.30) except for the numerical factor $(-t_0 t_1)$. The meaning of this will become clear below when we discuss Majorana spinors. Note that $(-t_0 t_1) = +1$ in 2, 3, 4, 10 or 11 dimensions..⁵ The charge conjugate of any $2^m \times 2^m$ matrix M is defined as

$$M^C \equiv B^{-1} M^* B.$$

$$(\gamma_\mu)^C \equiv B^{-1} \gamma_\mu^* B = (-t_0 t_1) \gamma_\mu.$$

$$(\gamma_*)^C = (-)^{D/2+1} \gamma_*.$$

$$(\bar{\chi} M \lambda)^* \equiv (\bar{\chi} M \lambda)^C = (-t_0 t_1) \overline{\chi^C} M^C \lambda^C.$$

О гамма-матрицах в D -мерном пространстве (?????)

(???? скоро разбирать это буду!!!)

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \\ \gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} &= \frac{1}{2} \{\gamma^{\mu_1}, \gamma^{\mu_2 \mu_3}\}, \\ \gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= \frac{1}{2} [\gamma^{\mu_1}, \gamma^{\mu_2 \mu_3 \mu_4}], \end{aligned}$$

etc.

$$\gamma^{\mu\nu} \gamma_\nu = (D-1) \gamma^\mu$$

You can memorize this rule, but it is easier to recall the simple logic behind it: ν runs over all values except μ , so there are $(D-1)$ terms in the sum. Similar logic explains the result

$$\gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho = (D-2) \gamma^{\mu\nu}$$

or even more generally

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu_1 \dots \mu_r v_1 \dots v_s} \gamma_{v_s \dots v_1} &= \frac{(D-r)!}{(D-r-s)!} \gamma^{\mu_1 \dots \mu_r} \\ \gamma^{v_1 \dots v_r} &= (-)^{r(r-1)/2} \gamma_{v_r \dots v_1} \end{aligned}$$

$$\gamma^{\mu_1 \mu_2} \gamma_{v_1 \dots v_D} = D(D-1) \delta_{[v_1 v_2}^{\mu_2 \mu_1} \gamma_{v_3 \dots v_D]}.$$

Note that such generalized δ -functions are always normalized with 'weight 1', i.e.

$$\delta_{v_1 v_2}^{\mu_2 \mu_1} = \frac{1}{2} (\delta_{v_1}^{\mu_2} \delta_{v_2}^{\mu_1} - \delta_{v_1}^{\mu_1} \delta_{v_2}^{\mu_2})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \gamma^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}$$

Here is another example:

$$\gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_{\sigma\tau} = \gamma^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\tau} + 6 \gamma^{[\mu\nu}{}_{[\tau} \delta^{\rho]}_{\sigma]} + 6 \gamma^{[\mu} \delta^\nu_{[\tau} \delta^{\rho]}_{\sigma]}.$$

(?? и тут еще пара свойств есть, но вряд ли они нужны, так что это в упражнениях пусть будет только)

Basis of the algebra for even dimension $D = 2m$

Просто обозначаем так:

The basis is denoted by the following list $\{\gamma^A\}$ of matrices chosen from those defined in Sec. 3.1.2:

$$\{\gamma^A = \mathbb{1}, \gamma^\mu, \gamma^{\mu_1\mu_2}, \gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3}, \dots, \gamma^{\mu_1\cdots\mu_D}\}$$

Exercise 3.6 Show that $\gamma^A\gamma^B = \pm\gamma^C$, where γ^C is the basis element whose indices are those of A and B with common indices excluded. Derive the trace orthogonality property

$$\text{Tr}(\gamma^A\gamma_B) = 2^m\delta_B^A.$$

The list (3.25) contains 2^D trace orthogonal matrices in an algebra of total dimension 2^D . Therefore it is a basis of the space of matrices M of dimension $2^m \times 2^m$.

Exercise 3.7 Show that any matrix M can be expanded in the basis $\{\gamma^A\}$ as

$$M = \sum_A m_A \gamma^A, \quad m_A = \frac{1}{2^m} \text{Tr}(M\gamma_A).$$

$$\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = 2^m [\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}].$$

The highest rank Clifford algebra element

$$\gamma_* \equiv (-i)^{m+1} \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_{D-1}$$

which satisfies $\gamma_*^2 = \mathbb{1}$ in every even dimension and is hermitian. For spacetime dimension $D = 2m$, the matrix γ_* is frequently called γ_{D+1} in the physics literature, as in four dimensions where it is called γ_5 .

This matrix occurs as the unique highest rank element in (3.25). For any order of components μ_i , one can write

$$\gamma_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_D} = i^{m+1} \varepsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_D} \gamma_*,$$

Exercise 3.10 Show that γ_* commutes with all even rank elements of the Clifford algebra and anti-commutes with all odd rank elements. Thus, for example,

$$\begin{aligned} \{\gamma_*, \gamma^\mu\} &= 0, \\ [\gamma_*, \gamma^{\mu\nu}] &= 0. \end{aligned}$$

Since $\gamma_*^2 = \mathbb{1}$ and $\text{Tr} \gamma_* = 0$, it follows that one can choose a representation in which

$$\gamma_* = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Odd spacetime dimension $D = 2m + 1$

$$\gamma_{\pm}^{\mu_1\cdots\mu_r} = \pm i^{m+1} \frac{1}{(D-r)!} \varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_D} \gamma_{\pm\mu_D\cdots\mu_{r+1}}$$

Exercise 3.16 Prove the relation (3.41) and the analogous but different relation for even dimension:

$$\gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r} \gamma_* = -(-i)^{m+1} \frac{1}{(D-r)!} \varepsilon^{\mu_r\mu_{r-1}\cdots\mu_1\nu_1\nu_2\cdots\nu_{D-r}} \gamma_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{D-r}}.$$

You can use the tricks explained in Sec. 3.1.4. Show that in four dimensions

$$\gamma_{\mu\nu\rho} = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\sigma \gamma_*.$$

(??? я хз, что тут, вроде какая-то одна идея)

Symmetries of γ -matrices (!!!!!!)

ric. Symmetry depends only on the rank r of the matrix γ^A , so we can write:

$$(C\gamma^{(r)})^T = -t_r C\gamma^{(r)}, \quad t_r = \pm 1,$$

where $\gamma^{(r)}$ is a matrix in the set (3.25) of rank r . (The $-$ sign in (3.44) is convenient for later manipulations.) For rank $r = 0$ and 1, one obtains from (3.44)

$$C^T = -t_0 C, \quad \gamma^{\mu T} = t_0 t_1 C \gamma^\mu C^{-1}.$$

These relations suffice to determine the symmetries of all $C\gamma^{\mu_1 \dots \mu_r}$ and thus all coefficients t_r : e.g. $t_2 = -t_0$ and $t_3 = -t_1$. Further, $t_{r+4} = t_r$.

Exercise 3.17 A formal proof of the existence of C can be found in [10, 11], but you can check that the following two matrices satisfy (3.45) for even D . They are given in the product representation of (3.2):¹

$$\begin{aligned} C_+ &= \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \dots, & t_0 t_1 &= 1, \\ C_- &= \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \dots, & t_0 t_1 &= -1. \end{aligned}$$

Table 3.1 Symmetries of γ -matrices. The entries contain the numbers $r \bmod 4$ for which $t_r = \pm 1$. For even dimensions, in bold face are the choices that are most convenient for supersymmetry.

$D \bmod 8$	$t_r = -1$	$t_r = +1$
0	0, 3 0, 1	2, 1 2, 3
1	0, 1	2, 3
2	0, 1 1, 2	2, 3 0, 3
3	1, 2	0, 3
4	1, 2 2, 3	0, 3 0, 1
5	2, 3	0, 1
6	2, 3 0, 3	0, 1 1, 2
7	0, 3	1, 2

(!!!!!! тут отслежу шаги, которые мы делаем!!!)

Since we use hermitian representations, which satisfy (3.3), the symmetry property of a γ -matrix determines also its complex conjugation property. To see this, we define the unitary matrix

$$B = i t_0 C \gamma^0$$

Exercise 3.19 Derive

$$\gamma^{\mu*} = -t_0 t_1 B \gamma^\mu B^{-1}$$

Exercise 3.20 Prove that $B^* B = -t_1 \mathbb{1}$.

$$C' = S^{-1T} C S^{-1}, \quad B' = S^{-1T} B S^{-1}$$

О обобщениях спиноров и других теорий с ними (???)

32 Electrodynamics, special relativity: other properties, methods, models

32.1 Deeper Understanding of SR, the Poincaré Group (!?)

32.1.1 Relativistic Mechanics, Effects, and Paradoxes of SR

О типичных явлениях СТО

Об элементарных явлениях СТО (!!!!)

(тут тренировки нужны!)

Закон абберации света есть:

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'}.$$

(?? поясняю, что есть что)

Абберация выводится из сравнения угла движения света по отношению к оси буста в двух системах отсчета: полагая $v_{\parallel} = c \cos \theta$ и $v'_{\parallel} = c \cos \theta'$, $u/c = \beta$,

О геометрии СТО

Об эффекте Доплера

Если ω - частота света, излученная подвижным источником, а ω' - частота света, детектируемая в неподвижной системе координат, то

$$\omega' = \frac{\omega}{\gamma} \frac{1}{1 + \beta \cos \theta'} \xrightarrow{\text{non-rel}} \omega(1 - \beta \cos \theta),$$

θ - угол между вектором излученной волны и направлением движения источника.

Продольный эффект Доплера: ($\cos \theta' = \pm 1$):

$$\omega' = \omega \gamma (1 \mp \beta) = \omega \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}},$$

Если источник приближается, то принимаемая частота больше испускаемой частоты ($\nu > \nu'$), иначе - если наоборот.

Поперечный эффект Доплера ($k'_{\parallel} = 0, \cos \theta' = 0$):

$$\omega' = \omega \frac{1}{\gamma}$$

(абзац про применение его и про другие эффекты, там много что есть, но не до этого еще.)

О прецессии Томаса (???)

Если частица (система K') движется с ускорением $\dot{\mathbf{v}}$, то за время dt (в системе K) она совершит поворот на угол $d\phi_{\perp} = dt \omega_{\text{Th}}$,

$$\omega_{\text{Th}} := -(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}}{v^2} \xrightarrow{\text{non-rel}} \frac{1}{2c^2} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v}.$$

То есть частота пропорциональна ускорению, скорости, ортогональна им, и также во 2 порядке по c . Для релятивистской ω_{Th} есть другие формы этой формулы, но суть их та же. Это следует из общего факта о некоммутативности бустов, типа у нас один переход - в систему, локально инерциальную с электроном, другой - в систему с чуть большей скоростью.

Общий факт, что последовательное применение двух лоренцевых бустов в отличающихся направлениях это элемент группы Лоренца, который можно всегда представить как буст со скоростью, полученной согласно закону сложения скоростей, и поворота движущейся системы относительно ее центра на угол

$$d\phi_{\perp} = (1 - \gamma) \mathbf{v} \times d\mathbf{v} / v^2.$$

Типично это доказывается через переход двумя бустами из второй системы K'' в изначальную нулевую систему K , разложив скорости $(-v, -dv')$ на параллельную и ортогональную. Там появляется угол из разности скоростей систем $K : \nu$ и K'' относительно K . Нужно сделать это аккуратно и домножить векторно на скорость. (потом точнее напишу, пока это в теории! у Киселева это плохо написано, нужно еще в др месте смотреть)

(тут пара формул из и для задач!)

(тут абзац с указанием, она нужна, пока не уверен, и почему.) Она используется в поправках к энергии атома водорода (???)

О 4-волновом векторе и его применениях (???)

$$\underline{k} = (\omega/c, \mathbf{k}) = \omega/c(1, \mathbf{k}/k).$$

When written out explicitly its contravariant and covariant forms are:

$$K^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z \right)$$

$$K_\mu = \left(\frac{\omega}{c}, -k_x, -k_y, -k_z \right)$$

In general, the Lorentz scalar magnitude of the wave four-vector is:

$$K^\mu K_\mu = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 = \left(\frac{\omega_o}{c} \right)^2 = \left(\frac{m_o c}{\hbar} \right)^2$$

The four-wavevector is null for massless (photonic) particles, the rest mass $m_0 = 0$ An example of a null four-wavevector would be a beam of coherent, monochromatic light, which has phase-velocity $v_p = c$

$$K^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) = \left(\frac{\omega}{c}, \frac{\omega}{c} \hat{n} \right) = \frac{\omega}{c} (1, \hat{n}) \text{ \{for light-like/null\} }$$

which would have the following relation between the frequency and the magnitude of the spatial part of the four-wavevector:

$$K^\mu K_\mu = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 = 0 \{ \text{for light-like/null} \}$$

The four-wavevector is related to the four-momentum as follows:

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \hbar K^\mu = \hbar \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$$

The four-wavevector is related to the four-frequency as follows:

$$K^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) = \left(\frac{2\pi}{c}, \vec{k} \right) N^\mu = \left(\frac{2\pi}{c}, \vec{k} \right) (\nu, \nu \vec{n})$$

The four-wavevector is related to the four-velocity as follows:

$$K^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) = \left(\frac{\omega_o}{c^2}, \vec{k} \right) U^\mu = \left(\frac{\omega_o}{c^2}, \vec{k} \right) \gamma(c, \vec{u})$$

Им можно описывать лучи света. (тут указание для задач, особенно про ту, с зеркалом!!!)

(тут про другие применения)

О формализме и законах релятивистской механики**О функции Лагранжа, функции Гамильтона**

(мб еще что-то про это напишу)

О законах сохранения для частиц

ЗСИ

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

Здесь подразумевается, что у нас 4-импульсы, так что одновременно у нас аж 4 уравнения. (скоро напишу про то, как типично преобразовываем его!!!)

О релятивистских столкновениях и распадах**On center of mass system, c.m.s (СЦМ)**

$$\begin{aligned} \text{CM Frame:} \quad \mathbf{p}_1 &= -\mathbf{p}_2 \\ p_1 + p_2 &= \left(\frac{E_{\text{cms}}}{c}, \mathbf{0} \right). \end{aligned}$$

Если частицы тождественные в начальном (или в конечном) состоянии, то $E_1 = E_2$.

Лабораторная система:

$$\mathbf{p}_2 = 0.$$

В СЦМ систему очень часто происходят переходы в сложных задача (? додумаю, почему?)

О реакциях, пороговой энергии M_{min}

$$M_{\text{min}}^2 \equiv (p_3 + p_4)^2 = m_3^2 + 2p_3 \cdot p_4 + m_4^2.$$

В системе центра масс $p_3 = (E_3, \mathbf{p}_3)$, $p_4 = (E_4, -\mathbf{p}_3)$ и $p_3 + p_4 = (E_3 + E_4, \mathbf{0})$,

$$M = E_3 + E_4.$$

Суммарная энергия частиц минимальна, когда они покоятся друг относительно друга, т.е. $E_3 = m_3$, $E_4 = m_4$, получаем

$$M_{\text{min}} = m_3 + m_4$$

О распадах

сумма масс частиц в конечном состоянии должна удовлетворять условию

$$\sum_k M_k \leq m.$$

Переменные Мандельштама

$$s := (p_1 + p_2)^2 \quad \text{“квадрат переданного импульса”,}$$

$$t := (p_1 - p_3)^2,$$

$$u := (p_1 - p_4)^2,$$

(!!! из КТП добавлю указания на задачи!!!)

Например, для двух частиц одинаковой массы m в СЦМ $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 \equiv E$, $\mathbf{p}_1^2 = \mathbf{p}^2$,

$$t = p_1^2 + p_3^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = 2m^2 - 2 \left[\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 \cos \theta_{13} \right],$$

θ_{13} угол между импульсами первой и третьей частиц в системе центра масс. Поскольку $\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$, имеем

$$t = -2p^2 (1 - \cos \theta_{13}) \leq 0,$$

т.е. передача импульса отрицательна или равна нулю, что верно и в общем случае.

(абзац про то, как их использовать! много как, очень полезные! если задача просто не решается, то их и следует вычислять и находить переходом в другую СО.)

Об ультрарелятивистском пределе $v/c = \beta \rightarrow 1$ или $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \gg 1$

$$p = v \frac{E}{c^2}, \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} |\mathbf{p}| \approx p_0 = \frac{E}{c},$$

$$\frac{E}{m} = \gamma \gg 1.$$

Об обобщениях формул рассеяния на методы КТП (??)

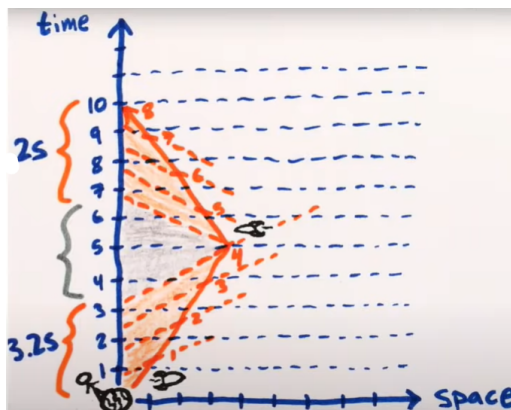
(очень важная связка для целостной картины, но пока ее не понимаю, да и не до нее.)

О парадоксе близнецов

О смысле парадокса близнецов

Если все держится на том, что у нас есть память про то, система ускоряется или нет, то что с частицами, у которых нет памяти? (???? подозреваю, что это фиговый вопрос, но ладно, пока пусть повесит.)

(напишу потом, важный параграф)



О типичных решениях парадокса близнецов (?)

В рамках СТО:

В рамках ОТО:

О другом про парадокс близнецов (?)

(абзац про случай, когда 2 частицы в пустоте разлетаются и встречаются)

(абзац про парадокс близнецов в шварцшильде, это решу отдельно в отдельной записи, вставлю сюда потом суть и основные формулы)

32.1.2 Other Effects in Scope of Special Relativity**Эффект Саньяка**

Эффект Саньяка является следствием релятивистского закона сложения скоростей.

При выполнении некоторых ограничений на скорость вращения эффект Саньяка может рассматриваться как следствие различия замедления времени либо различия изменения фаз волновых функций материальных частиц в скалярном или соответственно векторном гравитационном потенциале сил инерции во вращающейся системе отсчета для встречных волн.

(?? пока хз.)

(тут основные формулы)

(тут про следствия и применения)

О других парадоксах и явлениях

(потом напишу когда-то)

Особенности эффективного решения задач на преобразования Лоренца (?)**Всегда перед решением иллюстрирую условие**

Это важный типичный шаг, который всегда делаю, ведь именно из-за непонимания условия задач в СТО совершается большинство ошибок и тратится время впустую.

32.1.3 Spacetime Algebra (???)

(там статья есть про кватерноны, всякую алгебру и СТО, напишу сюда мб ее когда-то)

32.1.4 SUSY Poincare algebra (??)

(если начну читать - тут суть всего от него будет.)

Main ideas and formulas

In global SUSY the scope of symmetries included in quantum field theory is extended from Poincaré and internal symmetry transformations, with charges $M_{[\mu\nu]}$, P_μ , and T_A , to include spinor supercharges Q_α^i , where α is a spacetime spinor index, and $i = 1, \dots, \mathcal{N}$ is an index labeling the distinct supercharges. We will assume that the Q_α^i are four-component Majorana spinors, although an equivalent formulation using two-component Weyl spinors is also commonly used. In this chapter we will mostly study the simplest case $\mathcal{N} = 1$ where there is a single spinor charge Q_α . This case is called $\mathcal{N} = 1$ SUSY or simple SUSY. Some features of theories with $\mathcal{N} > 1$ spinor charges, called extended SUSY theories, are discussed in Sec. 6.4 and Appendix 6A.

In $\mathcal{N} = 1$ global SUSY the Poincaré generators and Q_α join in a new algebraic structure, that of a superalgebra. A superalgebra contains two classes of elements, even and odd. From the physics viewpoint, they can be called bosonic (B) and fermionic (F). The structure relations include both commutators and anti-commutators in the pattern $[B, B] = B$, $[B, F] = F$, $\{F, F\} = B$. The bosonic charges span a Lie algebra. In SUSY the subalgebra of the bosonic charges $M_{[\mu\nu]}$ and P_μ is the Lie algebra of the Poincaré group discussed in Ch. 1, while the new structure relations involving Q_α are

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha, \bar{Q}^\beta\} &= -\frac{1}{2}(\gamma_\mu)_\alpha^\beta P^\mu, \\ [M_{[\mu\nu]}, Q_\alpha] &= -\frac{1}{2}(\gamma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta, \\ [P_\mu, Q_\alpha] &= 0\end{aligned}$$

32.1.5 Philosophical Ideas about Time by Guts (??)

(очень интересно, однако не до этого)

Основные соображения

(тут выписка из 1 часа презентации Гуца, которая мне очень понравилась, но разбираться нет времени. потом когда-то этот текст станет компактным конспектом основных идей) Семинар А. К. Гуца “Время: исторические эпохи и последовательности...”

ничего забавнее чем трактовать чушь таким образом чтобы она не казалась чушью эразм роттердамский томаса мора 1508 от на теперь я перейду конкретно уже доклада я сделал предупреждения что я стараюсь удерживаться от какой-то чуши где критерии я критерии выработалась я давно можно придумать все что угодно но ты чего существует наука наука существует для того что а вы сделали расчеты наука должна все в конце концов свести какому-то набору формул который по которым инженер там сделает ракету я не знаю холодильник чудо какой батареею которое тепло нам дает вот для чего наука побочный эффект науки это мировоззренческий представить людям как устроен мир и вот мы уже триста лет находимся в парадигме классически идущие от нет она там галилея loco back on a boat человек без это не что есть вселенная она развивается по своим законам по физическим законам если человек нет вселенной глубоко безразличны вот классическая парадигма и поэтому вот все эти теории по придумали как устроен мир построенной на классической парадигме а именно при большой взрыв вот это позволяет очень многие продвинуться в карьере один мой хороший знакомый которые в англии живет как то сказал как стать знаменитым первый путь придумать что то такое что на это будет кормильца море людей второй путь по конечно то что придумано это чушь и тогда ты лишишь людей огромное количество людей хлебах они тебя примут на будет помнить и третий путь писать книги теперь про машину время идет вот эта задача которая была поставлена на самом деле получилось что путь задачей я 60 восемьдесят девятом году получил для написании курсовых дипломных работ и тире 40 лет я понял что она в общем то закончил эту работу можно делать расчеты другое дело что эти формулы дают такие энергии как мы пока не можем как-то произвести вот как устроена машина очень и вот я возьму листок дальше пространство-время пытках дис. время то что мы называем не что текущая вверх значит я могу двигаться только в потоке времени но чтобы вернуться в прошлое мне надо пойти против потока это классика это уже неинтересно второй путь завернуть листок бумаги таки вас крутить чтобы прошлое оказалось ты иди по потоку времени естественно нужно использовать пятимерные уже время в проекции вы получите то что дует изобрело это называется пружинным пространство-время в топологии такая есть примат картиночка я взял из фоменко и вот видно как рядышком сели вы просто смотрите из настоящего по потоку времени переходите в прошлое считать как вот это протыкание какая энергия потратиться а также посчитает энергия которая можно завернуть пространство-время в принципе подсчеты и есть формулы есть можно считать но есть неприятности да я вначале таки лирические отступления сделаю лирическое отступление у нас это была такая у нас учительства в маша сметана рудольфа на-на закончила московский мэр сердце стало

нам девятиклассникам приближённое вычисление но она молодая пришла только из университета московского представляете чудо для челябинска математик и нам школьникам собрались самые сливки со всех школ и я хотелось нас вытолкать как можно больше и вот она расскажет нам как он там опционную теорему о том говорит давайте я вам расскажу про тендеры и на кусочки доске рассказывает нам про тентовый называла это она лирическое отступление вот эти коммерческих наступлю отступление яму работе стал математиком потому что она просто вот развернул такие горизонты и вот посмотрите на че ты о чем идет речь вот что такое прорывает пространство вот наше пространство я изображаю прорваться выйти в пятое измерение вот показана к а теперь от показывать на временно то что модно кротовые норы интернет и youtube забиты телевидения забит вот этими сказками брок кротовые норы их по разному называют ими это трёхмерное то вот так вот видите да по картинке видна разница огромная а вот когда вы вернетесь вот вы вернетесь это значит назад прицепиться а вот трехмерная кротовая нора вот как оно будет выглядеть тоже не то что по другому смотрится здесь потеряна одна связанность здесь сериала связность пространством так вот как раз tip-top ой как торт tip-top 8 седьмом году напечатали статью furor она произвела огромный кто только 20 лет июня перепечатывала не расхваливал и вот это и скажем так чушью забита все что только можно невозможно машина времени и кипа торна почему только два человека решились об этом сказать нос фея об этом решился сказать и это дорого обходится надо сказать что 1 американцы я успел предупредить и он свою книгу образ отверстий параграф есть еще российский один физик он отказался это делать и надо сказать по-прежнему вот даже книга вышла недавно dehaan эти сказки про эту вашего времени рассказы она не возможно достаточно вот такой картинку взять сейчас я покажу вот видно вот это изображено вот это плоскость это пространство во время вот кротовая нора изображена вот такой дужкой световые конусы значит вы можете двигаться только световых конусах внутри чтобы вернуться во времени должны совершить вот такую петлю это деталь до этого додумался световые конуса пространстве-времени в каждой точке есть четырёхмерные конус вот о сила это направление времени мы должны всегда вина внутри con esa двигаться чтобы или смотрите световой конус как повернулся вот она бак лег перевернулся вверх тормашками и назад пришел если посмотрите работа торна и а также новикова и иттена века они берут что и слева и справа у них пространство плоская и они пытаются пройти по дыре и там надо кувырнуться и конуса развернуться но когда вы читаете что у них написано они говорят о синхронизации времени по короткий код так готовый норе вы не сможете там развернуться и сохранить синхронизации это элементарно самое элементарное соображение это принцип эквивалентности энштейна нет там синхронизации и не спасает то что вот некоторые авторы пытается вторую дырочку вот эту до я не сильным гравитационным полем нагнуть но тогда вы тоже потеряете синхронизация и есть второй изображением второе соображение такое что все написано на цилиндре на четырехмерном цилиндре считается что вверх и низ можно склеить скажите как склеить я геометрии топология доктор покажите никто не показывает как это склеится вот об этом написал константинов москве такой из хорошей физик константинов вот только двое решили сказать что-то ерунда хайкинг когда tip-top на юбилей 60 лет перед хокинга выступал и стал с восторгом рассказывать хокинг никак не отреагировал я специально смотрел протокола этой конференции то есть хотим понимал что это нет то итак тем не менее вот тот вариант который я предложил так называемый четырёхмерные кротовые норы у меня самого он вызвали сомнение а именно все зиждется на я как называемый мире события миньковского что такое мир событиями гуковского другое название пространство-время впервые это слово все-таки усама мельковская появляется в истории не буду этого термина вдаваться но все-таки именно от него это пошло потому что мир событий не совсем понимался ионыч писал там по-немецки вот этот дефис у него появлялся и стали после него видимо переводя до другие языки писать надо правда русски пространство-время каждая. это событие но на этом прост в этом пространстве время сразу присутствует и настоящее и будущее прошлое и вы их видели не может и на этом построена вот эта машина времени вы выписываете траектории в пространстве-времени и возвращаетесь назад оставаясь 3 световых конусов ну про естественной машину времени все понятно но по крайней мере вот я вам говорил что через два года в аспирантуре я нашел эту формулу оказалось что это либо очень огромные grid я брал плоскую топологию это означает нет никаких дырок огручик ничего какой там либо огромный границы он ее поля который

путешественника раздавят ли мы там вообще какие-то странности проявляется который заставляет вас по петле двигаться по всей вселенной у деда ли который открыт кстати кори путешествие через всю вселенную сразу возникает вопрос за счет какой энергии вы будете двигаться это энергия надо сказать запасы топлива не я колоссальный один фар такой посчитал чтобы разогнаться и вернуться через всю вселенную нужно топливо в ракету помог в 10 раз больше чем масса земли и вот чем является мне собственный проект то что вы проживаете дырки и приклеиваете это означает вытеснить и события также появляются новые события но это противоречит самой идее абсолютного пространства времени 2 неприятность вы выходите в какое-то пятое измерение я его называю гиперпространством что это заточки цепи впервые это сделал калуцы и клейна они придумали 5 мерную теорию где сразу появлялось и гравитация и электромагнетизм никто не задумывался не штейн эффектов там что это за новое тут по крайней мере я так и нигде это не видел вот эти противоречивости неясности мне не нравится другое момент это что вот в мире когда существует масса вариантов пространства-времени и человек силой разума себя помещает в нужном варианте где машина времени работы вот такой вариант я разрабатывал где-то в 90 там 5 или каком-то году такая статья у меня появилась но рассказать вот про публикации в журнале попытки печатать что не то что я рассказываю московских журналах академия наук приводит к тому что просто статье возвращает вот я послал однажды свою 1 может и большую статью разбиты на день части журнал жертву я горжусь не ее вернули с бешеной скорости в это время видимо был в редакции лившиц академику тот который ландау и лифшица статья поступил одной статье стоит день когда она принята и потом стоит дата когда мне прислали ответ это пошло она и полдня не пролежала лившиц провернул посмотрел рецензии такая статья не имеет ни какого научного значения самое интересное мне рецензию прислали spot вселившихся так что я горжусь у меня есть автограф лишиться а вот невозможно нигде вот такие вещи печатать но вот было напечатано тем не менее то что я только что сказал довольно демократический журнал это известие муза физиков томске и надо добавить что там моя первая статья которая получила положительную рецензию было рецензент я узнал как пересидеть владимиров подписывал и про давилась его подпись и когда отрывали видимо вот этот продавленный было видно так хорошо было видно что ладдер мы потом с ним познакомились и он не открыл путь вот публика той теории гравитации я очень ему признателен и так как нет я предложил какой-то проект он доведён до идеальных расчетов и все напечатано книжечки вот она в москве нет в омске она напечатана зывается физика реальности вот там все эти формулы показаны как как все прочитав как закрутить крок проткнуть как запустить это машина времени но мне она не нравится я понял почему мне не нравится что каждый раз я должен прийти к выводу что не хватает человеком вот в этом варианте когда закрутить ну вроде человек может казалось все это закрутить но вы представляете вот человек как бог он должен совершить какой-то вот потрясающие селезнев который мы знаем изменить его форму геометрию человек мог поэтому я понял что нельзя дальше строим теорию машина времени если я не буду учитывать человека мы вот где-то шестнадцатом году я решился начать сначала и вот тут надо делает по другому то есть обязательно должны присутствовать людей сознания хотя никто не знает что такое сознание пришлось разрабатывать так вот нужно дать определение времени где обязательно если нет людей нас нет времени и замечательной книжечка хайд акирой там есть объяснение что что такое присутствие человек должен вот отдавать себе отчет что он присутствует депрессирует во вселенной что такое присутствие как это описать математически по цвету я начинал как записать математически вот это чувство что я присутствую во вторых нужно строить это определение времени сразу исходить что это сплошной идеализм мир вселенной строят люди им надо чтобы было комфортно жить это нужно было математически тоже описать можно ли это можно казалось для этого пригодилась статья с you every эта вот знаменитая статья чего эверетта ее можно совершенно переписать я ее переписала оказалась там просто написано как люди творят вселенная естественно она ветвиться естественно ветвиться ну и наконец мысли очевидно если человек мыслит а это нужно как-то математически это же записать и тут проще здесь помог как раз пенроуз и хаммеров вы нарушили этот книги знаменитого них про пытается создать теория сознания вот мысли на самом деле это числовой код такой 0 и единицей как-то записанные в нейронах ирепп роза хаммеров описано как это делать вот самое интересное что со смертью казалось код должность исчезнуть так ли это если кот исчезает то получается что отношения человека и вселенной но вот буквально такие мы

тебя не знаем мы теперь но у как раз идеализм гегеля сегодня в предисловии говорил что какие-то сигналы из будущее человеку поступает вот тебя каком классе до сих пор как объяснить почему я в девятом классе придя библиотеку дома офицеров попросил 5 недель деле им не дали 20 какого-то года издания такая толстенная книга философия природы я пытался читать зачем-то вот как раз это четырнадцатом году я об этом вспомнил снова туда залез продавал науку логика и вот то что пытаюсь изложить на самом деле идет от гегеля теперь я хочу пояснить о чем что я хочу сделать вот есть люди вот их мысли можно закодировать но подробности пенроуза смотрим вот это двоичные коды эта информация и появилась красивая теория она называется $adsl\ ft$ соответствие балдахины где-то 99 1999 году о чем речь здесь такая что у нашего мира есть граница вот нашли рвите до вселенная у нее есть какая-то абстрактная граница другое изображение мир внутри цилиндра цилиндрик это граница вот на этой границе там какие-то квантовые поля частицы и их поведение определяет содержание вселенной эта связь 2 теории комфортный квантовой теории поля и на границе и в плоском мире в плоском мире миньковского и теория струн внутри через uid гравитация там гравитация черной дыры ну и так далее весь комплект общей теории относительности есть понятие сцепленности час тельцам степеней свободы я люблю слово сцепленность потому что чаще пишут запутанность запутанных поводок все запутывает вы сцепили какие-то частицы до границы и сразу что-то поменяется внутри во вселенной вот яркий пример это есть такая формула ариму такая ное вот смотрите вот эта граница тут изображена граница как плоскость а вот вот это справа это пространство время ну конкретно вот такой одесситы русское пространство время размерности $2 + 2$ не будем и вот а вот на границе там ему скажу так грубо где а частички и вот выделяется такая и как бы их соединяет 1 владеет вот этой частью мне а вот частичка бы владеет внутри а вот тут граница владения она там есть две точки и здесь в мире появляются границы и сцепленность вот формула каюта коллега если это сцепленность идет к нулю здесь другой вариант изображения я не буду объяснять хитрая геометрия как вот надо оставление

здесь и один здесь тонкое другой разные модели пространство лобачевского о звезде сферы справа слева вот это минимальная граница вот если s идет к нулю то пространство взрывается на два куска вот я потом интересовался это сделает что я разорву пространство на бесконечное число одинаковых кусочков от инсульта что можно сделать маленький код на границе абстрактный код нас 0 единицы до границ а что это за границы где она находится это абстрактная бесконечно удаленной границ вот видите на предыдущие рисуночки я обещаю головки нечто похожее есть у пенроуза но он как-то так поскольку он все-таки уже великий сэром был он позволил себе написать он может уже писать все что захочет тем более сейчас ему дали нобелевскую премию я думаю не зато уж там сингулярности кстати когда я студентам читал спецкурс по сингулярности вот это вот знаменитая теле на перо за и хокинга в одном месте я споткнулся и понял что это горам доказательства там не все чисто перепроверяем кстати галя генинов вел жесткую переписку с холдингом как раз по поводу этих теорем конце концов он к ним придирался и один ему отвечает вот это головки это пенроуз я я не ссылаясь на авторитет но откуда эти мысли твите да вот граница воткнули единицы меня эти единицы яблоко падает гравитация значит разорвать весь мир ну я покажу как можно разливать вперед забежим посмотрите вот башню до времени совсем другой вариант вот диаграмма миньковского пространстве-времени вот после банк земля вот так здесь и плохо иисуса Христа тут что ты вот пошли наша эпоха где мы сейчас с вами находимся что я хочу сделать я хочу во первых весь мир разбит на такие прямоугольнички вечера а потом вообще все прямоугольнички оторвать друг от друга это изменение формы пространства-времени как это делается это легко делается пеших это пишутся так называемая хитрая топология которая меняется ну вот нельзя сказать со временем это как раз то что делаем человек тот кто кнопку нажимает тот кто бы ты то менять и вы все разорвете дальше 2 второй момент вы переставляете эпоху креста вот сюда рядышком ставите но опять можно их вытяну чтобы похожа была и вот появляется вот то самое четырехмерная кротовые на ранд тут неважно куда упадете любом случае это иисус христос все ученики чужь или не чужь бред или не бред это общая теория относительности то абсолютное пространство и время прошлое будущее настоящая есть раса но есть то я просто меняю местонахождение комбо ставлю ты пожалуйста я попал посмотрю кто такой иисус христос сам послушай его а затраты легко считаются затратай энергии легко считается это посчитано был еще дела ст и воды как делается

rather почему меняется пространство не объяснил уже mall gazette а вот она разум на границе кодирует и вы поменяете мир вот пожалуйста форма горю такой она тут на два куска разрывают замечательно статье такая магия просто ну вот такое наслаждение получил когда я читал здесь то что брызгал более страшная работа вот как топологию сделать которая насти квадратики это легко как снова склеить это легко как переставить это легко я кодирует что кардеры на границе вот это нужно сделать так что вот задача задачу видимо очень тяжелая у меня не хватает знаний о quantum theory им пуля я ее читал где-то 70-ые годы за это время много поменялось но в принципе это можно сделать принципе это можно сделать теперь время вот я пытаюсь дать время смотрите должен увязает с людьми время это способ существования системы тем как у энгельса по системы который вызывается семьями людям не тут допускающий определенной через до вами разберем на детей и поколения четное число поколения дальше среда обитания нет корее поколение образуют исторические эпохи у них конкретная среда обитания я объясню чем дело вот каждая это пытался объяснить объясняя популярно один присутствующих студент воспринял это серьезно решил что у меня крыша съехала и теперь в интернете в омске об этом пишет что этот профессор крыша съехала не снес ахиною страшные что окажется мы находимся земля это блин стоит на четырех со на штатный коллекции говорил говорил следующие эпохи когда дела как учения блин там слоны это было самое величайшее достижение тогдашней науки и боль это вам скажу если кто-то тогда попытался это доказать взял лопату и стал блин копать то он точно так копался до спины отдавай сумов ну надо сказать что у меня действительно посмотрели дико это как раз из каждой исторической эпохи своя среда и вы никогда не сможете вот мы смеемся вот какие они смешные древние какой бред несли это выдающиеся люди придумывали и т.п. это гений и поэтому нельзя как-то так вот думает что это полный бред мы же в той эпохи не были мы смотрим с точки зрения своей эпохи вот представьте существует какой там 40 какой-нибудь вверх и там какие там совсем другие теории вот все что мы тут пишем и говорим кстати каким смешно да мы им тоже самое сообщаем проблем 4 словно только называется у нас стран это время машина времени вот я показываю склейка как значит упорядочения почему люди имеют поколений вот тоже вопрос почему индивидуальное сознание конечно почему смерть есть как с точки зрения теории информации с точки зрения информации это передача кода человеку у нее в голове был кот он умирает мы уверены что код умирает вы уверены что это так я чуть чуть позже покажу что за этим кодом делается вот выстраиванием линейку у нас самим время линейны да это очень просто математически терем и carmela любое множество можно вполне упали так я должен уже еще минут 10 и время мой стекает вот показано как это он порядочно происходит другое воспринимаю как вся склеилась но опять это классическая парадигма квантовый парадигме все по-другому итог время это люди есть люди из вселенной нет людей нет вселенной вот доказательством представьте что все люди погибли все никого нет вопрос а вселенной осталось конечно все закричать да нет кому вы предъявите факт что вселенная продолжает существовать никому поэтому вы не можете никогда доказать так второе что вот человеческом зародилась реферат нравится это развлечение революции так бы как вы докажете что до того как человечество у вас появилась вселенная существовала

на машине времени суда прилетите хорошо слетали на машине времени привезли телевизор там кино не знаешь что и в том что я текстур занимался прошлое не устанавливаются вот юрий александр лебедь здесь присутствующие он это хорошо знает у него красивая слотом склейки у меня немножко другая технология и было написано книг вот я на неё ссылаясь называется на многовариантной история россии нет нет тут никакого истинного прошлого лавика кричать и точнее вас и рассказами чайка и теорема а не с точки зрения теории алгоритмов посчитали оказалось есть там сложный алгоритм там чрезвычайно сложной оказалась что попытка восстанавливает прошлого просто обречена с точки зрения теории алгоритмов нельзя а поэтому все что написано учебников историков это просто сказки я люблю называть историка сказочником в нашем университете они уже перестали обижаться вот-вот данный момент если вы рассуждаете получает что код человека то есть то что у него закодировано уверен г н ролл и хаами росла вот код значит делаем то что вот нейрона состоят из микротрубочек вот они предмет такой формы этого трубочка может быть двух состояниях следовательно вот состояние микротрубочки квантовые состояния нас любая фантазия имеет такой вид любая ваша мы среде и вот она вот код все эти меры пересчитали вот там микротрубочки видно как они любой компьютер если вы стираете информацию

была информация вы обнулили то выделяется энергия вот такая энергия я посчитал 10 в 1с то нейронов голове димеры здесь 18 если по каждой теме rel бикса 3 выделяется немного энергии да ну это происходит за 10 на 11 секунды мощных выделения энергии 10⁹ джоуля секунду это взрыв столько энергии выделяет один килограмм тринитротолуола разрушение до 10 метров если это здание так человек умер все для терлась и что это такой взрыв но никто это не наблюдает слитно код куда-то уходит есть принцип мандалора любой процесс который стирает бит в одном месте должен перенести то же самое количество информации какое-то другое то есть мир человека до отход то его все последние мысли они не исчезают я не могу сказать где они не квантовая теория об этом не говорит [музыка] не мой расчет не показывает если люди с другие ну вот эта красивая идея время подходит я пропущу этот новый проект машина времени я показал но контакт будет работать

теперь как доказать что есть параллельный мир мы в параллельный построить дело в том что в или точно писал замечательную книгу в английском название фабрика реальности там у него теневые частицы в этих параллельных мирах они знают практически не взаимодействовали на польшу такая была аспирантка омского университете она написала диссертации присущ здесь скал сандов очень помог найти ей ведущая организация это единственная диссертации в россии опор пути в мире где рассказывается о призраках вот она связала эти теневые частицы и дуйте то есть из параллельного мира с призраками частицами это частицы которые тензор энергии-импульса равен нулю а вот так вот такой напрямую без перу не 0 и она показала что они можно обычная частица производим а действие с такой призраком показывает как это ее диссертация осталось простое если я имею вещество наши и прозрачное а на самом деле весь космос проник привычными частицами такая была замечательная статья 80 тонн первом году итальянском журнале так вот aldo hanoi за skin это авторитет и сейчас показали что когда рождается запутанная пара то они соединяются трехмерные кротовые норы у нас иные меры у нас если вы прозрачные вещество вселенной параллельный запутать и с нашим родиться четырехмерное и вы ушли в прошлое [музыка] так что легко можно параллельный мир есть ну вот как появляются сознание внешний мир это сплошной гегельянство я это пропускает на самом деле физики недооценивать гегеля telos вы просто не понимаете что это такое если тут сила сама присутствует не обижайтесь физики недооценивают если аккуратно читать гегеля то там просто эта теория космогоническая теория науки логики с этого начинается как мир появляется если взять балдахин о объединить с прозрачности из гегелем вот как появляется меж сознание из ничего видеть или пожалуйста плен а это знаменитая какая красавица модель там по моему шведская вот как рождается мир но и совсем немножечко как помощи классовой физики описать те же самые параллельные миры это супер пространство уилера состоит из трех мерных геометрий я беру там так называют село мы постим geometry им беру их пакет каждая составляющие то есть параллельный мир но вот вот она видно как это вот знаменитый картинка из книжечки уилера это я взял другие картиночки вот пространство-время рождается тут параллельно появляется видно например сколько их может быть миров это горные пики крис красивое такое название вот они исторические эпохи они сами по себе существует уилер написал для них вот такой волновую женски 2 такие два состояния потоки транс триллера цепляете и вот она машина времени заработал есть неприятность я на этом заканчиваю машина времени который вот здесь я изложил она вероятно это означает что если вы захотели поехать пушкину то попадетесь вероятность я почитал кредит одна миллионная вероятность что вы попадете тушки вы можете попасть куда попало ну такого квантовая механика да там все вероятность ну и совсем последнее дело в том что вот я математик и за признаю казалось только формальные вещи и формальные познание на самом деле немножечко не так считаю что в науке очень важно образное мышление и очень важно читать поэтов и лучше всех все-таки времени пишет лариса миллер ну кто захочет то найдет почитает ясли лично не знаком как она мне прислала как-то лет двадцать назад дожди свои книги стихов я знаком с ее мужем он физик сын знаменитого из шулера которая делал ядерное оружие вот и он мне рассказал про ее стихия потом нашел почту и написал письмо выезда это толчок не удивительно она чувствует что такое время

32.1.6 Mathematical Ideas of Space-time by Guts (??)

(тут технические указания на его книгу, мб когда-то продумаю что-то там.)

32.2 Deeper understanding of electrodynamics

32.2.1 Other Typical Properties and Ideas of Other Electrodynamics Models

(другое, что тоже важно указать. подробно все важные модели во 2й 1й части будут, не тут)

О некоторых других моделях

О комплексных векторах и электродинамику через них

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}.$$

В одной статье это было повсюду, наверняка, много где, но пока это для меня не тот метод, которым я владею, потому что нет в нем необходимости.

О монополе Дирака - линии электрических диполей d

(тут основная формула)
(тут основная идея этой модели)

$$d\mathbf{d} = e\mathcal{O}ds,$$

(место картинки)

$$d\mathcal{A}_0 = \frac{e \, ds \mathbf{O} \cdot \mathbf{r}_s}{r_s^3} = \frac{1}{|\mathbf{r} + s\mathcal{O}|^3} (\mathbf{r} + s\mathcal{O}) \cdot \mathcal{O} e \, ds$$

далее преобразуем с умом (???)

$$\mathcal{E} = \frac{e}{r^3} \mathbf{r}.$$

(там у Тонга в калибровочных полях про это написано, добавлю из него суть!)

О монополе Дирака - линии магнитных диполей m

(тут основная формула)
(тут основная идея этой модели)

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}) = \int d\boldsymbol{\mu} \times (\mathbf{r} + s\mathcal{O}) \frac{1}{|\mathbf{r} + s\mathcal{O}|^3}$$

(картинка и слова для пояснения)

$$\mathcal{A}_\phi(\mathbf{r}) = \int \mathbf{m}(\mathcal{O} \times \mathbf{r})_\phi \frac{1}{|\mathbf{r} + s\mathcal{O}|^3} ds = \mathbf{m} \int_{\pi}^{\theta} \frac{r_\perp}{\sin^2 \theta'} r_\perp \frac{\sin^3 \theta'}{r_\perp^3} d\theta' =$$

$$\Phi(\theta) = \oint \mathcal{A} \cdot d\mathbf{r} = -2\pi \mathbf{m} [\cos \theta + 1]$$

$$\Phi(0) = -4\pi \mathbf{m}$$

Такая дуальность магнитного и электрического полей, действительно, имеет место, т.е. конструктивно нашли конкретное выражение для вектор-потенциала, дающего магнитное поле монополя Дирака.

The Theta Term by Tong

(пока в записи про калибровочные поля об этом. потом выпишу суть сюда.)

The Topological Insulator**A Mirage Monopole****The Witten Effect****Why θ is Periodic****Parity, Time-Reversal and $\theta = \pi$** **Количественные оценки**

Оценим типичные явления и величины в электродинамике.
(потом посмотрю, пока не до этого.)

Оценка электромагнитного поля земли

научимся ориентироваться в этом.

Об электродинамике в искривленном пространстве

(суть выпишу из раздела в ЭД про это, пока там пишу про это)

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}) F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$
$$\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0.$$

(тут подробно указываю, почему так?)

(???)

Или:

$$F^{\alpha\beta}_{;\beta} = 4\pi J^\alpha$$
$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0$$
$$ma^\alpha = F^{\alpha\beta} qu_\beta$$

О способах решения

(?!!!! напишу все, что знаю обзором, там много разного есть.)

32.2.2 Constants in Electrodynamics and Typical Values of Quantities**О заряде электрона**

(об экспериментальных методах определения?)

О массе электрона

(об экспериментальных методах определения?)

Об электромагнитном радиусе часты

(?!?! прочитаю еще раз!!)

Электромагнитный радиус частицы - это такой радиус, на котором электростатическая энергия частицы равна ее массе покоя. Он равен

$$r_e \equiv \frac{e^2}{mc^2},$$

эта величина имеет размерность длины и называется электромагнитным радиусом. В самом деле, определение можно переписать в виде $\frac{e^2}{r_e} = mc^2$. Для электрона $r_e \approx 2.8 \cdot 10^{-13}$ см.

(?? нужно это?)

32.2.3 Estimations in Electrodynamics

(It should be useful, so I'll add later)

32.2.4 Overview of Formalisms of Classical Electrodynamics

Конструкция классической электродинамики в общем случае

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

Получается из требования для $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$ локальной калибровочной инвариантности: $\psi \rightarrow e^{-ie\alpha(x)}\psi$, $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha(x)$, $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu := \partial_\mu - ieA_\mu$.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -e\bar{\psi}\gamma^\nu \psi; \quad (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi = 0$$

А эрмитово сопряженное дираковское уравнение:

$$i\mathcal{D}_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0, \quad \mathcal{D}_\mu \bar{\psi} \equiv (\partial_\mu + ieA_\mu)\bar{\psi}$$

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi$$

Домножение уравнения Дирака на $(-i\gamma^\nu \mathcal{D}_\nu - m)$ дает уравнение Клейна-Гордона в присутствии векторного поля:

$$\left(\mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu - \frac{ie}{2}\gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m^2 \right) \psi = 0,$$

Об электродинамике на языке дифференциальных форм

(почти все указания на это пока только тут)

О уравнениях и параметрах на языке дифференциальных форм

(тут про уравнения)

$$F := E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt + H_x dy \wedge dz + H_y dz \wedge dx + H_z dx \wedge dy$$

(??? почему так определяется???)

Приравниванием дифференциала этой формы и приравняв его к нулю, находятся уравнения Максвелла. Тут коэффициенты при $dx \wedge dy \wedge dz$ дают одно уравнение Максвелла, утверждающее отсутствие магнитных зарядов:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathcal{H} = 0$$

Коэффициенты же при $dx \wedge dy \wedge dt$ дадут закон Фарадея:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

О решениях в рамках форм (???)

(нужно будет - разберу.)

32.2.5 Field Strengths, Currents, Energy, Potentials, Polarization

(потом, возможно, разделю по паре подглав. не особо много потребности знать эти детали)

Электрические и магнитные поля

$$\mathbf{E} := -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \quad \mathbf{H} := \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

Постоянные поля: $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. А если еще поле и однородное, то

$$\varphi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H} \mathbf{r}],$$

это доказывается проверкой через формулу $\operatorname{rot}[A, B]$ (?? забыл, как?).

Часто калибровкой выбирают

$$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0,$$

что то же, что и раньше, если добавить к вектор потенциалу ∇f , $f = -xyH/2$.

Типичное преобразование из определений:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

$F_{\mu\nu}$ тензор напряженности электромагнитного поля

Основные формулы $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$$

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}_x & \mathcal{E}_y & \mathcal{E}_z \\ -\mathcal{E}_x & 0 & -\mathcal{H}_z & \mathcal{H}_y \\ -\mathcal{E}_y & \mathcal{H}_z & 0 & -\mathcal{H}_x \\ -\mathcal{E}_z & -\mathcal{H}_y & \mathcal{H}_x & 0 \end{pmatrix}$$

$F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$ очевидно из определения. Компоненты, содержащие временной индекс:

$$F_{0\alpha} = \partial_0 \mathcal{A}_\alpha - \partial_\alpha \mathcal{A}_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}^\alpha}{\partial t} - \nabla_\alpha \mathcal{A}_0 \equiv \mathcal{E}^\alpha$$

(? почему иногда там $1/c$?? что с системой единиц?)
Пространственные же компоненты

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathcal{A}_\beta - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha = -\partial_\alpha \mathcal{A}^\beta + \partial_\beta \mathcal{A}^\alpha,$$

поэтому (?)

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta} = -2(\text{rot } \mathcal{A})^\gamma = -2\mathcal{H}^\gamma$$

Значит, (?)

$$F_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}^\gamma$$

Тензор напряженности является калибровочно инвариантным:

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}'_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}'_\mu = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \partial_\nu f + \partial_\nu \partial_\mu f = F_{\mu\nu}$$

ведь $\partial_\mu \partial_\nu f = \partial_\nu \partial_\mu f$.

и что из этого следует????

О дуальном тензоре напряженности $\tilde{F}_{\mu\nu}$

Дуальный тензор напряженности определяется как

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\mu'\nu'} F^{\mu'\nu'}.$$

Смысл его в том, что (???)

Дуальное преобразование соответствует переходу

$$\mathcal{E} \mapsto \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} \mapsto -\mathcal{E},$$

ведь $\tilde{F}_{0\alpha} = \frac{1}{2} \epsilon_{0\alpha\beta\gamma} F^{\beta\gamma} = \frac{1}{2} (-\epsilon_{\alpha\beta\gamma}) (-\epsilon_{\beta\gamma\alpha'} \mathcal{H}^{\alpha'}) = \mathcal{H}^\alpha$ и $\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{-\epsilon_{\alpha\beta\gamma} (-\mathcal{E}^\gamma) + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{E}^\gamma\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{E}^\gamma$.

С ним уравнения движения

$$F_{0\alpha} = i\lambda \tilde{F}_{0\alpha}$$

$$F_{\mu\nu} = i\lambda \tilde{F}_{\mu\nu}$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv 0$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\mu'\nu'} \partial_\mu (\partial_{\mu'} \mathcal{A}_{\nu'} - \partial_{\nu'} \mathcal{A}_{\mu'}) \equiv 0$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = i\lambda \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv 0$$

Параметры из $F_{\mu\nu}$

Обсудим переход к другим параметрам из тензора напряженности, которые на практике часто хочется знать

Сила Лоренца из тензора напряженности: (????!!!)

(?? интересно!)

суть тензора напряженности

A_ν вектор-потенциал

Основные формулы вектор-потенциала

$$A_\mu = (A_0, A_\alpha), \quad A^\mu = (A^0, -A^\alpha),$$

тут каждая компонента - скалярная функция x, y, z, t . По сути это просто обобщение скалярного потенциала и некоторого вектора, из которого определяются электрическое и магнитные поля.

Например, для покоящегося заряда:

$$A_0(r) = -\frac{e}{r}, \quad A \equiv 0.$$

(?? еще раз, почему так??)

Суть вектор-потенциала

(описание того, зачем он и что с ним делать?)

О запаздывающих потенциалах

(пока ксл выгрузка, потом суть их пропишу)

(??? мб тут идея сделать из нерел уравнений релятивистские??)

Для $j^\nu = \delta_\lambda^\nu \delta(ct) \delta(\mathbf{r})$, $\lambda = 0, 3$, находим

$$-\partial^2 \mathcal{G}(t, \mathbf{r}) = \delta(ct) \delta(\mathbf{r}), \quad -\partial^2 \mathcal{G}^{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) = \delta(ct) \delta(\mathbf{r}) \mathcal{P}^{\mu\nu}$$

что обычно называют функциями Грина. Из нее

$$A_{\text{ret}}^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^4x' \frac{j^\mu(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - c(t - t'))$$

(абзац про неоднозначность вект пот. добавлю, да!.)

О калибровках вектор потенциала

тоже потом разберусь лучше.

j ток

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$$

$$j^i = (c\rho, \mathbf{j}) \equiv \rho \frac{dx^i}{dt}.$$

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

Ток смещения

$$j_{\text{см.}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

С помощью него

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} d\mathbf{f} + \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} d\mathbf{f} \quad \rightarrow \quad \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) d\mathbf{f},$$

(?? потом мб это удалю, посмотрим.)

О пропагаторе фотона (!!!!!)

Решение уравнений Максвелла для вектор-потенциала дается пропагатором Фейнмана, который имеет вид:

$$\mathcal{A}^\nu(t, r) = \frac{4\pi}{c} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \mathcal{P}^{\mu\nu} j_\mu(\omega, \mathbf{k}) \frac{1}{k^2 + i0} e^{-ikx}$$

Под интегралом у k_0 два полюса, сдвинутых вниз и вверх: $\frac{1}{k^2 + i0} = \frac{1}{2k} \left\{ \frac{1}{k_0 - k + i0} - \frac{1}{k_0 + k - i0} \right\}$.

При вычислении Фурье-преобразования следует, во-первых, учесть закон сохранения заряда $\partial_\mu j^\mu = 0$, или $k_\mu j^\mu = 0$, так что

$$\mathcal{P}^{\mu\nu} j_\mu = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) j_\mu = -j^\nu$$

и нам в дальнейшем достаточно будет провести рассмотрение лишь, например, для временной компоненты - скалярного потенциала, а пространственные компоненты векторного потенциала будут вычисляться совершенно аналогично.

(!!!! скореллирую с разделом по КТП!!! там прямо похожий очень раздел есть!)

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля (!?)

Опишем основное в ТЭИ электромагнитного поля.

Основные формулы и суть ТЭИ электромагнитного поля

$$T_{\mu}^{\nu}{}_{\text{em f}} = -F_{\mu\lambda} F^{\nu\lambda} + \frac{\delta^\nu_\mu}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda}$$

В компонентах имеем

$$\rho = \frac{E^2 + H^2}{2}, \quad S = E \times H, \quad \sigma^{ij} = E_i E_j + H_i H_j - \rho \delta_{ij}$$

(потом напишу, в том числе из Ландау)

(???? я хз, у Проена умные мысли про это, я не на этом еще уровне, я еще ничего не усвоил.)

$$T^\mu{}_\nu = F^{\mu\rho} \partial_\nu A_\rho + \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\nu \Psi + \delta^\mu_\nu \mathcal{L}.$$

It is conserved on the index μ , but not on ν , not symmetric and not gauge invariant. The situation can be improved by treating fermion terms as in Sec.2.7.2FP and then adding $\Delta T^\mu{}_\nu = -\partial_\rho (F^{\mu\rho} A_\nu)$ in accord with Sec.1.3FP. The final result is the gauge invariant symmetric stress tensor:

$$\Theta_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho + \frac{1}{4} \bar{\Psi} \left(\gamma_\mu \overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{D}_\mu \right) \Psi + \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Канонический тензор энергии-импульса поля

Напомним, что согласно теореме Нётер, $\frac{dS}{da}|_{\text{field}} = \int d^4x \partial_\nu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a} - \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial a} \partial_{\lambda'} \Phi \right) + \mathcal{L} \frac{\partial x^\nu}{\partial a} \right\}$. В нашем случае полевые переменные $\Phi \mapsto \mathcal{A}_\lambda$, параметр преобразования - сдвиг координат пространств-времени Минковского при трансляциях: $a \mapsto a^\mu$ при $x^\nu \mapsto x^\nu - a^\nu$, и $\mathcal{A}_\lambda \mapsto \mathcal{A}_\lambda$ для поля, так что

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial a^\mu} = -\delta^\nu_\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{A}_\lambda}{\partial a^\mu} = 0$$

Поэтому канонический тензор энергии-импульса векторного поля

$$T_{\mu}^{\nu}(\text{can.}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\nu} \mathcal{A}_{\lambda}} \partial_{\mu} \mathcal{A}_{\lambda} - \mathcal{L} \delta_{\mu}^{\nu}$$

Для электромагнитного поля $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi c} F_{\nu\lambda} F^{\nu\lambda}$, $F_{\nu\lambda} = \partial_{\nu} \mathcal{A}_{\lambda} - \partial_{\lambda} \mathcal{A}_{\nu}$,
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\nu} \mathcal{A}_{\lambda}} = -\frac{1}{16\pi c} 2 F^{\nu'\lambda'} \frac{\partial F_{\nu'\lambda'}}{\partial \partial_{\nu} \mathcal{A}_{\lambda}} = -\frac{1}{4\pi c} F^{\nu\lambda}$, в итоге,

$$T_{\mu}^{\nu}(\text{can.}) = -\frac{1}{4\pi c} F^{\nu\lambda} \partial_{\mu} \mathcal{A}_{\lambda} + \frac{1}{16\pi c} F^2 \delta_{\mu}^{\nu}$$

Суммируя вклад в действия поля и его взаимодействия с зарядами, находим калибровочно инвариантное выражение для симметричного тензора энергии-импульса взаимодействующего поля

$$\frac{d}{da^{\mu}} (S_{\text{field}} + S_{\text{int}}) = \int d^4x \partial_{\nu} T_{\mu}^{\nu}, \quad T_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{4\pi c} F^{\nu\lambda} F_{\lambda\mu} + \frac{1}{16\pi c} F^2 \delta_{\mu}^{\nu}$$

Для замкнутой системы частиц и поля в силу трансляционной инвариантности сохраняется энергия-импульс:

$$\partial_{\nu} \{T_{\mu}^{\nu} + T_{\mu}^{\nu}(\text{part.})\} = 0$$

Обзор применений и важность ТЭИ электромагнитного поля (!!!!!)

Укажем, как применять ТЭИ ЭМ поля.
 (пока не владею им. хз, как!!)

Появление

(мб потом выпишу, как ввести его, пока не уверен в важности упоминания этого)

E Напряженность электрического поля

Суть

пропишу, что это форма или вектор, это всё

Типичные ошибки в понимании электрического поля

нпр считать вектором.
 я хз еще какие

Напряженность электрического поля в искривленном пространстве

(? пока не пойму, почему так?)

введя 3-векторы $\mathbf{E}, \mathbf{D}$ и антисимметричные 3-тензоры $B_{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\beta}$ согласно определениям

$$E_{\alpha} := F_{0\alpha}, \quad B_{\alpha\beta} := F_{\alpha\beta} \\ D^{\alpha} := -\sqrt{g_{00}} F^{0\alpha}, \quad H^{\alpha\beta} := \sqrt{g_{00}} F^{\alpha\beta}.$$

(?? почему именно определения через корень из нулевой компоненты метрики???)

H Напряженность магнитного поля

Суть

пропишу, что это форма или вектор, это всё

Получение из тензора напряженности

(мб в выше пар перенесу, пока выделяю как то, что важно понять)

Доказательство, что не вектор (??!!!)

(так и не понял и забил)

Получение из тензора напряженности

приведем эти формулы, чтобы под рукой иметь.

(?? почему там $1/c$ выходит в статье про ЭД в искр пр вр?)

Типичные ошибки в понимании электрического поля

нпр считать вектором.

я хз еще какие

Напряженность магнитного поля в искривленном пространстве

(? пока не пойму, почему так?)

вводя 3-векторы $\mathbf{E}, \mathbf{D}$ и антисимметричные 3-тензоры $B_{\alpha\beta}$ и $H_{\alpha\beta}$ согласно определениям

$$\begin{aligned} E_\alpha &= F_{0\alpha}, & B_{\alpha\beta} &= F_{\alpha\beta} \\ D^\alpha &= -\sqrt{g_{00}}F^{0\alpha}, & H^{\alpha\beta} &= \sqrt{g_{00}}F^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

(?? почему корень из нулевой компоненты метрики???)

О плотности и потоке энергии и векторе Пойтинга $\mathbf{S}$

Суть

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}]$$

$$\int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{кин}} = \text{const.}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{кин}} \right\} = - \oint \mathbf{S} d\mathbf{f}$$

это часть тензора Э-И - плотность потока импульса, и там свойства полезные есть, пусть это тут будет.

О поляризации электромагнитной волны и тензоре поляризации (!!??)

(тут в ЛЛ2 про поляризацию, но я где-то уже писал, соберу потом воедино! мб раздел сделаю, а то задачи про поляризацию без отдельного раздела не решаются. порешаю задачи про это потом!!!)

Суть

32.3 Applications of electrodynamics

32.3.1 Typical Models of Electromagnetic Field

(схожий раздел, как и в общей физике в электричестве, но там в разы подробнее. тут лишь суть.)
(see LL2 and griffiths for now)

32.3.2 Details of the Electrodynamics of Continuous Media

(по сути короткий обзор ЛЛ8. Мб темы ЛЛ9, если они на самом деле полезные, а так - это в записи по конд средам и ЭД)

32.3.3 Creation of New Materials with Electrodynamics

(суть прикладных конденсированных сред. как вообще догадываться до этого? how to do it????)

32.3.4 Geometric Optics, Diffraction, Dispersion

Об уравнении эйконала и геометрической оптике (???)

Об эйконале

$$\psi : \quad f = ae^{i\psi}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = 0$$

Для частиц имеют место уравнения Гамильтона

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}.$$

Ввиду указанной аналогии мы можем непосредственно написать подобные уравнения для лучей:

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$$

В пустоте $\omega = ck$, так что $\dot{\mathbf{k}} = 0, \mathbf{v} = c\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ - единичный вектор вдоль направления распространения), т.е., как и следовало, в пустоте лучи являются прямыми линиями.

Об элементарной геометрической оптике

(про зеркала, все для школы, этот же в оптике. сейчас нет сил на это и не актуально это.)

О границах применимости геометрической оптики (!!!!!)

(пропишу потом!)

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z}$$

Из этих формул следует, что если мы имеем пучок света конечной ширины, то направление распространения света в таком пучке не может быть строго постоянным. Направляя ось x по направлению (среднему) света в пучке, мы получаем:

$$\theta_y \gtrsim \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y},$$

θ_y - порядок величины отклонения пучка от среднего направления в плоскости xy , а λ - длина волны.

О характеристиках типичных оптических приборов

(тоже, это пока в оптике напишу, тут простые формулы, простые соображения)

О дифракциях Френеля и Фраунгофера (???)

Об общем формализме

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n$$

$$u_P \sim \frac{1}{i} \int e^{ikR} df_n \approx \frac{e^{ikx}}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1}\right)} dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2}\right)} dz$$

О Френеле

$$I = I_0 \left[1 + \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{\sin\left(w^2 - \frac{\pi}{4}\right)}{w} \right]$$

О Фраунгофере

(основные формулы)

(абзац о сути)

(абзац о принципе Бабинне и дополнительных экранах, но пока мне это не нужно было, оптику еще порешаю, скорее всего понадобится.)

(указание на примеры и задачи тут!!!)

О дисперсии

32.4 Other Properties and Modifications of Electrodynamics

32.4.1 More Precise Properties of Electrodynamics

О функции Лагранжа с точностью до членов второго порядка

(абзац про идею вывода, когда-то еще раз подумаю, у ЛЛ2 про это.)

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 R_{ab}} [\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b \mathbf{n}_{ab})].$$

$$\mathcal{H} = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} - \sum_a \frac{p_a^4}{8c^2 m_a^3} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b R_{ab}} [\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b + (\mathbf{p}_a \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{p}_b \mathbf{n}_{ab})].$$

(абзац про то, зачем это?) Например, можно центр инерции системы найти.

О связи электродинамики и гравитации (???)

(по той статье, которую читал в магистратуре физтеха)

32.4.2 Chern-Simons Theory (!?)

$$W(\mathbf{A}) = \frac{1}{8\pi^2} \int d^3x \epsilon^{ijk} \text{tr} \left(F_{ij} A_k + \frac{2i}{3} A_i A_j A_k \right)$$

This is known as the Chern-Simons functional. It has a number of be

32.4.3 Born-Infeld Theory (!?)**32.4.4 Overview of Modifications of QED**

(пока в основном про это в КЭД позабочусь. в 1й части про КЭД раздел, но сперва в КТП про это!)

О теории Эйлера-Гейзенберга

(пока вики, потом порешаю что-то про это)

При выводе формулы эффекты поляризации вакуума учитываются в однопетлевом приближении, справедливом для электромагнитных полей, мало изменяющихся на расстояниях порядка комптоновской длины волны. Пример такого процесса изображён на рисунке для одной входящей и одной выходящей фотонной линии. Замкнутая петля учитывает рождение электрона (верхняя часть петли) и позитрона (нижняя часть петли) в левой вершине и их уничтожение в правой. С учётом таких процессов плотность лагранжиана в отличие от классической электродинамики выражается не только через инварианты поля, $\mathcal{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$ и $\mathcal{G} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$, но и через постоянную тонкой структуры, $\alpha \approx \frac{1}{137}$, а также массу, m , и заряд, e , электрона [2]. Лагранжиан для сколь угодно сильных полей, общая формула:

$$\mathcal{L} = -\mathcal{F} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \exp(-m^2 s) \left[(es)^2 \frac{\text{Re} \cosh(es \sqrt{2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})})}{\text{Im} \cosh(es \sqrt{2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})})} \mathcal{G} - \frac{2}{3}(es)^2 \mathcal{F} - 1 \right] \frac{ds}{s^3}$$

В случае слабых полей: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{2\alpha^2}{45m^4} [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2]$ В частности, на основе полученного лагранжиана можно вычислить амплитуду рассеяния фотона на фотоне, которая для свободных фотонов оказывается исключительно малой. Тем не менее оказывается возможным наблюдение рассеяния Дельбрюка при взаимодействии гамма-фотона с виртуальным фотоном (например, в кулоновском поле атомного ядра).

32.4.5 Some Models of QED

(пока в основном про это в КЭД позабочусь)

32.4.6 Famous ideas about modifications of electrodynamics (!?)

(подробнее и очень малоизвестные теории - другая 1я часть, тут самое основное, что теоретическому важно знать!!! тут в упрощенной форме, чисто как минимальный кругозор)

On ideas of generalizations with duality**On an idea of dualization**

(1/2 страница, суть Киселева выписываю.)

On an idea of Chern-Simons terms

(1/2 страница, суть Киселева выписываю, ну и потом добавлю какие-то тоже скорее всего указания, 1 страница мб на это уйдет.)

On simplified Born-Infeld theory

(2/3 максимум страницы ключевых формул, идей, слов о следствиях. словами напишу указания про вывод!!!)

On simplified Kaluza-Klein theory

(2/3 максимум страницы ключевых формул, идей, слов о следствиях. пока в другой записи про особый теорпол)

32.5 Special Properties of Fields

(указания на редко встречающиеся штуки)

32.5.1 Special Duality, Dimensional Reduction, etc. (!???)

(пока все эти супер особые свойства тут и буду собирать!)

On duality in general (!!???)

(скоро начну читать про это!!!)

В обычной электродинамике преобразование вида $\tilde{F}_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\mu'\nu'}F^{\mu'\nu'}$ давало переход $\mathcal{E} \xrightarrow{\tilde{D}} \mathcal{H}, \mathcal{H} \xrightarrow{\tilde{D}} -\mathcal{E}$, что легко проверить покомпонентно.

Дуальное преобразование меняет пространственно четные величины на пространственно нечетные и обратно.

On dimensional reduction**FP-5.3.1 Dimensional reduction for scalar fields****FP-5.3.2 Dimensional reduction for spinor fields****FP-5.3.3 Dimensional reduction for the vector gauge****О дискретных симметриях (!!???)**

(тут все про них, компактно напишу, в других местах в этой части - мб только приложения этой теории)

32.5.2 Other consequences of Poincare group (????)

(пока такой раздел, скорее всего на него и наберется следствий, но мб потом перегруппирую все в другом месте)

On Weinberg-Witten theorem.

(A) A theory containing a Poincaré covariant conserved four-vector current J^μ forbids massless particles of spin $j > 1/2$ with a non-vanishing eigenvalue of the conserved charge $\int J^0 d^3x$.

(B) A theory containing a Poincaré covariant conserved tensor $T^{\mu\nu}$ forbids massless particles of spin $j > 1$ for which $\int T^{0\nu} d^3x$ is the conserved energy-momentum four-vector.

Theorem	A theory with a	forbids massless particles of
(A)	Poincaré covariant conserved current J^μ	spin $j > \frac{1}{2}$ and $Q = \int J^0 d^3x \neq 0$.
(B)	Poincaré covariant conserved tensor $T^{\mu\nu}$	spin $j > 1$ and $P^\mu = \int T^{0\mu} d^3x \neq 0$.

(тут абзац про доказательство)

(тут еще про следствия, вообще, большая тема, можно дня минимум 2 думать про нее)

32.5.3 Other Light Waves

(тут то, что и в оптике сильно нужно! по сути связь с оптикой! эффекты в ней!!!)

О частично поляризованном свет

(забываю, не актуально. оптикой если буду заниматься - мб допишу)

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + l \cos 2\varphi & l \sin 2\varphi \\ l \sin 2\varphi & 1 - l \cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

Вместо этих параметров может представить определенные преимущества другой набор трех параметров:

$$\xi_1 = l \sin 2\varphi, \quad \xi_2 = A, \quad \xi_3 = l \cos 2\varphi$$

(их называют параметрами Стокса). Поляризационный тензор выражается через них согласно

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}$$

Все три параметра пробегают значения между -1 и +1. Параметр ξ_3 характеризует линейную поляризацию вдоль осей y и z : значению $\xi_3 = 1$ отвечает полная линейная поляризация вдоль оси y , а значению $\xi_3 = -1$ - вдоль оси z . Параметр же ξ_1 характеризует линейную поляризацию вдоль направлений, составляющих 45° с осью y : значению $\xi_1 = 1$ отвечает полная поляризация под углом $\varphi = \pi/4$, а значению $\xi_1 = -1$ - под углом $\varphi = -\pi/4$.

32.5.4 Wavefronts, Caustics, and Optics according to Arnold (???)

(там у него много всего есть, вот тут и про это. не актуально это и близко.)

33 Other Theories in a Nutshell

33.1 On other fields

(потом сделаю структуру, пока не считаю эти темы приоритетными)

33.1.1 Other Free Fields from Poincare Group (??)

О массивном вектроне поле

$$k^\nu = (mc, \mathbf{0})$$

Об уравнении Вейля

(разберусь, типичная тема!)

Основные формулы

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

$$i(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \psi_L = 0$$

$$i(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \psi_R = 0$$

Или через $\sigma^\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma})$, получаем $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$. Уравнения Вейля имеют вид

$$\begin{pmatrix} -m & i\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial \\ i\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \partial & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0$$

$$i\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \partial \psi_L = 0; \quad i\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial \psi_R = 0$$

Другие свойства уравнения Вейля

При малых вращениях и бустах:

$$\psi_L \rightarrow \left(1 - i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \psi_L$$

$$\psi_R \rightarrow \left(1 - i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \psi_R$$

О применениях

(абзац про Вейлевских полуметаллах. суть и основные формулы. пока не знаю.)

Об уравнении Прока ($m > 0$, $s = 1$)

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \mathcal{V}^\mu$$

(разные еще напишу свойства, типа там применяется в глюонах мб, еще что-то. известная тема)

О полях частиц в Римановом пространстве

(суть книги Редькова, во 2й 1й части мб пару разделов про них сделаю, если это будет нужно. если вкратце - там куча формализмов, уравнений, и это пока ни разу не нужно было мне.)

О сути других уравнений

(тут словами, подробно - следующая 1я часть)

Об уравнении Паули-Фрица ($m > 0$, $s = 2$)

(пока не актуально разбираться с ним)

On the free Rarita–Schwinger field ($s = \frac{3}{2}$)**Основные формулы**

(я забыл на самом деле, в чем идея? Но там у Проена вроде хорошо все написано?)

$$S = - \int d^D x \bar{\Psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \Psi_\rho,$$

$$\gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \Psi_\rho = 0$$

For $D = 3$, this field equation implies that $\partial_\nu \Psi_\rho - \partial_\rho \Psi_\nu = 0$. This means that the field has no gauge invariant degrees of freedom and thus no propagating particle modes. This is the supersymmetric counterpart of the situation in gravity for $D = 3$, where the field equation $R_{\mu\nu} = 0$ implies that the full curvature tensor $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$. Hence no degrees of freedom.

Equivalently

$$\gamma^\mu (\partial_\mu \Psi_\nu - \partial_\nu \Psi_\mu) = 0$$

because (???) of relation $\gamma_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} = (D-2)\gamma^{\nu\rho}$, which implies that $\gamma^{\nu\rho} \partial_\nu \Psi_\rho = 0$ in spacetime dimension $D > 2$. We also note that $\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^\mu \gamma^{\nu\rho} - 2\eta^{\mu[v} \gamma^{\rho]}$. Using this

On The initial value problem for R-Sh

On-shell degrees of freedom $= \frac{1}{2}(D-3)2^{[D/2]}$.

Off-shell degrees of freedom $= (D-1)2^{[D/2]}$.

Because of the following reasons. (????) From the gauge condition and the equation of motion, we find $3 \times 2^{[D/2]}$ independent constraints on the initial data, namely

$$\begin{aligned} \gamma^i \Psi_i(\vec{x}, 0) &= 0, \\ \Psi_0(\vec{x}, 0) &= 0, \\ \partial^i \Psi_i(\vec{x}, 0) &= 0. \end{aligned}$$

$$\Psi_i(x) = e^{ip \cdot x} [b_+ \epsilon_i(\vec{p}, +) u(\vec{p}, +) + c_+ \epsilon_i(\vec{p}, -) u(\vec{p}, +) + b_- \epsilon_i(\vec{p}, +) u(\vec{p}, -) + c_- \epsilon_i(\vec{p}, -) u(\vec{p}, -)].$$

$$\Psi_\mu(x) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_\lambda [e^{ip \cdot x} \epsilon_\mu(\vec{p}, \lambda) u(\vec{p}, \lambda) c(\vec{p}, \lambda) + e^{-ip \cdot x} \epsilon_\mu^*(\vec{p}, \lambda) v(\vec{p}, \lambda) d^*(\vec{p}, \lambda)]$$

$$T_{\mu\nu} = \bar{\Psi}_\rho \gamma_\mu^{\rho\sigma} \partial_\nu \Psi_\sigma - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

It is neither symmetric nor gauge invariant.

The total energy-momentum $P^v = \int d^3 \vec{x} T^{0v}(\vec{x}, t)$ is gauge invariant and given (for $D = 4$) by

$$P^v = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0} p^v \sum_\lambda [c^*(\vec{p}, \lambda) c(\vec{p}, \lambda) - d(\vec{p}, \lambda) d^*(\vec{p}, \lambda)].$$

Sources and Green's function

$$\gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \Psi_\rho = J^\mu.$$

We expect the Green's function solution to take the form

$$\Psi_\mu(x) = - \int d^D y S_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y),$$

$$S_{\mu\nu}(x-y) = \left[\eta_{\mu\nu} \not{\partial} + \frac{1}{D-2} \gamma_\mu \not{\partial} \gamma_\nu + C \partial_\mu \gamma_\nu + E \gamma_\mu \partial_\nu - F \partial_\mu \not{\partial} \partial_\nu \right] G(x-y)$$

where $G(x-y)$ is the massless scalar propagator (4.19), and all derivatives are with respect to x . The reason of this is (??? don't understand yet, here is some important theory!?!?)

$$\gamma^{\mu\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} S_{\rho\nu}(x-y) = -\delta_\nu^\mu \delta(x-y) + \frac{\partial}{\partial y^\nu} \Omega^\mu(x-y).$$

So we omit such (??? which???) terms and postulate the ansatz

$$i S_{\rho\nu}(p) = A(p^2) \eta_{\rho\nu} \not{p} + B(p^2) \gamma_\rho \not{p} \gamma_\nu.$$

We can (????) include the omitted p_ν terms in (5.30) and $\Omega(p)$ in the analysis and verify that the gauge terms in the propagator are arbitrary. And, for the choice $E = -1/(D-2)$, and arbitrary C and F , the propagator satisfies

$$i \gamma^{\mu\sigma\rho} p_\sigma S_{\rho\nu}(p) = - \left(\delta_\nu^\mu - \frac{p^\mu p_\nu}{p^2} \right).$$

For $D = 4$, the propagator, with $C = -1$, takes the 'reverse index' form $S_{\mu\nu}(p) = -i \frac{1}{2} \gamma_\nu \not{p} \gamma_\mu$, which is the form used in most of the literature on perturbative studies in supergravity (????).

33.2 Non-abelian fields in a Nutshell

33.2.1 Yang-Mills theory

(поднадобится - буду прописывать.)

Обзор теории

$$S_{\text{YM}} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

where g^2 is the Yang-Mills coupling. It's often called the "coupling constant".

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ям}} + \mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2e^2} \operatorname{tr} F_{\mu\nu}^2 + \mathcal{D}_\mu \phi^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi)$$

из него уравнения движения

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu^2 \phi + V'(\phi^\dagger \phi) \phi &= 0 \\ \mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu &= -e^2 t_a (\phi^\dagger t_a \mathcal{D}^\nu \phi - \mathcal{D}^\nu \phi^\dagger t_a \phi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu^2 \phi + V'(\phi^\dagger \phi) \phi &= 0 \\ \mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu &= -e^2 t_a (\phi^\dagger t_a \mathcal{D}^\nu \phi - \hat{D}^\nu \phi^\dagger t_a \phi) \end{aligned}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}; \quad \phi^* = (\phi^*)^T = (\phi_1^* \quad \phi_2^* \quad \dots \quad \phi_n^*)$$

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + A_\mu \phi.$$

$$\mathcal{L}_\phi = \mathcal{D}_\mu \phi^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \omega A_\mu \omega'^{-1} + \omega \partial_\mu \omega'^{-1}$$

$$A_\mu = ie A_\mu^a t_a,$$

$$\text{tr}(t_a t_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}.$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - e f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c.$$

$$\mathcal{L}_{\text{GM}} = \frac{1}{2e^2} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2$$

much bigger group of maps from spacetime into G . The action on the gauge field is

$$A_\mu \rightarrow \Omega(x) A_\mu \Omega^{-1}(x) + i \Omega(x) \partial_\mu \Omega^{-1}(x)$$

A short calculation shows that this induces the action on the field strength

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \Omega(x) F_{\mu\nu} \Omega^{-1}(x)$$

The Yang-Mills action is then invariant by virtues of the trace in (2.8).

$$\Omega(x) \approx 1 + i\omega^a(x) T^a + \dots$$

The infinitesimal change of the gauge field from (2.11) becomes

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \omega - i [A_\mu, \omega] \equiv \mathcal{D}_\mu \omega$$

where $\omega = \omega^a T^a$. Similarly, the infinitesimal change of the field strength is

$$\delta F_{\mu\nu} = i [\omega, F_{\mu\nu}]$$

О квантовой хромодинамике

$$\mathcal{L}_{\text{КХД}} = -\frac{1}{4} \left(F_{\mu\nu}^{a_{SU(3)}} \right)^2 + \sum_j (i \bar{\psi}_j \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_j - m_j \bar{\psi}_j \psi_j)$$

(??? разве это не ЭД???)

Обзор применений полей Янга-Миллса

поля анга милса описывают глюонные поля

получили квантовую хромодинамику.

константа связи, меняется она.

здесь можно осознать конфайнмент.

(тут по Тонгу структура пока, кроме него вряд ли что-то вообще открывать буду!)

33.2.2 Non-abelian gauge symmetry in a nutshell (!?!?!?!?)

4.3.1 Global internal symmetry (!?!?!?!?)

4.3.2 Gauging the symmetry (!?!?!?!?)

4.3.3 Yang-Mills field strength and action (!?!?!?!?)

4.3.4 Yang-Mills theory for $G = \text{SU}(N)$ (!?!?!?!?)

33.2.3 Some Possible Interaction Between Fields

(это же в КТП, для каждой теории там всякое изучается. пока в общем случае не особо про это много думал.)

(спишу у Бухюиндера в записи модели теории поля, 4 часа тренировок сперва.)

33.3 Spin Models Using Field Theory

(??? I am not sure that it is a good idea to use FT for it. I would not even try now)
(тут конспект где-то как минимум 1/3 из книги Полякова! также будет раздел в 1й части, где указания на все это тут)

33.3.1 О модели Изинга в теории поля

Теория

Модель Изинга вне поля это

$$Z = \sum_{\{\sigma_x\}} e^{-\beta \mathcal{E}[\sigma_x]}, \quad \mathcal{E}[\sigma_x] = - \sum_{x, \delta} \sigma_x \sigma_{x+\delta}.$$

(!! пара указаний про то, что же тут происходит?)

Рассмотрим D -мерную модель Изинга с коротко- действующим взаимодействием

$$\mathcal{E} = - \sum_{x, x'} \mathcal{K}_{x, x'} \sigma_x \sigma_{x'}$$

Пусть температура β близка к критической $|(\beta - \beta_c) / \beta_c| \ll 1$. Тогда все корреляционные функции имеют тот же вид, что в полевой теории с лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\varphi^4}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 + \lambda_0 \varphi^4$$

тоже определенной в D -мерном евклидовом пространстве.

Здесь $\mathbf{x}$ обозначает узел кубической решетки, δ - единичный вектор, соединяющий этот узел с одним из его ближайших соседей, а переменная σ_x принимает значения ± 1 .

Если в модели Изинга размерность x -пространства превышает 1, то в ней имеется две фазы. В высокотемпературной (маленькие β) фазе $\mathbf{Z}_2$ -симметрия не нарушена и дальний порядок отсутствует.

В высоких температурах:

$$\langle \sigma_0 \sigma_{\mathbf{R}} \rangle = Z^{-1} \left(\sum_{\{\sigma_x\}} e^{\beta \sum \sigma_x \sigma_{x+\delta}} \sigma_0 \sigma_{\mathbf{R}} \right) \simeq \beta^{|\mathbf{R}|} Z^{-1} \left(\sum_{\{\sigma_x\}} \sigma_0 (\sigma_0 \sigma_\delta) \dots (\sigma_{\mathbf{R}-\delta} \sigma_{\mathbf{R}}) \sigma_{\mathbf{R}} \right) = \beta^{|\mathbf{R}|}$$

Таким образом, корреляционная длина, равная $\log^{-1}(1/\beta)$, мала, и, следовательно, граничные условия слабо влияют на состояния внутри системы. Для малых β

$$\langle \sigma_x \rangle \sim e^{-L \log(1/\beta)} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

(L - размер системы)

33.4 On Main Gauge Fields, Special Classical Theories and Solutions

33.4.1 Introducing Yang-Mills

The Action

Gauge Symmetry

Wilson Lines and Wilson Loops

$$i \frac{dw}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} A_\mu(x) w$$

The factor of i ensures that, with A_μ Hermitian, the length of the vector $w^\dagger w$ remains constant. Suppose that the particle moves along a curve C , starting at $x_i^\mu = x^\mu(\tau_i)$ and finishing at $x_f^\mu = x^\mu(\tau_f)$. Then the rotation of the vector depends on both the starting and end points, as well as the path between them,

$$w(\tau_f) = U[x_i, x_f; C] w(\tau_i)$$

where

$$U[x_i, x_f; C] = \mathcal{P} \exp \left(i \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} A_\mu(x(\tau)) \right) = \mathcal{P} \exp \left(i \int_{x_i}^{x_f} A \right)$$

where $\mathcal{P}$ stands for path ordering.

a gauge invariant object known as the Wilson loop,

$$W[C] = \text{tr} \mathcal{P} \exp(i \oint A)$$

Quantising the Colour Degree of Freedom Above we viewed the colour degree of freedom as a vector w . This is a very classical perspective. It is better to think of each quark as carrying a finite dimensional Hilbert space $\mathcal{H}_{\text{quark}}$, of dimension $\dim \mathcal{H}_{\text{quark}} = \dim R$.

The action which reproduces the equation of motion (2.13) is

$$S_w = \int d\tau i w^\dagger \frac{dw}{d\tau} + \lambda (w^\dagger w - \kappa) + w^\dagger A(x(\tau)) w$$

where λ is a Lagrange multiplier to impose the constraint (2.16), and where $A = A_\mu dx^\mu/d\tau$ is to be thought of as a fixed background gauge field $A_\mu(x)$ which varies in time in some fixed way as the particle moves along the path $x^\mu(\tau)$.

33.4.2 The Theta Term

$$S_\theta := \frac{\theta}{16\pi^2} \int d^4x \text{tr} {}^* F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

where ${}^* F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$. It is Lorentz invariant, gauge invariant and quadratic in field strengths. The theta term is a total derivative:

$$S_\theta = \frac{\theta}{8\pi^2} \int d^4x \partial_\mu K^\mu$$

where $K^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} (A_\nu \partial_\rho A_\sigma - \frac{2i}{3} A_\nu A_\rho A_\sigma)$.

Canonical Quantisation of Yang-Mills

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g^2} \text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\theta}{16\pi^2} \text{tr} {}^* F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

To start, we make use of the gauge redundancy to set

$$A_0 = 0$$

With this ansatz, the Lagrangian becomes

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \text{tr} (\dot{\mathbf{A}}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{\theta}{4\pi^2} \text{tr} \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}$$

Here $B_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}$ is the non-Abelian magnetic field (sometimes called the chromomagnetic field).

$$\mathcal{H} = g^2 \text{tr} \left(\boldsymbol{\pi} - \frac{\theta}{8\pi^2} \mathbf{B} \right)^2 + \frac{1}{g^2} \text{tr} \mathbf{B}^2$$

The Wavefunction and the Chern-Simons Functional
Analogies From Quantum Mechanics

33.4.3 Instantons (!!!!!)

The Self-Dual Yang-Mills Equations
Tunnelling: Another Quantum Mechanics Analogy
Instanton Contributions to the Path Integral

33.4.4 The Flow to Strong Coupling

Anti-Screening and Paramagnetism
Computing the Beta Function

33.4.5 Electric Probes

Coulomb vs Confining
An Analogy: Flux Lines in a Superconductor
Wilson Loops Revisited

33.4.6 Magnetic Probes

't Hooft Lines
 $SU(N)$ vs $SU(N)/Z_N$
What is the Gauge Group of the Standard Model?

33.4.7 Dynamical Matter

The Beta Function Revisited
The Infra-Red Phases of QCD-like Theories
The Higgs vs Confining Phase

33.4.8 't Hooft-Polyakov Monopoles

33.4.9 Instantons, Vortices, Dions, monopoles from Stepanyants (??)

(пару разделов потом мб сделаю)

- 1 Понятие о солитонах. Кинк.
- 2 Вихревые линии Абрикосова
- 3 Магнитный монополю Дирака
- 4 Некоторые сведения об отображениях сфер
- 5 Магнитный монополю т'Хофта - Полякова

5.1 Рассматриваемая теория 5.2 Топологическая классификация монополюных решений и квантование магнитного заряда. 5.3 Структура солитонного решения 5.4 Ограничение Богомольского на массу магнитного монополя. Решение Прасада-Зоммерфельда 5.5 Магнитный монополю Ву-Янга и его связь с монополю Дирака.

6 Дионы

6.1 Дионы в электродинамике

6.2 Дионы в неабелевых теориях

6.3 Ограничение Богомольского на массу диона

6.4 Явный вид дионного решения при $\lambda \rightarrow 0$.

7 Инстантоны

(мб потом соединую это с калибр полями, что выше.)

7.1 Теория поля в пространстве Евклида

7.2 Топологическая классификация инстантонных решений

7.3 Уравнение самодуальности и антисамодуальности

7.4 Явный вид инстантонных решений

7.5 Одноинстантонное решение

7.6 Число параметров инстантонного решения

8 Инстантонные решения в формализме Атьи - Дринфельда - Хитчина Манина (АДХМ)

8.1 Кватернионы

8.2 Решения АДХМ

8.3 Одноинстантонное решение в формализме АДХМ

8.4 $5n + 3$ - параметрическое решение как частный случай решения АДХМ

8.5 Наиболее общее двухинстантонное решение

8.6 Проблемы при построении решений с $n \geq 3$

8.7 Число параметров АДХМ.

The essence of ADHM (???????)

(???? не знаю, задротство тут какое-то, пока не хочу ввязываться, минимум 2 дня уйдет разобраться и это вообще не нужно сейчас.)

9 Меронное решение

10 Классические решения и масштабные преобразования

10.1 Теории со скалярными полями 10.2 Калибровочные теории и

11 Классические решения и фермионы (на примере кинка)

11.1 Нулевые моды оператора Дирака на топологическом фоне 11.2 Дробление электрического заряда фермионов в поле кинка

33.4.10 The Renormalisation Group

(потом у Тонга выгружу структуру)

33.4.11 Anomalies

(крутые темы Тонга, во 2й 1й в КТП может быть это же будет, посмотрим)

The chiral anomaly in two dimensions and four dimensions; Noethers theorem and Ward identities, Fujikawa's approach and the measure, Triangle diagrams, Mixed gravitational anomalies; Fermi zero modes, The Atiyah-Singer index theorem, Instantons again, Topological Insulators again; Gauge anomalies; The $SU(2)$ anomaly, Anomaly cancellation and the Standard Model; 't Hooft Anomalies; Anomalies in discrete symmetries, Generalised symmetries, Time-Reversal.

33.4.12 Lattice Gauge Theory

(крутые темы Тонга, во 2й 1й в КТП может быть это же будет, посмотрим)

General Overview of Lattice Gauge Theory

(write here, why people are studying it)

Currently, I think that people are just bored. They want to learn quantum computation, to in general model real world, and they started with discretized low dimensional models, since it is simulated by qubits. So, currently, it is useless part of science, that only gives hope for us to make quantum computation of real word in future.

(write here, what are the result)

Scalar fields; Gauge fields, The Wilson action, the Haar measure, the strong coupling expansion;

Fermions, The Nielsen-Ninomiya theorem, Lattice QCD;

Domain wall fermions, Anomaly inflow, the Ginsparg-Wilson relation.

33.4.13 Chiral Symmetry Breaking

(крутые темы Тонга, во 2й 1й в КТП может быть это же будет, посмотрим)

The quark condensate;

The chiral Lagrangian, Pion scattering, Currents;

Baryons, The Skyrme model, Skyrmions; QCD and its mesons and baryons;

the Wess-Zumino Witten WZW term,

A five dimensional action; 't Hooft anomaly matching;

Confinement and chiral symmetry breaking;

The Vafa-Witten theorem, Massless baryons.

33.5 Continuous Symmetries (!!!!!)

33.5.1 $O(N)$ Models by Tong

Goldstone Bosons

The $d = 4 - \varepsilon$ Expansion

There Are No Goldstone Bosons in $d = 2$

33.5.2 Sigma Models by Tong

The Background Field Method

Asymptotic Freedom and the $d = 2 + \varepsilon$ Expansion

Large N

33.5.3 The Kosterlitz-Thouless Transition by Tong

Vortices

From Coulomb Gas to Sine-Gordon

RG Flows in Sine-Gordon

33.6 Gravity: other important ideas and theories

(see the note on gravity about it for now)

33.6.1 Other important gravitational laws and properties (!!!!!)

(очень многое будет полезно тут указать, сперва только это пойму и пропишу в нужных местах.)

33.7 Special Constructions and Special Theories in a Very Nutshell

(тут всякие особые теории, которых тоже много будет. супер коротко, на все - отдельная запись.)

33.7.1 Standard Model

(пока в отдельной записи)

(по Степаньянцу почитаю, совсем не много кроме него тут будет указано)

5.1. Структура Стандартной модели

5.2. Бозонный сектор Стандартной модели

5.3. Фермионный сектор Стандартной модели

5.3.1. Состав частиц (187)

5.3.2. Лагранжиан лептонного сектора (189)

5.3.3. Лагранжиан кваркового сектора (196).

5.3.4. Матрица Кабиббо-Кобаяши-Маскава (202).

5.4. Взаимодействие полей в электрослабой теории

5.5. Об описании нейтрино

5.5.1. Проблема малой массы нейтрино (216).

5.5.2. Нейтринные осцилляции (225).

5.6. Полный лагранжиан Стандартной модели

5.7. Стандартная модель и современная физика

33.7.2 Supersymmetric Fields (??)

FP6.1 Basic SUSY field theory

Conserved supercurrents

SUSY Yang–Mills theory

SUSY transformation rules

FP6.2 SUSY field theories of the chiral multiplet

$U(1)_R$ symmetry

The SUSY algebra

More chiral multiplets

FP6.3 SUSY gauge theories

6.3.1 SUSY Yang–Mills vector multiplet 121

6.3.2 Chiral multiplets in SUSY gauge theories 122

6.4 Massless representations of N -extended supersymmetry

6.4.1 Particle representations of N -extended supersymmetry 125

6.4.2 Structure of massless representations

33.7.3 string theory

(пока в отдельной записи)

33.7.4 Modifications of General Relativity: An Overview

(пока в записи про отдельные физ теории и в записи по гравитации, потом только сюда суть передвину)

О пространствах других размерностей (?????)

(от Лашкевича вставляю мысли.)

33.7.5 Supergravity

(пока в отдельной записи)

33.7.6 electrodynamics in a curved space-time

(скорее всего однажды соберу эти формулы, потому что все-таки про них периодически говорят!)

33.7.7 General field theory in a curved space-time by Stepanyantz

6.2. Теория поля в искривленном пространстве.

6.4. Спиноры в искривленном пространстве

6.6. Другое определение тензора энергии-импульса

6.7. Конформная инвариантность

6.8. Конформная группа 6.8.1. Масштабная инвариантность (3I7). 6.8.2. Специальные конформные преобразования (322). 6.8.3. Конформная группа (330). Список литературы

33.7.8 General field theory in a curved space-time by Proyen

(пока в отдельной записи, но сюда суть потом выпишу)

s

Part IX

Other Topics and Models

Обсудим другие темы теории поля.
(тут все остальное, что более продвинутое)

34 Selected Topics of Particle and Field Dynamics

34.1 Numerical Methods in Field Theory (!?)

(мб пройду что-то - сюда напишу)

34.1.1 Overview of the Basic Numerical Methods for Maxwell's Equation

(????)

34.1.2 Overview of Basic Numerical Methods for the Klein-Gordon Equation

(????????????)

34.1.3 Overview of Basic Numerical Methods for the Dirac Equation (!?)

(???????????? don't know them yet)

34.1.4 Overview of Other Numerical Methods for Typical Field Theory

34.2 Supersymmetric Fields (!?)

(??? see note on special field theories about it gor now)

34.3 Other Topics of Spinors and Spinor Representations

(там много статей и очень объемных исследований о других свойствах, тут коротко их укажу, подробно - в отдельных записях, потому что тут сотни или тысячи страниц про это написаны.)

(??? see note on special field theories about it gor now)

34.4 Introduction to Conformal Field Theory

(??? see note on special field theories about it gor now)

34.5 Field Theory in Condensed Matter: An Overview

(see note on cond matter for now, there are a lot of fields, though they are more quantum than classical. So, currently, I am not sure where exactly classical field theory is used there?)

34.6 Dynamics of Particles with Spin by Hriplovich

(мб в механику перенесу, пока не знаю. если тут про поля речь - оставлю тут)
(Хрипович, пока его структура, потом буду про это думать)
пока скорее на всякий случай создал главу, так-то она мне не нужна.

34.6.1 Particles with Spin in a Nutshell

Обзор применений

я хз, зачем эта теория нужна.

34.6.2 Spin-Orbit Interaction

34.6.3 Spin-Spin Interaction

34.6.4 Precession of the orbit due to the rotation of the central body

(??? see Hriplovich!!!)

34.6.5 Equations of Spin Motion in an Electromagnetic Field

(??? see Hriplovich!!!)

34.6.6 Equations of Spin Motion in a Gravitational Field

(??? see Hriplovich!!!)

34.7 Spacetime algebra as a powerful tool for electromagnetism by Dressel, Bliokh, Nori

Abstract

We present a comprehensive introduction to *spacetime algebra* that emphasizes its practicality and power as a tool for the study of electromagnetism. We carefully develop this natural (Clifford) algebra of the Minkowski spacetime geometry, with a particular focus on its intrinsic (and often overlooked) *complex structure*. Notably, the scalar imaginary that appears throughout the electromagnetic theory properly corresponds to the unit 4-volume of spacetime itself, and thus has *physical* meaning. The electric and magnetic fields are combined into a single complex and frame-independent bivector field, which generalizes the *Riemann-Silberstein complex vector* that has recently resurfaced in studies of the single photon wavefunction. The complex structure of spacetime also underpins the emergence of electromagnetic waves, circular polarizations, the normal variables for canonical quantization, the distinction between electric and magnetic charge, complex spinor representations of Lorentz transformations, and the *dual* (electric-magnetic field exchange) *symmetry* that produces helicity conservation in vacuum fields. This latter symmetry manifests as an arbitrary global phase of the complex field, motivating the use of a complex vector potential, along with an associated transverse and gauge-invariant bivector potential, as well as complex (bivector and scalar) Hertz potentials. Our detailed treatment aims to encourage the use of spacetime algebra as a readily available and mature extension to existing vector calculus and tensor methods that can *greatly simplify* the analysis of fundamentally relativistic objects like the electromagnetic field.

If we include the biological sciences, as well as the physical sciences, Maxwell's paper was second only to Darwin's "Origin of Species". But the importance of Maxwell's equations was not obvious to his contemporaries. Physicists found it hard to understand because the equations were complicated. Mathematicians found it hard to understand because Maxwell used physical language to explain it.

Freeman J. Dyson [1]

This shows that the mathematical language has more to commend it than being the only language which we can speak; it shows that it is, in a very real sense, the correct language. ... The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve.

Eugene P. Wigner [2]

34.7.1 Introduction

For the rest of my life I will reflect on what light is.

Albert Einstein [3]

Motivation

At least two distinct threads of recent research have converged upon an interesting conclusion: the electromagnetic field has a more natural representation as a *complex* vector field, which then behaves in precisely the same way as a relativistic quantum field for a single particle (i.e., a *wavefunction*). It is our aim in this report to clarify why this conclusion is warranted from careful considerations of the (often overlooked) intrinsic complex structure implied by the *geometry of spacetime*. We also wish to draw specific parallels between these threads of research, and unify them into a more comprehensive picture. We find that the coordinate-free, geometrically motivated, and manifestly reference-frame-independent *spacetime algebra* of Hestenes [4, 5, 6, 7, 8, 9] is particularly well suited for this task, so we provide a thorough introduction to this formalism in order to encourage its use and continued development.

The first thread of preceding research concerns the development of a *first-quantized approach to the single photon*. Modern quantum optical experiments routinely consider situations involving only a single photon or pair of photons, so there has been substantial motivation to reduce the full quantized field formalism to a simpler '*photon wave function*' approach that more closely parallels the Schrödinger or Dirac equations for a single electron [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]. Such a first-quantization approach is equivalent to classical electromagnetism: it represents Maxwell's equations in the form of a relativistic wave equation for massless spin-1 particles. The difficulty with this pursuit has stemmed from the fact that the photon, being a manifestly relativistic and massless spin-1 boson, is *nonlocalizable*. More precisely, the position of a single photon is ill-defined [32, 33, 34, 35, 36, 37], and photons have no localizable number density [19, 20, 26, 36], which makes it impossible to find a position-resolved probability amplitude in the same way as

for electrons¹. Nevertheless, the *energy* density of a single photon in a particular inertial frame *is* localizable, and closely corresponds to what is actually measured by single photon counters.

Following this line of reasoning, a suitable ‘photon wave function’ can be derived from general considerations as an energy-density amplitude in a particular inertial reference frame [18, 19, 24, 25], which directly produces a complex form of the usual electric and magnetic fields $\vec{E}$ and $\vec{B}$ in that frame

$$\vec{F} = [\vec{E}/c + \vec{B}i]/\sqrt{\mu_0}. \quad (3)$$

Furthermore, the quantum mechanical derivation that produces (3) also produces Maxwell’s vacuum equations in an intriguing form that resembles the Dirac equation for massless spin-1 particles [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31] (shown here in both the momentum-operator notation and the equivalent coordinate representation)

$$i\hbar \partial_t \vec{F} = c|p| \hat{\chi} \vec{F}, \quad i\hbar \partial_t \vec{F} = c\hbar \vec{\nabla} \times \vec{F}, \quad (4a)$$

$$\hat{p} \cdot \vec{F} = 0, \quad -i\hbar \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0. \quad (4b)$$

Here $c|p|$ is the energy of a single photon, and $\hat{\chi} = \hat{s} \cdot \hat{p}/|p|$ is the *helicity* operator that projects the spin-1 matrix operator $\hat{s}$ onto the direction of the momentum operator $\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$, which produces the curl $(\hat{s} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} = i\vec{\nabla} \times \vec{F}$. The second equation (4b) appears as an auxiliary transversality condition satisfied by radiation fields far from matter [39, 36].

Treating the complex vector (3) as a single-particle wave function in the first-quantized quantum mechanical sense produces consistent results, and suggests that this vector should be a more natural representation for classical electromagnetic fields as well.² Indeed, the practical classical applications of (3) have been emphasized and reviewed by Białynicki-Birula [19, 40], who noted that this complex vector was also historically considered by Riemann [41] and Silberstein [42, 43] in some of the earliest investigations of electromagnetism. Remarkably, performing the standard second-quantization procedure using the complex Riemann–Silberstein wave function (3) identically reproduces the correctly quantized electromagnetic field [26, 28]. Moreover, if the number of photons in (4) is increased to two using the standard bosonic symmetrization procedure, the resulting equations of motion precisely reproduce the Wolf equations from classical coherence theory [44, 26] in a consistent way.

The explicit appearance of the momentum, spin, and helicity operators in (4) connects the complex field vector (3) to the second thread of research into the *local momentum, angular momentum, and helicity properties of structured optical fields* (such as optical vortices, complex interference fields, and near fields) [45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85]. The development of nano-optics employing structured light and local light-matter interactions has prompted the careful consideration of nontrivial local dynamical properties of light, even though such properties are usually considered to be unobservable in orthodox quantum-mechanical and field-theory approaches.

Indeed, it was traditionally believed that *spin and orbital angular momenta* of light are not meaningful separately, but only make sense when combined into the total angular momentum [86, 87, 39]. However, when small probe particles or atoms locally interact with optical fields that carry spin and orbital angular momenta, they clearly acquire separately observable intrinsic and extrinsic angular momenta that are proportional to the local expectation values of the spin $\hat{s}$ and orbital $\hat{r} \times \hat{p}$ angular momentum operators for photons, respectively. [47, 52, 53,

¹The absence of a probability density for photons follows from the Weinberg–Witten theorem [38] that forbids conserved four-vector currents for relativistic massless fields with spins higher than 1/2 [22, 26].

²The factor of $\hbar$ cancels in Maxwell’s equations (4) because the photon is massless. This explains the absence of this obviously quantum factor in classical electromagnetism.

54, 55, 56, 57, 74, 58]. (Akin to this, the spin and orbital angular-momentum contributions of gluon fields in QCD are currently considered as measurable in spite of the field-theory restrictions [88].) Similarly, the local *momentum density* of the electromagnetic field (as well as any local current satisfying the continuity equation) is not uniquely defined in field theory, so only the integral momentum value has been considered to be measurable. Nevertheless, when a small probe particle is placed in an optical field it acquires momentum proportional to the canonical momentum density of the field, i.e., the local expectation value of $\hat{\vec{p}}$ [64, 69, 85]. Remarkably, this same canonical momentum density of the optical field (and *not* the Poynting vector, see [64, 68, 74, 85]) is also recovered using other methods to measure the local field momentum [59, 60, 61, 62, 71, 72, 70], including the so-called *quantum weak measurements* [66, 89, 90, 69, 91]. Such local weak measurements of the momentum densities in light fields (i.e., analogues of the probability current for photons in the above ‘photon wave function’ approach) simultaneously corroborate predictions of the Madelung hydrodynamic approach to the quantum theory [92, 93], the Bohmian causal model [94, 95], and the *relativistic energy-momentum tensor in field theory* [96, 68, 69, 74]. In the quantum case, these local densities correspond to the associated classical mean (background) field, so can be observed only by averaging many measurements of the individual quantum particles [91].

Most importantly for our study, the reconsideration of the momentum and angular momentum properties of light has prompted discussion of the *helicity* density of electromagnetic fields. Recently it was shown that this helicity density naturally appears in local light-matter interaction with chiral particles [76, 77, 78, 79, 97, 80, 81, 85]. However, while in the quantum operator formalism the helicity $\hat{\chi}$ is an intuitive combination of the momentum and spin operators, the *field-theory* picture of the electromagnetic helicity is not so straightforward.

Namely, electromagnetic helicity [98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 68, 106, 107, 108] is a curious physical electromagnetic-field property that is only conserved during vacuum propagation. Unlike the momentum and angular momentum, which are related to the Poincaré spacetime symmetries according to Noethers theorem [123], the helicity conservation corresponds to the more abstract *dual symmetry* that involves the exchange of electric and magnetic fields [99, 101, 102, 105, 68, 106, 107, 108] (which was first discussed by Heaviside and Larmor [124, 125], and has been generalized to field and string theories beyond standard electromagnetism [109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122]). Due to this intimate relation with the field-exchange symmetry, the definition of the helicity must involve the electric and magnetic fields and their two associated vector-potentials on equal footing. Furthermore, the consideration of the dual symmetry, which is inherent to the vacuum Maxwell’s equations (4), recently reignited discussion regarding the proper dual-symmetric description for all vacuum-field properties, including the canonical momentum and angular-momentum densities [64, 126, 106, 68]. These quantities are dual *asymmetric* in the traditional electromagnetic field theory [127, 68]. Notably, the dual electric-magnetic symmetry become particularly simple and natural when the electric and magnetic fields and potentials are combined into the complex Riemann–Silberstein form (3) [112, 68]. Indeed, the continuous dual symmetry of the vacuum electromagnetic field takes the form of a simple $U(1)$ global phase-rotation

$$\vec{F} \mapsto \vec{F} \exp(i\theta). \quad (5)$$

It is this continuous ‘gauge symmetry of the photon wave function’ that produces the conservation of optical helicity as a consequence of Noether’s theorem. Moreover, the whole Lagrangian electromagnetic field theory in vacuum, including its fundamental local Noether currents (energy-momentum, and angular momentum), becomes more natural and self-consistent with a properly complex and dual-symmetric Lagrangian [68]. This provides further evidence that the complex form of (3) is a more fundamental representation for the electromagnetic field.

In this report we clarify why the complex Riemann–Silberstein representation (3) has funda-

mental significance for the electromagnetic field. To accomplish this goal, we carefully construct the natural (Clifford) algebra of spacetime [4] and detail its intrinsic complex structure. We then derive the entirety of the traditional electromagnetic theory as an inevitable consequence of this *spacetime algebra*, paying close attention to the role of the complex structure at each stage. The complex vector (3) will appear naturally as a relative 3-space expansion of a *bivector field*, which is a proper geometric (and thus frame-independent) object in spacetime. Moreover, this bivector field will have a crucial difference from (3): the scalar imaginary i will be replaced with an algebraic pseudoscalar I (also satisfying $I^2 = -1$) that is intrinsically meaningful to and required by the geometric structure of spacetime. This replacement makes the complex form of (3) *reference-frame-independent*, which is *impossible* when the mathematical representation is restricted to the usual scalar imaginary i . We find this replacement of the scalar i with I to be systematic throughout the electromagnetic theory, where it appears in electromagnetic waves, elliptical polarization, the normal variables for canonical field mode quantization, and the dual-symmetric internal rotations of the vacuum field. Evidently, the intrinsic complex structure inherent to the geometry of spacetime has deep and perhaps under-appreciated consequences for even our classical field theories.

This report is organized as follows. In Section 34.7.1 we briefly summarize some of the most interesting insights that we will uncover from spacetime algebra in the remainder of the report. In Section 34.7.2 we present a brief history of the formalism for the electromagnetic theory to give context for how the spacetime algebra approach relates. In Section 34.7.3 we give a comprehensive introduction to spacetime algebra, with a special focus on the emergent complex structure. In Section 34.7.4 we briefly extend this algebra to a spacetime manifold on which fields and calculus can be defined. In Section 34.7.5 we derive Maxwell's equations in vacuum from a *single*, simple, and inevitable equation. In Section 34.7.6 we consider three different potential representations, which are all naturally complex due to the dual symmetry of the vacuum field. In Section 34.7.7 we add a source to Maxwell's equation and recover the theory of electric and magnetic charges, along with the appropriately symmetrized Lorentz force and its associated energy-momentum and angular momentum tensors. In Section 34.7.8 we revisit the electromagnetic field theory. We start with the field Lagrangian and modify it to preserve dual symmetry in two related ways, derive the associated Noether currents, including helicity, and remark upon the breaking of dual symmetry that is inherent to the gauge mechanism. We conclude in Section 34.7.9.

Insights from the spacetime algebra approach

To orient the reader, we summarize a few of the interesting insights here that will arise from the spacetime algebra approach. These lists indicate what the reader can expect to understand from a more careful reading of the longer text. Note that more precise definitions of the quantities mentioned here are contained in the main text.

The Clifford product for spacetime algebra is initially motivated by the following basic benefits of its resulting *algebraic structure*:

- The primary reference-frame-independent objects of special relativity (i.e., scalars, 4-vectors, bivectors / anti-symmetric rank-2 tensors, pseudo-4-vectors, and pseudoscalars) are unified as distinct grades of a single object known as a multivector. An element of grade k *geometrically* corresponds to an oriented surface of dimension k (e.g., 4-vectors are line segments, while bivectors are oriented plane segments).
- The associative Clifford product combines the dot and wedge vector-products into a single and often invertible product (e.g., for a 4-vector $a^{-1} = a/a^2$).

- The symmetric part of the Clifford product is the dot product (Minkowski metric): $a \cdot b = (ab + ba)/2$. Thus, the square of a vector is its scalar pseudonorm $a^2 = \epsilon_a |a|^2$ with signature $\epsilon_a = \pm 1$.
- The antisymmetric part of the Clifford product is the wedge product $a \wedge b = (ab - ba)/2$ (familiar from differential forms), which generalizes the 3-vector cross product $(\times)$.
- The sign ambiguity of the spacetime metric signature (dot product) is fixed to $(+, -, -, -)$ from general considerations that embed spacetime into a larger sequence of (physically meaningful) nested Clifford subalgebras.

From this structure we obtain a variety of useful and enlightening *mathematical unifications*:

- The Dirac matrices γ_μ (usually associated with quantum mechanics) appear as a matrix representation of an orthonormal basis for the 4-vectors in spacetime algebra, emphasizing that they are not intrinsically quantum mechanical in nature. The matrix product in the matrix representation simulates the Clifford product. One does *not* need this matrix representation, however, and can work directly with γ_μ as purely algebraic 4-vector elements, which dramatically simplifies calculations in practice.
- The Dirac differential operator $\nabla = \sum_\mu \gamma^\mu \partial_\mu$ appears as the proper vector derivative on spacetime, with *no* matrix representation required.
- The usual 3-vectors from nonrelativistic electromagnetism are spacetime bivectors that depend on a particular choice of inertial frame, specified by a timelike unit vector γ_0 . A unit 3-vector $\vec{\sigma}_i = \gamma_i \gamma_0 = \gamma_i \wedge \gamma_0$ that is experienced as a spatial axis by an inertial observer thus has the geometric meaning of a *plane-segment* that is obtained by dragging the spatial unit 4-vector γ_i along the chosen proper-time axis γ_0 .
- The Pauli matrices are a matrix representation of an orthonormal basis of relative 3-vectors $\vec{\sigma}_i$, emphasizing that they are also not intrinsically quantum mechanical in nature. The matrix product in the matrix representation again simulates the Clifford product.
- Factoring out a particular timelike unit vector γ_0 from a 4-vector $v = \sum_\mu v^\mu \gamma_\mu = (v_0 + \vec{v})\gamma_0$ produces a paravector $(v_0 + \vec{v})$ as a sum of a relative scalar v_0 and relative vector $\vec{v} = \sum_i v_i \vec{\sigma}_i$. Thus relative paravectors and proper 4-vectors are *dual* representations under right multiplication by γ_0 .
- The usual 3-gradient vector derivative $\vec{\nabla} = \gamma_0 \wedge \nabla = \sum_i \vec{\sigma}_i \partial_i$ is the spatial part of the Dirac operator in a particular inertial frame specified by γ_0 .
- The d'Alembertian is the square of the Dirac operator $\nabla^2 = \partial_0^2 - \vec{\nabla}^2$.
- Directed integration can be defined using a Riemann summation on a spacetime manifold, where the measure $d^k x$ becomes an oriented k -dimensional geometric surface that is represented within the algebra. This integration reproduces and generalizes the standard results from vector analysis, complex analysis (including Cauchy's integral theorems), and differential geometry.

All scalar components of the objects in spacetime algebra are *purely real numbers*. Nevertheless, an intrinsic *complex structure* emerges within the algebra due to the geometry of spacetime itself:

- The “imaginary unit” naturally appears as the pseudoscalar (unit 4-volume) $I = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2\vec{\sigma}_3$, such that $I^2 = -1$. This pseudoscalar plays the role of the scalar imaginary i throughout the electromagnetic theory, without the need for any additional *ad hoc* introduction of a complex scalar field.
- The Hodge-star duality operation from differential forms is simply the right multiplication of any element by $I^{-1} = -I$. This operation transforms a geometric surface of dimension k into its orthogonal complement of dimension $4 - k$ (e.g., the Hodge dual of a 4-vector v is its orthogonal 3-volume vI^{-1} , or pseudo-4-vector).
- The quaternion algebra of Hamilton $(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ that satisfies the defining relations, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$ also appears as the (left-handed) set of spacelike planes (bivectors) in a relative inertial frame: $\mathbf{i} = \vec{\sigma}_1 I^{-1}$, $\mathbf{j} = -\vec{\sigma}_2 I^{-1}$, $\mathbf{k} = \vec{\sigma}_3 I^{-1}$. The bivectors $\vec{\sigma}_i I^{-1}$ directly describe the planes in which spatial rotations can occur, which explains why quaternions are particularly useful for describing spatial rotations.

In addition to the complex structure, *Lie group* and *spinor* structures also emerge:

- The bivector basis forms the Lie algebra of the Lorentz group under the Lie (commutator) bracket relation $[\mathbf{F}, \mathbf{G}] = (\mathbf{FG} - \mathbf{GF})/2$. Thus, bivectors directly generate Lorentz transformations when exponentiated.
- The Lorentz group generators are the 6 bivectors $\mathbf{S}_i = \vec{\sigma}_i I^{-1}$ and $\mathbf{K}_i = \vec{\sigma}_i$. Thus, writing the 15 brackets of the Lorentz group $[\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{S}_k$, $[\mathbf{S}_i, \mathbf{K}_j] = \epsilon_{ijk} \mathbf{K}_k$ and $[\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = -\epsilon_{ijk} \mathbf{S}_k$ in terms of a particular reference frame produces simple variations of the three fundamental commutation relations $[\vec{\sigma}_i, \vec{\sigma}_j] = \epsilon_{ijk} \vec{\sigma}_k I$ that are usually associated with quantum mechanical spin (using a Pauli matrix representation). Indeed, the bivectors $\vec{\sigma}_i I^{-1}$ are spacelike planes that generate spatial rotations when exponentiated (just as in quantum mechanics), while $\vec{\sigma}_i$ are the timelike planes, and thus generate Lorentz boosts when exponentiated.
- The usual 3-vector cross product is the Hodge-dual of the bivector Lie bracket: $\mathbf{F} \times \mathbf{G} = [\mathbf{F}, \mathbf{G}] I^{-1}$. Thus, the set of commutation relations $[\vec{\sigma}_i, \vec{\sigma}_j] = \epsilon_{ijk} \vec{\sigma}_k I$ between the 3-vectors $\vec{\sigma}_i$ are simply another way of expressing the usual cross-product relations $\vec{\sigma}_i \times \vec{\sigma}_j = \epsilon_{ijk} \vec{\sigma}_k$.
- General spinors ψ appear as the (closed) even-graded subalgebra of spacetime algebra (i.e., scalars α , bivectors $\mathbf{F}$, and pseudoscalars αI). Lorentz and other group transformations acquire a simplified form as double-sided products with these spinors (e.g., exponentiated generators like $\psi = \exp(-\alpha \vec{\sigma}_3 I - \phi I) = [\cos \alpha - \sin \alpha \vec{\sigma}_3 I][\cos \phi - \sin \phi I]$), just as is familiar from unitary transformations in quantum mechanics and spatial rotations expressed using quaternions.

All these mathematical benefits produce a considerable amount of *physical* insight about the *electromagnetic theory* in a straightforward way:

- The electromagnetic field is a bivector field $\mathbf{F}$ with the same components $F^{\mu\nu}$ as the usual antisymmetric tensor. This tensor is the corresponding multilinear function $\underline{\mathbf{F}}(v, w) = v \cdot \mathbf{F} \cdot w = \sum_{\mu\nu} v_\mu F^{\mu\nu} w_\nu$ that contracts its two 4-vector arguments (v and w) with the bivector $\mathbf{F}$.
- The electromagnetic field is an irreducibly complex object with an intrinsic phase $\mathbf{F} = \mathbf{f} \exp(\varphi I)$. This phase necessarily involves the intrinsic pseudoscalar (unit 4-volume) I of spacetime, and is intimately related to the appearance of electromagnetic waves and circular polarizations, with no need for any *ad hoc* addition of a complex scalar field.

- The continuous dual (electric-magnetic exchange) symmetry of the vacuum field is a $U(1)$ internal gauge-symmetry (phase rotation) of the field: $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F} \exp(\theta I)$. This symmetry produces the conservation of helicity via Noether's theorem.
- Bivectors decompose in a relative inertial frame into a complex pair of 3-vectors $\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I$, which clarifies the origin of the Riemann–Silberstein vector. Both real and imaginary parts in a particular frame are thus physically meaningful. Moreover, the geometric properties of I keep $\mathbf{F}$ reference-frame-independent, even though the decomposition into relative fields $\vec{E} = (\mathbf{F} \cdot \gamma_0)\gamma_0$ and $\vec{B}I = (\mathbf{F} \wedge \gamma_0)\gamma_0$ still implicitly depends upon the chosen proper-time axis γ_0 in the relative 3-vectors $\vec{\sigma}_i = \gamma_i \gamma_0$ that form the basis for $\vec{E}$ and $\vec{B}$.
- All of Maxwell's equations in vacuum reduce to a single equation: $\nabla \mathbf{F} = 0$.
- All of Maxwell's equations with sources (both electric and magnetic) also reduce to a single equation: $\nabla \mathbf{F} = j$, where $j = j_e + j_m I$ is a complex representation of both types of source, $j_e = (c\rho_e + \vec{J}_e)\gamma_0$ and $j_m = (c\rho_m + \vec{J}_m)\gamma_0$.
- The scalar Lorentz invariants of the electromagnetic field are the invariant parts of its square: $\mathbf{F}^2 = (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2) + 2(\vec{E} \cdot \vec{B})I$.
- A circularly polarized plane wave is intrinsically complex with the simple exponential form $\mathbf{F}(x) = (sk) \exp[\pm(k \cdot x)I]$, with spacelike unit vector $s = \vec{E}_0 \gamma_0$, coordinates $x = (ct + \vec{x})\gamma_0$, and null wavevector $k = (\omega/c + \vec{k})\gamma_0$ such that $k^2 = |\omega/c|^2 - |\vec{k}|^2 = 0$ is the usual dispersion relation. The sign of I corresponds to the invariant handedness (i.e., *helicity*) of the wave. Expanding the exponential in the relative frame γ_0 yields $\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I$ with the relative fields $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t/c) \pm \vec{\kappa} \times \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t/c)$ and $\vec{B} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t/c) \mp \vec{\kappa} \times \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t/c)$, with unit vector $\vec{\kappa} = \vec{k}/|\vec{k}|$ indicating the propagation direction.
- The vector-potential representation is $\mathbf{F} = \nabla z = (\nabla \wedge a_e) + (\nabla \wedge a_m)I$, where $z = a_e + a_m I$ is a complex representation of both electric $a_e = (\phi_e + \vec{A})\gamma_0$ and magnetic $a_m = (\phi_m + \vec{C})\gamma_0$ 4-vector potentials, each satisfying the Lorenz-FitzGerald gauge conditions $\nabla \cdot a_e = \nabla \cdot a_m = 0$. Maxwell's equation then has the simple wave equation form $\nabla^2 z = j$ with the correspondingly complex source current $j = j_e + j_m I$.
- A transverse and gauge-invariant bivector potential representation can be defined in a particular inertial frame $\mathbf{Z} = z_\perp \gamma_0 = \vec{A}_\perp - \vec{C}_\perp I$, where $\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{Z})\gamma_0$. This complex potential appears in the definition of the conserved optical helicity.
- The complex scalar Hertz potential $\Phi = \Phi_e + \Phi_m I$ for vacuum fields appears as $\mathbf{Z} = (\vec{\nabla} \times \vec{\Pi})I\Phi$ with a chosen unit direction vector $\vec{\Pi}$, and satisfies $\nabla^2 \Phi = 0$.
- The proper Lorentz force is $d(mw)/d\tau = \mathbf{F} \cdot (qw) = \langle \mathbf{F}(qw) \rangle_1$, where w is a proper 4-velocity of a particle with charge q and mass m .
- Making the charge q complex with a dual-symmetry phase rotation $q \mapsto qe^{\theta I} = q_e + q_m I$ produces an equivalent magnetic monopole description using the corresponding phase-rotated field $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F}e^{\theta I}$. The proper Lorentz force that includes these magnetic monopoles is still $d(mw)/d\tau = \langle \mathbf{F}(qw) \rangle_1$. Choosing electric sources is an arbitrary convention that essentially fixes this duality gauge freedom and *breaks the dual symmetry* of the fields.
- The symmetric (Belinfante) energy-momentum tensor is a bilinear function of the electromagnetic field and a chosen proper-time direction γ_0 that has a simple quadratic form:

$\bar{T}_{\text{sym}}(\gamma_0) = \mathbf{F}\gamma_0\tilde{\mathbf{F}}/2 = (\vec{E} + \vec{B}I)(\vec{E} - \vec{B}I)\gamma_0/2 = (\varepsilon + \vec{P})\gamma_0$. This tensor recovers the usual energy density $\varepsilon = (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)/2$ and Poynting vector $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{B}$ in the relative frame γ_0 , and has the same invariant mathematical form as the symmetric energy-momentum current for the Dirac theory of electrons.

- The corresponding (Belinfante) angular momentum tensor is a wedge product $\bar{M}_{\text{sym}}(\gamma_0) = x \wedge \bar{T}_{\text{sym}}(\gamma_0) = [\varepsilon\vec{x} - (ct)\vec{P}] + \vec{x} \times \vec{P}I^{-1}$ of a radial coordinate x with the energy-momentum tensor. The resulting angular momentum is a *bivector* that includes both boost and spatial-rotation angular momentum, which are distinguished by the extra factor of I in the spatial-rotational part (exactly as $\vec{\sigma}_i I^{-1}$ indicates a plane of rotation, while $\vec{\sigma}_i$ indicates a boost plane).
- The dual-symmetric Lagrangian density for the vacuum electromagnetic field is the scalar $\mathcal{L}_{\text{dual}}(x) = \langle(\nabla z)(\nabla z^*)\rangle_0/2$, which is a simple kinetic energy term for the complex vector potential field $z = a_e + a_m I$. This expands to the sum of independent terms for the electric and magnetic vector potentials: $\mathcal{L}_{\text{dual}} = \langle(\nabla a_e)^2\rangle_0/2 + \langle(\nabla a_m)^2\rangle_0/2$. Each term is identical in form to the traditional electromagnetic Lagrangian that only includes the electric part a_e .
- The conserved Noether currents of the dual-symmetric Lagrangian produce the proper conserved dual-symmetric canonical energy-momentum tensor, orbital and spin angular momentum tensors, and the helicity pseudovector.
- In the presence of only *electric* sources j_e , the dual symmetry of the Lagrangian is broken. The symmetry-breaking of this neutral vector boson doublet is entirely analogous to the boson doublet that is broken in the electroweak theory by the Brout-Englert-Higgs-Guralnik-Hagan-Kibble (BEHGHK, or Higgs) mechanism. According to this analogy, the second independent magnetic vector potential a_m that appears in the simple dual-symmetric electromagnetic Lagrangian may become related to the neutral Z_0 boson when additional interaction terms of the Standard Model are included.

34.7.2 A brief history of electromagnetic formalisms

In Science, it is when we take some interest in the great discoverers and their lives that it becomes endurable, and only when we begin to trace the development of ideas that it becomes fascinating.

James Clerk Maxwell [128]

The electromagnetic theory has a meandering mathematical history, largely due to the fact that the appropriate mathematics was being developed in parallel with the physical principles. As a result of this confusing evolution, the earlier and more general algebraic methods have been rediscovered and applied to electromagnetism only more recently. We summarize the highlights of this history in Table 1 for reference.

The original nonrelativistic unification of the physical concepts by Maxwell [129, 130, 131, 132, 133] was described as a set of 20 coupled differential equations of independent *scalar* variables. To conceptually simplify these equations down to 2 primary coupled equations that were easier to understand and solve, Maxwell later adopted and heavily advocated [134] the algebra of *quaternions*, which was developed by Hamilton [135, 136] as a generalization of the algebra of complex numbers to include three independent “imaginary” axes that can describe rotations in three-dimensional space. The quaternionic formulation of electromagnetism was

heavily attacked by Heaviside [124, 137], who reformulated Maxwell's treatment into 4 coupled equations using an algebra of *3-vectors* (with the familiar dot and cross products), which was developed by Gibbs [138] as a simple subset of the algebraic work of Grassmann [139] and its extensions by Clifford [140]. This 3-vector reformulation of Heaviside has since remained the most widely known and used formulation of electromagnetism in practice, with the electric field $\vec{E}$ as a polar 3-vector and the magnetic field $\vec{B}$ as an axial 3-vector.

The relativistic treatment of electromagnetism has subsequently followed a rather different mathematical path, however, and now deviates substantially from these earlier foundations. Lorentz [141, 142, 143] first applied his eponymous transformations to moving electromagnetic bodies using the Heaviside formulation. His initial results were corrected and symmetrized by Poincaré [144, 145], who suggested that the Lorentz transformation could be considered as a geometric rotation of a *4-vector* that had an *imaginary* time coordinate $(ct)i$ scaled by a constant c (corresponding to the speed of light in vacuum). This was the first unification of space and time into a single 4-vector entity of *spacetime*. The need for this invariant constant c was independently noticed by Einstein [146], and elevated to a postulate for his celebrated special theory of relativity that removed the need for a background aether. The 4-vector formalism suggested by Poincaré was fully developed by Minkowski [147], but Einstein himself argued against this construction [148] until his later work on gravitation made it necessary [149].

The 4-vector formalism of Poincaré and Minkowski was meanwhile developed by Sommerfeld [150, 151], who emphasized that the electromagnetic field was not a 4-vector or combination of 4-vectors, but instead was a different type of object entirely that he called a "*6-vector*". This 6-vector became intrinsically *complex* due to the imaginary time $(ct)i$; specifically, it had both electric and magnetic components that differed by a factor of i and transformed into one another upon Lorentz boosts. Riemann [41] and Silberstein [42, 43] independently noted this intrinsic complexity while working in the Heaviside formalism, which prompted them to write the total nonrelativistic field as the single complex vector (3) in agreement with the relativistic 6-vector construction of Sommerfeld.

Historically, however, the further development of the spacetime formalism of Poincaré led in a different direction. Minkowski [152] dropped the explicit scalar imaginary i attached to the time coordinate in favor of a different definition of the 4-vector dot product that produced the needed factor of -1 directly. This change in 4-vector notation removed the *ad hoc* scalar imaginary, but also effectively discouraged the continued development of the 6-vector of Sommerfeld (and the Riemann-Silberstein vector) by making the complex structure of spacetime implicit. In the absence of an explicit complex structure to distinguish the electric and magnetic field components, these components were reassembled into a *rank-2 antisymmetric tensor* (i.e., a multilinear antisymmetric function taking two vector arguments), whose characteristic components could be arranged into a 4x4 antisymmetric matrix

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Although the same components are preserved, this tensor formulation is more difficult to directly relate to the 3-vector formalism.

Of particular concern for practical applications, the familiar 3-vector cross product of Gibbs could no longer be used with the updated Minkowski 4-vector formalism, and its component representation with tensors like (6) was less conceptually clear. Without this cross product, laboratory practitioners had reduced physical intuition about the formalism, which hampered derivations and slowed the adoption of the relativistic formulation. In fact, an algebraic solution

History of Electromagnetic Formalisms		
Year	Nonrelativistic	Relativistic
1844	<i>Exterior Algebra (Grassman)</i>	
1853	<i>Quaternions (Hamilton)</i>	
1861	Scalar Components (Maxwell)	
1878	<i>Geometric Algebra (Clifford)</i>	
1881	Quaternions (Maxwell)	
1892	3-Vectors (Gibbs & Heaviside)	
1899	<i>Differential Forms (Cartan)</i>	
1901	Complex 3-Vectors (Riemann)	
1905	<i>4-Vectors with Imaginary Time (Poincaré)</i>	
1907	Complex 3-Vectors (Silberstein)	
1908	<i>4-Vectors (Minkowski)</i>	
1910	Complex 6-Vectors (Sommerfeld)	
1911	Exterior Algebra (Wilson & Lewis)	
1916	Tensor Scalar Components (Einstein)	
1918	Differential Forms (Weyl)	
1966	Spacetime Algebra (Hestenes)	

Table 1: A brief history of the development of mathematical formalisms for representing the electromagnetic theory, showing the purely mathematical developments in italic font and their use in electromagnetism unitalicized. The bolded formalisms are the two most commonly used today: the nonrelativistic 3-Vectors of Gibbs preferred by Heaviside, and the relativistic tensor scalar components preferred by Einstein. Spacetime algebra was introduced by Hestenes in 1966 following Clifford’s 1878 generalization of Grassman’s original 1844 exterior algebra that directly describes oriented geometric surfaces. Importantly, this spacetime algebra contains and generalizes *all* the other formalisms in a simple and powerful way.

to this problem in the form of the *wedge product* had already been derived by Grassmann [139] and Clifford [140] (as we shall see shortly), and had even been adopted by Cartan's theory of differential forms [153]. However, this solution remained obscure to the physics community at the time (though it was partly rediscovered by Wilson and Lewis [154]). As such, the readily available methods for practical calculations with 4-vectors and tensors were either

1. to convert the equations back into the nonrelativistic 3-vector notation and abandon manifest Lorentz covariance, or
2. to work in *component-notation* like $F^{\mu\nu}$ above (and akin to the original papers by Maxwell), effectively obscuring the implicit algebraic structure of the relativistic theory.

The choice between these two practical alternatives has essentially created a cultural divide in the development and understanding of electromagnetism: the approach using nonrelativistic 3-vectors is still dominant in application-oriented fields like optics where physical intuition is required (e.g., [155]), while the component notation is dominant in theoretical high energy physics and gravitational communities that cannot afford to hide the structural consequences of relativity (though Cartan's differential forms do occasionally make an appearance, e.g., [156]). To make the component notation less cumbersome, Einstein developed an index summation convention for general relativity [157] (where repeated component indices are summed³: $v \cdot w = v^\mu w_\mu$), which has now been widely adopted by most practitioners who use component-based manipulations of relativistic quantities. Indeed, the formal manipulations of components using index-notation has essentially become synonymous with tensor analysis.

An elegant solution to this growing divide in formalisms was proposed a half-century later by Hestenes [4], who carefully revisited and further developed the geometric and algebraic work of Grassmann [139] and Clifford [140] to construct a full *spacetime algebra*. In modern mathematical terms, this spacetime algebra is the *orthogonal Clifford algebra* [158] that is uniquely constructed from the spacetime metric (dot product) proposed by Minkowski. This modern formalism has the great benefit of preserving and embracing all the existing algebraic approaches in use (including the complex numbers, the quaternions, and the 3-vectors of Gibbs), but it also extends them in a natural way to allow simple manipulations of relativistically invariant objects. For example, using spacetime algebra the electromagnetic field can be written in a relativistically invariant way (as we shall soon see) as

$$\mathbf{F} = [\vec{E}/c + \vec{B}I]/\sqrt{\mu_0}, \quad (7)$$

which has the same complex form as the Riemann–Silberstein vector (3). Importantly, however, the algebraic element I satisfying $I^2 = -1$ is *not* the scalar imaginary i added in an *ad hoc* way as in (3), but is instead an intrinsic *geometric* object of spacetime itself (i.e., the unit 4-volume) that emerges automatically alongside the 3-vector formalism of Gibbs. The geometric significance of the factor I makes the expression (7) a proper geometric object that is invariant under reference-frame changes, unlike (3). Moreover, the scalar components of (7) are precisely equivalent to the tensor components (6) even though $\mathbf{F}$ is not understood as an antisymmetric tensor. It is a geometric object in spacetime called a *bivector*, which is a modern refinement of the 6-vector concept introduced by Sommerfeld. The manifestly geometric significance of the electromagnetic field made manifest in this approach reaffirms and augments the topological fiber bundle foundations of modern gauge-field theories that was observed by Yang and Mills [159, 160, 161, 162], Chern and Simons [163], and many others in theoretical high energy physics [164, 165, 166, 167, 168, 169, 170].

The spacetime algebra of Hestenes has been heavily developed by a relatively small community [6, 7, 8, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178], but has recently been growing in

³Note that we will not use this convention in this report for clarity.

popularity as a useful tool, and has been cross-pollinating with other modern mathematical investigations of Clifford algebras [158, 179, 180]. Indeed, spacetime algebra has been mentioned in a growing number of recent textbooks about algebraic approaches to physics and mathematics based on the work of Grassmann, Clifford, and Hestenes more generally [5, 9, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188]. Nevertheless, many of these treatments have under-emphasized certain features of spacetime that will be important for our discussion (such as its intrinsic complex structure) so we include our own introduction to this formalism that is tuned for applications in electromagnetism in what follows, assuming no prior background.

34.7.3 Spacetime algebra

Mathematics is taken for granted in the physics curriculum—a body of immutable truths to be assimilated and applied. The profound influence of mathematics on our conceptions of the physical world is never analyzed. The possibility that mathematical tools used today were invented to solve problems in the past and might not be well suited for current problems is never considered.

David Hestenes [6]

Physically speaking, *spacetime algebra* [4, 5, 6, 7] is a complete and natural algebraic language for compactly describing physical quantities that satisfy the postulates of special relativity. Mathematically speaking, it is the largest associative algebra that can be constructed with the vector space of spacetime equipped with the Minkowski metric. It is an orthogonal Clifford algebra [158], which is a powerful tool that enables manifestly frame-independent and coordinate-free manipulations of geometrically significant objects. Unlike the dot and cross products used in standard vector analysis, the Clifford product between vectors is often *invertible* and not constrained to three dimensions. Unlike the component manipulations used in tensor analysis, spacetime algebra permits compact and component-free derivations that make the intrinsic geometric significance of physical quantities transparent.

When spacetime algebra is augmented with calculus then it subsumes many disparate mathematical techniques into a single comprehensive formalism, including (multi)linear algebra, vector analysis, complex analysis, quaternion analysis, tensor analysis, spinor analysis, group theory, and differential forms [5, 171, 172, 173]. Moreover, for those who are unfamiliar with any of these mathematical techniques, spacetime algebra provides an encompassing framework that encourages seamless transitions from familiar techniques to unfamiliar ones as the need arises. As such, spacetime algebra is also a useful tool for pedagogy [6, 7].

During our overview we make an effort to illustrate how spacetime algebra contains and generalizes all the standard techniques for working with electromagnetism. Hence, one can appreciate spacetime algebra not as an obscure mathematical curiosity, but rather as a principled, practical, and powerful *extension* to the traditional methods of analysis. As such, all prior experience with electromagnetism is applicable to the spacetime algebra approach, making the extension readily accessible and primed for immediate use.

Spacetime

Recall that in special relativity [146] one postulates that the scalar time t and vector spatial coordinates $\vec{x}$ in a particular inertial reference frame always construct an invariant interval $(ct)^2 - |\vec{x}|^2$ that does not depend on the reference frame, where c is the speed of light in vacuum. An elegant way of encoding this physical postulate is to combine the scaled time and spatial components into a proper 4-vector $x = (ct, x_1, x_2, x_3)$ with a squared length equal

to the invariant interval [144, 145, 147]. The proper notion of length is defined using the relativistic scalar (dot) product between two 4-vectors, which can be understood as a symmetric bilinear function $\eta(a, b)$ that takes two vector arguments a and b and returns their scalar shared length. This dot product is known as the *Minkowski metric* [152]. In terms of components $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ and $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ in a particular inertial frame, this metric has the form $a \cdot b \equiv b \cdot a \equiv \eta(a, b) = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$. The proper squared length of a 4-vector x is therefore $x \cdot x$. Since there is one positive sign and three negative signs in this dot product, we say that it has a mixed *signature* $(+, -, -, -)$ and denote the vector space of 4-vectors as $\mathcal{M}_{1,3}$ to make this signature explicit⁴.

All physical vector quantities in special relativity are postulated to be 4-vectors in $\mathcal{M}_{1,3}$ that satisfy the Minkowski metric. These vectors are geometric quantities that do not depend on the choice of reference frame, so they shall be called *proper* relativistic objects in what follows. Importantly, the Minkowski metric is qualitatively different from the standard Euclidean dot product since it does not produce a positive length. Indeed, the mixture of positive and negative signs can make the length of a vector positive, negative, or zero, which produces three qualitatively different classes of vectors. We call these classes of vectors *timelike*, *spacelike*, and *lightlike*, respectively. As such, we can write the length, or *pseudonorm*, of a 4-vector a as $a \cdot a = \epsilon_a |a|^2$ in terms of a positive magnitude $|a|^2$ and a *signature* $\epsilon_a = \pm 1$ that is $+1$ for timelike vectors and -1 for spacelike vectors. For lightlike vectors the magnitude $|a|^2$ vanishes; thus, unlike for Euclidean vector spaces, a zero magnitude vector need not be the zero vector.

The Minkowski metric η and the vector space $\mathcal{M}_{1,3}$ are sufficient for describing proper vector quantities in special relativity, such as time-space $(ct, \vec{x})$ and energy-momentum $(\mathcal{E}/c, \vec{p})$. Since the laws of physics do not depend on the choice of reference frame, we expect that all physical quantities should be similarly represented by proper geometric objects like vectors. However, the electromagnetic field presents us with a conundrum: the polar 3-vector $\vec{E}$ of the electric field and axial 3-vector $\vec{B}$ of the magnetic field in a particular reference frame do not combine into proper 4-vectors. Relativistic angular momentum suffers a similar dilemma: the polar 3-vector $\vec{N} = (ct)\vec{p} - (\mathcal{E}/c)\vec{x}$ of the boost angular momentum (also known as the dynamic mass moment) and the axial 3-vector $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ of the orbital angular momentum in a particular reference frame do not combine into proper 4-vectors. To resolve these dilemmas, the components of these vectors are typically assembled into the components $F^{\mu\nu}$ and $M^{\mu\nu}$ of rank-2 antisymmetric *tensors*, as we noted in (6) for the electromagnetic field [127, 189]. This solution, while formally correct at the component level, is conceptually opaque. Why does a single rank-2 tensor $F^{\mu\nu}$ decompose into two 3-vector quantities $\vec{E}$ and $\vec{B}$ in a relative frame? How does a rank-2 tensor, which is mathematically defined as a multilinear *function* with two vector arguments, conceptually correspond to a physical quantity like the electromagnetic field or angular momentum? Is there some deeper significance to the mathematical space in which the tensors $F^{\mu\nu}$ and $M^{\mu\nu}$ reside? Do the proper tensor descriptions have any geometric significance in Minkowski space? Evidently, the vector space $\mathcal{M}_{1,3}$ does not contain the complete physical picture implied by special relativity, since it must be augmented by quantities like $F^{\mu\nu}$ and $M^{\mu\nu}$.

Spacetime product

To obtain the complete picture of special relativity in a systematic and principled way, we make a critical observation: any physical manipulation of vector quantities uses not only

⁴Note that there is a sign-ambiguity in the spacetime interval, so one can seemingly choose either $(+, -, -, -)$ or $(-, +, +, +)$ for the metric signature, the latter being the initial choice of Poincaré. However, this choice is not completely arbitrary from an algebraic standpoint: it produces geometrically distinct spacetime algebras [158]. We choose the signature here that will produce the spacetime algebra that correctly contains the relative Euclidean 3-space as a proper subalgebra, which we detail in Section 34.7.3.

addition, but also *vector multiplication*. Indeed, standard treatments of electromagnetism involving relative 3-vectors use both the symmetric dot product and the antisymmetric vector cross product to properly discuss the physical implications of the theory. The vector space $\mathcal{M}_{1,3}$ only specifies the relativistic version of the dot product in the form of the Minkowski metric. Without introducing the proper relativistic notion of the cross product the physical picture of spacetime is incomplete.

Mathematically, the introduction of a product on a vector space creates an *algebra*. Hence, we seek to construct the appropriate algebra for spacetime from the vector space $\mathcal{M}_{1,3}$ by introducing a suitable vector product. We expect this vector product to be generally *noncommutative*, since the familiar cross product is also noncommutative⁵. We also expect the vector product to enlarge the mathematical space in order to properly accommodate quantities like the electromagnetic field tensor $F^{\mu\nu}$.

To accomplish these goals, we define the appropriate spacetime product to satisfy the following four properties for any vectors $a, b, c \in \mathcal{M}_{1,3}$:

$$a(bc) = (ab)c \quad (\text{Associativity}) \quad (8a)$$

$$a(b + c) = ab + ac \quad (\text{Left Distributivity}) \quad (8b)$$

$$(b + c)a = ba + ca \quad (\text{Right Distributivity}) \quad (8c)$$

$$a^2 = \eta(a, a) = \epsilon_a |a|^2 \quad (\text{Contraction}) \quad (8d)$$

Note that we omit any special product symbol for brevity. The contraction property (8d) distinguishes the resulting spacetime algebra as an *orthogonal Clifford algebra* [158] that is generated by the metric η and the vector space $\mathcal{M}_{1,3}$. This Clifford algebra is the largest associative algebra that can be constructed solely from spacetime, so it will contain all other potentially relevant algebras as subalgebras. Indeed, this nesting of algebras will be quite useful for practical calculations, as we shall see.

Decomposing the resulting associative vector product into symmetric and antisymmetric parts produces the proper spacetime generalizations to the 3-vector dot and cross products that we were seeking [140]:

$$ab = a \cdot b + a \wedge b. \quad (9)$$

The symmetric part of the product,

$$a \cdot b \equiv \frac{1}{2}(ab + ba) = b \cdot a = \eta(a, b), \quad (10)$$

is precisely the scalar (dot) product inherited from the spacetime structure of $\mathcal{M}_{1,3}$. The last equivalence follows from the contraction relation $(a+b)^2 = \eta(a+b, a+b)$ demanded by property (8d).

The antisymmetric part of the product,

$$a \wedge b \equiv \frac{1}{2}(ab - ba) = -b \wedge a, \quad (11)$$

is called the *wedge product* and is the proper generalization of the vector cross product to relativistic 4-vectors⁶. It produces a qualitatively new type of object called a *bivector* that does not exist *a priori* in $\mathcal{M}_{1,3}$, as anticipated. A bivector ($a \wedge b$) produced from spacelike vectors a and b has the geometric meaning of a *plane segment* with magnitude equal to the area of the parallelogram bounded by a and b , and a surface orientation (handedness) determined by

⁵Note that algebraic noncommutativity has nothing *a priori* to do with the noncommutativity in quantum mechanics.

⁶This is precisely Grassman's exterior wedge product [139], adopted by Cartan when defining differential forms [153].

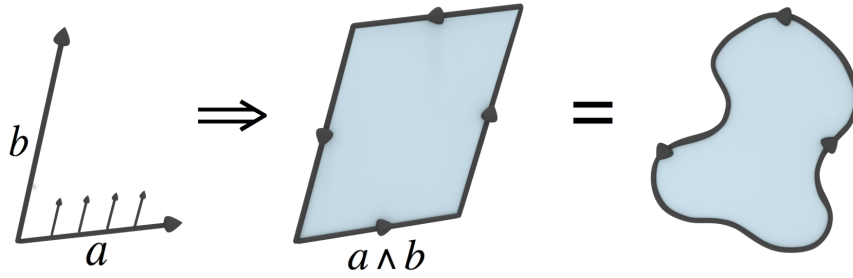


Figure 4: The wedge product $a \wedge b$ between spacelike vectors a and b produces an oriented plane segment known as a bivector. Conceptually, the vector a slides along the vector b , sweeping out a parallelogram with area $|a \wedge b|$. The orientation of this area follows the right-hand rule, and may be visualized as a circulation around the boundary of the plane segment. Importantly, a bivector is characterized entirely by its magnitude and orientation, so the plane segment resulting from a wedge product may be deformed into any shape that preserves these two properties. Conversely, a bivector (of definite signature) may be factored into a wedge product between any two vectors that produce the same area and orientation $a \wedge b = c \wedge d$; if the two chosen factors are also orthogonal (i.e., $c \cdot d = 0$), then the bivector is a simple product of the orthogonal factors $c \wedge d = cd$.

the right-hand rule; this construction is illustrated in Figure 4. Hence, the wedge product generalizes the cross product by directly producing an oriented plane segment, rather than a vector normal to that surface. This generalization is important in spacetime since there is no unique normal vector to a plane in four dimensions. We will see in Sections 34.7.3, 34.7.3, and 34.7.5 that the electromagnetic field is properly expressed as precisely such a bivector.

The vector product (9) combines the nonassociative dot and wedge products into a single *associative* product. The result of the product thus decomposes into the sum of distinct scalar and bivector parts, which should be understood as analogous to expressing a complex number as a sum of distinct real and imaginary parts. Just as with the study of complex numbers, it will be advantageous to consider these distinct parts as composing a unified whole, rather than separating them prematurely. We will explore this similarity more thoroughly in Section 34.7.3.

A significant benefit of combining both the dot and wedge products into a single associative product in this fashion is that an *inverse* may then be defined

$$a^{-1} = \frac{a}{a^2}, \quad (12)$$

provided a is not lightlike (i.e., $a^2 \neq 0$). Note that $a^2 = \epsilon_a |a|^2$ is a scalar by property (8d), so it trivially follows that $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$. Importantly, neither the dot product nor the wedge product alone may be inverted; only their combination as the sum (9) retains enough information to define an inverse.

Multivectors

By iteratively appending all objects generated by the wedge product (11) to the initial vector space $\mathcal{M}_{1,3}$, we construct the full *spacetime algebra* $\mathcal{C}_{1,3}$. This notation indicates that the spacetime algebra is a *Clifford* algebra generated from the metric signature $(+, -, -, -)$. Importantly, all components in this Clifford algebra are purely *real*—we will not need any *ad hoc* addition of the complex scalar field in what follows.

The repeated wedge products produce 5 linearly independent subspaces of the total algebra, known as *grades*, which are illustrated in Figure 5. Each grade is a distinct type of “directed

Grade	Orthonormal Basis	Blade Type	Geometry
4	γ_{0123}	Pseudoscalars	4-volumes
3	γ_{123} γ_{230} γ_{310} γ_{120}	Pseudovectors	3-volumes
2	γ_{10} γ_{20} γ_{30} γ_{23} γ_{31} γ_{12}	Bivectors	planes
1	γ_0 γ_1 γ_2 γ_3	Vectors	lines
0	1	Scalars	points

$M = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3 + \langle M \rangle_4$
Multivectors

Figure 5: Graded basis for the spacetime algebra $\mathcal{C}_{1,3}$. Each multivector $M \in \mathcal{C}_{1,3}$ decomposes into a sum of distinct and independent grades $k = 0, 1, 2, 3, 4$, which can be extracted as grade-projections $\langle M \rangle_k$. The oriented basis elements of grade-1 $\{\gamma_\mu\}_{\mu=0}^3$ are an orthonormal basis ($\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu}$) for the Minkowski 4-vectors $\mathcal{M}_{1,3}$. An oriented basis element of grade- k , such as $\gamma_{\mu\nu} \equiv \gamma_\mu \gamma_\nu = \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu = -\gamma_\nu \wedge \gamma_\mu$ (with $\mu \neq \nu$), is constructed as a product of k of these orthonormal 4-vectors. Interchanging indices permutes the wedge products, which only changes the sign of the basis element; hence, only the independent basis elements of each grade are shown. The color coding indicates the signature of each basis element (see Section 34.7.3), with blue being +1 and red being -1. The boxes and shading indicate useful dualities of the algebra: the solid and dashed boxes are (Hodge) dual under right multiplication of the pseudoscalar $I = \gamma_{0123}$ (see Section 34.7.3), while within each box the shaded region is dual to the unshaded region under right multiplication of the timelike basis vector γ_0 (see Section 34.7.3). These dualities are further detailed in Figures 7 and 8.

number” [176]. The real scalars (pure numbers) $\alpha \in \mathbb{R}$ are grade 0, while the 4-vectors (line segments) $a \in \mathcal{M}_{1,3}$ are grade 1. The *bivectors* (plane segments) $(a \wedge b)$ appearing in (11) are grade 2. Successive wedge products will also produce *trivectors* (*pseudovectors*, 3-volume segments) $(a \wedge b \wedge c)$ of grade 3 and *quadvectors* (*pseudoscalars*, 4-volume segments) $(a \wedge b \wedge c \wedge d)$ of grade 4, which completes the algebra. We will refer to the elements of a grade- k subspace as *k-blades* in what follows to disambiguate them from the grade-1 vectors.

For concreteness, we systematically generate a complete graded basis for $\mathcal{C}_{1,3}$ as all independent products of the vectors $\{\gamma_\mu\}_{\mu=0}^3$ in a chosen basis of $\mathcal{M}_{1,3}$. The rich structure of the resulting graded basis is also detailed in Figure 5. We choose the starting vector basis to be orthonormal $\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu}$ in the sense of the Minkowski metric, so $\gamma_0^2 = 1$ and $\gamma_j^2 = -1$ for $j = 1, 2, 3$. The choice of notation for the basis is motivated by a deep connection to the Dirac γ -matrices that we will clarify in Section 34.7.3.

The basis of 0-blades is the real number 1. The basis of 1-blades is the chosen set of four orthonormal vectors γ_μ themselves. The $(16 - 4) = 12$ possible products of these vectors that produce bivectors (i.e., with $\mu \neq \nu$) $\gamma_\mu \gamma_\nu = \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \equiv \gamma_{\mu\nu} = -\gamma_{\nu\mu}$ produce only $(16 - 4)/2 = 6$ independent bivectors $\gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$ due to the antisymmetry of the wedge product; these independent elements form the oriented basis of 2-blades. Similarly, products of orthogonal vectors with these bivectors $\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\delta = \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \wedge \gamma_\delta \equiv \gamma_{\mu\nu\delta}$ produce only 4 independent trivectors $\gamma_{123}, \gamma_{120}, \gamma_{230}, \gamma_{310}$ that form the oriented basis of 3-blades. Finally, the product of all four orthogonal vectors produces only a single independent element $\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 \equiv \gamma_{0123}$ that serves as the basis for the 4-blades. Hence, there are $2^4 = 16$ independent basis

elements for the spacetime algebra, partitioned into 5 grades of “4 choose k ,” $4!/k!(4-k)!$, independent basis k -blades.

The 4-blade γ_{0123} geometrically signifies the same unit 4-volume in any basis, and will be particularly important in what follows, so we give it a special notation

$$I \equiv \gamma_{0123}. \quad (13)$$

This algebraic element is the *pseudoscalar* for spacetime. That is, its scalar multiples αI act as scalars that flip sign under an inversion of the handedness of spacetime (i.e., flipping the orientation of any one basis direction). The notation of I is motivated by the fact that $I^2 = \gamma_0^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 = (1)(-1)(-1)(-1) = -1$, so it will perform a similar function to the scalar imaginary i . Indeed, the element I provides spacetime with an intrinsic *complex structure* without any *ad hoc* introduction of the scalar complex numbers⁷. We will detail this complex structure in Section 34.7.3.

Any *multivector* $M \in \mathcal{C}_{1,3}$ in the spacetime algebra may be written as a sum of independent k -blades

$$M = \alpha + v + \mathbf{F} + \mathfrak{T} + \beta I \quad (14)$$

where the Greek letters α, β are real numbers, the lowercase Roman letter v is a vector with 4 real components, the boldface Roman letter $\mathbf{F}$ is a bivector with 6 real components, and the Fraktur letter $\mathfrak{T}$ is a trivector with 4 real components. Each of these independent grades are distinct and proper geometric objects. We shall see in Section 34.7.3 that in practice we can dramatically simplify the description of multivectors by exploiting dualities of the algebra; in particular, we will be able to dispense with trivectors (and their elaborate notation) altogether by rewriting them as *pseudovectors* $\mathfrak{T} = vI$. To keep these distinctions conceptually clear, we shall make an effort to maintain useful notational conventions throughout this work that are summarized in Table 2 for reference.

Each k -blade in a multivector can be extracted by a suitable grade-projection, denoted as $\langle M \rangle_k$. For example, the bivector projection of (14) is $\langle M \rangle_2 = \mathbf{F}$. Notably, the scalar projection satisfies the cyclic property

$$\langle MN \rangle_0 = \langle NM \rangle_0 \quad (15)$$

for any two multivectors M and N , so is an algebraic *trace* operation. In fact, this trace is entirely equivalent to the matrix trace operation, which can be verified by considering a (Dirac) matrix representation of the spacetime algebra $\mathcal{C}_{1,3}$ that simulates the noncommutative vector product using the standard matrix product. We will comment more on such a matrix representation in Section 34.7.3, but we shall not require it in what follows.

All proper physical quantities in spacetime must either correspond to pure k -blades, or multivectors that combine k -blades of differing grades. These are the only frame-independent objects permitted by the constraints of special relativity. Hence, the expansion (14) of a general multivector indicates the full mathematical arena in which relativistic physics must occur. The algebraic structure allows us to manipulate each of these proper objects with equal ease and finesse.

The added complication of multivectors $M \in \mathcal{C}_{1,3}$ over the original 4-vectors $v \in \mathcal{M}_{1,3}$ may seem excessive and intimidating at first glance; however, as we have been suggesting, the added structure contained in a full multivector is in fact necessary for a proper description

⁷It is worth emphasizing that there is no unique square root of -1 . There are many algebraic elements in $\mathcal{C}_{1,3}$ that square to -1 , each with distinct geometric significance. The scalar imaginary i of standard complex analysis does not specify any of this additional structure; hence, it is often enlightening to determine whether a particular $\sqrt{-1}$ is implied by a generic i that appears in a traditional physics expression. We will show in what follows that I is indeed the proper physical meaning of i throughout the electromagnetic theory.

Notation	Description
α, β, ω	scalars (real numbers)
a, b, v, w	4-vectors
F, G	bivectors
vI	pseudovectors
αI	pseudoscalars
M	multivector
$\zeta = \alpha + \beta I$	complex scalar
$z = v + wI$	complex vector
∇	4-gradient, Dirac operator
$\underline{T}(b), \overline{T}(b)$	tensor, adjoint tensor
γ_μ	orthonormal basis (Lorentz frame) for 4-vectors
$\gamma^\mu = \gamma_\mu^{-1}$	reciprocal basis for 4-vectors
$\vec{E}, \vec{B}$	relative 3-vectors
$\vec{\sigma}_i = \gamma_i \gamma_0$	orthonormal basis for 3-vectors
$\vec{\nabla} = \gamma_0 \wedge \nabla$	relative 3-gradient
$\partial_0 = \gamma_0 \cdot \nabla$	relative time derivative
$F^{\mu\nu}, v^\mu$	scalar components ($\mu = 0, 1, 2, 3$)
F^{ij}, v^k	spatial scalar components ($i, j, k = 1, 2, 3$)
$\eta_{\mu\nu}$	Minkowski metric tensor
$\delta_{\mu\nu}$	Euclidean metric tensor / Kronecker delta
$\epsilon_{ijk}, \epsilon_{\mu\nu\delta\kappa}$	anti-symmetric Levi-Civita symbols

Table 2: Notational distinctions. Proper (frame-independent) quantities (top) have the different grades distinguished by font type, boldface, and capitalization for simplicity, while relative (frame-dependent) quantities (bottom) conform to traditional vector or index annotations for clarity.

Grade	Blade Type	Physical Examples
0	Scalars	charge q mass m proper time τ
1	Vectors	coordinates x proper velocity $w = dx/d\tau$ energy-momentum p force $dp/d\tau$ electric potential a_e electric current j_e
2	Bivectors	electromagnetic field $\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I$ angular momentum $\mathbf{M} = x \wedge p = -\vec{N} + \vec{L}I^{-1}$ torque $d\mathbf{M}/d\tau$ vorticity $\nabla \wedge w$
3	Pseudovectors	magnetic potential $a_m I$ magnetic pseudocurrent $j_m I$ helicity pseudocurrent XI
4	Pseudoscalars	magnetic charge $q_m I$ phase φI

Table 3: Examples of common physical quantities by grade. All these physical quantities appear in any proper description of relativistic physics, and fit naturally within the graded structure of spacetime algebra.

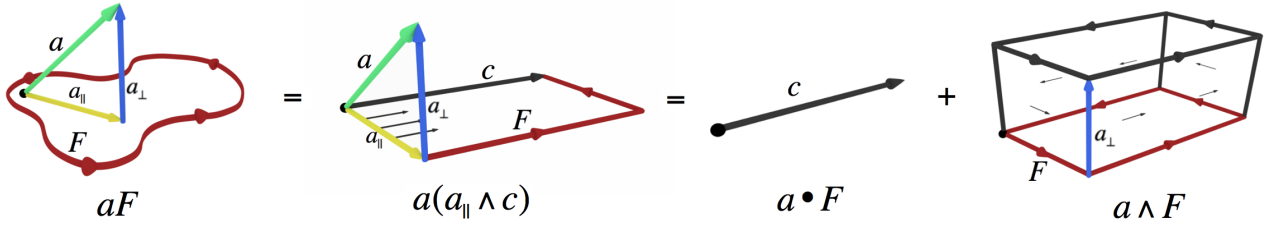


Figure 6: The product $a\mathbf{F}$ between a vector a (green) and bivector $\mathbf{F}$ (red) decomposes into a vector $a \cdot \mathbf{F}$ and a trivector $a \wedge \mathbf{F}$ part. A spacelike $\mathbf{F}$ is an oriented plane segment that may be deformed into a parallelogram $\mathbf{F} = a_{\parallel} \wedge c$ that shares a side with the part of the spacelike vector $a = a_{\parallel} + a_{\perp}$ that is parallel to $\mathbf{F}$ (yellow). The contraction extracts the orthogonal vector $c = a \cdot \mathbf{F}$ (black), while the inflation drags the bivector $\mathbf{F}$ along the perpendicular vector $a_{\perp}$ (blue) to produce an oriented trivector volume $a_{\perp} \wedge \mathbf{F}$.

of spacetime quantities. Indeed, as we will see in more detail in Sections 34.7.3 and 34.7.3, each distinct blade of a general multivector is in fact a familiar type of object that appears in the standard treatments of relativistic physics. We summarize several examples in Table 3 for reference. The multivector construction unifies all these quantities into a comprehensive whole in a principled way. Moreover, the Clifford product provides them with a wealth of additional structure, which we will exploit to make manipulations of multivectors simple in practice.

Bivectors: products with vectors

We will see in the following sections that several dualities of spacetime algebra allow a complete understanding in terms of scalars, vectors, and bivectors. Out of these three fundamental objects bivectors are the least familiar, so we shall make an effort to clarify their properties as we progress through this introduction.

We now consider how bivectors and vectors relate to one another in more detail, defining two useful operations (*contraction* and *inflation*) in the process. It is worth emphasizing that all operations in spacetime algebra are derived from the fundamental vector product and sum, so are introduced for calculational convenience, conceptual clarity, and for contact with existing formalisms. For reference, we list all of the auxiliary operations that will be introduced in this report in Table 4.

A product between a vector a and a bivector $\mathbf{F}$ can be split into two terms (vector and trivector) in an analogous way to the product of vectors in (9)

$$a\mathbf{F} = a \cdot \mathbf{F} + a \wedge \mathbf{F}. \quad (16)$$

The vector and trivector parts are constructed respectively as

$$a \cdot \mathbf{F} \equiv \langle a\mathbf{F} \rangle_1 = \frac{1}{2}(a\mathbf{F} - \mathbf{F}a) = -\mathbf{F} \cdot a, \quad (17)$$

$$a \wedge \mathbf{F} \equiv \langle a\mathbf{F} \rangle_3 = \frac{1}{2}(a\mathbf{F} + \mathbf{F}a) = \mathbf{F} \wedge a. \quad (18)$$

Notably, the grade-lowering dot product, or *contraction*, is antisymmetric while the grade-raising wedge product, or *inflation*, is symmetric, which is opposite to the vector product case (9). The use of the dot product to lower the grade and the wedge product to raise the grade has become conventional [5].

The geometric meaning of these products can be ascertained for spacelike $\mathbf{F}$ by decomposing the vector $a = a_{\perp} + a_{\parallel}$ into parts perpendicular ($a_{\perp}$) and parallel ($a_{\parallel}$) to the plane of $\mathbf{F}$. After

Description	Notation & Definition
Clifford product	ab
vector dot product	$a \cdot b = (ab + ba)/2 = b \cdot a$
vector wedge product	$a \wedge b = (ab - ba)/2 = -b \wedge a$
projection to grade- k	$\langle M \rangle_k$
algebraic trace	$\langle M \rangle_0$
Hodge duality	$M \mapsto MI^{-1}$
relative frame duality	$M \mapsto M\gamma_0$
bivector contraction	$a \cdot \mathbf{F} = (a\mathbf{F} - \mathbf{F}a)/2 = -\mathbf{F} \cdot a$
bivector inflation	$a \wedge \mathbf{F} = (a\mathbf{F} + \mathbf{F}a)/2 = \mathbf{F} \wedge a$
bivector dot product	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} = (\mathbf{F}\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{F})/2 = \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}$
commutator bracket	$[\mathbf{F}, \mathbf{G}] = (\mathbf{F}\mathbf{G} - \mathbf{G}\mathbf{F})/2 = -[\mathbf{G}, \mathbf{F}]$
bivector cross product	$\mathbf{F} \times \mathbf{G} = [\mathbf{F}, \mathbf{G}]I^{-1} = -\mathbf{G} \times \mathbf{F}$
reversion (transpose)	$(ab)^\sim = ba$ $(MN)^\sim = \widetilde{N}\widetilde{M}$
positive magnitude	$ M ^2 = \langle \widetilde{M}M \rangle_0 ^2 + \langle \widetilde{M}M \rangle_4 I^{-1} ^2$
signature	$\epsilon_M = \langle \widetilde{M}M \rangle_0 / M ^2$
complex conjugation	$(\alpha + \beta I)^* = (\alpha - \beta I)$ $(v + wI)^* = (v - wI)$ $[\mathbf{f} e^{\varphi I}]^* = \mathbf{f} e^{-\varphi I}$
relative reversion	$M^\dagger = \gamma_0 \widetilde{M} \gamma_0$ $(\vec{E} + \vec{B}I)^\dagger = \vec{E} - \vec{B}I$

Table 4: Algebraic operations. From the fundamental Clifford product we define a variety of convenient operations that are useful for calculations.

factoring $\mathbf{F}$ into constituent orthogonal vectors (i.e., $b \cdot c = 0$), $\mathbf{F} = b \wedge c = bc$, we find

$$a\mathbf{F} = abc = \frac{1}{2}a_{\parallel}(bc - cb) + a_{\perp} \wedge b \wedge c, \quad (19)$$

$$\mathbf{F}a = bca = \frac{1}{2}(bc - cb)a_{\parallel} + a_{\perp} \wedge b \wedge c, \quad (20)$$

so the dot and wedge products have the simple forms

$$a \cdot \mathbf{F} = a_{\parallel} \cdot \mathbf{F} = (a_{\parallel} \cdot b)c - (a_{\parallel} \cdot c)b, \quad (21)$$

$$a \wedge \mathbf{F} = a_{\perp} \wedge \mathbf{F} = a_{\perp} \wedge b \wedge c. \quad (22)$$

For spacelike a, b, c , these expressions have intuitive geometric interpretations. The contraction $a \cdot \mathbf{F}$ produces a vector in the plane of $\mathbf{F}$ that is perpendicular to $a_{\parallel}$. Indeed, choosing $b = a_{\parallel}$ so $\mathbf{F} = a_{\parallel} \wedge c$ yields $a \cdot \mathbf{F} = c$. The wedge product $a \wedge \mathbf{F}$ produces a trivector with magnitude equal to the volume of the parallelipiped constructed from dragging the plane segment $\mathbf{F}$ along a perpendicular vector $a_{\perp}$. These constructions are illustrated in Figure 6.

Reversion and inversion

Before we continue, we make a brief diversion to define another useful operation on the spacetime algebra known as *reversion* [5], which reverses the order of all vector products: $(ab)^{\sim} = ba$. The reverse distributes across general multivector products recursively $(AB)^{\sim} = \widetilde{B}\widetilde{A}$, and is the algebraic equivalent of the *transpose* operation for matrices (as can be verified using a matrix representation). The reverse inverts itself $(\widetilde{M})^{\sim} = M$, which makes it an *involution* on the algebra. The reverse is also summarized in Table 4 for reference.

The reverse of a bivector $\mathbf{F}$ is its negation $\widetilde{\mathbf{F}} = -\mathbf{F}$, which can be seen by splitting each basis element of $\mathbf{F}$ into orthogonal factors $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu}\gamma_{\nu} = \gamma_{\mu} \wedge \gamma_{\nu}$. The reversion of the factors then flips the wedge product $\widetilde{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = \gamma_{\nu} \wedge \gamma_{\mu} = -\gamma_{\mu} \wedge \gamma_{\nu} = -\gamma_{\mu\nu}$, which results in a negation. Each grade of the general multivector in (14) can be reversed in an analogous way according to

$$\widetilde{M} = \alpha + v - \mathbf{F} - \mathfrak{T} + \beta I. \quad (23)$$

Notably, the pseudoscalar reverses to itself $\widetilde{I} = \gamma_{3210} = \gamma_{0123} = I$.

As a useful application of the reversion, the product of a pure k -blade $M = \langle M \rangle_k$ with its reverse $\widetilde{M}$ produces a scalar. As an example, for $M = \gamma_{123}$ we have $\widetilde{M}M = \widetilde{\gamma_{123}}\gamma_{123} = \gamma_{321}\gamma_{123} = \gamma_{32}(\gamma_1)^2\gamma_{23} = -\gamma_3(\gamma_2)^2\gamma_3 = \gamma_3^2 = -1$. The resulting positive magnitude $|M|^2 \equiv |\widetilde{M}M| = 1$ is a product of the magnitudes of the factors of M , while the sign $\epsilon_M \equiv \widetilde{M}M/|M|^2 = -1$ is a product of the *signatures* of the factors. Hence, the reversed-square of a pure k -blade

$$\widetilde{M}M = M\widetilde{M} = \epsilon_M |M|^2 \quad (24)$$

produces a notion of *pseudonorm* for M with a net signature ϵ_M and positive magnitude $|M|^2$, in exact analogy with the definition (8d) for vectors⁸. It follows that if $|M|^2 \neq 0$, then

$$M^{-1} \equiv \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{M}M} \quad (25)$$

is the inverse of a pure k -blade M that satisfies $M^{-1}M = MM^{-1} = 1$, in analogy with (12).

⁸It will be shown in Section 34.7.3 that bivectors $\mathbf{F}$ may not have a well-defined signature of ± 1 . Nevertheless, these reversion equations will still be valid.

Reciprocal bases, components, and tensors

To connect with the standard tensor-analysis treatments of the electromagnetic field, where it is considered to be an antisymmetric rank-2 tensor $F^{\mu\nu}$, we now briefly consider the various ways of expanding proper multivector quantities in components. We shall see that we immediately recover and clarify the standard tensor analysis formulas, making the tensor analysis techniques available as a restricted consequence of spacetime algebra.

Given a reference basis γ_μ for $\mathcal{M}_{1,3}$, it is convenient to introduce a *reciprocal basis* of vectors

$$\gamma^\mu = (\gamma_\mu)^{-1}, \quad \gamma^\mu \gamma_\nu = \gamma^\mu \cdot \gamma_\nu = \delta^\mu_\nu \quad (26)$$

defined by the algebraic inverse (12). This is an equally valid basis of vectors for $\mathcal{M}_{1,3}$ that satisfies the same metric relation $\gamma^\mu \cdot \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. It also follows from the inverse that $\gamma^0 = \gamma_0$, while $\gamma^j = -\gamma_j$ for $j = 1, 2, 3$, so the reciprocal basis is the spatial inversion of the reference basis γ_μ .

Any multivector M is a geometric object that can be expanded in any basis, including the reciprocal basis. For example, a vector v has the expansions

$$v = \sum_\mu v^\mu \gamma_\mu = \sum_\mu v_\mu \gamma^\mu \quad (27)$$

in terms of the reference basis and the reciprocal basis. Traditionally, the components $v^\mu = \gamma^\mu \cdot v$ in the reference basis are called the *contravariant* components of v , while the components $v_\mu = \gamma_\mu \cdot v$ in the reciprocal basis are the *covariant* components of v ; we see here that they can be interpreted as different ways of expressing the same geometric object. Evidently from (27) we have $v \cdot \gamma_\nu = v^\nu \eta_{\nu\nu} = v_\nu$, which shows how the two component representations are related by the metric (which effectively “raises” or “lowers” the index).

Since the graded basis elements of the spacetime algebra are constructed with the antisymmetric wedge product from the reference (or reciprocal) vector basis, then one can also expand a k -blade into redundant components that will be the same as the components of a rank- k antisymmetric tensor. For example, a bivector $\mathbf{F}$ may be expanded into components as

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} F^{\mu\nu} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \wedge \gamma^\nu. \quad (28)$$

The components $F^{\mu\nu} = \gamma^\mu \cdot \mathbf{F} \cdot \gamma^\nu = \gamma^\nu \cdot (\gamma^\mu \cdot \mathbf{F}) = (\gamma^\nu \wedge \gamma^\mu) \cdot \mathbf{F} = \gamma^{\nu\mu} \cdot \mathbf{F} = (\gamma_{\mu\nu})^{-1} \cdot \mathbf{F}$ can be extracted using the contractions defined in Section 34.7.3, and are usually called the rank (2,0) (contravariant) components of $\mathbf{F}$, while the components $F_{\mu\nu} = \gamma_\mu \cdot \mathbf{F} \cdot \gamma_\nu$ are the rank (0,2) (covariant) components of $\mathbf{F}$. Similarly, the components $F^\mu{}_\nu = \gamma^\mu \cdot \mathbf{F} \cdot \gamma_\nu$ and $F_\mu{}^\nu = \gamma_\mu \cdot \mathbf{F} \cdot \gamma^\nu$ are rank (1,1) (matrix) components for $\mathbf{F}$. There are overtly 16 real components in each case, of which only $(16 - 4)/2 = 6$ are nonzero and independent due to the antisymmetry; these six independent components correspond precisely to the components of $\mathbf{F}$ when expanded more naturally in a bivector basis. The factor of $1/2$ in (28) ensures that the redundant components (differing only by a sign) are not double-counted.

The various ranked tensor components corresponding to $\mathbf{F}$ all refer to the action of the same antisymmetric tensor $\underline{\mathbf{F}}$, which is a multilinear *function*

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}(a, b) &\equiv a \cdot \mathbf{F} \cdot b = b \cdot (a \cdot \mathbf{F}) = (b \wedge a) \cdot \mathbf{F} \\ &= \sum_{\mu\nu} a^\mu F_{\mu\nu} b^\nu = \sum_{\mu\nu} a_\mu F^{\mu\nu} b_\nu = \sum_{\mu\nu} a_\mu F^\mu{}_\nu b^\nu = \sum_{\mu\nu} a^\mu F_\mu{}^\nu b_\nu \end{aligned} \quad (29)$$

that takes two vector arguments $a = \sum_\mu a^\mu \gamma_\mu = \sum_\mu a_\mu \gamma^\mu$ and $b = \sum_\nu b^\nu \gamma_\nu = \sum_\nu b_\nu \gamma^\nu$ and produces a scalar through a total contraction with the bivector $\mathbf{F}$. We use the underbar notation

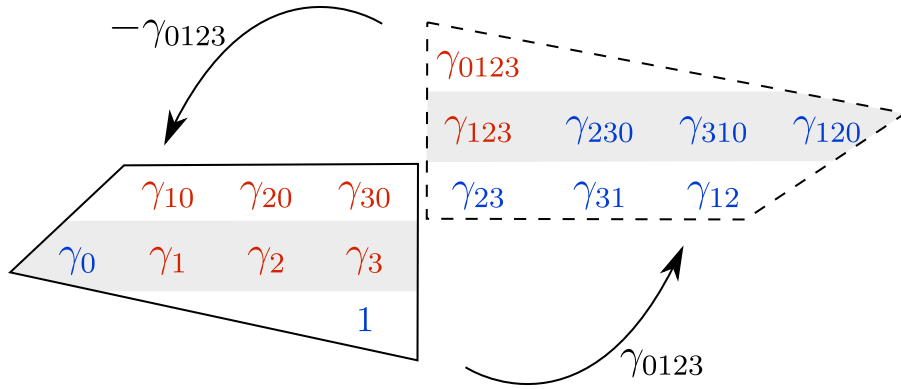


Figure 7: Hodge duality illustrated using the same basis as Figure 5. Right multiplication by the pseudoscalar $I = \gamma_{0123}$ converts an algebraic element to its dual, which is an orthogonal complement in the geometric sense. For example, the dual of a trivector γ_{123} is its unique normal vector $\gamma_{123}(-I) = \gamma_0$. Dual elements have opposite signatures, indicated here by the flip in color coding.

$\underline{F}$ for functions to disambiguate them from products of multivectors. Note that the different ranks of components for the tensor $\underline{F}$ correspond to different ways of expanding the arguments a and b into different bases.

Importantly, the electromagnetic field is intrinsically a bivector $\mathbf{F}$ and *not* its associated antisymmetric tensor $\underline{F}$, which is the multilinear function that performs contractions with $\mathbf{F}$ to produce a scalar; the confusion between these two distinct concepts arises because they have the same characteristic components $F^{\mu\nu}$. Component-based tensor analysis obscures this subtle conceptual distinction by neglecting the k -blades themselves in favor of the functions that can be defined by contractions with these k -blades, all while emphasizing component descriptions that depend on particular basis expansions. More distressingly, one cannot construct more general multivectors or the Clifford product using tensor notation. As a result, we regard component-based tensor analysis as a part of—but not a replacement for—the spacetime algebra used in this report.

The pseudoscalar I , Hodge duality, and complex structure

The expansion (14) of a multivector in terms of elements of differing grade is similar to the expansion of a complex number into its real and imaginary parts, as we emphasized in Section 34.7.3. In fact, this similarity is more than an analogy because the pseudoscalar I also satisfies $I^2 = -1$, which makes the subalgebra of the form $\zeta = \alpha + \beta I$ completely equivalent in practice to the complex scalar numbers. Hence, we do not need to additionally complexify the algebra in order to reap the benefits of complex analysis; the complex algebraic structure automatically appears within the spacetime algebra itself.

The pseudoscalar I has intrinsic geometric significance that goes well beyond the theory of scalar complex numbers, however, and has several additional interesting and useful properties. It commutes with elements of even grade (i.e., scalars, pseudoscalars, and bivectors), but *anticommutes* with elements of odd grade (i.e., vectors and trivectors). More surprisingly, a right product with I is a *duality transformation* from grade k to its orthogonal complement of grade $(4 - k)$. For example, the dual of a vector is its unique oriented orthogonal trivector $\gamma_0 I = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \gamma_{123}$, while the dual of a trivector is its unique normal vector $\gamma_{123} I = (\gamma_0 I) I = -\gamma_0$. This duality is illustrated for the entire graded basis in Figure 7. We will see in Section 34.7.5 that this duality is intimately connected to the field-exchange *dual symmetry* of the electromagnetic field.

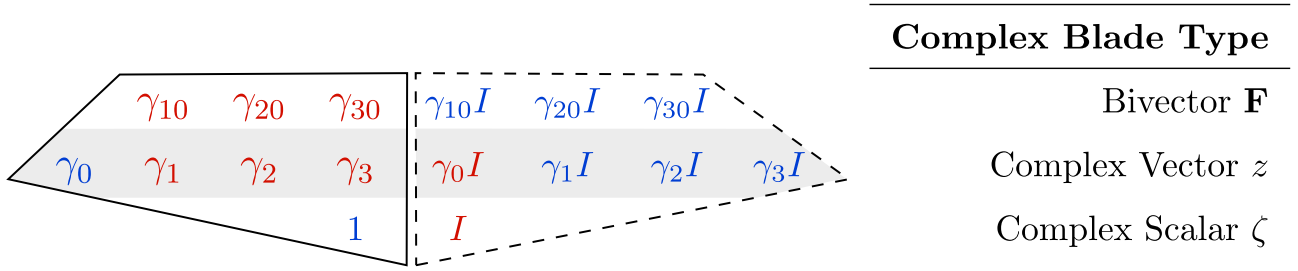


Figure 8: Complex structure of the spacetime algebra. The complementary Hodge-dual halves of the algebra illustrated in Figure 7 become intrinsically complex pairings by factoring out the pseudoscalar $I = \gamma_{0123}$ that satisfies $I^2 = -1$. The complex scalars and vectors have parts that are independent geometric objects. However, the bivectors are self-dual and irreducibly complex objects that cannot be further decomposed into frame-independent parts.

The duality transformation induced by I is equivalent to the *Hodge-star* transformation in differential forms (though is arguably simpler to work with), and splits the spacetime algebra into two halves that are geometric complements of each other. Exploiting this duality, we can write any multivector M in an intrinsically complex form (in the sense of I) that pairs quantities with their duals

$$M = \zeta + z + \mathbf{F}. \quad (30)$$

We illustrate this decomposition in Figure 8. The complex scalar ζ and complex vector z parts have the form

$$\zeta \equiv \alpha + \beta I, \quad z \equiv v + wI = v - Iw, \quad (31)$$

where α, β are real scalars, and v, w are 4-vectors. As anticipated, the trivector $\mathfrak{T} = wI = -Iw$ has been expressed as the orthogonal complement of a vector (i.e., a *pseudovector*), which is a useful simplification.

Some care has to be taken with manipulations of complex vectors z , since I anti-commutes with vectors. As a result, complex scalars and vectors only quasi commute

$$\zeta z = (\alpha + \beta I)z = z(\alpha - \beta I) \neq z\zeta, \quad (32)$$

while complex scalars and bivectors commute normally: $\zeta \mathbf{F} = \mathbf{F} \zeta$. Thus, the pseudoscalar I is only algebraically equivalent to the usual notion of the scalar imaginary i when restricted to the *even* graded subalgebra of complex scalars and bivectors.

Bivectors: canonical form

A bivector like the electromagnetic field, $\mathbf{F}$, is an interesting special case for the complex decomposition (30) of a general multivector, since the full bivector basis is already *self-dual*. We can see this by computing the duality for a particular basis

$$\begin{aligned} \gamma_{10}I &= -\gamma_{23}, & \gamma_{20}I &= -\gamma_{31}, & \gamma_{30}I &= -\gamma_{12}, \\ \gamma_{23}I &= \gamma_{10}, & \gamma_{31}I &= \gamma_{20}, & \gamma_{12}I &= \gamma_{30}. \end{aligned} \quad (33)$$

Geometrically, these duality relations express the fact that in 4-dimensions the orthogonal complement to any plane is another plane (not a normal vector as in 3-dimensions). We can express these relations more compactly by collecting cyclic permutations and writing $\gamma_{i0}I =$

$-\epsilon_{ijk}\gamma_{jk}$ and $\gamma_{jk}I = \epsilon_{ijk}\gamma_{i0}$, where $i, j, k = 1, 2, 3$ and ϵ_{ijk} is the completely antisymmetric Levi-Civita symbol (no summation implied).

This self-duality of the bivector basis makes the signature of a general bivector *mixed*. That is, although each basis bivector has a well-defined signature, $\gamma_{i0}\tilde{\gamma}_{i0} = (1)(-1) = -1$ or $\gamma_{jk}\tilde{\gamma}_{jk} = (-1)(-1) = 1$, a general bivector $\mathbf{F}$ will be a mixture of these two different signatures. Indeed, consider the simple mixed bivector $\mathbf{F} = \gamma_{10} + \gamma_{23}$ as an example. Computing its reversed square produces

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{F} &= [\gamma_{01} + \gamma_{32}][\gamma_{10} + \gamma_{23}], \\ &= \gamma_{01}\gamma_{10} + \gamma_{01}\gamma_{23} + \gamma_{32}\gamma_{10} + \gamma_{32}\gamma_{23}, \\ &= \gamma_1^2\gamma_0^2 + \gamma_{0123} + \gamma_{3210} + \gamma_2^2\gamma_3^2, \\ &= (-1)(1) + I + I + (-1)(-1), \\ &= 2I.\end{aligned}\tag{34}$$

The cross-terms between the basis elements of different signature produce a *complex signature* $\epsilon_{\mathbf{F}} = I$ attached to its positive magnitude $|\mathbf{F}|^2 = 2$. Thus, mixing bases of differing signature is automatically handled by the algebra by making the total signature complex.

More generally, the reversed square of any bivector $\mathbf{F}$ will produce $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{F}} = \epsilon_F|\mathbf{F}|^2$, where $\epsilon_F = \alpha + \beta I$ is a complex signature with unit magnitude $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. As such, this signature can be written using a *phase angle* by using the same algebraic techniques as standard complex analysis: $\epsilon_F = \exp(2\varphi I) = \cos 2\varphi + I \sin 2\varphi$. It follows that a general bivector $\mathbf{F}$ must have a canonical (i.e., frame-independent) form with an *intrinsic phase*

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \exp(\varphi I) = \mathbf{f} (\cos \varphi + I \sin \varphi)\tag{35}$$

that mixes the bivector subspaces of different signature. Here we define $\mathbf{f}$ to be the *canonical bivector* for $\mathbf{F}$ that we choose to have a definite negative signature $\mathbf{f}\tilde{\mathbf{f}} = -|\mathbf{F}|^2$ (for reasons that will become clear in Section 34.7.3). Its dual $\mathbf{f}I$ then has a definite positive signature, while the square produces the positive magnitude $\mathbf{f}^2 = |\mathbf{F}|^2$. It is worth emphasizing that the existence of this canonical complex form of a bivector is not at all apparent when working solely with its real components $F^{\mu\nu}$.

The phase and canonical bivector can be directly extracted from $\mathbf{F}$ according to

$$\varphi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\ell_2}{\ell_1}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{F} \exp(-\varphi I),\tag{36}$$

where $\ell_1 = \langle \mathbf{F}^2 \rangle_0 = |\mathbf{F}|^2 \cos 2\varphi$ and $\ell_2 = \langle \mathbf{F}^2 \rangle_4 I^{-1} = |\mathbf{F}|^2 \sin 2\varphi$ are the scalar parts of its square $\mathbf{F}^2 = \ell_1 + \ell_2 I$. Note that for null bivectors ($\mathbf{F}^2 = 0$) the decomposition (35) is not unique and the phase φ becomes degenerate (just as with standard complex analysis). This potentially degenerate intrinsic phase of a bivector will become very important in our discussion of electromagnetic waves in Section 34.7.5.

Bivectors: products with bivectors

A product between two bivectors $\mathbf{F}$ and $\mathbf{G}$ can be split into *three* distinct grades (scalar, bivector, and pseudoscalar), in contrast to the two grades in the vector-vector and vector-bivector products of (9) and (16),

$$\mathbf{F}\mathbf{G} = \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \rangle_0 + [\mathbf{F}, \mathbf{G}] + \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \rangle_4.\tag{37}$$

We will find it instructive to consider the scalar and pseudoscalar parts together as the same complex scalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$.

The symmetric part of the product produces this complex scalar, which we can better understand by making the canonical decompositions $\mathbf{F} = \mathbf{f} \exp(\vartheta I)$, $\mathbf{G} = \mathbf{g} \exp(\varphi I)$ according to (35),

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{F}\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{F}) = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) \exp[(\vartheta + \varphi)I]. \quad (38)$$

Since $\mathbf{f}$ and $\mathbf{g}$ have fixed signature, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = (\mathbf{f}\mathbf{g} + \mathbf{g}\mathbf{f})/2$ is a real scalar. In fact, it will become clear after we introduce the relative 3-vectors in Section 34.7.3 that this real scalar is completely equivalent to the usual (Euclidean) dot product from non-relativistic 3-vector analysis, which motivates this choice of notation.

It follows that the total dot product between arbitrary bivectors will have scalar and pseudoscalar parts of the form

$$\langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \rangle_0 = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) \cos(\vartheta + \varphi), \quad (39)$$

$$\langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} \rangle_4 = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) \sin(\vartheta + \varphi)I. \quad (40)$$

Note that the intrinsic phases of $\mathbf{F}$ and $\mathbf{G}$ play a critical role in these products, and produce wave-like *interference* factors. It is worth emphasizing that these factors arise solely from the structure of spacetime itself, and not from any additional assumptions.

The antisymmetric part of $\mathbf{F}\mathbf{G}$ is written as a *commutator bracket* that produces another bivector

$$[\mathbf{F}, \mathbf{G}] \equiv \langle \mathbf{F}\mathbf{G} \rangle_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{F}\mathbf{G} - \mathbf{G}\mathbf{F}). \quad (41)$$

We will explore the deep significance of this commutator bracket in Section 34.7.3, where it will play the role of a Lie bracket for the Lorentz group (motivating this choice of notation). For completeness here, we also define the *bivector cross product* as the (Hodge) dual of the commutator bracket

$$\mathbf{F} \times \mathbf{G} \equiv [\mathbf{F}, \mathbf{G}]I^{-1}. \quad (42)$$

After we introduce the relative 3-vectors in 34.7.3 it will become clear that this cross product is completely equivalent to the traditional 3-vector cross product (again, motivating this choice of notation).

Complex conjugation

At this point we define another useful operation: complex conjugation. It follows from (35) that the proper inverse (25) of a bivector $\mathbf{F}$ has the canonical form

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\mathbf{f}}{|\mathbf{F}|^2} \exp(-\varphi I) \quad (43)$$

which must additionally invert the intrinsic phase of the complex scalar that appears in its signature.

To more compactly write this inverse, we introduce a complex conjugation of the spacetime algebra as a flip in sign of the pseudoscalar. For a multivector M , as in (30), this produces

$$M^* = M|_{I \mapsto -I} = (\alpha - \beta I) + (v - wI) + \mathbf{f} \exp(-\varphi I). \quad (44)$$

Geometrically, the flip in pseudoscalar sign corresponds to changing the orientation (handedness) of spacetime. Since $(M^*)^* = M$, conjugation is also an involution on the algebra.

For complex vectors, the conjugation is equal to reversion $\tilde{z} = (v + wI)^\sim = v + Iw = v - wI = z^*$, since I anticommutes with vectors, which is a useful property. However, this anticommutation also forces us to be careful about applying conjugation to products, since

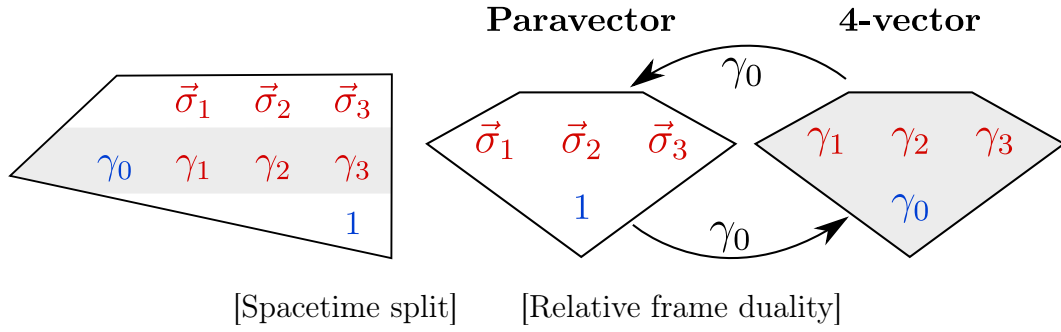


Figure 9: Spacetime split and paravectors. (a) Performing a spacetime split of Figure 8 selects a timelike vector γ_0 that corresponds to a particular inertial reference frame. This procedure partitions the proper bivectors into *relative* parts spanned by a 3-vector basis $\vec{\sigma}_i = \gamma_{i0}$ and its dual $\vec{\sigma}_i I = -\epsilon_{ijk} \gamma_{jk}$. (b) Each half of the split algebra then satisfies a secondary duality relation under right multiplication by γ_0 . This duality maps proper 4-vectors to relative paravectors, and vice versa. As a result, the entire spacetime algebra may be expanded in terms of relative paravectors and duality factors, which provides an explicit embedding of traditional nonrelativistic 3-vector analysis inside spacetime algebra.

it does *not* generally distribute across products that involve vectors, e.g., $(zM)^* \neq M^*z^*$, $(zM)^* \neq z^*M^*$. Nevertheless, conjugation does distribute over products involving only complex scalars and bivectors, just as in standard complex analysis. To aid memory about some of these subtler properties, we have collected a few commonly encountered identities in Table 5.

With this operation we can write the proper complex generalization of the blade inverse (25)

$$\zeta^{-1} = \frac{\zeta^*}{\zeta^* \zeta}, \quad z^{-1} = (z^* z)^{-1} z^*, \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{\mathbf{F}^*}{\mathbf{F}^* \mathbf{F}}, \quad (45)$$

since the quantities $\zeta^* \zeta = \alpha^2 + \beta^2$, $z^* z = \tilde{z} z = v^2 + w^2 + 2(v \cdot w)I$, and $\mathbf{F}^* \mathbf{F} = \mathbf{f}^2 = |\mathbf{F}|^2$ are all invertible scalars⁹.

Relative frames and paravectors

To connect the spacetime algebra $\mathcal{C}_{1,3}$ with standard 3-vector analysis, we express the duality of the spacetime algebra in another way that selects a particular *inertial reference frame*. To do this, we decompose the bivector basis into the three elements that involve a specific timelike vector γ_0 ,

$$\vec{\sigma}_i \equiv \gamma_{i0} = \gamma_i \wedge \gamma_0, \quad (46)$$

with $i = 1, 2, 3$, and their duals $\vec{\sigma}_i I = -\epsilon_{ijk} \gamma_{jk}$. This *spacetime split* of the bivector basis into an inertial frame is illustrated in Figure 9(a). The elements $\vec{\sigma}_i$ directly correspond to the three spatial directions γ_i orthogonal to γ_0 . Importantly, they will act as a basis for the 3-vector quantities that are used in standard vector analysis treatments of electromagnetism. As such, we notate these basis elements using standard vector arrows and refer to them as *relative 3-vectors*. Geometrically, one can conceptualize the relative 3-vectors that are experienced by an inertial observer as plane segments in spacetime that are obtained by dragging the spatial frame γ_i along the timelike direction γ_0 of the observer's worldline. As we will make clear in

⁹Note that $z^* z$ produces a complex scalar, so $(z^* z)^{-1}$ recursively follows the complex scalar rule in (45). Moreover, the inverse z^{-1} written here is both a left and right inverse, even though $(z^* z)^{-1}$ and z^* do not commute in general. That is, the explicit right inverse is $z^{-1} = z^* (z z^*)^{-1} = [(z z^*)^{-1}]^* z^* = (z^* z)^{-1} z^*$, which is the same expression.

Algebraic Identities	
Dot-wedge conversion:	$v \cdot (wI) = -(vI) \cdot w = (v \wedge w)I$ $v \wedge (wI) = -(vI) \wedge w = (v \cdot w)I$ $(vI) \cdot \mathbf{F} = v \wedge (\mathbf{F}I) = (v \cdot \mathbf{F})I$ $(vI) \wedge \mathbf{F} = v \cdot (\mathbf{F}I) = (v \wedge \mathbf{F})I$ $v \cdot \mathbf{F} \cdot w = w \cdot (v \cdot \mathbf{F}) = (w \wedge v) \cdot \mathbf{F}$
Trace cyclicity:	$\langle ABC \rangle_0 = \langle CAB \rangle_0$ $\langle ABC \rangle_4 = \langle ABCI^{-1} \rangle_0 I$
Bivector-pseudoscalar commutation:	$\zeta \mathbf{F} = \mathbf{F} \zeta$ $(\zeta \mathbf{F})^* = \zeta^* \mathbf{F}^* = \mathbf{F}^* \zeta^*$
Vector-pseudoscalar anti-commutation:	$(v + wI) = (v - Iw)$ $z^* = \tilde{z}$ $\zeta z = z \zeta^*$ $(zM)^* \neq z^* M^*$
Relative frame splits:	$I = \gamma_{0123} = \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \vec{\sigma}_3$ $v = (v_0 + \vec{v})\gamma_0 = \gamma_0(v_0 - \vec{v})$ $\nabla = \gamma_0(\partial_0 + \vec{\nabla}) = (\partial_0 - \vec{\nabla})\gamma_0$ $\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I$
3-vector products:	$\vec{E}\vec{B} = \vec{E} \cdot \vec{B} + \vec{E} \times \vec{B}I$ $\langle \vec{A}\vec{B}\vec{C} \rangle_4 = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})I$ $\langle \vec{A}\vec{B}\vec{C} \rangle_2 = (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} - (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ $= (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} + \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B}$
Relative reversion:	$\zeta^\dagger = \zeta^*$ $\mathbf{F}^\dagger = \vec{E} - \vec{B}I$ $\gamma_0 \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^\dagger \gamma_0$ $(\vec{\sigma}_j \vec{\sigma}_k)^\dagger = \vec{\sigma}_k \vec{\sigma}_j$

Table 5: Commonly encountered algebraic identities. All of these may derived in straightforward ways from the fundamental Clifford product, but we include them here for reference.

Section 34.7.3, the 3-vectors $\vec{\sigma}_i$ also have a deep connection to the standard Pauli spin matrices, which motivates our choice of notation.

Bivectors: spacetime split and cross product

In terms of this relative 3-vector basis, a bivector takes the simple form

$$\mathbf{F} = E_1\gamma_{10} + E_2\gamma_{20} + E_3\gamma_{30} + B_1\gamma_{32} + B_2\gamma_{13} + B_3\gamma_{21} = \vec{E} + \vec{B}I \quad (47)$$

involving a relative 3-vector and the dual of a relative 3-vector

$$\vec{E} = E_1\vec{\sigma}_1 + E_2\vec{\sigma}_2 + E_3\vec{\sigma}_3, \quad \vec{B}I = [B_1\vec{\sigma}_1 + B_2\vec{\sigma}_2 + B_3\vec{\sigma}_3]I. \quad (48)$$

Unlike the canonical decomposition (35), splitting the bivector into dual relative pieces in this manner requires the specification of a particular timelike vector γ_0 in the basis (46), which spoils the frame-independence of each relative piece. Only the total bivector $\mathbf{F}$ produced in the sum (47) is a proper geometric object. We choose the suggestive labels $\vec{E}$ and $\vec{B}$ here to anticipate their correspondence to the electromagnetic field vectors in Section 34.7.5, but we can already see at this stage the inevitable equivalence in form of $\mathbf{F}$ to the Riemann-Silberstein complex vector (3). As with the complex canonical form of a bivector, the existence of this complex spacetime split is not at all apparent when working solely with its real components $F^{\mu\nu}$.

Briefly, we note that the product between a vector and a bivector that we defined in Section 34.7.3 can be used to compute the spacetime split (47) according to (noting $\gamma_0^{-1} = \gamma_0$)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\gamma_0\gamma_0^{-1} = (\mathbf{F} \cdot \gamma_0)\gamma_0 + (\mathbf{F} \wedge \gamma_0)\gamma_0. \quad (49)$$

The first term contracts (i.e., lowers the grade of) $\mathbf{F}$ to a vector perpendicular to γ_0 and then multiplies by γ_0 to produce the relative 3-vector basis $\vec{\sigma}_i = \gamma_i\gamma_0$. The second term inflates (i.e., raises the grade of) $\mathbf{F}$ to a trivector including γ_0 and then contracts out the γ_0 part, leaving behind the dual basis $\vec{\sigma}_i I = -\epsilon_{ijk}\gamma_j\gamma_k$.

Similarly, we can now revisit the cross product between two bivectors, defined in Section 34.7.3 as the dual of the commutator bracket: $\mathbf{F} \times \mathbf{G} = [\mathbf{F}, \mathbf{G}]I^{-1}$. If we compute this cross product for the relative basis elements $\vec{\sigma}_i$ we find

$$\vec{\sigma}_1 \times \vec{\sigma}_2 = \vec{\sigma}_3, \quad \vec{\sigma}_2 \times \vec{\sigma}_3 = \vec{\sigma}_1, \quad \vec{\sigma}_3 \times \vec{\sigma}_1 = \vec{\sigma}_2. \quad (50)$$

These are precisely the defining relations for the familiar relative 3-vector cross product, which motivates its standard notation. Thus, the bivector cross product forms a closed nonassociative (Gibbs) subalgebra for relative 3-vectors that is entirely embedded within the spacetime algebra in a natural way. Hence, all the standard manipulations with the vector cross product still apply to the relative 3-vectors in the spacetime algebra. Moreover, the conceptual meaning of the cross product is enriched, since it is induced by the more general associative product of spacetime algebra.

Paravectors

Using the spacetime split (47) for the bivectors, we can rewrite a general multivector (30) in the following way

$$M = [(\alpha + \vec{E}) + v] + [(\beta + \vec{B}) + w]I, \quad (51)$$

where α, β are scalars, v, w are proper 4-vectors, and $\vec{E}, \vec{B}$ are relative 3-vectors.

We have further partitioned each half of the complex expansion (51) into even $(\alpha + \vec{E})$ and odd (v) grades. These partitions have four components each and are also dual to each other upon right multiplication by the chosen timelike unit vector γ_0 . We illustrate this duality in Figure 9(b). As an important example, the coordinate 4-vector x becomes

$$\begin{aligned} x\gamma_0 &= [ct\gamma_0 + x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3]\gamma_0, \\ &= ct + x_1\gamma_{10} + x_2\gamma_{20} + x_3\gamma_{30}, \\ &= ct + \vec{x}, \end{aligned} \tag{52}$$

which is the sum of a relative scalar time and a 3-vector of the relative spatial coordinates. This combination of a relative scalar and a relative 3-vector is commonly called a *paravector* [182, 184] and is often written as a tuple $(ct, \vec{x})$ instead of a sum to indicate that the scalar and 3-vector parts of a 4-vector should be considered part of the same unified whole. Interestingly, the paravector that appears here as a sum of a scalar and a 3-vector is closely related to the original use of quaternions by Maxwell [134] to describe the essential unification of temporal and spatial parts of a 4-vector. We will comment more on the close relation between the 3-vectors that appear here and quaternions in Section 34.7.3.

We see that right-multiplication of a 4-vector by γ_0 isolates the *relative* quantities that correspond to the inertial frame of γ_0 . Left multiplication flips the sign of the 3-vector part due to the wedge product in the 3-vector basis: $\gamma_0 x = ct - \vec{x}$. Thus, we can consistently recover the invariant coordinate interval in a direct way by using the paravector duality

$$x^2 = x\gamma_0\gamma_0x = [ct + \vec{x}][ct - \vec{x}] = (ct)^2 - |\vec{x}|^2. \tag{53}$$

Observe that this style of derivation has completely bypassed the need to expand the expression in explicit components to obtain the final result. This is a general and convenient property of working with spacetime algebra: transitioning between proper and relative expressions is a component-free and straightforward exercise.

Using the vector-paravector duality, we can further expand the multivector (51) into a fully frame-dependent form relative to γ_0

$$M = [(\alpha + \vec{E}) + (\delta + \vec{p})\gamma_0] + [(\beta + \vec{B}) + (\omega + \vec{a})\gamma_0] I, \tag{54}$$

that involves only paravectors (with scalar parts $\alpha, \delta, \beta, \omega$ and vector parts $\vec{E}, \vec{p}, \vec{B}, \vec{a}$ discussed below) and the appropriate duality factors γ_0 and I . These paravectors are the quantities usually considered in frame-dependent treatments of relativistic systems that use traditional vector analysis. However, the geometric origins of the quantities involved become obscured when they are lifted outside the spacetime algebra.

We can recover some distinguishing information about the scalars by examining their behavior under frame transformations and spatial reflections, which we summarize in Table 6. The scalar α is invariant under both frame transformations and spatial reflections, so is a proper scalar. The scalar β flips sign under spatial reflections but does not change under a frame transformation, so is a proper pseudoscalar. The scalar δ is invariant under spatial reflections but changes under a frame transformation, so is a relative scalar (i.e., temporal) part of a 4-vector. The scalar ω flips sign under a spatial reflection and changes under a frame transformation, so is a relative pseudoscalar part of a 4-pseudovector.

Similarly, we can distinguish the 3-vectors by looking at spatial reflections and frame transformation properties. The vectors $\vec{E}, \vec{p}$ flip sign under a spatial reflection, so are *polar* relative 3-vectors. The vectors $\vec{B}, \vec{a}$ do not flip sign under a spatial reflection, so are *axial* relative 3-vectors. However, while the combination of components $(\delta, \vec{p})$ transforms as a proper 4-vector and $(\omega, \vec{a})$ transforms as a proper 4-pseudovector, the combination of components in $(\vec{E}, \vec{B})$

	Multivector Part	Parity	Scalar	4-vector	Bivector
α	proper scalar	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\times$
βI	proper pseudoscalar	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$
δ	relative scalar	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times$
ωI	relative pseudoscalar	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\times$
$\vec{p}$	polar 3-vector	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\times$
$\vec{E}$	polar 3-vector	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$
$\vec{a}$	axial 3-vector	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times$
$\vec{B}$	axial 3-vector	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$

$$M = \left[(\alpha + \vec{E}) + (\delta + \vec{p})\gamma_0 \right] + \left[(\beta + \vec{B}) + (\omega + \vec{a})\gamma_0 \right] I$$

Table 6: Transformation properties of the relative parts of a multivector M in a particular frame. Each checkmark indicates that the associated quantity changes sign under a spatial parity inversion, or is a proper scalar quantity that does not depend upon a specific Lorentz frame, or has components that change covariantly with the frame like parts of a proper 4-vector, or has components that change like parts of a proper bivector. These transformation properties are traditionally used to distinguish the distinct relative parts of a spacetime multivector.

transforms as what is usually considered as an antisymmetric rank-2 tensor (i.e., a bivector), as we indicated in Section 34.7.3 and further elucidated in Section 34.7.3.

For convenience, we also summarize the various expansions of a general multivector in Table 7. Comparing the proper expression of (14) to the frame-dependent expression of (54) makes the geometric origins of all these transformation properties clear. The proper combinations of relative quantities correspond to distinct geometric grades of a spacetime multivector. This geometric structure is left implicit in standard vector or tensor analysis methods, even though the transformation properties remain. The spacetime algebra makes this structure explicit, intuitive, and easily manipulated in calculations.

Relative reversion

To isolate the distinct quantities that are relevant for a particular frame, it is useful to define a *relative reversion* involution

$$\begin{aligned} M^\dagger &= \gamma_0 \widetilde{M} \gamma_0 \\ &= \left[(\alpha + \vec{E}) + (\delta - \vec{p})\gamma_0 \right] + \left[-(\beta + \vec{B}) + (\omega - \vec{a})\gamma_0 \right] I. \end{aligned} \quad (55)$$

Comparing with (54), note that this γ_0 -dependent involution has the effect of the proper complex conjugation for the complex scalars

$$\zeta^\dagger = (\alpha + \beta I)^\dagger = \alpha - \beta I = \zeta^*, \quad (56)$$

but has the effect of conjugation *with respect to the spacetime split* for the complex bivectors

$$\mathbf{F}^\dagger = (\vec{E} + \vec{B}I)^\dagger = \vec{E} - \vec{B}I \neq \mathbf{F}^*. \quad (57)$$

Importantly, this type of conjugation is not frame-independent, but depends on the relative frame γ_0 due to the spacetime split.

Multivectors	
Graded Form	$M = \alpha + v + \mathbf{F} + wI + \beta I$ α : scalar v : vector $\mathbf{F}$: bivector wI : pseudovector βI : pseudoscalar
Complex Form	$M = \zeta + z + \mathbf{F}$ $\zeta = \alpha + \beta I$: complex scalar $z = v + wI$: complex vector $\mathbf{F} = \mathbf{f} \exp(\varphi I)$: (irreducibly) complex bivector
Relative Form	$M = \left[(\alpha + \vec{E}) + (\delta + \vec{p})\gamma_0 \right] + \left[(\beta + \vec{B}) + (\omega + \vec{a})\gamma_0 \right] I$ α : proper scalar $\vec{E}$: relative polar 3-vector part of $\mathbf{F}$ δ : relative scalar part of v $\vec{p}$: relative polar 3-vector part of v βI : proper pseudoscalar $\vec{B}$: relative axial 3-vector part of $\mathbf{F}$ ωI : relative pseudoscalar part of wI $\vec{a}$: relative axial 3-vector part of wI

Table 7: Multivector expansions into distinct geometric grades, intrinsically complex parts, and relative parts that depend upon a particular choice of Lorentz frame.

In contrast, the relative reversion of a 4-vector only flips the sign of the relative 3-vector part

$$\begin{aligned} v^\dagger &= [(\delta + \vec{p})\gamma_0]^\dagger = (\delta - \vec{p})\gamma_0, \\ (wI)^\dagger &= [(\omega + \vec{a})\gamma_0 I]^\dagger = (\omega - \vec{a})\gamma_0 I, \end{aligned} \quad (58)$$

which is intrinsically different from complex conjugation.

Using the appropriate relative reversions, we can then extract the relative parts of each geometric object in a systematic way

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\zeta + \zeta^\dagger}{2}, & \beta &= \frac{\zeta - \zeta^\dagger}{2I}, \\ \vec{E} &= \frac{\mathbf{F} + \mathbf{F}^\dagger}{2}, & \vec{B} &= \frac{\mathbf{F} - \mathbf{F}^\dagger}{2I}, \\ \delta &= \frac{v + v^\dagger}{2}\gamma_0^{-1}, & \vec{p} &= \frac{v - v^\dagger}{2}\gamma_0^{-1}, \\ \omega &= \frac{wI + (wI)^\dagger}{2}I^{-1}\gamma_0^{-1}, & \vec{a} &= \frac{wI - (wI)^\dagger}{2}I^{-1}\gamma_0^{-1}. \end{aligned} \quad (59)$$

Note that we have to be careful about the order of the inversions in the case when elements do not commute.

Bivectors: commutator bracket and the Lorentz group

We now revisit the commutator bracket that we briefly defined for bivectors in Section 34.7.3. Surprisingly, this commutator bracket makes the bivectors a closed nonassociative *Lie algebra* [5]. Indeed, this feature has motivated the notation of the bracket. To see which Lie algebra the bivectors belong to, we compute the 15 following bracket relations between all six bivector basis elements:

$$\begin{aligned} [\gamma_{12}, \gamma_{23}] &= \gamma_{31}, & [\gamma_{23}, \gamma_{31}] &= \gamma_{12}, & [\gamma_{31}, \gamma_{12}] &= \gamma_{23}, \\ [\gamma_{10}, \gamma_{20}] &= -\gamma_{12}, & [\gamma_{20}, \gamma_{30}] &= -\gamma_{23}, & [\gamma_{30}, \gamma_{10}] &= -\gamma_{31}, \\ [\gamma_{31}, \gamma_{10}] &= \gamma_{30}, & [\gamma_{12}, \gamma_{20}] &= \gamma_{10}, & [\gamma_{23}, \gamma_{30}] &= \gamma_{20}, \\ [\gamma_{12}, \gamma_{10}] &= \gamma_{20}, & [\gamma_{23}, \gamma_{20}] &= \gamma_{30}, & [\gamma_{31}, \gamma_{30}] &= \gamma_{10}, \\ [\gamma_{23}, \gamma_{10}] &= 0, & [\gamma_{31}, \gamma_{20}] &= 0, & [\gamma_{12}, \gamma_{30}] &= 0. \end{aligned} \quad (60)$$

We can simplify these bracket relations to a more familiar form by introducing the temporary (but standard) notations $\mathbf{S}_1 = \gamma_{23}$, $\mathbf{S}_2 = \gamma_{31}$, $\mathbf{S}_3 = \gamma_{12}$ and $\mathbf{K}_1 = \gamma_{10}$, $\mathbf{K}_2 = \gamma_{20}$, $\mathbf{K}_3 = \gamma_{30}$, and combining cyclic permutations

$$[\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j] = \epsilon_{ijk}\mathbf{S}_k, \quad [\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = -\epsilon_{ijk}\mathbf{S}_k, \quad [\mathbf{S}_i, \mathbf{K}_j] = \epsilon_{ijk}\mathbf{K}_k. \quad (61)$$

These are precisely the Lie bracket relations that define the generators for the *Lorentz group*, where $\mathbf{S}_i$ generate spatial rotations, and $\mathbf{K}_i$ generate boosts. That is, the closed bivector subalgebra under the commutator bracket is precisely the Lie algebra of the Lorentz group. This connection between bivectors and the Lorentz group is extremely useful in practice for manipulating objects in spacetime.

As a consequence of this correspondence, exponentiating the commutator bracket of a space-time bivector produces a restricted (proper, orthochronous) Lorentz transformation that is continuously connected to the identity. For example, to spatially rotate a bivector $\mathbf{F}$ by an angle

θ in the plane $\mathbf{S}_3 = \vec{\sigma}_3 I^{-1}$ (i.e., around the relative axis $\vec{\sigma}_3$), then we would use the following exponentiation

$$\begin{aligned} \exp(\theta [\mathbf{S}_3, \cdot]) \mathbf{F} &= \mathbf{F} + \theta [\mathbf{S}_3, \mathbf{F}] + \frac{\theta^2}{2} [\mathbf{S}_3, [\mathbf{S}_3, \mathbf{F}]] + \dots, \\ &= \exp(\theta \mathbf{S}_3/2) \mathbf{F} \exp(-\theta \mathbf{S}_3/2), \\ &= \exp(-I\theta \vec{\sigma}_3/2) \mathbf{F} \exp(I\theta \vec{\sigma}_3/2). \end{aligned} \quad (62)$$

The ability to resum an exponentiated commutator back into a double-sided product is an important identity that is commonly used in quantum-mechanics¹⁰. Indeed, the final form of the rotation in (62) is identical in form to the spatial rotation of a quantum mechanical spin, where the vector $\vec{\sigma}_3$ is usually interpreted as a Pauli matrix. We will return to this point in the next few sections.

As another important historical note, this double-sided product also appears as the proper form of a spatial rotation when using *quaternions*, where

$$\mathbf{i} \equiv \mathbf{S}_1 = \vec{\sigma}_1 I^{-1}, \quad \mathbf{j} \equiv -\mathbf{S}_2 = -\vec{\sigma}_2 I^{-1}, \quad \mathbf{k} \equiv \mathbf{S}_3 = \vec{\sigma}_3 I^{-1} \quad (63)$$

are the usual “imaginary” quaternion elements¹¹ that all square to -1 and satisfy Hamilton’s defining relation $\mathbf{ijk} = -1$ [135, 136]. Note that the quaternion basis differs from the 3-vector basis by a factor of I^{-1} (i.e., the dual-basis), which is the fundamental reason that Maxwell’s attempt to use them for describing relative spatial directions [134] was fraught with problems and eventually fell out of favor (despite leaving behind the legacy of using $\hat{i}$, $\hat{j}$, and $\hat{k}$ to denote the spatial unit vectors). Quaternions are fundamentally related to spatial rotations, not spatial directions.

Another important and enlightening example of the Lorentz group is the boost from a frame with timelike vector γ_0 to a different frame moving at a relative velocity $\vec{v} = |v|\vec{\sigma}_3$ with respect to γ_0 . Recall that a relative vector such as $\vec{v} = |v|\gamma_3 \wedge \gamma_0$ is really a bivector, so it can directly act as a generator for the appropriate Lorentz boost. Indeed, note that the relative unit vector $\vec{\sigma}_3 = \gamma_{30}$ is also equal to a boost generator $\vec{\sigma}_3 = \mathbf{K}_3$. The proper hyperbolic angle (i.e., *rapidity*) for the boost rotation is determined by the magnitude of the velocity $\alpha = \tanh^{-1}|v|/c$, while the proper plane of rotation is simply the relative unit vector itself $\vec{\sigma}_3$. Hence, the active Lorentz boost that rotates a bivector $\mathbf{F}$ from the $\vec{v}$ frame back into the reference γ_0 frame has the form

$$\mathbf{F}' = \exp(-\alpha [\vec{\sigma}_3, \cdot]) \mathbf{F} = \exp(-\alpha \vec{\sigma}_3/2) \mathbf{F} \exp(\alpha \vec{\sigma}_3/2). \quad (64)$$

Again, the conversion of the exponentiated commutator to a double-sided product makes the expression simpler. Note that the only difference in form between the boost (64) and the spatial rotation (62) is the factor of I in the exponent that changes the signature of the spacetime rotation.

To simplify (64), we split the bivector $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}$ into pieces parallel $\mathbf{F}_{\parallel}$ and perpendicular $\mathbf{F}_{\perp}$ to $\vec{v}$, implying that $\vec{v}$ commutes with $\mathbf{F}_{\parallel}$ but anti-commutes with $\mathbf{F}_{\perp}$. The Lorentz

¹⁰This equivalence and the resulting half-angle is a manifestation of the double-covering of the spatial rotation group $\text{SO}(3)$ by the special unitary group $\text{SU}(2)$, which is in turn isomorphic to the $\text{Spin}(3)$ group generated by the rotation bivectors $\mathbf{S}_i = \vec{\sigma}_i I^{-1}$.

¹¹Note the odd change in sign for $\mathbf{j}$: Hamilton accidentally defined a left-handed set, which has caused significant confusion about the proper application of quaternions in physics, and has obfuscated their equivalence to the rotation generators made apparent here.

transformation then becomes

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}' &= \exp(-\alpha \vec{\sigma}_3/2) \mathbf{F} \exp(\alpha \vec{\sigma}_3/2), \\
 &= \mathbf{F}_{\parallel} + \exp(-\alpha \vec{\sigma}_3) \mathbf{F}_{\perp}, \\
 &= \mathbf{F}_{\parallel} + \exp(-\tanh^{-1}|v|/c \vec{\sigma}_3) \mathbf{F}_{\perp}, \\
 &= \mathbf{F}_{\parallel} + [\cosh(\tanh^{-1}|v|/c) - \sinh(\tanh^{-1}|v|/c) \vec{\sigma}_3] \mathbf{F}_{\perp}, \\
 &= \mathbf{F}_{\parallel} + \frac{1 - \vec{v}/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \mathbf{F}_{\perp},
 \end{aligned} \tag{65}$$

where the boost dilation factor $\gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$ appears to scale only the perpendicular part of $\mathbf{F}$. If we make a spacetime split $\mathbf{F}_{\perp} = \vec{E}_{\perp} + \vec{B}_{\perp}I$ of the perpendicular bivector, then the transformed version is

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}'_{\perp} &= \gamma(1 - \vec{v}/c)\mathbf{F}_{\perp} = \gamma(1 - \vec{v}/c)(\vec{E}_{\perp} + \vec{B}_{\perp}I), \\
 &= \gamma[(\vec{E}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_{\perp}) + (\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}_{\perp})I],
 \end{aligned} \tag{66}$$

where we have simplified the bivector product $\vec{v}\vec{E}_{\perp} = \vec{v} \times \vec{E}_{\perp}I$, since $\vec{v} \cdot \vec{E}_{\perp} = 0$ (and similarly for $\vec{B}$). Up to choices of units, this is precisely the transformation that we expect from a boost of the electromagnetic field [189, 155].

Spinor representation

Recall that in (64) we converted the exponentiated commutator bracket into a double-sided product. Such a double-sided product is a more natural algebraic representation of a group transformation that can be extended from bivectors to the entire algebra. Specifically, if we notate the product factors as $U = \exp(-\alpha \vec{\sigma}_3/2)$, then the transformation in (64) has the form

$$\mathbf{F}' = U \mathbf{F} \tilde{U}, \tag{67}$$

where we have used $\tilde{\vec{\sigma}}_3 = -\vec{\sigma}_3$. The factors satisfy the normalization condition $U\tilde{U} = \tilde{U}U = 1$. Hence, this form of the transform makes it clear how the transformation preserves the product structure of the algebra,

$$\mathbf{GH} \mapsto U\mathbf{G}\tilde{U}U\mathbf{H}\tilde{U} = U(\mathbf{GH})\tilde{U}, \tag{68}$$

precisely in the same manner that unitary representations of group transformations preserve product structure in quantum mechanics.

We call the quantity U that appears in (67) a *rotor* to emphasize that a Lorentz transformation has the geometric form of a *rotation* through spacetime. Specifically, the rotation generators $\mathbf{S}_i = \vec{\sigma}_i I^{-1}$ square to -1 and produce spatial rotations, while the boost generators $\mathbf{K}_i = \vec{\sigma}_i$ square to $+1$ and produce hyperbolic rotations in spacetime. Since the rotor representation of a Lorentz transformation produces a geometrically meaningful rotation, the bivector $\mathbf{F}$ can be replaced in (67) with any geometric object that can be rotated. Indeed, *any multivector* M can be Lorentz transformed according to $M' = U M \tilde{U}$.

A rotor U is an example of a *spinor* ψ , which is an element of the even-graded subalgebra of the spacetime algebra [158] that may be decomposed as

$$\psi = \zeta + \mathbf{F}, \tag{69}$$

where $\zeta = \alpha + \beta I$ is a complex scalar and $\mathbf{F}$ is a bivector. This even-graded subalgebra is closed under the full Clifford product. As an example of this decomposition, the

boost rotor $\exp(-\alpha \vec{\sigma}_3/2)$ can be expanded in terms of hyperbolic trigonometric functions as $\cosh(\alpha/2) - \vec{\sigma}_3 \sinh(\alpha/2)$, which is a sum of a scalar and a bivector. Similarly, the spatial rotor $\exp(-\theta I \vec{\sigma}_3/2)$ can be expanded in terms of circular trigonometric functions as $\cos(\theta/2) - I \vec{\sigma}_3 \sin(\theta/2)$.

Spinors also produce transformations of any multivector according to a double-sided product that preserves the product structure of the algebra. For example, if $\psi\tilde{\psi} = \tilde{\psi}\psi = 1$, then $M \mapsto \psi M \tilde{\psi}$ is a *spinor representation* of a group transformation. Hence, the rotor form of (67) can also be understood as a spinor representation of the restricted Lorentz transformation. Similarly, if $\psi\psi^* = \psi^*\psi = 1$, then $M \mapsto \psi M \psi^*$ is another kind of group transformation that preserves the product structure of the algebra.

An example transformation of this latter type that we will find particularly useful in what follows is the *global phase rotation* characterized by the spinor $\psi = \exp(-\theta I/2)$. Interestingly, this phase rotation only affects complex vectors since I commutes with complex scalars and bivectors. That is, for a general multivector $M = \zeta + z + \mathbf{F}$ in complex form, we have

$$\psi M \psi^* = \zeta + z \exp(\theta I) + \mathbf{F}, \quad (70)$$

which is a proper group transformation since $\psi\psi^* = \psi^*\psi = 1$. This phase transformation is responsible for the field-exchange *dual symmetry* of the electromagnetic field, which we will detail in Section 34.7.5.

Pauli and Dirac matrices

A vast notational simplification of the Lorentz bracket relations (61) occurs when we use the duality relations to rewrite the bivectors $\mathbf{K}_i = \vec{\sigma}_i$ and their duals $\mathbf{S}_i = \vec{\sigma}_i I^{-1}$ in terms of a particular Lorentz frame of relative 3-vectors. The pseudoscalar I commutes with all bivectors and squares to -1 , so all 15 bracket relations reduce to simple variations of the three fundamental relations

$$[\vec{\sigma}_i, \vec{\sigma}_j] = \epsilon_{ijk} \vec{\sigma}_k I, \quad (71)$$

which are simply another way of expressing the 3-vector cross products (50) in the relative frame. Observe that the relations (71) are also precisely the bracket relations that define the Pauli spin matrices used in quantum mechanics. Moreover, note that the relative 3-vector basis satisfies the relation

$$\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j + \vec{\sigma}_j \vec{\sigma}_i = 2\delta_{ij}, \quad (72)$$

which indicates that the relative 3-vectors $\vec{\sigma}_i$ form a *Euclidean* Clifford subalgebra $\mathcal{C}_{3,0}$ in their own right.

In terms of this frame-dependent split, the proper pseudoscalar I can be written as $I = \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \vec{\sigma}_3$. That is, I is also the appropriate pseudoscalar (apparent unit 3-volume) for any relative frame, which is a nontrivial property. It also commutes with every element of this relative frame, making it completely equivalent in practice to a scalar imaginary i . Similarly, the relative reversion operation $\psi^\dagger = \gamma_0 \tilde{\psi} \gamma_0$ that we defined in (55) is the true reversion of the relative basis $\vec{\sigma}_i$ within this subalgebra: $(\vec{\sigma}_j \vec{\sigma}_k)^\dagger = \vec{\sigma}_k \vec{\sigma}_j$. As such, it also acts as the appropriate complex conjugation for the frame-dependent subalgebra according to (57). The fact that this relative complex conjugation is distinct from the global complex conjugation is not at all obvious when working solely within a relative frame. This subalgebra and relative conjugation is precisely what appears in the usual treatments of the Riemann-Silberstein vector (e.g., [40]).

Collecting these properties together, it is clear that the familiar Pauli matrices and complex scalar imaginary i can be viewed as a matrix representation of a particular spacetime split of the spinor subalgebra of spacetime. The matrix product simulates the noncommutative vector product. Indeed, this direct connection to the Pauli matrices has motivated our notation $\vec{\sigma}_i$ for

Clifford Algebras	Physics Connections	Spinor Types
$\mathcal{C}_{2,4}$	Conformal space	Penrose twistors
$\mathcal{C}_{4,1}$	Dirac electron	Dirac spinors
$\mathcal{C}_{1,3}$	Spacetime / EM	Maxwell spinors
$\mathcal{C}_{3,0}$	Relative 3-space	Pauli spinors
$\mathcal{C}_{0,2}$	Quaternion rotations	Hamilton spinors
$\mathcal{C}_{0,1}$	Complex (wave-like) phases	Schrödinger spinors
$\mathcal{C}_{0,0}$	Real numbers	Scalars

Table 8: The Clifford algebras in the nesting sequence of closed subalgebras $\mathcal{C}_{2,4} \supset \mathcal{C}_{4,1} \supset \mathcal{C}_{1,3} \supset \mathcal{C}_{3,0} \supset \mathcal{C}_{0,2} \supset \mathcal{C}_{0,1} \supset \mathcal{C}_{0,0}$, and their connection to common physics concepts, as well as the distinct types of spinors in quantum mechanics. Note how the $(+, -, -, -)$ signature of the spacetime algebra $\mathcal{C}_{1,3}$ appears naturally in the middle of this sequence.

the relative 3-vector basis [8]. Within the spacetime algebra, however, $\vec{\sigma}_i$ are not matrices—they are a bivector basis associated with the three spatial directions in a particular frame. Hence matrix constructions like $\sum_i a^i \vec{\sigma}_i$ that appear in quantum mechanics can be understood to define relative 3-vectors $\vec{a}$ in spacetime algebra (e.g., the reference spatial direction along which a spin can be aligned). There is nothing intrinsically quantum mechanical about these constructions.

Notably, the representation-free nature of spacetime algebra has exposed the deep structural relationship between the relative spatial directions, the cross product of relative 3-space, the Lie bracket relations of the Lorentz group, the quaternion algebra, the commutation relations of the Pauli spin matrices, and even the imaginary unit i that appears in these commutation relations. Using standard mathematical methods, these topics do not appear to have such an obvious connection. Indeed, the natural appearance of all these topics solely from a systematic construction of the geometry of spacetime highlights the deep geometric significance of their relation to one another.

As we briefly indicated at the beginning of this introduction, the embedding of Clifford algebras $\mathcal{C}_{3,0} \subset \mathcal{C}_{1,3}$ motivated our choice of metric signature for spacetime to be $(+, -, -, -)$. In fact, this embedding is part of a larger sequence of Clifford algebra embeddings $\mathcal{C}_{2,4} \supset \mathcal{C}_{4,1} \supset \mathcal{C}_{1,3} \supset \mathcal{C}_{3,0} \supset \mathcal{C}_{0,2} \supset \mathcal{C}_{0,1} \supset \mathcal{C}_{0,0}$ illustrated in Table 8, which corresponds to, in order: conformal space (Penrose twistors), relativistic electron (Dirac spinors), spacetime/electromagnetism (Maxwell spinors), relative 3-space (Pauli spinors), quaternions (Hamilton spinors), complex numbers (Schrödinger spinors), and the real numbers. The connection between this sequence and the successive approximations of quantum mechanical particles has been emphasized in [96, 190, 191, 192]. The other choice of spacetime signature $(-, +, +, +)$ produces a distinct algebra $\mathcal{C}_{3,1}$ that does not belong to this sequence of algebras.

At this point we revisit the dot-product relation (10) for the 4-vectors γ_μ of the spacetime algebra $\mathcal{C}_{1,3}$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}. \quad (73)$$

This relation was historically used to define the Dirac γ -matrices that appear in the Dirac equation for the relativistic electron. We can thus view the Dirac matrices as a representation of the noncommutative spacetime algebra of 4-vectors γ_μ , where the matrix product simulates the noncommutative product. Indeed, our notation γ_μ is motivated by this connection [4]. As with the Pauli matrices, however, there is no need to construct such a matrix representation for the spacetime algebra to be well-defined. Matrix constructions like $\not{p} = \sum_\mu p^\mu \gamma_\mu$ that appear

in the Dirac theory can be understood to define proper 4-vectors p in the spacetime algebra. Again, there is nothing intrinsically quantum mechanical about these constructions.

34.7.4 Spacetime calculus

Modern physical developments have required a mathematics that continually shifts its foundation and gets more abstract. Non-euclidean geometry and noncommutative algebra, which were at one time were considered to be purely fictions of the mind and pastimes of logical thinkers, have now been found to be very necessary for the description of general facts of the physical world. It seems likely that this process of increasing abstraction will continue in the future.

Paul A. M. Dirac [193]

With the spacetime algebra $\mathcal{C}_{1,3}$ now in hand, we consider how to construct *fields* on which we can perform calculus. This is the minimal extension of the algebra that is required to describe electromagnetism. Formally speaking, we replicate the spacetime algebra $\mathcal{C}_{1,3}$ at every point x on a flat spacetime manifold so that it acts as a *tangent algebra* in which multivectors $M(x)$ can be locally defined. Collecting all the spacetime points x and their tangent algebras $\mathcal{C}_{1,3}(x)$ produces a *Clifford fiber bundle*. This bundle is the appropriate mathematical space to define *multivector fields* $M(x)$, such as the electromagnetic field, and to perform calculus on those fields.

The astonishing feature of the spacetime calculus that we will briefly construct over this bundle is that it permits the *directed integration* of multivector quantities by treating the points x themselves as vectors. This generalization recovers the usual scalar integration permitted by differential geometry as a special case, but also recovers the theorems of complex analysis and their generalizations. Moreover, it permits a coordinate-free definition of the vector derivative ∇ and a simple statement of the fully general fundamental (Stokes) theorem of calculus. We give a brief review here to give the essential background, but emphasize that more extensive and rigorous treatments may be found in [5, 8, 9, 171, 172, 174].

Directed integration

Each vector point $x = \sum_{\mu} x^{\mu} \gamma_{\mu}$ on the oriented spacetime manifold corresponds to an oriented 4-volume $d^4x = dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ that can be decomposed into infinitesimal vector segments $dx_{\mu} = |dx| \gamma_{\mu}$ (i.e., differentials) that point along coordinate directions¹².

One can then define a *directed integration* on the manifold as a Riemann summation of multivector products over a particular region S_k of dimension k . To do this, one encloses each point x of S_k in a finite oriented k -volume $\Delta^k x = |\Delta x|^k I_k$, where $I_k = \bigwedge_j \gamma_j$ is the unit k -volume element that encodes the orientation of the region S_k at the point x . One then computes a sum over all these points in the limit that the bounding intervals $|\Delta x|$ vanish and the number

¹²Formally speaking, the manifold can be constructed such that each oriented k -blade $d^k x$ has an oriented boundary $\partial d^k x = \sum_j (d^{k-1} x_j^+ - d^{k-1} x_j^-)$ of $(k-1)$ -blades centered at pairs of boundary points $x_j^{\pm}$. For example, a vector segment dx has two ordered boundary points separated by the scalar interval $|dx|$, a plane segment $d^2 x$ has two ordered pairs of boundary line segments each separated by $|dx|$, and a small cube of volume $d^3 x$ has three pairs of boundary sides separated by $|dx|$. These nested boundary relationships are formally constructed as an oriented chain complex via a limiting refinement procedure $\Delta^k x \rightarrow d^k x$ that shrinks finite oriented volumes down to infinitesimal size [174]. The orientation information for each $\Delta^k x$ is encoded as a k -blade in the spacetime algebra at the corresponding point x .

of points x increases to infinity in the standard way [171]

$$\int_{S_k} M_1(x) d^k x M_2(x) = \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \sum_{x \in S_k} M_1(x) \Delta^k x M_2(x). \quad (74)$$

The noncommutativity of the multivectors $M_1(x)$, $M_2(x)$ with the directed volume segment $d^k x$ permits both right and left products in the integrand, which contrasts sharply with the usual definition of a scalar integral.

To understand the difference between scalar integration and directed integration, consider a k -volume S_k that has no boundary. The directed integral of this closed region must vanish $\int_{S_k} d^k x = 0$. For example, if one sums small vectors around a curve, the net vector sum will be the vector connecting the start and end point of the curve; for a closed loop with no boundary points, this sum is simply zero. The volume of S_k , on the other hand, is given by the standard scalar integral of the undirected volume elements, which can be obtained from the directed integral by inverting the directed measure

$$\text{Vol}(S_k) = \int_{S_k} |d^k x| = \int_{S_k} d^k x I_k^{-1} \quad (75)$$

using the unit k -volume element I_k for the measure $d^k x = |d^k x| I_k$. For a closed loop, this scalar integral will evaluate to the net length of the loop. As a side note, the implicit wedge products in $d^k x$ that are used to compute the scalar measure $|d^k x|$ in (75) are what produces the Jacobian determinant factor in the scalar integral when the coordinates are changed.

Vector derivative: the Dirac operator

If the spacetime points x are expanded into coordinates $x = \sum_{\mu} x^{\mu} \gamma_{\mu}$ using a standard basis γ_{μ} , then a proper *vector derivative* ∇ can be defined using the reciprocal basis γ^{μ}

$$\nabla = \sum_{\mu} \gamma^{\mu} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu}, \quad (76)$$

where $\overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu} = \overset{\leftarrow}{\partial}_{\mu} + \overset{\rightarrow}{\partial}_{\mu}$ is the usual partial derivative $\partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu}$ along the coordinate $x^{\mu} = \gamma^{\mu} \cdot x$ that generally acts both to the left and to the right (one can think of this bidirectionality as a special case of the product rule for derivatives). The form of (76) is precisely the same as the *Dirac operator* that is usually constructed with gamma matrices and used in the Dirac equation. However, we see here that this operator has the natural interpretation as the proper vector derivative for a spacetime manifold *with no matrix representation required*.

Coordinate-free definition

For completeness, we emphasize that the directed integration permits a coordinate-free definition of the vector derivative in (76) as a generalized difference quotient [171]

$$M_1(x) \nabla M_2(x) = \lim_{\text{Vol}(S_4) \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial S_4} M_1(x') [d^3 x' I^{-1}(x)] M_2(x')}{\text{Vol}(S_4)}. \quad (77)$$

Here the numerator is the *directed* integral of the fields $M_1(x)$ and $M_2(x)$ over the *boundary* ∂S_4 of the spacetime region S_4 , while the denominator is the scalar integral of S_4 that produces the volume $\text{Vol}(S_4)$ in (75). The local duality factor of the unit 4-volume $I^{-1}(x)$ in the numerator produces the normal vectors dual to the (trivector) boundary surfaces of ∂S_4 .

The resulting derivative ∇ is thus a proper 4-vector algebraically that acts as a total derivative on both fields. When expanding it in local coordinates, one precisely obtains the form of the Dirac operator (76). In practice, one often needs to consider only the one-sided action of ∇ on a field, usually from the left, which amounts to setting $M_1(x) = 1$ in (77). Note that the algebraic and differential properties of ∇ can be treated independently according to (76). When it is not clear from context, it is conventional to use overdot notation to indicate which quantities are being differentiated in an expression, with the position of ∇ indicating its algebraic role as a vector (e.g., $\dot{\nabla}(a \cdot \dot{b})$ only differentiates b , but constructs a proper 4-vector) [9].

The relative gradient and d'Alembertian

The derivative ∇ can be restricted along any k -blade $M = \langle M \rangle_k$. Specifically, the *tangential derivative* along M is defined as

$$\nabla_M = M^{-1}(M \cdot \nabla), \quad (78)$$

which computes only the derivative along the surface M . When M is a unit vector a , then $a = a^{-1}$, so the tangential derivative recovers the usual directional derivative from vector calculus. Similarly, the complementary derivative is $\nabla_{MI^{-1}} = M^{-1}(M \wedge \nabla)$, which computes the derivative along the orthogonal surface MI^{-1} dual to M . The total derivative decomposes into a sum of these complementary derivatives $\nabla = \nabla_M + \nabla_{MI^{-1}}$ since $M^{-1}(M \cdot \nabla) + M^{-1}(M \wedge \nabla) = (M^{-1}M)\nabla = \nabla$.

Most usefully for our purposes here, we can decompose the derivative in terms of a frame relative to γ_0 by using tangential derivatives,

$$\nabla = \gamma_0^2 \nabla = \gamma_0(\partial_0 + \vec{\nabla}) = (\partial_0 - \vec{\nabla})\gamma_0, \quad (79)$$

where $\nabla_{\gamma_0} = \gamma_0(\gamma_0 \cdot \nabla) = \gamma_0 \partial_0$ is the tangential derivative along γ_0 and $\nabla_{\gamma_0 I^{-1}} = \gamma_0(\gamma_0 \wedge \nabla) = \gamma_0 \vec{\nabla}$ is its dual. The frame-dependent 3-vector derivative

$$\vec{\nabla} = \gamma_0 \wedge \nabla = \sum_i \vec{\sigma}_i \partial_i \quad (80)$$

that appears in the decomposition (79) is precisely the relative 3-*gradient* operator used in standard vector analysis.

This decomposition of ∇ into a relative frame also makes it clear that ∇^2 is the d'Alembertian operator

$$\nabla^2 = (\partial_0 - \vec{\nabla})\gamma_0^2(\partial_0 + \vec{\nabla}) = \partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 = \square. \quad (81)$$

In this sense, ∇ is the natural “square-root” of the d'Alembertian operator in spacetime, which was originally suggested by Dirac [194].

Example: field derivatives

The derivative of a scalar field $\alpha(x)$ produces the total gradient vector field

$$\nabla \alpha(x) = \gamma_0[\partial_0 \alpha(x) + \vec{\nabla} \alpha(x)], \quad (82)$$

that includes the proper derivative along the timelike coordinate. Taking the dual of this equation via right multiplication by I immediately produces the derivative of a pseudoscalar

field $\alpha(x)I$. It follows that the derivative of a complex scalar field $\zeta(x) = \alpha(x) + \beta(x)I$ is a complex vector field $z(x) = \nabla\zeta(x) = \nabla\alpha(x) + [\nabla\beta(x)]I$.

The derivative of a vector field $v(x) = [v_0(x) + \vec{v}(x)]\gamma_0$ produces a scalar field and a bivector field (i.e., a spinor field)

$$\begin{aligned}\nabla v(x) &= \nabla \cdot v(x) + \nabla \wedge v(x), \\ &= (\partial_0 - \vec{\nabla})\gamma_0^2(v_0 - \vec{v}), \\ &= [\partial_0 v_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}] + [-(\partial_0 \vec{v} + \vec{\nabla} v_0) + \vec{\nabla} \times \vec{v}I].\end{aligned}\tag{83}$$

The scalar part $\nabla \cdot v$ is the total *divergence* of $v(x)$, while the bivector part $\nabla \wedge v$ is the proper generalization of the *curl* of $v(x)$ to spacetime. Taking the dual of this equation produces the derivative of a trivector field $v(x)I$, which produces a pseudoscalar field and a bivector field (i.e., a spinor field). It follows that taking the derivative of a complex vector field $z = a + gI$ generally produces a spinor field $\nabla z(x) = \psi(x) = \zeta(x) + \mathbf{F}(x)$ with a complex scalar part $\zeta = \nabla \cdot a + (\nabla \cdot g)I$ and a bivector part $\mathbf{F} = \nabla \wedge a + (\nabla \wedge g)I$.

The derivative of a bivector field $\mathbf{F}(x) = \vec{E}(x) + \vec{B}(x)I$ produces a vector field and a trivector field

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{F}(x) &= \nabla \cdot \mathbf{F}(x) + \nabla \wedge \mathbf{F}(x), \\ &= \gamma_0(\partial_0 + \vec{\nabla})(\vec{E} + \vec{B}I), \\ &= \gamma_0 \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \partial_0 \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B} \right] + \gamma_0 \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{B} + \partial_0 \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} \right] I,\end{aligned}\tag{84}$$

which can be understood as a single complex vector field. Since derivatives of both complex scalars ζ and bivectors $\mathbf{F}$ produce complex vector fields z , it follows that spinors $\psi = \zeta + \mathbf{F}$ and complex vectors z are duals under the action of the derivative ∇ .

Note that we can also write (84) in terms of the intrinsic phase of $\mathbf{F}(x)$ defined in Eq. (35)

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{F}(x) &= \nabla[\mathbf{f}(x) \exp([\varphi(x) + \varphi_0]I)], \\ &= [\nabla \mathbf{f}(x)] \exp([\varphi(x) + \varphi_0]I) + [\nabla \varphi(x)]\mathbf{F}(x)I\end{aligned}\tag{85}$$

to show that the intrinsic bivector derivative $\nabla \mathbf{f}$ and the gradient of the *local* phase $\nabla \varphi$ contribute to the complex vector field. However any *global* intrinsic phase $\exp(\varphi_0 I)$ of $\mathbf{F}$ is a constant overall factor. This distinction between local and global phases holds for complex scalar and vector fields as well.

Fundamental theorem

The fundamental theorem of calculus readily follows from the integral definition of the derivative (77) and takes a particularly elegant form in terms of the tangential derivative along some surface S_k of dimension k [171]

$$\int_{S_k} M_1(x) d^k x \nabla_{S_k} M_2(x) = \int_{\partial S_k} M_1(x) d^{k-1} x M_2(x).\tag{86}$$

This is the generalized *Stokes theorem* of calculus that states that the boundary integral is equal to the volume integral of the derivative. Computing this for various dimensional surfaces and k -blade fields reproduces all the standard variations of Stokes theorem, including the divergence theorem, the various Green's theorems, and the usual fundamental theorem of calculus in one dimension [172].

Example: Cauchy integral theorems

More surprisingly, if we consider the integration of appropriate Green's functions that invert the tangential derivative ∇_{S_k} , then we obtain and generalize the celebrated Cauchy integral theorems of complex analysis [172, 9]. First, for any field $M(x)$ that satisfies $\nabla_{S_2} M(x) = 0$ everywhere in a closed planar region S_2 , the following boundary integral vanishes according to (86)

$$\oint_{\partial S_2} dx M(x) = 0. \quad (87)$$

Second, the Green's function that inverts the planar derivative is $\nabla_{S_2}[2\pi(x-x')]^{-1} = \delta(x-x')$. Hence, if $N(x) = \alpha_{-1}x^{-1} + M(x)$ is a modification of $M(x)$ that adds a pole, then we obtain the residue theorem

$$\oint_{\partial S_2} dx N(x) = \alpha_{-1} \int_{S_2} |d^2x| \mathbf{I}_2 \nabla_{S_2} x^{-1} = 2\pi \mathbf{I}_2 \alpha_{-1}, \quad (88)$$

where $\mathbf{I}_2$ is the unit bivector for S_2 that squares to -1 . Third, multiplying $M(x)$ with the Green's function and then integrating produces the remaining Cauchy integral theorem

$$\oint_{\partial S_2} dx (x-x')^{-1} M(x) = \int_{S_2} \mathbf{I}_2 |d^2x| \nabla (x-x')^{-1} M(x) = 2\pi \mathbf{I}_2 M(x'). \quad (89)$$

To rewrite these formulas in the standard form from complex analysis, we can expand the 2-vector $x = \alpha r + \beta y = \zeta r$, where r is a unit 2-vector that points along the “real axis,” y is a unit 2-vector that points along the “imaginary axis,” and $\zeta = \alpha + \beta \mathbf{I}_2$ is the “complex scalar” corresponding to x , with $\mathbf{I}_2 = yr$ being the unit planar area. Importantly, however, by considering different dimensional surfaces and using the fundamental theorem (86) with the correct Green's functions for derivatives along different k -volumes ∇_{S_k} , it is possible to generalize the Cauchy theorems above to the whole spacetime algebra [172, 9].

34.7.5 Maxwell's equation in vacuum

One scientific epoch ended and another began with James Clerk Maxwell.

Albert Einstein [195]

The ultimate importance of the Maxwell theory is far greater than its immediate achievement in explaining and unifying the phenomena of electricity and magnetism. Its ultimate importance is to be the prototype for all the great triumphs of twentieth-century physics.

Freeman J. Dyson [1]

With the spacetime algebra developed in the previous two sections now in hand, we can explore the physical structure of electromagnetism as expressed with this proper geometric language. Wherever possible, we shall remind the reader of the previous mathematical results as they become relevant to the physics in what follows. As we shall see, all of electromagnetism essentially emerges without any additional effort directly from the geometric structure of spacetime algebra that we have already developed.

To proceed, we briefly examine the derivative of a bivector field that we calculated in Eq. (84) to make the following observation: the simplest differential equation that one can write for $\mathbf{F}$

$$\nabla \mathbf{F} = 0 \quad (90)$$

is equivalent to all four of Maxwell's equations in vacuum, up to appropriate choices of constants that define units for the bivector components. This almost automatic appearance of Maxwell's vacuum equation is remarkable, since the deceptively simple differential equation (90) is trivially postulated solely from our careful development of the algebraic and differential *structure* of a spacetime manifold, with no reference to additional physical assumptions. We will return to this intriguing point later in Section 34.7.8.

Relative frame form

We can prove the equivalence of (90) to the usual form of Maxwell's equations in a relative frame with timelike vector γ_0 by writing $\mathbf{F}$ in terms of relative polar ($\vec{E}$) and axial ($\vec{B}$) parts obtained via the contractions in Eq. (49)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F} \gamma_0 \gamma_0^{-1} = (\mathbf{F} \cdot \gamma_0) \gamma_0 + (\mathbf{F} \wedge \gamma_0) \gamma_0 = \vec{E} + \vec{B} I \quad (91)$$

Applying the identity (84) to (90) then yields

$$\nabla \mathbf{F}(x) = \gamma_0 \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \partial_0 \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B} \right] + \gamma_0 \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{B} + \partial_0 \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} \right] I, \quad (92)$$

The independent vector and trivector parts of (90) can be separated, after which the duality factors γ_0 and I cancel, yielding the two paravector equations for the γ_0 frame¹³

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + (\partial_0 \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B}) &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} + (\partial_0 \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E}) &= 0. \end{aligned} \quad (93)$$

Finally, the relative scalar and 3-vector parts of each paravector can be separated to produce the standard Gibbs 3-vector form for the four vacuum Maxwell equations [155, 189]

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \partial_0 \vec{E}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_0 \vec{B}. \end{aligned} \quad (94)$$

Rescaling these vectors with constant factors that set the (SI) units $\vec{E} \mapsto \vec{E} \sqrt{\epsilon_0}$, $\vec{B} \mapsto \vec{B} / \sqrt{\mu_0}$, and expanding $\partial_0 \mapsto c^{-1} \partial_t$ makes the equivalence apparent. Furthermore, with these replacements and the identity $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, it is clear that the proper bivector field

$$\mathbf{F} = \sqrt{\epsilon_0} \vec{E} + \vec{B} I / \sqrt{\mu_0} = \sqrt{\epsilon_0} (\vec{E} + c \vec{B} I) = (\vec{E} / c + \vec{B} I) / \sqrt{\mu_0} \quad (95)$$

is precisely equivalent to the Riemann-Silberstein complex electromagnetic field vector (3). Importantly, however, the pseudoscalar factor of I that appears here has rich physical meaning that is not apparent when using the scalar imaginary i appearing in other treatments (e.g., [40]). For brevity, we will omit the constants in the discussion to follow, since they may be easily restored when needed. The various formulations of the electromagnetic field and Maxwell's vacuum equation are compared in Tables 9 and 10 for reference, along with a reminder of the proper unit scalings for both SI and CGS conventions.

¹³These two paravector equations are in fact equivalent to Maxwell's preferred quaternion formulation of electromagnetism [134]. However, as mentioned in Section 34.7.3, in place of the basis 3-vector directions $\vec{\sigma}_i$ he used the (left-handed set of) basis quaternions $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (\vec{\sigma}_1 I^{-1}, -\vec{\sigma}_2 I^{-1}, \vec{\sigma}_3 I^{-1})$, which geometrically correspond to rotation planes and thus caused numerous subtle problems.

Electromagnetic Field	
Spacetime Algebra:	$\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I$ $\mathbf{G} = \mathbf{F}I^{-1} = \vec{B} - \vec{E}I$
Differential Forms:	$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ $\mathbf{G} = \star \mathbf{F}$
Tensor Components:	$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ $E_i = F_{i0}, \quad B_i = G_{i0}$
Gibbs 3-Vectors:	$(\vec{E}, \vec{B})$ $(\vec{B}, -\vec{E})$
SI Units:	$\vec{E} \mapsto \sqrt{\epsilon_0} \vec{E}, \quad \vec{B} \mapsto \vec{B}/\sqrt{\mu_0}, \quad c \equiv 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$
CGS Units:	$\vec{E} \mapsto \vec{E}/\sqrt{4\pi}, \quad \vec{B} \mapsto \vec{B}/\sqrt{4\pi}$

Table 9: The electromagnetic field $\mathbf{F}$ and its dual $\mathbf{G}$, as expressed in various formalisms. In spacetime algebra $\mathbf{F}$ is a bivector, and its dual $\mathbf{G}$ is obtained by right-multiplication with the pseudoscalar I^{-1} . In differential forms $\mathbf{F}$ is a 2-form (antisymmetric rank-2 tensor) with components $F_{\mu\nu}$, and its dual $\mathbf{G}$ is obtained with the Hodge-star transformation $\star$. In component notation, this Hodge-star is the total contraction of $F_{\mu\nu}$ with the fully anti-symmetric Levi-Civita symbol $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$. The standard Gibbs 3-vector notation is reference-frame-dependent, but the 3-vectors of $\vec{E}$ and $\vec{B}$ can still be appropriately paired.

Maxwell's Equation in Vacuum	
Spacetime Algebra:	$\boxed{\nabla \mathbf{F} = 0} \quad \boxed{\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I}$
	$\Downarrow$
	$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \wedge \mathbf{F} = 0$
	$\Downarrow$
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + (\partial_0 \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} + (\partial_0 \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$
	$\Downarrow$
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \partial_0 \vec{E}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_0 \vec{B}$
Differential Forms:	$d\mathbf{G} = d\star\mathbf{F} = 0, \quad d\mathbf{F} = d\star\mathbf{G} = 0$
Tensor Components:	$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\nu G^{\mu\nu} = 0$
Gibbs 3-Vectors:	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \partial_0 \vec{E}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_0 \vec{B}$
SI Units:	$\vec{E} \mapsto \sqrt{\epsilon_0} \vec{E}, \quad \vec{B} \mapsto \vec{B}/\sqrt{\mu_0}, \quad c \equiv 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$
CGS Units:	$\vec{E} \mapsto \vec{E}/\sqrt{4\pi}, \quad \vec{B} \mapsto \vec{B}/\sqrt{4\pi}$

Table 10: Maxwell's vacuum equation, as expressed in various formalisms. Notably, only spacetime algebra permits the formulation as the single boxed equation for the electromagnetic bivector field $\mathbf{F}$, which can be algebraically expanded into various other forms as needed. Shown are successive expansions that are equivalent to the formalisms of differential forms, paravectors / quaternions, and Gibbs 3-vectors, respectively, to show how they are all naturally contained within spacetime algebra.

Equation (90) is manifestly proper, but the four equations (94) are not so obviously invariant under changes of the inertial reference frame. We can see the effect of choosing a different frame by splitting $\mathbf{F} = \vec{E}' + \vec{B}'I$ along a different timelike vector γ'_0 according to (49). This produces different relative 3-vector fields

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= (\mathbf{F} \cdot \gamma'_0)\gamma'_0 = (\vec{E} \cdot \gamma'_0)\gamma'_0 + (\vec{B}I \cdot \gamma'_0)\gamma'_0, \\ \vec{B}'I &= (\mathbf{F} \wedge \gamma'_0)\gamma'_0 = (\vec{E} \wedge \gamma'_0)\gamma'_0 + (\vec{B}I \wedge \gamma'_0)\gamma'_0,\end{aligned}\tag{96}$$

which must also satisfy (94) (proved by the same derivation). These different relative fields accordingly mix the components of $\vec{E}$ and $\vec{B}$, even though they produce the *same* proper bivector field $\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I = \vec{E}' + \vec{B}'I$. The subtle and important role of the pseudoscalar I in managing the implicit relative bases $\vec{\sigma}_i = \gamma_i\gamma_0$ and $\vec{\sigma}'_i = \gamma'_i\gamma'_0$ becomes apparent when comparing these different frame expansions: using a scalar imaginary i would not preserve the frame invariance in the same way.

The mixing of components from such a change of frame will have precisely the same form as a Lorentz boost, such as the one derived in (66). To prove this, we note that we can always write the new frame vector γ'_0 as a Lorentz boost of the old frame γ_0 with some relative velocity $\vec{v}$. This boost has the spinor representation $\gamma'_0 = \psi\gamma_0\tilde{\psi}$ with the rotation spinor $\psi = \exp(-\alpha\hat{v}/2)$, where the velocity unit 3-vector $\hat{v} = \vec{v}/|v|$ also acts as the plane of rotation for the boost, and $\alpha = \tanh^{-1}|v|/c$ is the appropriate rapidity (rotation angle). This Lorentz transformation produces the relation

$$\gamma'_0 = \psi\gamma_0\tilde{\psi} = \exp(-\alpha\hat{v})\gamma_0 = \frac{1 - \vec{v}/c}{\sqrt{1 - (|v|/c)^2}}\gamma_0.\tag{97}$$

After defining $\gamma = [1 - (|v|/c)^2]^{-1/2}$ to be the usual time-dilation factor for brevity, we can then directly expand $\mathbf{F}$ into the relative fields of the γ'_0 frame using (91)

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}\gamma'_0\gamma'^{-1}_0 = \gamma^2\mathbf{F}\gamma_0\gamma_0(1 - \vec{v}/c)(1 + \vec{v}/c) \\ &= \gamma^2(\vec{E} + \vec{B}I)(1 - \vec{v}/c)(1 + \vec{v}/c), \\ &= \gamma^2[\vec{E} + \vec{B}I - \vec{E} \cdot (\vec{v}/c) - \vec{B} \cdot (\vec{v}/c)I + \vec{B} \times (\vec{v}/c) - \vec{E} \times (\vec{v}/c)I](1 + \vec{v}/c), \\ &= [\vec{E}_{\parallel} + \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp}/c)] + [\vec{B}_{\parallel} + \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{E}_{\perp}/c)]I,\end{aligned}\tag{98}$$

which is the same form as the direct Lorentz boost of $\mathbf{F}$ derived in (66).

Global phase degeneracy and dual symmetry

Notably, the Maxwell's vacuum equation Eq. (90) is invariant under *global* phase transformations, such as those considered in (70). To understand the implications of this symmetry of Maxwell's equation, we will briefly revisit how this transformation acts on the electric field itself.

Specifically, we apply a phase rotation using the spinor representation $\psi = \exp(-\theta I/2)$ to Eq. (90) to find

$$\psi(\nabla\mathbf{F})\psi^* = e^{-\theta I/2}(\nabla\mathbf{F})e^{\theta I/2} = \nabla(e^{\theta I/2}\mathbf{F}e^{\theta I/2}) = \nabla\mathbf{F} \exp(\theta I) = 0,\tag{99}$$

which shows that the phase rotation cancels. Note that this phase transformation is equivalent to modifying the *intrinsic* phase of $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F} \exp(\theta I)$. This added phase mixes $\vec{E}$ and $\vec{B}$ at every point x in the same way¹⁴ while leaving the inertial frame the same

$$\mathbf{F} \exp(\theta I) = (\cos \theta \vec{E} - \sin \theta \vec{B}) + (\sin \theta \vec{E} + \cos \theta \vec{B})I.\tag{100}$$

¹⁴Note that we could consider converting this global gauge transformation of $\mathbf{F}$ into a local gauge transformation in the usual way by defining a covariant derivative using an auxiliary scalar field (see Sections 34.7.8 and 34.7.8), but we shall not do so here. However, see [196] for an interesting connection between performing this procedure here and the electroweak theory of particle physics.

The interesting special case of the angle $\theta = -\pi/2$ exchanges the relative fields $\vec{E}$ and $\vec{B}$ up to a sign at every point x . The resulting bivector is dual to $\mathbf{F}$ and is typically given a special notation

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}I^{-1} = \vec{B} - \vec{E}I, \quad (101)$$

which can also be written in tensor component notation as

$$G^{\mu\nu} = \star F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (102)$$

using the Hodge-star operation from differential forms (or the completely antisymmetric Levi-Civita symbol $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$) as shown in Table 9 [68]. The dual bivector $\mathbf{G}$ has been particularly useful for studies in magnetic monopoles [193, 197, 198, 199, 200, 101, 201, 202, 203, 102, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213] and optical helicity [103, 104, 106, 105, 68, 214, 107, 108], and will play an interesting role in the Lagrangian treatment described in Section 34.7.8.

This exchange freedom of the vacuum Maxwell equation [124, 125] has historically been called the *dual symmetry* of the vacuum Maxwell fields [99, 101, 102, 105, 68, 106, 107, 108], and has prompted considerable study into similar dualities in field and string theories beyond standard electromagnetism [109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122]. We see here that it appears as a structural feature of a bivector field on spacetime that exploits a global phase symmetry of the equation of motion. Note that the bivector magnitude $|\mathbf{F}|^2 \equiv \mathbf{F}^*\mathbf{F} = \mathbf{G}^*\mathbf{G}$ is always manifestly invariant under dual symmetry.

Canonical form

We now revisit the expansion of the electromagnetic field into its canonical form, introduced in Section 34.7.3. These expansions do not require Maxwell's equation, but will be useful in what follows.

Computing the square of $\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I$ produces two proper scalar fields as a single complex scalar

$$\mathbf{F}^2 = |\mathbf{F}|^2 \exp(2\varphi I) = (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2) + 2(\vec{E} \cdot \vec{B})I. \quad (103)$$

These scalars are precisely those used to construct Lagrangian densities for the electromagnetic field [215]. The first scalar is precisely the usual electromagnetic Lagrangian, while the second term is the “axion” contribution that has been extensively discussed in particle physics [216]. We will return to the issue of electromagnetic Lagrangians in Section 34.7.8.

Denoting the two proper scalars as

$$\ell_1 = \langle \mathbf{F}^2 \rangle_0 = |\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2, \quad (104)$$

$$\ell_2 = \langle \mathbf{F}^2 \rangle_4 I^{-1} = 2(\vec{E} \cdot \vec{B}), \quad (105)$$

they determine the intrinsic local phase of $\mathbf{F}$ according to (36)

$$\varphi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\ell_2}{\ell_1}, \quad (106)$$

which demonstrates that this phase is also a proper scalar field.

The canonical bivector corresponding to $\mathbf{F}$ can then be computed according to (36)

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} \exp(-\varphi I) = (\cos \varphi \vec{E} + \sin \varphi \vec{B}) + (-\sin \varphi \vec{E} + \cos \varphi \vec{B})I, \quad (107)$$

where we can expand the trigonometric functions in terms of ℓ_1 and ℓ_2 as

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\ell_1}{\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}} \right)}, \quad \sin \varphi = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\ell_1}{\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}} \right)}. \quad (108)$$

This transformation performs a rotation of the relative fields in the complex plane of the spacetime split at each local point x , while leaving the chosen frame of γ_0 invariant.

The proper complex conjugate of the field can be computed in a similar way according to (44),

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{f} \exp(-\varphi I) = \mathbf{F} \exp(-2\varphi I) = \frac{(\ell_1 \vec{E} + \ell_2 \vec{B}) + (-\ell_2 \vec{E} + \ell_1 \vec{B})I}{\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}}. \quad (109)$$

It follows that the dual-symmetric field magnitude has the explicit and intuitive form

$$|\mathbf{F}|^2 = \mathbf{F}^* \mathbf{F} = \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}. \quad (110)$$

Note that when $\ell_2 \propto \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ the proper phase vanishes $\varphi = 0$ and the bivector field is purely canonical $\mathbf{F} = \mathbf{F}^* = \mathbf{f} = \vec{E} + \vec{B}I$. Indeed the pseudoscalar part in the pseudonorm (103) vanishes in this case. The magnitude $|\mathbf{F}|^2 = |\ell_1|$ becomes the pseudonorm involving only the traditional Lagrangian density $\ell_1 = |\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2$, albeit in a manifestly dual-symmetric form (due to the absolute value).

Similarly, note that when $\ell_1 = |\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2 = 0$ the proper phase is $\varphi = \pi/4$ and the canonical bivector field has the symmetrized form

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\vec{E} + \vec{B}) + (-\vec{E} + \vec{B})I]. \quad (111)$$

The conjugate becomes the dual $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}I^{-1} = \vec{B} - \vec{E}I$ up to the sign of ℓ_2 , and the magnitude becomes the other proper scalar $|\mathbf{F}|^2 = |\ell_2| = 2|\vec{E} \cdot \vec{B}|$ in a manifestly dual-symmetric form.

When $\ell_1 = \ell_2 = 0$ then $|\mathbf{F}|^2 = 0$, making $\mathbf{F}$ a null bivector. The phase $\varphi(x)$ correspondingly becomes degenerate. Similarly, the phase of $\mathbf{F}^*$ will also be degenerate, but will always be the negative of the degenerate phase of $\mathbf{F}$. For such a null field, the conditions $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ and $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ hold according to (103).

Electromagnetic waves

Although a null vacuum field $\mathbf{F}$ has a globally degenerate phase, it must still satisfy Maxwell's equation (90). The constraining derivative therefore breaks the *local* phase degeneracy by connecting the local values of $\varphi(x)$ at nearby points x . Only the global phase remains arbitrary in the form of the dual symmetry of the solution.

To see how Maxwell's equation (90) breaks the phase degeneracy of a null field for a specific and important solution, consider a field $\mathbf{F} = \mathbf{f} \exp[\varphi(x)I]$ with a *constant* canonical bivector $\mathbf{f}$. Maxwell's equation (90) then takes the simpler form

$$\nabla \mathbf{F} = [\nabla \varphi] \mathbf{f} = 0. \quad (112)$$

If $\nabla \varphi \neq 0$ and $\mathbf{f} \neq 0$ then both factors must be null factors that cannot be inverted, making $\mathbf{F}$ a null bivector. Since $\mathbf{f}$ is constant for all x , then $[\nabla \varphi]$ must not vary with x in order to satisfy (112); hence the phase must be linear $\varphi = \varphi_0 \pm x \cdot k$ in terms of a null wavevector $k = \nabla \varphi$

with units inverse to x . Furthermore, the constraint $k\mathbf{f} = 0$ implies that the constant bivector $\mathbf{f}$ can be written in terms of this null wavevector as

$$\mathbf{f} = sk = s \wedge k = -k \wedge s \quad (113)$$

for some constant spacelike vector s orthogonal to k : $s \cdot k = 0$. Since the global phase is arbitrary, we set $\varphi_0 = 0$, and thus obtain the (monochromatic) *plane wave solutions*

$$\mathbf{F}(x) = (sk) \exp[\pm(k \cdot x)I]. \quad (114)$$

Importantly, this complex form of the plane wave solution arises with no *ad hoc* introduction of the complex numbers [173], unlike the usual treatment of electromagnetic plane waves. The factor of I is the intrinsic pseudoscalar for spacetime, and both the “real” and “imaginary” parts of the expression produce meaningful and necessary parts of the same proper bivector. Note that the six components of $\mathbf{F}$ are now entirely contained in the specification of the null vector k and the spacelike orientation vector s orthogonal to k .

If we perform a spacetime split of $k = \gamma_0(\omega - \vec{k})$ to put (114) in more standard notation (setting $c = 1$ for convenience), we find that the null condition $k^2 = (\omega + \vec{k})(\omega - \vec{k}) = \omega^2 - |\vec{k}|^2 = 0$ implies the usual *dispersion relation* $|\vec{k}| = |\omega|$ in any frame¹⁵. Hence, we can factor out a frame-dependent frequency as a magnitude $k = \omega k_0$ to isolate a purely directional null factor $k_0 = \gamma_0(1 - \vec{\kappa})$ that contains the relative unit vector $\vec{\kappa} \equiv \vec{k}/|\vec{k}|$ for the chosen frame.

It follows from this decomposition that Maxwell's equation (112) can also be written as the eigenvalue constraint $\vec{\kappa}\mathbf{f} = \mathbf{f}$, which makes $\mathbf{f}$ an eigenbivector of the relative unit vector $\vec{\kappa}$ (in any frame). Performing a spacetime split $\mathbf{f} = sk = \vec{E} + \vec{B}I$ then reduces this constraint to two copies of the equation $\vec{\kappa}\vec{E} = \vec{B}I$, in accordance with the null condition $|\vec{E}| = |\vec{B}|$, which implies $\vec{\kappa} \times \vec{E} = \vec{B}$ since there is no scalar term. Therefore, $\vec{\kappa} \cdot \vec{E} = \vec{\kappa} \cdot \vec{B} = 0$ and the three relative vectors $\vec{\kappa}\vec{E}\vec{B} = +I|\vec{E}||\vec{B}|$ form a *right-handed* oriented set of basis vectors in any relative frame. Consequently, the appropriately scaled directional factor ωs for the null bivector $\mathbf{f} = sk = \omega sk_0$ is simply the purely spatial part of its spacetime split, $\omega s = \vec{E}\gamma_0$.

The canonical bivector for the plane wave (114) is therefore

$$\mathbf{f} = \omega sk_0 = (\vec{E}\gamma_0)k_0 = \vec{E}(1 - \vec{\kappa}) = (1 + \vec{\kappa})\vec{E}. \quad (115)$$

Hence, in a relative frame $\vec{E}\gamma_0$ determines a reference orientation and notion of amplitude $|\vec{E}|$ for $\mathbf{f}$, while the purely directional null factor $k_0 = \gamma_0(1 - \vec{\kappa})$ provides the proper wave orientation. The full relative-frame version of (114) thus has the familiar form

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \vec{E}(1 - \vec{\kappa}) \exp[\pm(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})I], \\ &= (\vec{E} + \vec{\kappa} \times \vec{E}I) \exp[\mp(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)I], \\ &= [\vec{E} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \mp \vec{\kappa} \times \vec{E} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] \\ &\quad + [\vec{E} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \pm \vec{\kappa} \times \vec{E} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]I. \end{aligned} \quad (116)$$

We emphasize that an overall frequency scaling factor ω has been absorbed into the amplitude of $\vec{E}$ in the frame γ_0 by convention, so this relative amplitude will also change with the reference frame due to the Doppler effect. Indeed, we will see later in Section 34.7.7 that the energy-density of the field (which contains the square of this relative amplitude) is a frame-dependent quantity.

The relative form (116) makes it clear that the pure plane wave solution (114) with $-I$ is *right-hand circularly polarized* in the traditional sense. In each relative spatial plane orthogonal

¹⁵Note that choosing a different frame will boost the frequency ω (i.e., red- or blue-shift it from the Doppler effect), but will leave the null vector k and the dispersion relation invariant.

to the relative wavevector direction $\vec{\kappa}$ (i.e., $\vec{\kappa} \cdot \vec{x} = 0$), the relative vectors $\vec{E}$ and $\vec{B} = \vec{\kappa} \times \vec{E}$ rotate around the axis $\vec{\kappa}$ at a frequency ω with increasing t . This rotation shows that a circularly polarized wave has a definite *helicity* [45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85], which is a manifestation of the spin-1 nature of the electromagnetic field. Choosing the opposite sign of the pseudoscalar $+I$ in (114) correspondingly produces a *left-hand circularly polarized* plane wave by flipping the sign of the phase in (116), effectively flipping both the propagation direction $\vec{\kappa}$ and the direction of rotation with increasing t . It is now also clear that the dual-symmetric global phase freedom of the solution (114) corresponds to the arbitrary phase offset of the polarization rotation (116); that is, the relative vectors $\vec{E}$ and $\vec{B}$ may be arbitrarily rotated in unison around the propagation axis $\vec{\kappa}$ without changing the solution (in any frame).

To go beyond the monochromatic plane wave solution, we observe that in addition to flipping the sign of I in (114), we can also scale the magnitude ω of k arbitrarily. We can thus exploit the fact that Maxwell's equation is linear to construct new solutions as superpositions of all possible values of ω . It follows that for any given directional null vector k there exists an infinite number of corresponding (polychromatic) *wave-packet* solutions determined by scalar spectral weight functions $\alpha(\omega)$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= sk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha(\omega) \exp[-\omega (k \cdot x)I], \\ &= sk \int_0^{\infty} d\omega [\alpha_+(\omega) \exp[-\omega (k \cdot x)I] + \alpha_-(\omega) \exp[\omega (k \cdot x)I]], \end{aligned} \quad (117)$$

where $\alpha_{\pm}(\omega) = \alpha(\pm|\omega|)$. The function $\alpha(\omega)$ can absorb the magnitude of s for each choice of ω , making $s^2 = -1$ a spacelike reference unit vector by convention. This total field $\mathbf{F}$ is a linear superposition of the right- and left-hand circularly polarized plane waves at each positive scalar frequency $|\omega|$, and still satisfies Maxwell's vacuum equation (90) by construction. Note that when $\alpha_+ = \alpha_-^*$ the integral becomes purely real and the resulting polarization is linear. In general, coefficients α_+ and α_- determine the Jones vector of the wave polarization in the basis of circular polarizations, which are attached to the coordinate frame specified by the vector s orthogonal to k .

The two signed solutions with $\pm|\omega|$ are traditionally called the *positive-frequency* and *negative-frequency* plane wave solutions of Maxwell's vacuum equation, respectively. Here we see that the positive factor $|\omega|$ arises from the degeneracy of the null vector k with respect to scaling. However, the sign of ± 1 directly corresponds to a choice of handedness for I that determines a particular circular polarization (i.e., *helicity*). These features are invariant in (117) because null vectors and the handedness of I do not depend on any particular reference frame.

The solution (117) can also be understood as a Fourier transform of the spectral function $\alpha(\omega)$, which can be simply evaluated to obtain

$$\mathbf{F} = sk \tilde{\alpha}(-k_0 \cdot x) = (\vec{E}_0 + \vec{\kappa} \times \vec{E}_0 I) \tilde{\alpha}(\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - ct), \quad (118)$$

in terms of the relative unit-vector direction $\vec{E}_0$. The (complex scalar) amplitude $\tilde{\alpha}$ is the Fourier-transform of $\alpha(\omega)$ that completely determines the packet shape of the traveling wave. The bivector prefactor provides an overall linear polarization for a traveling wave packet by default, with electric and magnetic parts phase-offset by an angle of $\pi/2$. This polarization can be made elliptic or circular, however, when $\tilde{\alpha}$ has additional complex structure (as demonstrated in (116) for the monochromatic circularly polarized case).

We can also go beyond a simple plane wave solution altogether to construct a more general (not necessarily null) solution from (114) as a superposition of plane waves in all null wavevector directions k . To do this we can rewrite the null factor as $k = \gamma_0(|\vec{k}| - \vec{k})$ in a particular reference

frame γ_0 , after which the components of $\vec{k}$ can be integrated as a 3-vector to obtain

$$\mathbf{F} = \iiint_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{k} \, s(\vec{k}) k_0(\vec{k}) [\alpha_+(\vec{k}) e^{-(k \cdot x)I} + \alpha_-(\vec{k}) e^{(k \cdot x)I}], \quad (119)$$

where $k_0 = k/|\vec{k}| = \gamma_0(1 - \vec{\kappa})$ is a purely directional factor in the frame γ_0 , and where the reference directions $s(\vec{k}) = \vec{E}_0(\vec{k})\gamma_0$ are orthogonal to each $\vec{\kappa}$: $s(\vec{k}) \cdot k(\vec{k}) \propto \vec{E}_0(\vec{k}) \cdot \vec{\kappa} = 0$. This integral (119) can be understood as the construction of $\mathbf{F}$ through a spatial Fourier transform.

The functions $\alpha_{\pm}(\vec{k})$ encode the spectral decomposition and magnitude of the field. The unit vectors $s(\vec{k})$ encode the reference polarizations for each traveling mode of the field. Notably, the functions $\alpha_{\pm}(\vec{k})$ that appear here become the foundation for the canonical (“second”) quantization of the field in quantum field theory (after normalization), where they become the raising and lowering operators for specific field modes up to appropriate scaling factors [39]. We will not further explore this quantization procedure here, but the interested reader can find excellent discussions of how to quantize the field using the complex Riemann-Silberstein vector in Refs. [26, 40].

34.7.6 Potential representations

By performing particular operations on symbols, we acquire the possibility of expressing the same thing in many different forms.

James Clerk Maxwell [217]

For more general solutions of Maxwell’s equation in vacuum (90), it can be useful to construct the bivector field $\mathbf{F}$ from auxiliary *potential* fields. There are three types of potential that are particularly convenient to use: 1) a vector potential, 2) a bivector potential, and 3) a scalar Hertz potential. We will consider each in turn, and show their explicit relationship.

Complex vector potential

The standard vector potential construction follows from the ansatz

$$\mathbf{F} = \nabla z, \quad (120)$$

where z is some initially unspecified multivector field. This ansatz is compared with other formalisms in Table 11. Due to the fundamental theorem (86), this ansatz can only describe *conservative* fields that vanish when integrated around the boundary of any closed surface, such as a loop.

Since $\mathbf{F}$ is a pure bivector field, ∇z must satisfy the following conditions. First, z must be a vector field to produce a bivector with a derivative. Second, the *dual symmetry* of $\mathbf{F}$ forces z to be correspondingly *complex*. Specifically, a phase-rotation of $\mathbf{F}$ induces the transformation

$$\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F} \exp(\theta I) = (\nabla z) \exp(\theta I) = \nabla(z e^{\theta I}) = \nabla(e^{-\theta I/2} z e^{\theta I/2}), \quad (121)$$

which is a phase rotation $\psi z \psi^*$ of z with a spinor representation $\psi = \exp(-\theta I/2)$, exactly as used in (99) and (70).

It follows that z must be a complex vector field of the form

$$z = a_e + a_m I \quad (122)$$

Vector Potentials	
Spacetime Algebra:	$\boxed{\mathbf{F} = \nabla z}$ $\boxed{z = a_e + a_m I}$
	$\Downarrow$
	$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m I$ $\mathbf{F}_e = \nabla \wedge a_e, \quad \mathbf{F}_m = \nabla \wedge a_m$ $\nabla \cdot a_e = \nabla \cdot a_m = 0$
	$\Downarrow$
	$\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I, \quad a_e = (\phi_e + \vec{A})\gamma_0, \quad a_m = (\phi_m + \vec{C})\gamma_0$ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_e - \partial_0 \vec{A} - \vec{\nabla} \times \vec{C}$ $\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi_m - \partial_0 \vec{C} + \vec{\nabla} \times \vec{A}$
Differential Forms:	$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + i \star \mathbf{F}_m$ $\mathbf{F}_e = d\mathbf{a}_e, \quad \mathbf{F}_m = d\mathbf{a}_m$
Tensor Components:	$(F_e)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu(a_e)_\nu - \partial_\nu(a_e)_\mu)$ $(F_m)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu(a_m)_\nu - \partial_\nu(a_m)_\mu)$
Gibbs 3-Vectors:	$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_e - \partial_0 \vec{A} - \vec{\nabla} \times \vec{C}$ $\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi_m - \partial_0 \vec{C} + \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Table 11: Vector potential representations of the vacuum electromagnetic field, as expressed in various formalisms. Notably, spacetime algebra most naturally motivates an intrinsically complex vector potential z . Nevertheless, one can also manually simulate this structure using differential forms with a scalar imaginary i and the Hodge star $\star$ (e.g., [68, 196]), after interpreting the independent electric (a_e) and magnetic (a_m) vector potentials as one-forms $\mathbf{a}_{e,m}$ with the same components. As we discuss in Section 34.7.8, imposing the additional constraint $\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_m I = \mathbf{F}/\sqrt{2}$ can optionally symmetrize the contributions of the two vector potentials so that they describe the same (vacuum) field $\mathbf{F}$ [68, 196].

with separate (“electric” a_e and “magnetic” a_m) parts¹⁶, that satisfies the equation

$$\nabla z = \nabla \wedge a_e + \nabla \cdot (a_m I) = \nabla \wedge a_e + (\nabla \wedge a_m)I = \mathbf{F}, \quad (123)$$

along with the additional *Lorenz-FitzGerald conditions*¹⁷

$$\nabla \cdot a_e = \nabla \cdot a_m = 0. \quad (124)$$

As a result, the potential fields must be manifestly *transverse* $\nabla a_e = \nabla \wedge a_e$ and $\nabla a_m = \nabla \wedge a_m$.

This transversality implies that there is an *additional gauge freedom* in the definition (120) of z due to the invariance under the replacement $z' = z + \nabla \zeta$. Provided that¹⁸ $\nabla^2 \zeta = 0$, each new z' will produce the same field according to $\nabla z' = \nabla z + \nabla^2 \zeta = \nabla z = \mathbf{F}$. Moreover, each new z' will also satisfy the Lorenz-FitzGerald conditions since $\nabla \cdot \nabla \zeta = \nabla^2 \zeta = 0$.

Plane wave vector potential

If we revisit the null plane wave solution of (114), and use the relation $\mathbf{F} = \nabla z$, we can infer that the potential z for a polarized plane wave must have the simple form (being careful to remember that I anticommutes with 4-vectors)

$$z = \exp[\mp(k \cdot x)I](Is) = (Is) \exp[\pm(k \cdot x)I], \quad (125)$$

where the spacelike vector s determines a reference polarization direction and amplitude. To verify that this is the appropriate potential, we take its derivative

$$\nabla z = (\nabla e^{\mp(k \cdot x)I})Is = (kI)e^{\mp(k \cdot x)I}Is = -kse^{\pm(k \cdot e)I} = (sk)e^{\pm(k \cdot e)I}, \quad (126)$$

which reproduces (114). A second derivative will annihilate the null factor k to produce Maxwell’s equation in the form $\nabla^2 z = 0$.

The complexity of the vector potential z is critical for obtaining (125). There are intrinsic phases in the traveling wave factor $\exp(\pm(k \cdot x)I)$. Furthermore, this is the vector potential for a null solution $\mathbf{F}^2 = (\nabla z)^2 = 0$, so the global intrinsic phase of the solution must be degenerate as a general structural property of null bivectors.

Moreover, we know from the derivation of the plane wave (116) that the directional vector $s = \vec{E}_0 \gamma_0$ should be orthogonal to k in any frame. This constraint is another way of expressing the Lorenz-FitzGerald condition $\nabla \cdot z = 0$ for the gauge freedom since

$$\nabla \cdot z = \pm I(s \cdot \nabla) \exp[\pm(k \cdot x)I] = \pm(s \cdot k) \exp[\pm(k \cdot x)I] = 0. \quad (127)$$

We also know from the derivation of (116) that the vector s arises as a factor of a null bivector that can always be written in a relative frame as purely spatial vector $s = \vec{E}_0 \gamma_0$. It then follows that $\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$, which makes the plane wave potential manifestly *transverse* in any relative frame: $\vec{\nabla} \cdot (z \gamma_0) = \pm(\vec{E}_0 \cdot \vec{k}) \exp[\mp(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)I] = 0$. This property will become important in Section 34.7.6.

¹⁶Note that we will use the subscripts e and m throughout this report to distinguish the quantities that will become naturally associated with electric and magnetic *charges* in Section 34.7.7 (not to be confused with the relative electric and magnetic fields, which can both be produced by either type of charge). To recover traditional electromagnetism, all quantities with magnetic subscripts can be neglected, but we keep the discussion general.

¹⁷This condition is also known as the *Lorenz gauge*, which only partially fixes the gauge freedom to be more natural for manifestly relativistic treatments of the field.

¹⁸Note that if $\zeta = \alpha + \beta I$ such that $\nabla^2 \zeta \neq 0$, then we obtain $\nabla z' = \mathbf{F} + \nabla^2 \zeta$ with $\mathbf{F} = \nabla \wedge (a + \nabla \alpha) + [\nabla \wedge (g + \nabla \beta)]I = \langle \nabla z' \rangle_2$. Adding this projection in the field definition provides a more general (but less natural) gauge freedom that does not preserve the Lorenz-FitzGerald conditions.

It follows from (125) that the vector potential for the null wave packet in (117) has the form

$$\begin{aligned} z &= I s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \alpha(\omega) e^{-\omega(k \cdot x)I}, \\ &= I s \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} [\alpha_+(\omega) e^{-\omega(k \cdot x)I} - \alpha_-(\omega) e^{\omega(k \cdot x)I}], \end{aligned} \quad (128)$$

where the derivative produces a sign flip between the spectral functions $\alpha_{\pm}$. The potential for the superposition of plane waves in (119) thus has the corresponding form

$$z = I \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{k}}{|\vec{k}|} s(\vec{k}) [\alpha_+(\vec{k}) e^{-(k \cdot x)I} - \alpha_-(\vec{k}) e^{(k \cdot x)I}], \quad (129)$$

where the remaining factor of $|\vec{k}|$ can be absorbed into $\alpha_{\pm}$ as units and convention dictate. These potentials are also manifestly transverse in any frame since $s(\vec{k}) \cdot k = 0$ by construction for each null plane wave propagating in direction $\vec{k}$.

Relative vector potentials

We perform a spacetime split of the vector potentials $a_e = \gamma_0(\phi_e - \vec{A})$ and $a_m = \gamma_0(\phi_m - \vec{C})$ into *relative scalar potentials* ϕ_e, ϕ_m , and *relative vector potentials* $\vec{A}, \vec{C}$. Note that for these relative quantities, we try to conform to existing notation conventions. The notation $\vec{C}$ for the magnetic vector potential has become standard in studies of dual symmetry in vacuum [99, 101, 102, 105, 68, 106, 108]. With these relative potentials, we can expand the field into a relative form

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \nabla z = (\partial_0 - \vec{\nabla})[(\phi_e - \vec{A}) + (\phi_m - \vec{C})I], \\ &= [-\partial_0 \vec{A} - \vec{\nabla} \phi_e - \vec{\nabla} \times \vec{C}] + [-\partial_0 \vec{C} - \vec{\nabla} \phi_m + \vec{\nabla} \times \vec{A}]I, \end{aligned} \quad (130)$$

where we have used the Lorenz-FitzGerald conditions (124) written in the relative frame,

$$\partial_0 \phi_e + \nabla \cdot \vec{A} = \partial_0 \phi_m + \nabla \cdot \vec{C} = 0. \quad (131)$$

This split implies that the relative fields may be written as

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi_e - \partial_0 \vec{A} - \vec{\nabla} \times \vec{C}, \quad \vec{B} = -\vec{\nabla} \phi_m - \partial_0 \vec{C} + \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (132)$$

in terms of the relative potentials.

Under a gauge transform $z' = z + \nabla \zeta$, with $\zeta = \zeta_a + \zeta_g I$, these relative vector potentials become

$$\begin{aligned} z' \gamma_0 &= (\phi_e + \vec{A}) + (\phi_m - \vec{C})I + (\partial_0 - \vec{\nabla})(\zeta_a - \zeta_g I), \\ &= (\phi_e + \partial_0 \zeta_a) + (\vec{A} - \vec{\nabla} \zeta_a) + (\phi_m - \partial_0 \zeta_g)I - (\vec{C} - \vec{\nabla} \zeta_g)I. \end{aligned} \quad (133)$$

Thus, the relative scalar and vector potentials can become mixed both by Lorentz transformations and gauge transformations in general. One must fix both the inertial reference frame and the gauge in order to completely fix the form of the potential.

Constituent fields

The decomposition of the field (123) can be interpreted as constructing the total field $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m I$ from *two constituent bivector fields* that are derived from each vector potential separately. The “electric” part, $\mathbf{F}_e = \nabla \wedge a_e$, will become naturally associated with electric charge in Section 34.7.7, while the “magnetic” part, $\mathbf{F}_m = \nabla \wedge a_m$, will be correspondingly associated with magnetic charge. However, the dual symmetry of vacuum makes these constituent fields interchangeable. For example, we can exchange their roles by taking the dual of $\mathbf{F}$ as in (101)

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} I^{-1} = (\nabla \wedge a_m) - (\nabla \wedge a_e) I = \mathbf{F}_m - \mathbf{F}_e I = \vec{B} - \vec{E} I. \quad (134)$$

If we perform a spacetime split of each piece of the total field, $\mathbf{F}_e = \vec{E}_e + \vec{B}_e I$ and $\mathbf{F}_m I = \vec{E}_m + \vec{B}_m I$ (so $\mathbf{F}_m = \vec{B}_m - \vec{E}_m I$), then we find that the relative fields can be written as

$$\begin{aligned} \vec{E}_e &= -\vec{\nabla} \phi_e - \partial_0 \vec{A}, & \vec{B}_e &= \vec{\nabla} \times \vec{A}, \\ \vec{E}_m &= -\vec{\nabla} \times \vec{C}, & \vec{B}_m &= -\vec{\nabla} \phi_m - \partial_0 \vec{C}. \end{aligned} \quad (135)$$

The total relative fields include contributions from both potentials, $\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_m$, $\vec{B} = \vec{B}_e + \vec{B}_m$.

Note that we will use the subscripts of e and m throughout this report to signify the eventual associations of physical quantities with either electric or magnetic *charges*. Traditionally, the electromagnetic field couples only to *electric* charges, so is described by $\mathbf{F}_e$ and its associated electric vector potential a_e . Therefore, to recover traditional electromagnetism, we can simply neglect all “magnetic” quantities with an m subscript in what follows. However, in the absence of charges (as in vacuum) there is no such constraint, so we keep the formulas dual-symmetric.

Bivector potential

We can make an important simplification of the gauge freedom of the complex vector potential z if we introduce the *locally transverse* $\vec{A}_\perp, \vec{C}_\perp$ and *longitudinal* $\vec{A}_\parallel, \vec{C}_\parallel$ parts of the relative vector potentials $\vec{A} = \vec{A}_\perp + \vec{A}_\parallel$ and $\vec{C} = \vec{C}_\perp + \vec{C}_\parallel$ in a particular frame γ_0 . These pieces of the vector potentials are defined to satisfy

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\perp = \vec{\nabla} \cdot \vec{C}_\perp = 0, \quad (136)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}_\parallel = \vec{\nabla} \times \vec{C}_\parallel = 0. \quad (137)$$

As a result, the gauge transform (133) produces

$$z'_\perp \gamma_0 = \vec{A}_\perp - \vec{C}_\perp I = z_\perp \gamma_0, \quad (138)$$

$$z'_\parallel \gamma_0 = (\phi_e + \partial_0 \zeta_a) + (\vec{A}_\parallel - \vec{\nabla} \zeta_a) + (\phi_m - \partial_0 \zeta_g) I - (\vec{C}_\parallel - \vec{\nabla} \zeta_g) I. \quad (139)$$

That is, in any local frame the *transverse* part of the vector potential is *gauge-invariant*.

This invariance leads to an interesting observation. After separating the vector potential z into a transverse and longitudinal piece in a particular frame, we can define a corresponding transverse *bivector potential* (e.g., as in [68])

$$\mathbf{Z} = z_\perp \gamma_0 = \vec{A}_\perp - \vec{C}_\perp I, \quad (140)$$

and longitudinal *spinor potential*

$$\psi_z = z_\parallel \gamma_0 = (\phi_e - \phi_m I) + (\vec{A}_\parallel - \vec{C}_\parallel I). \quad (141)$$

Bivector Potentials for Vacuum Fields	
Transverse Bivector Potential:	$\mathbf{Z} = z_{\perp} \gamma_0 = \vec{A}_{\perp} - \vec{C}_{\perp} I$
Field Relation:	$\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{Z}) \gamma_0 \quad (z_{\parallel} = 0)$
Vacuum Equation:	$\nabla^2 \mathbf{Z} = 0$
Hertz Bivector Potential:	$\mathbf{Z} = -[\vec{\nabla}, \mathbf{\Pi}] = -\vec{\nabla} \times \mathbf{\Pi} I$
Field Relation:	$\mathbf{F} = \nabla \gamma_0 [\vec{\nabla}, \mathbf{\Pi}] = (I \partial_0 + \vec{\nabla} \times)(\vec{\nabla} \times \mathbf{\Pi})$
Vacuum Equation:	$\nabla^2(\vec{\nabla} \times \vec{\Pi}) = (\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2)(\vec{\nabla} \times \mathbf{\Pi}) = 0$
Hertz Scalar Potential:	$\mathbf{\Pi} = \vec{\Pi} \Phi$
Field Relation:	$\mathbf{F} = \nabla \gamma_0 [\vec{\nabla}, \vec{\Pi}] \Phi = (I \partial_0 + \vec{\nabla} \times)(\vec{\nabla} \times \vec{\Pi}) \Phi$
Vacuum Equation:	$\nabla^2 \Phi = (\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2) \Phi = 0$

Table 12: Various bivector potential representations of the vacuum electromagnetic field. All such representations fix a particular reference frame γ_0 , and fix the gauge to make the longitudinal part of the vector potentials vanish $z_{\parallel} = 0$ (i.e., fixing the Coloumb gauge). With this simplification, the bivector potential $\mathbf{Z}$ contains the same information as the vacuum field $\mathbf{F}$ without added freedom. As such, expanding this fundamental bivector potential into various forms permits alternative strategies for solving Maxwell's vacuum equation.

Both of these potentials can now be easily manipulated as proper geometric objects, even though their definitions involve a particular frame γ_0 . Moreover, only the spinor potential ψ_z depends on the choice of gauge according to (138), which makes the bivector $\mathbf{Z}$ a *gauge-invariant* potential (restricted to the γ_0 frame). This separation of the total potential into a gauge-invariant part $\mathbf{Z}$ and a gauge-dependent part ψ_z in a particular frame is known as the *Chen decomposition* [218, 88], and is important for the meaningful separation of the orbital and spin parts of the angular momentum (as we shall see in Section 34.7.8).

According to Maxwell's vacuum equation (90), we can then write

$$\nabla \mathbf{F} = \nabla^2 z = \nabla^2 (\mathbf{Z} + \psi_z) \gamma_0 = 0. \quad (142)$$

In the absence of sources, the frame-dependent factor of γ_0 simply cancels to further simplify the analysis. Moreover, since ψ_z can be changed arbitrarily by the choice of gauge, according to (139), we can always fix the gauge to set the longitudinal potential ψ_z to zero in the local frame (i.e., choosing the Coulomb, or radiation gauge). After fixing the gauge in this manner, we can write Maxwell's vacuum equation (90) solely in terms of the transverse bivector potential

$$\nabla^2 \mathbf{Z} = \nabla^2 (\vec{A}_{\perp} - \vec{C}_{\perp} I) = 0. \quad (143)$$

This bivector potential is summarized in Table 12 along with several of its derivatives (from the next section) for reference.

Plane wave bivector potential

As a notable special case, we showed that the plane wave potential (125) must be manifestly transverse in any relative frame in Section 34.7.6. Thus we can immediately write the

corresponding gauge-invariant bivector potential for a plane wave

$$\mathbf{Z} = z_{\perp} \gamma_0 = (I s \gamma_0) \exp[\mp(k \cdot x)I] = I \exp[\mp(k \cdot x)I] \vec{E}_0. \quad (144)$$

Note that this bivector potential is already essentially equivalent to the total field bivector $\mathbf{F}$. There is no remaining arbitrariness in the potential, which emphasizes that the bivector potential is a gauge-invariant representation in the γ_0 frame.

The corresponding bivector potentials for the plane wave superpositions follow in a similar way from (128) and (129)

$$\mathbf{Z} = I \vec{E}_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \alpha(\omega) e^{\omega(k \cdot x)I}, \quad (145)$$

$$= I \vec{E}_0 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} [\alpha_+(\omega) e^{\omega(k \cdot x)I} - \alpha_-(\omega) e^{-\omega(k \cdot x)I}],$$

$$\mathbf{Z} = I \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{k}}{|\vec{k}|} \vec{E}_0(\vec{k}) [\alpha_+(\vec{k}) e^{(k \cdot x)I} - \alpha_-(\vec{k}) e^{-(k \cdot x)I}]. \quad (146)$$

The only appreciable difference in structure from the vector potentials is the flip in sign of the phase factors associated with each $\alpha_{\pm}$, which occurs since γ_0 and I anticommute. Moreover, since the same functions $\alpha_{\pm}$ occur here as in the vector potentials in Section 34.7.6 and the plane wave fields in Section 34.7.5, the same procedure can be used to canonically quantize the bivector potential directly, if desired.

Field correspondence

The relative fields associated with $\mathbf{Z}$ still depend upon the defining frame γ_0

$$\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{Z}) \gamma_0 = \nabla z_{\perp}. \quad (147)$$

Thus, both the transversality properties of $\mathbf{Z}$ and its relation to the field $\mathbf{F}$ depend on the frame γ_0 . Nevertheless, for any frame γ_0 it is possible to construct the transverse $\mathbf{Z}$ for that frame.

Using the correspondence (147), the relative fields have the form [98, 103, 104, 105]

$$\vec{E} = -\partial_0 \vec{A}_{\perp} - \vec{\nabla} \times \vec{C}_{\perp}, \quad \vec{B} = -\partial_0 \vec{C}_{\perp} + \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\perp}, \quad (148)$$

which can be understood as the appropriate simplification of (132). Interestingly, the equations (148) plus the transversality conditions $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\perp} = \vec{\nabla} \cdot \vec{C}_{\perp} = 0$ resemble the four Maxwell's equations in vacuum (94) that we started with [105, 178]. This resemblance stems from the fact that the derivative of the bivector potential $\mathbf{Z}$ has the same structural form (84) that also produced Maxwell's equations (94).

Hertz potentials

Solving equations with vector and bivector potentials can be simpler than solving the main bivector equation (90), but it would be simpler still to solve equations using a scalar potential. Hence, we are motivated to make another ansatz to further reduce the vector potential z or the bivector potential $\mathbf{Z}$ by using another derivative.

A naive attempt at performing such a reduction is to assume that $z = \nabla \phi$ for some complex scalar potential ϕ . However, this attempt fails since the resulting field $\mathbf{F} = \nabla^2 \phi$ would be a scalar. Hence, we instead consider simplifying the bivector potential $\mathbf{Z}$ further.

Hertz bivector potential

A suitable reduction was found by Hertz [219], who (after translating to the language of spacetime algebra) exploited the fact that the commutator bracket in Eq. (41) for bivectors produces another bivector. That is, if we write $z = \mathbf{Z}\gamma_0 = -\gamma_0\mathbf{Z}^\dagger$, with a bivector potential $\mathbf{Z}^\dagger = \vec{A}_\perp + \vec{C}_\perp I$, then we can make the ansatz

$$\mathbf{Z}^\dagger = -[\vec{\nabla}, \mathbf{\Pi}] = -\vec{\nabla} \times \mathbf{\Pi} I, \quad (149)$$

making $\mathbf{Z}^\dagger$ the dual of the relative curl of a second-order¹⁹ bivector potential $\mathbf{\Pi}$. Note the restriction to a particular relative frame γ_0 implicit in the relative gradient $\vec{\nabla} = \gamma_0 \wedge \nabla$; this is the same fixed frame used to define $\mathbf{Z}$.

The second-order bivector potential $\mathbf{\Pi} = \vec{\Pi}_e + \vec{\Pi}_m I$ is known as a *Hertz potential* for the field, and can be decomposed into electric $\vec{\Pi}_e$ and magnetic $\vec{\Pi}_m$ relative vector parts. The resulting field equation has the form [40]

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \nabla z = \nabla \mathbf{Z} \gamma_0 = -\nabla \gamma_0 \mathbf{Z}^\dagger, \\ &= \nabla \gamma_0 [\vec{\nabla}, \mathbf{\Pi}] = (\partial_0 - \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \times \mathbf{\Pi}) I = (I \partial_0 + \vec{\nabla} \times)(\vec{\nabla} \times \mathbf{\Pi}), \end{aligned} \quad (150)$$

where the last equality uses the fact that the relative divergence of a curl vanishes.

Maxwell's equation in vacuum then mandates

$$\nabla \mathbf{F} = \nabla^2 z = -\gamma_0 \nabla^2 \mathbf{Z}^\dagger = -\gamma_0 \nabla^2 (\vec{\nabla} \times \mathbf{\Pi}) I = 0. \quad (151)$$

That is, the relative curl of the Hertz potential must satisfy the d'Alembert wave equation

$$\nabla^2 (\vec{\nabla} \times \mathbf{\Pi}) = (\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2)(\vec{\nabla} \times \mathbf{\Pi}) = 0. \quad (152)$$

This general construction by Hertz is quite useful for applications, such as describing dipole radiation fields or rectangular waveguide modes [220]. However, the construction still involves a bivector potential, so we will simplify it further.

Hertz complex scalar potential

We can avoid the complication of the Hertz bivector potential $\mathbf{\Pi} = \vec{\Pi} \Phi$ by factoring it into a *complex scalar potential* Φ and a fixed reference unit-3-vector $\vec{\Pi}$ in the relative frame. This reference direction is usually chosen to have physical significance, such as the propagation axis for a paraxial beam or the dipole-radiation axis [40, 221]. The Maxwell constraint on the scalar function Φ can then be written

$$\nabla^2 (\vec{\nabla} \times \vec{\Pi}) \Phi = (\vec{\nabla} \times \vec{\Pi}) \nabla^2 \Phi = 0, \quad (153)$$

making it sufficient for the potential Φ to be a complex scalar solution of the d'Alembert wave equation

$$\nabla^2 \Phi = (\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2) \Phi = 0. \quad (154)$$

Since this relativistic scalar wave equation is well-understood, and may be systematically solved by separation of variables in a myriad of coordinate systems (e.g., [222]), constructing solutions

¹⁹Curiously, we can perform this trick as many times as we like by making each relative potential the curl of another generating potential. This ability to keep increasing the number of derivatives was also noticed in [105, 178]. We could also use the form $\mathbf{Z}^\dagger = \nabla \mathbf{\Pi} \gamma_0$ to mirror the field definition (147), which would add an extra time derivative to the curl.

of Maxwell's equation from solutions of this scalar wave equation is a powerful method for generating nontrivial solutions to Maxwell's equation in vacuum [40].

Given such a wave solution Φ , an associated electromagnetic field is

$$\mathbf{F} = \nabla \gamma_0[\vec{\nabla}, \vec{\Pi}] \Phi = (I\partial_0 + \vec{\nabla} \times)(\vec{\nabla} \times \vec{\Pi}) \Phi. \quad (155)$$

As we mentioned earlier, the frame-specific differential factor $\gamma_0[\vec{\nabla}, \vec{\Pi}]$ is a consequence of fixing the frame to define the transverse potential $\mathbf{Z}$. The resulting bivector field $\mathbf{F}$ will always be a proper (frame-independent) geometric object. This Hertz potential technique has been used to great effect by Hertz [219], Whittaker [223], Debye [224], and others [225, 226, 40].

The use of dual-symmetric fields and spacetime algebra makes the origin of the Hertz potentials particularly transparent. In particular, their construction relies upon further decomposing a *complex* 4-vector potential z into a transverse bivector potential $\mathbf{Z}$, after which that potential can be decomposed into a second-order bivector potential $\mathbf{\Pi}$, which in turn can be decomposed into a complex scalar potential Φ . Notably, the starting vector potential z is only complex when the dual symmetry of the vacuum Maxwell equation is preserved.

34.7.7 Maxwell's equation with sources

The theory I propose may therefore be called a theory of the Electromagnetic Field because it has to do with the space in the neighbourhood of the electric or magnetic bodies, and it may be called a Dynamical Theory, because it assumes that in the space there is matter in motion, by which the observed electromagnetic phenomena are produced.

James Clerk Maxwell [133]

The simplest modification to Maxwell's equation in vacuum (90) that we can make is to add a source field. Since the derivative of a bivector field can only produce a complex vector field, this modification produces

$$\nabla \mathbf{F} = j, \quad (156)$$

where the complex current $j = j_e + j_m I$ acts as the appropriate source field, and admits both vector (electric) and trivector (magnetic) parts. Note that this equation is no longer intrinsically invariant under the simple phase-rotation $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F} \exp(\theta I)$ due to the presence of the source current j ; we will clarify this important point in Section 34.7.7.

Taking a second derivative decouples (156) into the set of equations

$$\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla \wedge j_e) + (\nabla \wedge j_m) I, \quad (157)$$

$$\nabla \cdot j_e = \nabla \cdot j_m = 0. \quad (158)$$

The first equation (for the bivector part) indicates that $\mathbf{F}$ satisfies a *wave equation* with a complex source equal to the curl of j . The second equation (for the scalar part) indicates the source satisfies a (charge-current) *continuity equation*.

Relative frame form

After breaking the source $j = j_e + j_m I$ into vector and trivector parts, the equation (156) implies the two independent equations

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = j_e, \quad \nabla \wedge \mathbf{F} = j_m I, \quad (159)$$

Maxwell's Equation with Sources	
Spacetime Algebra:	$\boxed{\nabla \mathbf{F} = \nabla^2 z = j} \quad \boxed{j = j_e + j_m I}$ $\Downarrow$ $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla^2 a_e = j_e, \quad \nabla \wedge \mathbf{F} = \nabla^2 a_m I = j_m I$ $\Downarrow$ $\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I, \quad j_e = (c\rho_e + \vec{J}_e)\gamma_0, \quad j_m = (c\rho_m + \vec{J}_m)\gamma_0$ $a_e = (\phi_e + \vec{A})\gamma_0, \quad a_m = (\phi_m + \vec{C})\gamma_0$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + (\partial_0 \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B}) = \nabla^2(\phi_e - \vec{A}) = c\rho_e - \vec{J}_e$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} + (\partial_0 \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E}) = \nabla^2(\phi_m - \vec{C}) = c\rho_m - \vec{J}_m$ $\Downarrow$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \nabla^2 \phi_e = c\rho_e, \quad \partial_0 \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\nabla^2 \vec{A} = -\vec{J}_e$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \nabla^2 \phi_m = c\rho_m, \quad \partial_0 \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{C} = -\vec{J}_m$
Differential Forms:	$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + i \star \mathbf{F}_m, \quad \star d \star \mathbf{F}_e = \star d \star d\mathbf{a}_e = -\mathbf{j}_e$ $\star d \star \mathbf{F}_m = \star d \star d\mathbf{a}_m = -\mathbf{j}_m$
Tensor Components:	$\partial_\nu F_e^{\mu\nu} = j_e^\mu, \quad \partial_\nu F_m^{\mu\nu} = j_m^\mu, \quad F^{\mu\nu} = F_e^{\mu\nu} + i \star F_m^{\mu\nu}$
Gibbs 3-Vectors:	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = c\rho_e, \quad \partial_0 \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{J}_e$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = c\rho_m, \quad \partial_0 \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{J}_m$
SI Units :	$(\vec{E}, \vec{C}, \phi_e) \mapsto \sqrt{\epsilon_0}(\vec{E}, \vec{C}, \phi_e), \quad (\vec{B}, \vec{A}, \phi_m) \mapsto (\vec{B}, \vec{A}, \phi_m)/\sqrt{\mu_0}$ $(c \equiv 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}) \quad (\vec{J}_e, \rho_e) \mapsto \sqrt{\mu_0}(\vec{J}_e, \rho_e), \quad (\vec{J}_m, \rho_m) \mapsto \sqrt{\mu_0}(\vec{J}_m, \rho_m)/c$
CGS Units:	$\vec{E} \mapsto \vec{E}/\sqrt{4\pi}, \quad \vec{B} \mapsto \vec{B}/\sqrt{4\pi}, \quad j \mapsto \sqrt{4\pi} j/c$

Table 13: Maxwell's equation with both electric and magnetic sources, as expressed in various formalisms. As with the vacuum case in Tables 10 and 11, only spacetime algebra permits the formulation as the single boxed equation involving either the bivector field $\mathbf{F}$ or the complex vector potential field $z = a_e + a_m I$, while treating both electric sources j_e and magnetic sources j_m on equal footing as a single complex source $j = j_e + j_m I$. In contrast, the differential-form approach becomes strained with a nonzero magnetic source (one-form) $\mathbf{j}_m$ [198], but simplifies to a form similar to the vacuum case in Table 10 for purely electric sources $\mathbf{j}_e$. Note that for the SI unit scalings, we use the Ampere-meter convention for magnetic charges.

which, under the spacetime splits $\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I$, $j_e = \gamma_0(c\rho_e - \vec{J}_e)$, and $j_m = \gamma_0(c\rho_m - \vec{J}_m)$, expand to the four equations

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= c\rho_e, & \partial_0 \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B} &= -\vec{J}_e, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= c\rho_m, & \partial_0 \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\vec{J}_m,\end{aligned}\tag{160}$$

according to (84). These are the familiar Maxwell's equations that include both electric and magnetic charges [193, 197, 198, 199, 200, 101, 201, 202, 203, 102, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213]. Similarly, the continuity equation for the sources (158) produces the two equations

$$c\partial_0\rho_e + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e = 0, \quad c\partial_0\rho_m + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m = 0,\tag{161}$$

which each have the familiar form [155].

Vector potentials revisited

If $\mathbf{F}$ is generated by a vector potential, $\mathbf{F} = \nabla z = \nabla(a_e + a_m I)$, then Maxwell's equation (156) is equivalent to a complex vector wave equation with a source

$$\nabla^2 z = j.\tag{162}$$

In this form it becomes clear that the electric potential a_e couples directly to the electric source j_e , while the magnetic potential a_m couples directly to the magnetic source j_m . Hence the total complex field $\mathbf{F} = (\nabla \wedge a_e) + (\nabla \wedge a_m)I = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m I$ can be equivalently constructed by solving the two independent equations

$$\nabla \mathbf{F}_e = \nabla^2 a_e = j_e, \quad \nabla \mathbf{F}_m = \nabla^2 a_m = j_m\tag{163}$$

that each have the same form as (156), but involve only non-complex vector fields and bivectors of fixed signature. Evidently the constituent fields $\mathbf{F}_e$ and $\mathbf{F}_m$ are *noninteracting, completely independent, and distinguished only by how they couple to distinct types of electromagnetic charge*. In particular, note how the e and m subscripts for all quantities are consistently matched; for traditional electromagnetism that considers only electric charges, the “magnetic” terms (with subscripts m) can thus be neglected.

In terms of a relative frame with $a_e = (\phi_e + \vec{A})\gamma_0$ and $j_e = (c\rho_e + \vec{J}_e)\gamma_0$, the wave equation $\nabla^2 a_e = j_e$ expands to

$$(\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2)(\phi_e + \vec{A})\gamma_0 = (c\rho_e + \vec{J}_e)\gamma_0,\tag{164}$$

which further splits into the two wave equations [155]

$$(\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2)\phi_e = c\rho_e, \quad (\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2)\vec{A} = \vec{J}_e.\tag{165}$$

These two equations are implicitly coupled by the Lorenz-FitzGerald condition $\nabla \cdot a_e = \partial_0 \phi_e + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, which can be applied to the first equation in order to produce the modified form

$$\vec{\nabla}^2 \phi_e + \partial_0(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -c\rho_e, \quad (\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2)\vec{A} = \vec{J}_e.\tag{166}$$

A similar split also applies to the equation $\nabla^2 a_m = j_m$ involving the magnetic potential.

Lorentz force

Similar to the appearance of Maxwell's equation (156), the corresponding Lorentz force law arises quite naturally from the structure of spacetime itself. To see this, consider what happens when the field $\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I$ is contracted with a 4-vector $w = (w_0 + \vec{w})\gamma_0$. According to (17), we have the general structure

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot w &= \frac{1}{2}[\mathbf{F}w - w\mathbf{F}], \\ &= \frac{1}{2}[(\vec{E} + \vec{B}I)(w_0 + \vec{w}) + (w_0 + \vec{w})(\vec{E} - \vec{B}I)]\gamma_0, \\ &= (\vec{E} \cdot \vec{w})\gamma_0 + [w_0\vec{E} + \vec{w} \times \vec{B}]\gamma_0.\end{aligned}\tag{167}$$

Now consider what happens if w is a proper velocity vector $w = dx/d\tau$, which implies $w^2 = c^2$. Inserting the spacetime split of x yields $dx/d\tau = d/d\tau[ct + \vec{x}]\gamma_0 = [d(ct)/d\tau + d\vec{x}/d\tau]\gamma_0$. Denoting $dt/d\tau = \gamma$ as the time dilation factor, we see that $d\vec{x}/d\tau = \gamma d\vec{x}/dt = \gamma\vec{v}$ is the scaled relative velocity $\vec{v}$. From $w^2 = c^2 = w_0^2 - |\vec{w}|^2 = \gamma^2(c^2 - |\vec{v}|^2)$ we find the standard formula $\gamma = (1 - |\vec{v}/c|^2)^{-1/2}$. Hence, we have the relative components

$$w_0 = \gamma c = \frac{c}{\sqrt{1 - |\vec{v}/c|^2}}, \quad \vec{w} = \gamma\vec{v},\tag{168}$$

as well as the elegant and useful relations [9]

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \frac{w}{c} \cdot \gamma_0, \quad \frac{d\vec{x}}{d\tau} = w \wedge \gamma_0, \quad \frac{\vec{v}}{c} = \frac{w \wedge \gamma_0}{w \cdot \gamma_0}.\tag{169}$$

Inserting (168) into (167) produces the suggestive relation

$$\mathbf{F} \cdot w = \gamma c [\vec{E} \cdot \vec{v}] \gamma_0 + \gamma [c\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \gamma_0.\tag{170}$$

Inverting factors and multiplying by a scalar charge q_0 then produces

$$[\mathbf{F} \cdot (q_0 w)] \frac{d\tau}{dt} \gamma_0 = q_0 c \vec{E} \cdot \vec{v} + q_0 [c\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}].\tag{171}$$

The vector part on the right hand side is precisely²⁰ the *Lorentz force* $d\vec{p}/dt$ in a relative frame with $\vec{p} = m\vec{v}$, while the scalar part on the right hand side is precisely the corresponding rate of work $d\mathcal{E}/d(ct)$ with $\mathcal{E} = \gamma mc^2$. It follows that the simple contraction of $\mathbf{F}$ and a 4-vector current $q_0 w$ produces the proper Lorentz force

$$\frac{dp}{d\tau} = \mathbf{F} \cdot (q_0 w),\tag{172}$$

where $p = (\mathcal{E}/c + \vec{p})\gamma_0$ is the proper 4-vector energy-momentum.

We can expand upon this result by considering what happens if the vector current $q_0 w$ is allowed to be a *complex* vector current $j = q_0 w \exp(\theta I)$ similar to (156). Since $\mathbf{F} \cdot (wI) = (\mathbf{F} \wedge w)I$ is the proper contraction that produces a vector, we must also consider the wedge of the bivector field with the velocity w

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \wedge w &= \frac{1}{2}[\mathbf{F}w + w\mathbf{F}], \\ &= \frac{1}{2}[(\vec{E} + \vec{B}I)(w_0 + \vec{w}) - (w_0 + \vec{w})(\vec{E} - \vec{B}I)]\gamma_0, \\ &= [\vec{B} \cdot \vec{w}]\gamma_0 I^{-1} + [w_0\vec{B} - \vec{w} \times \vec{E}]\gamma_0 I^{-1}.\end{aligned}\tag{173}$$

²⁰The choice of units for $\vec{E}$, $\vec{B}$, and q_0 will induce appropriate scaling factors (see Table 14).

Lorentz Force Law	
Proper Force Law:	$\boxed{\frac{dp}{d\tau} = \langle \mathbf{F} j \rangle_1} = \frac{1}{2} [\mathbf{F} j + (\mathbf{F} j)^\sim] = q_e \mathbf{F} \cdot w + q_m (\mathbf{F} \wedge w) I$ $p \equiv mw, \quad j \equiv qw, \quad q \equiv q_0 e^{\theta I} = q_e + q_m I$
Proper Velocity:	$w \equiv \frac{dx}{d\tau} = \gamma(c + \vec{v})\gamma_0, \quad w^2 = c^2$ $\gamma c \equiv \frac{dt}{d\tau} = w \cdot \gamma_0 = c(1 - \vec{v}/c ^2)^{-1/2}$ $\gamma \vec{v} \equiv \frac{d\vec{x}}{d\tau} = w \wedge \gamma_0$
Relative Force Law:	$\frac{dp}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \gamma_0 = \frac{d\mathcal{E}}{d(ct)} + \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\mathcal{E} \equiv \gamma mc^2, \quad \vec{p} \equiv m\vec{v}, \quad q_e = q_0 \cos \theta, \quad q_m = q_0 \sin \theta$ $\frac{d\mathcal{E}}{d(ct)} = q_e c \vec{E} \cdot \vec{v} + q_m c \vec{B} \cdot \vec{v}$ $\frac{d\vec{p}}{dt} = q_e c \vec{E} + q_m c \vec{B} + q_e \vec{v} \times \vec{B} - q_m \vec{v} \times \vec{E}$
Relative Velocity:	$\frac{\vec{v}}{c} \equiv \frac{w \wedge \gamma_0}{w \cdot \gamma_0}, \quad \gamma \equiv \frac{w}{c} \cdot \gamma_0$
SI Units:	$\vec{E} \mapsto \sqrt{\epsilon_0} \vec{E}, \quad \vec{B} \mapsto \vec{B}/\sqrt{\mu_0}, \quad q_e \mapsto \sqrt{\mu_0} q_e, \quad q_m \mapsto \sqrt{\mu_0} q_m/c$
CGS Units:	$\vec{E} \mapsto \vec{E}/\sqrt{4\pi}, \quad \vec{B} \mapsto \vec{B}/\sqrt{4\pi}, \quad q_0 \mapsto \sqrt{4\pi} q_0/c$

Table 14: The Lorentz Force Law, as expressed in spacetime algebra. We show the proper (frame-independent) formulation that supports both electric and magnetic charges, combined as a single complex charge $q = q_e + q_m I$. We also show the expansion of this force law in terms of a particular reference frame γ_0 . Notably, the proper and relative velocities are related by elegant contraction formulas in spacetime algebra.

The total contraction of $\mathbf{F}$ with $j = q_0 w \exp(\theta I) = j_e + j_m I$ then has the form

$$\frac{dp}{d\tau} = \langle \mathbf{F} j \rangle_1 = \mathbf{F} \cdot j_e + (\mathbf{F} \wedge j_m) I = \frac{1}{2} [\mathbf{F} j + (\mathbf{F} j)^\sim], \quad (174)$$

where the grade-1-projection makes the expression particularly elegant, while the last equality follows from the reversion properties $\tilde{\mathbf{F}} = -\mathbf{F}$ and $\tilde{j} = j^*$ (recall Sections 34.7.3, 34.7.3 and 34.7.3). We summarize this proper Lorentz force that admits a complex source j in Table 14 for reference.

We must be careful to be fully consistent, however. That is, the physical momentum p is a vector quantity that can be decomposed into a mass-scaled velocity $p = mw$ (at least for classical point particles). Thus, if we make the current complex $q_0 w \mapsto q_0 w \exp(\theta I) = j$, as in (174), then the *charge* must become complex

$$q = q_0 \exp(\theta I) = q_e + q_m I, \quad (175)$$

leading to distinct electric and magnetic parts of the charge

$$q_e = q_0 \cos \theta, \quad q_m = q_0 \sin \theta, \quad (176)$$

such that the observed charges have a well-defined ratio $q_m/q_e = \tan \theta$. (We will clarify the intimate connection between this ratio and the dual symmetry of the field in the next section.)

Inserting the relation $j = w[q_0 \exp(\theta I)]$ into (174) with $w = dx/d\tau$ as before yields the relative expression

$$\frac{dp}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \gamma_0 = \frac{d\mathcal{E}}{d(ct)} + \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (177)$$

where $\mathcal{E} = \gamma mc^2$, $\vec{p} = m\vec{v}$, and where

$$\frac{d\mathcal{E}}{d(ct)} = q_e c \vec{E} \cdot \vec{v} + q_m c \vec{B} \cdot \vec{v}, \quad (178a)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q_e c \vec{E} + q_m c \vec{B} + q_e \vec{v} \times \vec{B} - q_m \vec{v} \times \vec{E}. \quad (178b)$$

After restoring units, these equations are precisely the correction to the Lorentz force law that properly accounts for the addition of magnetic monopoles [193, 197, 198, 199, 200, 101, 201, 202, 203, 102, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213]. This monopole description arises directly from the complexity of the current j and asserting that the total field $\mathbf{F}$ should couple to this complex current. We summarize these relative expressions in Table 14 for reference, along with both the SI and CGS unit conventions.

Dual symmetry revisited

We are now in a position to consider the meaning of dual symmetry in the presence of an electromagnetic source current j . The two equations that we must examine are Maxwell's equation (156) and the Lorentz force law (174), which we reproduce here for convenience in terms of both the field $\mathbf{F}$ and the vector potential z

$$\nabla \mathbf{F} = \nabla^2 z = j, \quad \frac{dp}{d\tau} = \langle \mathbf{F} j \rangle_1 = \langle (\nabla z) j \rangle_1. \quad (179)$$

Keep in mind that $j = qw$ and $p = mw$ for classical point particles, where $w = dx/d\tau$ is the proper velocity.

It is now apparent that both these equations are invariant under a simultaneous phase rotation of both the vector potential z and the current j , using the spinor $\psi = \exp(-\theta I/2)$ from (99)

$$z \mapsto \psi z \psi^*, \quad j \mapsto \psi j \psi^*. \quad (180)$$

Specifically, note that since $\psi z \psi^* = z \exp(\theta I)$ and $\psi j \psi^* = j \exp(\theta I)$, Maxwell's equation becomes

$$(\nabla^2 z) \exp(\theta I) = j \exp(\theta I), \quad (181)$$

so the phase factors cancel. Similarly, the Lorentz force law is also invariant

$$\langle (\nabla z e^{\theta I}) j e^{\theta I} \rangle_1 = \langle (\nabla z) j e^{-\theta I} e^{\theta I} \rangle_1 = \langle (\nabla z) j \rangle_1. \quad (182)$$

Thus, while it may initially appear that the dual symmetry of Maxwell's equation (156) is broken in the presence of a source current j , this is only strictly true if the description of the current is left unchanged. An equivalent physical picture is obtained if the current is also changed (via the same phase rotation of the coupling charge q). As such, choosing electric charges to be the primary type of charge is an arbitrary convention. *Regardless of how one describes the fundamental charges, the same forces (and thus the same physics) will still be described, as long as the fields are correspondingly transformed [213].*

In addition to this equivalence of representation, there is another important subtlety that appears when we consider a field solution of Maxwell's equation $\nabla \mathbf{F} = j$. Specifically, any solution to this equation will be the combination of a homogeneous solution $\mathbf{F}_0$ of the vacuum equation $\nabla \mathbf{F}_0 = 0$ and a particular solution that includes the source j . We can consider these two independent solutions to correspond to distinct vector potentials $z = z_0 + z_s$ that satisfy distinct equations of motion

$$\nabla^2 z_0 = 0, \quad \nabla^2 z_s = j. \quad (183)$$

However, as noted above, we can always rotate the source j to become purely *electric* j_e using some phase rotation $\psi = \exp(-\theta I/2)$

$$\nabla^2(\psi z_s \psi^*) = \psi j \psi^* = j_e. \quad (184)$$

After this rotation, there is no magnetic source, so the trivector part of the rotated potential $\langle \psi z_s \psi^* \rangle_3$ must satisfy the vacuum Maxwell equation, and therefore should be absorbed into the homogeneous equation as part of the vacuum potential z_0 . That is, the rotated source potential is a *pure (electric) vector* potential $a_{s,e}$, while the homogeneous vacuum potential will still be generally *complex*

$$\psi z_s \psi^* = a_{s,e}, \quad \psi z_0 \psi^* = a_{0,e} + a_{0,m} I. \quad (185)$$

Thus, there is a profound difference between the independent source and vacuum parts of a field solution. The source piece must have a description as a pure vector potential matched with an electric source; this pair can then be jointly rotated into equivalent descriptions with both electric and magnetic sources as desired. In contrast, the vacuum piece is always manifestly dual-symmetric and thus admits an irreducibly complex vector potential description (such that no phase rotation exists that will make the vacuum potential a pure vector). Notably, this decomposition of the potential into distinct vacuum and matter parts is important in treatments of the quantized electromagnetic field [39]. We will return to this decomposition in Sections 34.7.8, 34.7.8 and Figure 10.

Fundamental conservation laws

Before turning our attention to macroscopic fields, we first provide a brief but enlightening derivation of the symmetric energy-momentum stress tensor²¹, as well as its associated angular momentum tensor [31, 127]. These derivations will impose general constraints on the form of any local modifications to these tensors, which will become important in their Lagrangian derivation via Noether's theorem in Section 34.7.8.

Energy-momentum stress tensor

Conceptually, the energy-momentum tensor is a function $\underline{T}(b)$ that maps a constant vector direction b into the *flux* of energy-momentum that is passing through the hypersurface orthogonal to b . This flux of energy-momentum should satisfy a continuity relation

$$b \cdot \frac{dp}{d\tau} + \nabla \cdot \underline{T}(b) = 0, \quad (186)$$

stating that the rate of change of the energy-momentum (the Lorentz force (174)) projected along the direction of b should correspond to the divergence of the energy-momentum flux through the surface orthogonal to b . (This statement is analogous to how the current continuity equation $c\partial_0\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ from (158) relates the rate of change of the charge density to the divergence of the charge flux, or current.)

We can simplify (186) using the *adjoint* tensor²² $\overline{T}$ that corresponds to the tensor $\underline{T}$ according to the vector dot product relation $d \cdot \underline{T}(b) = \overline{T}(d) \cdot b$. Applying this adjoint relation to (186) yields [9]

$$b \cdot \left[\frac{dp}{d\tau} + \overline{T}(\nabla) \right] = 0, \quad (187)$$

keeping in mind that ∇ still differentiates the adjoint tensor $\overline{T}$. Since b is arbitrary, we can dispense with it to find a direct constraint equation for the adjoint, in which we can substitute the Lorentz force law (174) to find

$$\overline{T}(\nabla) = -\frac{dp}{d\tau} = -\langle \mathbf{F}j \rangle_1. \quad (188)$$

After substituting Maxwell's equation (156) for the source j , we obtain

$$\overline{T}(\nabla) = -\frac{1}{2} \left[\mathbf{F}(\nabla\mathbf{F}) + (\tilde{\mathbf{F}}\nabla)\tilde{\mathbf{F}} \right] = -\frac{1}{2}\mathbf{F}\nabla\mathbf{F}. \quad (189)$$

Therefore, we can infer that the adjoint of the energy-momentum stress tensor must have the elegant quadratic form

$$\overline{T}_{\text{sym}}(b) = -\frac{1}{2}\mathbf{F}b\mathbf{F} = \frac{1}{2}\mathbf{F}b\tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{2}\mathbf{f}b\tilde{\mathbf{f}}, \quad (190)$$

which is the simplest dual-symmetric form that involves the field bivector $\mathbf{F} = \mathbf{f} \exp(\varphi I)$. This form is also *symmetric* (in the sense of the adjoint $\overline{T}_{\text{sym}} = \underline{T}_{\text{sym}}$) since

$$\overline{T}_{\text{sym}}(d) \cdot b = \langle \overline{T}_{\text{sym}}(d)b \rangle_0 = -\langle \mathbf{F}d\mathbf{F}b \rangle_0 = -\langle d\mathbf{F}b\mathbf{F} \rangle_0 = d \cdot \overline{T}_{\text{sym}}(b) \quad (191)$$

²¹This symmetric tensor is also known as the Belinfante–Rosenfeld stress-energy tensor, or the kinetic stress-energy tensor [127, 31, 68, 88].

²²The underbar and overbar notation for a tensor and its adjoint is a useful notational device [9], so we adopt it here.

by the cyclic property of the scalar projection (15). Any proposed modification to this fundamental symmetric tensor must have a vanishing divergence, according to the general continuity equation (186). This symmetric tensor is summarized for reference in Table 15.

To verify that this symmetric energy-momentum stress tensor gives us the results we expect, we compute the energy-momentum flux through the surface perpendicular to γ_0 (restoring the SI unit scaling factors from (95)),

$$\begin{aligned}\bar{T}_{\text{sym}}(\gamma_0) &= \frac{1}{2} \mathbf{F} \gamma_0 \tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} \mathbf{F} \mathbf{F}^\dagger \gamma_0, \\ &= \frac{1}{2} [\vec{E} + \vec{B}I] [\vec{E} - \vec{B}I] \gamma_0, \\ &= \left[\frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) + \vec{E} \times \vec{B} \right] \gamma_0 \equiv (\varepsilon + \vec{P}) \gamma_0.\end{aligned}\tag{192}$$

The first term is the energy density ε of the field, which is relative to a particular frame γ_0 , as we anticipated in Section 34.7.5. The second term is the Poynting vector $\vec{P}$ that gives the corresponding relative field momentum [9]. The two together construct the proper field energy-momentum $\underline{T}(\gamma_0) = (\varepsilon + \vec{P}) \gamma_0$ that will be measured by an observer traveling along a worldline pointing in the γ_0 direction.

As another example, we can compute the energy-momentum flux through a surface perpendicular to γ_i ($i = 1, 2, 3$) using $\gamma_i = \gamma_i \gamma_0^\dagger = \vec{\sigma}_i \gamma_0$,

$$\begin{aligned}\bar{T}_{\text{sym}}(\gamma_i) &= \frac{1}{2} \mathbf{F} \gamma_i \tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} \mathbf{F} \vec{\sigma}_i \mathbf{F}^\dagger \gamma_0, \\ &= \frac{1}{2} [\vec{E} + \vec{B}I] \vec{\sigma}_i [\vec{E} - \vec{B}I] \gamma_0, \\ &= \left[\frac{1}{2} (\vec{E} \vec{\sigma}_i \vec{E} + \vec{B} \vec{\sigma}_i \vec{B}) + \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{\sigma}_i \vec{B} - \vec{B} \vec{\sigma}_i \vec{E}) I^{-1} \right] \gamma_0.\end{aligned}\tag{193}$$

This form emphasizes the bilinear nature of the tensor with respect to the fields. The vector products can be expanded into a more familiar form by using the identity

$$\vec{E} \vec{\sigma}_i \vec{B} = \vec{B}(\vec{E} \cdot \vec{\sigma}_i) + \vec{E}(\vec{B} \cdot \vec{\sigma}_i) - (\vec{E} \cdot \vec{B}) \vec{\sigma}_i - (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \vec{\sigma}_i I,\tag{194}$$

to produce

$$\begin{aligned}\bar{T}_{\text{sym}}(\gamma_i) &= - [\vec{E} \times \vec{B} \cdot \vec{\sigma}_i] \gamma_0 \\ &\quad + \left[\vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{\sigma}_i) + \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{\sigma}_i) - \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) \vec{\sigma}_i \right] \gamma_0.\end{aligned}\tag{195}$$

The first term is the projection of the Poynting vector $\vec{P}$ onto the direction $\vec{\sigma}_i$. The second term is the contraction of the Maxwell stress tensor along the direction $\vec{\sigma}_i$.

Angular momentum tensor

Conceptually, angular momentum is a bivector that indicates a plane of rotation. The rotation in question is that of a coordinate vector as it rotates to track movement associated with a linear momentum. For a classical point particle, the plane segment containing this rotation is produced explicitly by a wedge product $\mathbf{M} = x \wedge p$ between a coordinate 4-vector x and a 4-momentum p [189]. Indeed, after introducing the spacetime splits $p = (\mathcal{E}/c + \vec{p}) \gamma_0$, $x = (ct + \vec{x}) \gamma_0$ we have

$$x \wedge p = \frac{xp - px}{2} = [\mathcal{E} \vec{x}/c - (ct) \vec{p}] + \vec{x} \times \vec{p} I^{-1} \equiv -\vec{N} + \vec{L} I^{-1}.\tag{196}$$

Symmetric Energy-Momentum Tensor

Spacetime Algebra:

$$\boxed{\overline{T}_{\text{sym}}(b) = \underline{T}_{\text{sym}}(b) = \frac{1}{2} \mathbf{F} b \tilde{\mathbf{F}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{T}_{\text{sym}}(\gamma_0) = \frac{1}{2} \mathbf{F} \gamma_0 \tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} \mathbf{F} \mathbf{F}^\dagger \gamma_0 = (\varepsilon + \vec{P}) \gamma_0$$

$$\overline{T}_{\text{sym}}(\gamma_i) = \frac{1}{2} \mathbf{F} \vec{\sigma}_i \mathbf{F}^\dagger \gamma_0 = [\vec{P} \cdot \vec{\sigma}_i + \vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{\sigma}_i) + \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{\sigma}_i) - \varepsilon \vec{\sigma}_i] \gamma_0$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2), \quad \vec{P} = \vec{E} \times \vec{B}$$

Tensor Components: $T_{\text{sym}}^{\mu\nu} = T_{\text{sym}}^{\nu\mu} = \sum_{\alpha} F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \sum_{\alpha,\beta} F^{\alpha\beta} F_{\beta\alpha}$

Associated Angular Momentum Tensor

Spacetime Algebra:

$$\boxed{\overline{M}_{\text{sym}}(b) = x \wedge \overline{T}_{\text{sym}}(b)}$$

$$\boxed{\underline{M}_{\text{sym}}(\mathbf{R}) = \underline{T}_{\text{sym}}(\mathbf{R} \cdot x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{M}_{\text{sym}}(\gamma_0) = -\vec{N} + \vec{J} I^{-1},$$

$$\vec{N} = (ct) \vec{P} - \varepsilon \vec{x}, \quad \vec{J} = \vec{x} \times \vec{P}$$

Tensor Components: $M_{\text{sym}}^{\alpha\beta\gamma} = x^{\alpha} T_{\text{sym}}^{\beta\gamma} - x^{\beta} T_{\text{sym}}^{\alpha\gamma}$

Table 15: The symmetric energy-momentum tensor and its associated angular momentum tensor, shown in both spacetime algebra and tensor component notation. Notably, spacetime algebra emphasizes that the energy-momentum tensor $\overline{T}_{\text{sym}}$ is a simple quadratic form of the field $\mathbf{F}$, which maps a vector direction b into the energy-momentum flux passing through a surface orthogonal to b , exactly as the energy-momentum current for the Dirac equation of the electron [87, 9, 96]. It is a symmetric tensor, meaning it equals its adjoint $\underline{T}_{\text{sym}}$, and is easily expanded algebraically into the usual expressions containing the energy-density of the field ε , the Poynting vector $\vec{P}$, and the Maxwell stress tensor. Similarly, the associated angular momentum tensor $\overline{M}_{\text{sym}}$ is a function that maps a vector direction b into the angular momentum flux through a surface orthogonal to b , and expands to the usual boost-momentum $\vec{N}$ and rotational-angular-momentum $\vec{J}$ vectors for the field. The adjoint of this tensor $\underline{M}_{\text{sym}}$ is a function that maps a plane of rotation (bivector) $\mathbf{R}$ into an energy-momentum flux.

The second term $\vec{L}I^{-1}$ of (196) involves I , and is part of the angular momentum that agrees with the usual notion of the relative angular momentum as the cross product $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$. Within spacetime algebra, however, we see that this cross product is the Hodge-dual of the proper angular momentum bivector $\vec{L}I^{-1}$ that generates *spatial rotations* as a Lorentz transformation, just as discussed in (62) of Section 34.7.3. In contrast, the first term $-\vec{N}$ of (196) is a bivector of opposite signature that generates *boost rotations*, as discussed in (64) of Section 34.7.3. The total invariant notion of angular momentum in spacetime includes both spatial rotation and boost components, since the 4-dimensional rotations in spacetime are Lorentz transformations that can be of either type.

With this intuition, the angular momentum tensor²³ for the electromagnetic field is straightforward to obtain directly from the adjoint symmetric energy-momentum tensor $\overline{T}_{\text{sym}}(b)$. As seen in the last section, this latter tensor produces an energy-momentum density associated with a particular direction b . Hence, taking the wedge product of that energy-momentum density will produce its associated angular momentum density

$$\overline{M}_{\text{sym}}(b) = x \wedge \overline{T}_{\text{sym}}(b). \quad (197)$$

As with the energy-momentum tensor, the angular momentum tensor $\overline{M}_{\text{sym}}$ is a function that maps a constant vector direction b into the angular momentum flux passing through the hypersurface orthogonal to b . This tensor is also summarized for reference in Table 15.

Applying the angular momentum tensor to the timelike direction γ_0 produces the intuitive result

$$\overline{M}_{\text{sym}}(\gamma_0) = x \wedge \overline{T}_{\text{sym}}(\gamma_0) = [\varepsilon \vec{x} - (ct)\vec{P}] + \vec{x} \times \vec{P}I^{-1} \equiv -\vec{N} + \vec{J}I^{-1}, \quad (198)$$

with the energy-density and Poynting vector as in (196), and where $\vec{N}$ is the *boost angular momentum* and $\vec{J}$ is the *rotational angular momentum* of the electromagnetic field. According to commonly accepted notations, we denote the rotational angular momentum of the field as $\vec{J}$ (not to be confused with the charge current!), because it includes both the orbital ($\vec{L}$) and spin ($\vec{S}$) parts [48, 49, 50, 51] (see Section 34.7.8 below).

Just as the energy-momentum tensor $\overline{T}_{\text{sym}}$ has an adjoint tensor $\underline{T}_{\text{sym}}$, the angular momentum tensor $\overline{M}_{\text{sym}}$ also has an adjoint. We can compute this adjoint by contracting the tensor with any pure bivector $\mathbf{R}$, which should be understood as the plane segment for a rotation (i.e., generating a Lorentz transformation as in Section 34.7.3)

$$\mathbf{R} \cdot \overline{M}_{\text{sym}}(b) = \langle \mathbf{R}x \overline{T}_{\text{sym}}(b) \rangle_0 = \langle \underline{T}_{\text{sym}}(\langle \mathbf{R}x \rangle_1 b) \rangle_0 = \underline{T}_{\text{sym}}(\mathbf{R} \cdot x) \cdot b, \quad (199)$$

yielding the adjoint tensor

$$\underline{M}_{\text{sym}}(\mathbf{R}) = \underline{T}_{\text{sym}}(\mathbf{R} \cdot x). \quad (200)$$

This adjoint tensor is a function that takes the plane of rotation $\mathbf{R}$, contracts it with the coordinate direction x to find the orthogonal direction b such that $\mathbf{R} = b \wedge x_{\parallel} = bx_{\parallel}$ (see the discussion in Section 34.7.3), and then returns the energy-momentum flux $\underline{T}_{\text{sym}}(b)$ through the hypersurface perpendicular to that direction.

As an example, applying $\underline{M}_{\text{sym}}$ to a bivector $\mathbf{R} = \gamma_i \gamma_0 = \vec{\sigma}_i$ that generates boost rotations produces

$$\underline{M}_{\text{sym}}(\vec{\sigma}_i) = \underline{T}_{\text{sym}}(\vec{\sigma}_i \cdot x) = (ct) \underline{T}_{\text{sym}}(\gamma_i) - x_i \underline{T}_{\text{sym}}(\gamma_0), \quad (201)$$

which is the correct energy-momentum flux through the hyperplane perpendicular to the part of the coordinate vector x that lies in the boost rotation plane $\mathbf{R} = \vec{\sigma}_i$.

²³Specifically, this is the Belinfante-Rosenfeld angular momentum tensor [127, 68, 88, 31].

Macroscopic fields

The preceding discussion has assumed the free propagation of a (*microscopic*) field $\mathbf{F}$ through vacuum. In the presence of a medium, however, it is useful to partition the total field into a *macroscopic* distinction between a *free* part $\mathbf{F}_f$ that is coupled to freely moving charges in the conduction bands of the medium, and a *bound* part $\mathbf{F}_b$ that is coupled to the bound charges held rigid by the lattice structure of the medium [155, 227]. Such a partitioning of the fields and sources must have the general form

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_b, \quad j = j_f + j_b. \quad (202)$$

To see how the macroscopic fields in (202) are expressed in a relative frame, we consider the spacetime splits (using conventional (SI) units)

$$\mathbf{F}_f = \vec{D}/\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{\mu_0}\vec{H}I, \quad \mathbf{F}_b = -\vec{\mathcal{P}}/\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{\mu_0}\vec{\mathcal{M}}I. \quad (203)$$

Here $\vec{D}$ is the usual electric *displacement*, $\vec{H}$ is the macroscopic magnetic field, $\vec{\mathcal{P}}$ is the *electric polarization* field of the medium, and $\vec{\mathcal{M}}$ is the *magnetization* field of the medium²⁴. From the definition (202) we see that the total electromagnetic field $\mathbf{F} = \sqrt{\epsilon_0}\vec{E} + \vec{B}I/\sqrt{\mu_0}$ is related to the macroscopic fields in the following way

$$\epsilon_0\vec{E} = \vec{D} - \vec{\mathcal{P}}, \quad \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{\mathcal{M}}, \quad (204)$$

which agrees with the standard definition of the electric polarization and magnetization vectors [155, 227].

Imposing Maxwell's equation (156) on the partitions in (202) then couples the fields and sources in a nontrivial way

$$\nabla\mathbf{F}_f = j_f - (\nabla\mathbf{F}_b - j_b). \quad (205)$$

We can then *define* the split (202) to force the final bracketed term of (205) to vanish, which purposefully couples the free macroscopic field with only the *free* charge-currents. This definition forces the separation of the total field into two equations

$$\nabla\mathbf{F}_f = j_f, \quad \nabla\mathbf{F}_b = j_b. \quad (206)$$

The first of these split equations is Maxwell's *macroscopic* equation for free charges. The second is a constraint equation that defines the *electromagnetic polarization field* that is bound to the medium [155, 227]. Note that the bound charges j_b will generally respond to the total field $\mathbf{F}$, so will shift around while staying confined to the lattice structure, creating an indirect coupling between the two split equations in (206). We will return to this important point later.

In terms of a relative frame, the free fields $\vec{D}$ and $\vec{H}$ satisfy the macroscopic Maxwell's equations in (206)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= c\rho_{e,f}, & \partial_0\vec{D} - \vec{\nabla} \times \vec{H} &= -\vec{J}_{e,f}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= c\rho_{m,f}, & \partial_0\vec{H} + \vec{\nabla} \times \vec{D} &= -\vec{J}_{m,f}, \end{aligned} \quad (207)$$

that involve only the *free* charge-currents. Similarly, the bound fields $\vec{\mathcal{P}}$ and $\vec{\mathcal{M}}$ satisfy the constraint equations from (206)

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{P}} &= c\rho_{e,b}, & -\partial_0\vec{\mathcal{P}} - \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{M}} &= -\vec{J}_{e,b}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{M}} &= c\rho_{m,b}, & \partial_0\vec{\mathcal{M}} - \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{P}} &= -\vec{J}_{m,b}, \end{aligned} \quad (208)$$

Macroscopic Maxwell's Equations	
Microscopic:	$\boxed{\nabla \mathbf{F} = j}$ $\boxed{\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I}$
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = c\rho_e, \quad \partial_0 \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{J}_e$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = c\rho_m, \quad \partial_0 \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{J}_m$
Macroscopic:	$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_b}$ $\boxed{\mathbf{F}_f = \vec{D} + \vec{H}I}$ $\boxed{\mathbf{F}_b = -\vec{\mathcal{P}} + \vec{\mathcal{M}}I}$
	$\vec{E} = \vec{D} - \vec{\mathcal{P}} \quad \vec{B} = \vec{H} + \vec{\mathcal{M}} \quad j = j_f + j_b$
Free fields:	$\boxed{\nabla \mathbf{F}_f = j_f}$
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = c\rho_{e,f}, \quad \partial_0 \vec{D} - \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\vec{J}_{e,f}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = c\rho_{m,f}, \quad \partial_0 \vec{H} + \vec{\nabla} \times \vec{D} = -\vec{J}_{m,f}$
Bound fields:	$\boxed{\nabla \mathbf{F}_b = j_b}$
	$-\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{P}} = c\rho_{e,b}, \quad -\partial_0 \vec{\mathcal{P}} - \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{M}} = -\vec{J}_{e,b}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{M}} = c\rho_{m,b}, \quad \partial_0 \vec{\mathcal{M}} - \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{P}} = -\vec{J}_{m,b}$
Reduced set:	$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{F}_f = j_f}$ $\boxed{\nabla \wedge \mathbf{F} = j_m I}$ $\boxed{\nabla \cdot \mathbf{F}_b = j_b}$
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = c\rho_{e,f}, \quad \partial_0 \vec{D} - \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\vec{J}_{e,f}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = c\rho_m, \quad \partial_0 \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{J}_m$ $-\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{P}} = c\rho_{e,b}, \quad -\partial_0 \vec{\mathcal{P}} - \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{M}} = -\vec{J}_{e,b}$
SI Units :	$\vec{E} \mapsto \sqrt{\epsilon_0} \vec{E}, \quad \vec{B} \mapsto \vec{B}/\sqrt{\mu_0}, \quad j_e \mapsto \sqrt{\mu_0} j_e, \quad j_m \mapsto \sqrt{\mu_0} j_m/c$
($c \equiv 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$)	$\vec{D} \mapsto \vec{D}/\sqrt{\epsilon_0}, \quad \vec{H} \mapsto \sqrt{\mu_0} \vec{H}, \quad \vec{\mathcal{P}} \mapsto \vec{\mathcal{P}}/\sqrt{\epsilon_0}, \quad \vec{\mathcal{M}} \mapsto \sqrt{\mu_0} \vec{\mathcal{M}}$
CGS Units:	$\vec{E} \mapsto \vec{E}/\sqrt{4\pi}, \quad \vec{B} \mapsto \vec{B}/\sqrt{4\pi}, \quad j \mapsto \sqrt{4\pi} j/c$
	$\vec{D} \mapsto \vec{D}/\sqrt{4\pi}, \quad \vec{H} \mapsto \vec{H}/\sqrt{4\pi}, \quad \vec{\mathcal{P}} \mapsto \sqrt{4\pi} \vec{\mathcal{P}}, \quad \vec{\mathcal{M}} \mapsto \sqrt{4\pi} \vec{\mathcal{M}}$

Table 16: Macroscopic Maxwell's equations. The total microscopic field $\mathbf{F}$ is partitioned into a free part $\mathbf{F}_f$ and a bound part $\mathbf{F}_b$, each coupled to free j_f and bound j_b charge-currents in a medium, respectively. The bound field contains the electric polarization $\vec{\mathcal{P}}$ and magnetization $\vec{\mathcal{M}}$ densities of the medium, while the free field contains the electric displacement $\vec{D}$ and magnetic field strength $\vec{H}$. Out of the total set of equations implied by Maxwell's microscopic equation, a reduced set of the indicated three equations is typically considered, augmented by phenomenological constitutive relations between $\mathbf{F}$ and $\mathbf{F}_f$.

that involve only the *bound* charge-currents.

The subtlety that arises from this separation of the total source into free and bound parts is that the partition could implicitly contain complementary *induced* charge-currents j_i that emerge from complicated interactions with the medium. That is, one can generally arrange for the relation

$$j_f = j_{f,0} + j_i, \quad j_b = j_{b,0} - j_i, \quad (209)$$

such that the total source is $j = j_f + j_b = j_{f,0} + j_{b,0}$, so any induced part cancels and is only visible to the separation of the macroscopic fields. Interestingly, the induced charge-current j_i could change the apparent nature of the separated charge-current. For example, even if one considers a purely electric (vector) total charge-current, $j = j_e$, an exotic material (e.g., [228, 229, 230, 231, 232]) could induce an effective *magnetic* (trivector) part, $j_i = j_{m,i}I$, to the total free charge-current, $j_f = j_{e,f} + j_{m,i}I$. The free macroscopic field $\mathbf{F}_f$ will then be sensitive to this induced magnetic source, which will appear as apparent magnetic monopoles embedded in the medium [213].

To see this behavior more clearly in the relative frame, consider the case when the total current $j = j_e = (c\rho_e + \vec{J}_e)\gamma_0$ is purely electric (as is traditional and expected), but a magnetic part $j_i I = (c\rho_{m,i} + \vec{J}_{m,i})\gamma_0 I$ is then induced by an exotic medium (e.g., [228, 229, 230, 231, 232]). In this case, according to (156) and (202), the following macroscopic and microscopic equations will be satisfied

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= c\rho_{e,f}, & \partial_0 \vec{D} - \vec{\nabla} \times \vec{H} &= -\vec{J}_{e,f}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= c\rho_{m,i}, & \partial_0 \vec{H} + \vec{\nabla} \times \vec{D} &= -\vec{J}_{m,i}, \\ \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= c\rho_e, & \epsilon_0 \partial_0 \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B}/\mu_0 &= -\vec{J}_e, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \partial_0 \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0. \end{aligned} \quad (210)$$

Note that the divergence equation for $\vec{H}$ and the curl equation for $\vec{D}$ acquire induced *magnetic source* terms, even though the corresponding equations for the total fields $\vec{B}$ and $\vec{E}$ show no evidence of such a magnetic source.

The standard practice [155, 227] to simplify the large set of equations (210) is to drop the middle four equations and consider only the remaining four equations that are hybridized between the macro- and microscopic fields and involve only the free electric charge

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= c\rho_{e,f}, & \partial_0 \vec{D} - \vec{\nabla} \times \vec{H} &= -\vec{J}_{e,f}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \partial_0 \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0. \end{aligned} \quad (211)$$

These equations are then supplemented by the first constraint equation in (208) that involves the bound electric charge

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{P}} = c\rho_{e,b}, \quad -\partial_0 \vec{\mathcal{P}} - \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{M}} = -\vec{J}_{e,b}. \quad (212)$$

All six of this reduced set of equations then involve only the *electric* part of the charge, regardless of any magnetic charge that may have been induced by the medium. This simplification avoids any consideration of the induced magnetic source in favor of a purely electric description.

Note that the six standard equations (211) and (212) for macroscopic fields can be equivalently written in a frame-independent way as the triplet of equations [9]

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_f = j_f, \quad \nabla \wedge \mathbf{F} = j_m I, \quad \nabla \cdot \mathbf{F}_b = j_b. \quad (213)$$

²⁴Note that we use calligraphic script here for the polarization and magnetization to disambiguate them from momentum and angular momentum in other sections. They will only be used within this section.

The first equation involves the free electric charge. The second becomes the Bianchi identity for the total field when the total magnetic source j_m is zero. The third is the constraint for the bound electric charge. It is important to remember, however, that these three equations arise as only part of the fully separated equations in (206), which are parts of Maxwell's single equation for the total (microscopic) field (156). All these relationships are summarized for reference in Table 16.

The information that is lost by neglecting the middle equations in (210) can be phenomenologically restored by determining a *constitutive relation* between the macroscopic fields $\vec{D}$ and $\vec{H}$ and the total microscopic fields $\vec{E}$ and $\vec{B}$. As mentioned previously, such a relation should exist because the configuration of the bound charge-current j_b will generally depend upon the total field $\mathbf{F}$ in the medium, which in turn alters the constraint for the electromagnetic polarization in (202) that determines the macroscopic fields. Determining the effective functional dependence of this polarization field is a nontrivial and material-specific phenomenological problem [155, 227]. In the simplest case there is no medium (and thus no electromagnetic polarization), so $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ and $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ according to (204). In the next simplest case the relation is linear and one can define new constants ϵ and μ such that $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ and $\vec{H} = \vec{B}/\mu$. More generally, the appropriate constitutive relations depend on the total field $\mathbf{F}$, and are frequency-dependent (i.e., dispersive) [155, 227, 233].

It is also worth remarking that there is a considerable interest to artificial media and materials that restore the dual symmetry of vacuum on the level of macroscopic medium parameters (e.g., $\epsilon = \mu$) [19, 234, 107, 108, 235, 214, 236]. The conservation of the optical helicity associated with such symmetry (see Section 34.7.8 below) provides a new insight into the light propagation and scattering dynamics.

34.7.8 Lagrangian formalism

It is impossible to study this remarkable theory without experiencing at times the strange feeling that the equations and formulas somehow have a proper life, that they are smarter than we, smarter than the author himself, and that we somehow obtain from them more than was originally put into them.

Heinrich Hertz [237]

You can recognize truth by its beauty and simplicity. When you get it right, it is obvious that it is right—at least if you have any experience—because usually what happens is that more comes out than goes in.

Richard P. Feynman [238]

It is worth emphasizing that up to this point we have introduced *no physical postulates* other than the need for spacetime itself (and thus its associated algebra). We made the casual observation that a proper spacetime bivector $\mathbf{F}$ naturally splits into polar and axial 3-vector parts $\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I$ with respect to a particular reference frame in Eq. (47), and noted that these parts transform under a Lorentz boost exactly as we expect the electromagnetic field to transform in Eqs. (66) and (98). We then found that the structure of the simplest bivector differential equation $\nabla \mathbf{F} = 0$ in Eq. (90) is precisely Maxwell's equation in vacuum, while the next simplest modification $\nabla \mathbf{F} = j$ in Eq. (156) is Maxwell's equation that properly includes both electric and magnetic sources, albeit in a compact form as a single complex vector current

j . We also made the casual observation that contracting the bivector $\mathbf{F}$ with such a complex current j gives the correct Lorentz force equation $dp/d\tau = \langle \mathbf{F}j \rangle_1$ that supports both electric and magnetic charges in Eq. (174). Combining the Lorentz force law and Maxwell's equation using a general conservation constraint in Eq. (186) then produces the correct symmetric energy-momentum stress tensor $\mathbb{T}(\gamma_0) = \mathbf{F}\gamma_0\tilde{\mathbf{F}}/2$ in Eq. (190) as a simple quadratic form of the field (which is the same functional form as the energy-momentum current of the Dirac electron [87, 9, 96]).

Despite the richness of these emergent characteristics of the spacetime geometry, all suggestive notation, terminology, and constant unit factors have been window-dressing for features that are essentially inevitable when considering the simplest dynamics one can ascribe to any bivector field in spacetime, bereft of physical interpretation *a priori*. The fact that these features exactly correspond to the electromagnetic theory of both electric and magnetic charges is remarkable unto itself. More importantly, however, this fact prompts a careful reassessment of the physical foundations and postulates of classical electromagnetic field theory.

The more complete physical foundation of electromagnetism comes from a Lagrangian field-theory perspective. Fundamentally, the electromagnetic field $\mathbf{F}$ emerges as a necessary consequence of preserving a local $U(1)$ gauge symmetry (i.e., a local phase rotation) in the Lagrangian for a complex (charged) matter field [168], as we will detail in Section 34.7.8. However, with such a Lagrangian approach it becomes clear that the *vector potential* z acts as the dynamical gauge field that preserves the charge symmetry, with the usual electromagnetic field $\mathbf{F} = \nabla z$ arising only as a derivative quantity. Thus, the vector potential z will be our new starting point, from which we will systematically derive the corresponding conserved physical quantities of the field.

Traditional vacuum-field Lagrangian

As we have shown in Sections 34.7.5 and 34.7.6, the dual symmetry of the vacuum Maxwell's equation $\nabla^2 z = 0$ implies that the vector potential should be invariant under the global phase symmetry $z \mapsto z \exp(\theta I)$ in vacuum, and thus must be intrinsically *complex*. This symmetry poses a problem for the traditional electromagnetic Lagrangian, which can be written in various equivalent forms:

$$\mathcal{L}_{\text{trad}}(x) = \frac{\langle (\nabla z)^2 \rangle_0}{2} = \frac{\langle \mathbf{F}^2 \rangle_0}{2} = \frac{\ell_1}{2} = \frac{|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2}{2} = \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\nu\mu}. \quad (214)$$

We will motivate why this Lagrangian appears from a gauge theory perspective in Section 34.7.8. Traditionally $z = a_e$ is considered to be a pure (electric) vector potential that generates a single associated constituent field $\mathbf{F}_e = \nabla \wedge a_e$ [127, 155, 29]. Indeed, recall that the subscripts e and m throughout this report refer to the electric and magnetic types of *charge*, so in the traditional electromagnetism (with only electric charges) all “magnetic” (subscript m) quantities can be neglected. However, we keep $z = a_e + a_m I$ complex here, since no electric or magnetic charge exists in *vacuum* to select either a_e or a_m as a preferred vector potential.

The traditional Lagrangian (214) is *not dual-symmetric*, and, hence, is problematic for the description of dual-symmetric vacuum fields that require such a complex potential. To see this explicitly, we expand the complex vector potential z in (214) into its constituent parts, impose the Lorenz-FitzGerald conditions $\nabla \cdot a_e = \nabla \cdot a_m = 0$ discussed in Section 34.7.6, and define the two constituent fields $\mathbf{F}_e = \nabla \wedge a_e = \vec{E}_e + \vec{B}_e I$ and $\mathbf{F}_m = \nabla \wedge a_m = \vec{B}_m - \vec{E}_m I$ such that $\mathbf{F} = \nabla z = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m I$, as in Section 34.7.6, then the traditional Lagrangian expands into the

form

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{trad}}(x) &= \frac{\langle \mathbf{F}_e^2 \rangle_0 - \langle \mathbf{F}_m^2 \rangle_0}{2} + \langle \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_m I \rangle_0, \\ &= \frac{1}{2} [|\vec{E}_e|^2 - |\vec{B}_e|^2 + |\vec{E}_m|^2 - |\vec{B}_m|^2] - [\vec{E}_e \cdot \vec{B}_m + \vec{B}_e \cdot \vec{E}_m],\end{aligned}\quad (215)$$

which shows an intrinsic interplay between the constituent fields²⁵ that alters the original structure of (214).

This additional structure appears because the traditional Lagrangian (214) is not invariant under the dual symmetry phase rotation $z \mapsto z \exp(\theta I)$. Instead, it transforms as

$$\mathcal{L}_{\text{trad}}(x) \mapsto \frac{\ell_1}{2} \cos 2\theta - \frac{\ell_2}{2} \sin 2\theta, \quad (216)$$

and oscillates between the two proper scalars $\ell_1 = |\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2$ and $\ell_2 = 2\vec{E} \cdot \vec{B}$ of the total field as the phase is changed [68]. (As we noted in Section 34.7.5, the second term that appears here is the “axion” term proposed in [216] using precisely this dual-symmetric phase-rotation.) The lack of global phase invariance of the Lagrangian (214) is problematic for maintaining the dual-symmetric complexity of the vector potential z . However, one can always avoid this problem by explicitly *breaking* the dual-symmetry to keep $z = a_e$ a pure (electric) vector potential, as in the traditional approach. In this case the constituent fields associated with the magnetic vector potential a_m vanish ($\vec{E}_m = \vec{B}_m = 0$) in (215).

We are thus motivated to consider a simple correction to the traditional Lagrangian that addresses these shortcomings for the description of a vacuum field. We wish to modify the Lagrangian to make it manifestly dual-symmetric under a global phase rotation of z .

Dual-symmetric Lagrangian

We can correct the traditional Lagrangian in a simple way to make it properly dual-symmetric by adding a complex conjugate to the traditional expression

$$\mathcal{L}_{\text{dual}}(x) = \frac{1}{2} \langle (\nabla z)(\nabla z^*) \rangle_0. \quad (217)$$

Notably, this modification makes the Lagrangian a simple quadratic form for the complex vector field z , which is the expected form for the kinetic energy of such a field. This form is thus a logical choice for a properly dual-symmetric Lagrangian. We must now verify that this modification produces sensible results.

In terms of constituent fields, (217) expands into the following equivalent forms:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{dual}}(x) &= \frac{\langle (\nabla a_e)^2 \rangle_0}{2} + \frac{\langle (\nabla a_m)^2 \rangle_0}{2} = \frac{\langle \mathbf{F}_e^2 \rangle_0}{2} + \frac{\langle \mathbf{F}_m^2 \rangle_0}{2}, \\ &= \frac{1}{2} (|\vec{E}_e|^2 - |\vec{B}_e|^2) + \frac{1}{2} (|\vec{B}_m|^2 - |\vec{E}_m|^2), \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} [(F_e)_{\mu\nu}(F_e)^{\nu\mu} + (F_m)_{\mu\nu}(F_m)^{\nu\mu}].\end{aligned}\quad (218)$$

Perhaps surprisingly, the dual-symmetric form of (217) is simply the sum of *two copies of the traditional Lagrangian* (215), one for each independent constituent field a_e and a_m in the complex vector potential $z = a_e + a_m I$. Notably, a dual-symmetric Lagrangian of precisely this form was previously considered in [209, 210, 212, 196] from a different starting point. The traditional and dual-symmetric Lagrangians are compared for reference in Table 17.

²⁵Again, the subscripts of e and m on the constituent relative fields indicate that they would normally be associated with either electric or magnetic *charges*, which do not exist in vacuum.

Electromagnetic Lagrangian Densities

Traditional: $z = a_e \equiv a \quad \mathbf{F} = \nabla a_e = \mathbf{F}_e$

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{trad}}(x) = \frac{\langle (\nabla a)^2 \rangle_0}{2}} = \frac{\langle \mathbf{F}^2 \rangle_0}{2} = \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\nu\mu}$$

Dual-symmetric: $z = a_e + a_m I \quad \mathbf{F} = \nabla z = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m I$

$$\begin{aligned} \boxed{\mathcal{L}_{\text{dual}}(x) = \frac{\langle (\nabla z)(\nabla z^*) \rangle_0}{2}} &= \frac{\langle \mathbf{F}_e^2 \rangle_0}{2} + \frac{\langle \mathbf{F}_m^2 \rangle_0}{2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} [(F_e)_{\mu\nu} (F_e)^{\nu\mu} + (F_m)_{\mu\nu} (F_m)^{\nu\mu}] \end{aligned}$$

Constrained:

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbf{F}_e \rightarrow \mathbf{F}_m I \rightarrow \mathbf{F}_{\text{meas}}/\sqrt{2} = \mathbf{G}_{\text{meas}} I/\sqrt{2}} \\ \mathcal{L}_{\text{dual}}(x) \rightarrow \frac{\langle \mathbf{F}_{\text{meas}}^2 \rangle_0}{4} + \frac{\langle \mathbf{G}_{\text{meas}}^2 \rangle_0}{4} = \frac{1}{8} \sum_{\mu\nu} [F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} + G_{\mu\nu} G^{\nu\mu}] \end{aligned}$$

Table 17: Electromagnetic Lagrangians in the traditional and dual-symmetric field theories. The traditional Lagrangian is a kinetic term for only the constituent vector potential a_e associated with *electric* charge. The dual-symmetric Lagrangian is a kinetic term for the full complex vector potential z , and preserves the dual symmetry of vacuum. The electric a_e and magnetic a_m vector potentials contribute to this Lagrangian as *independent* fields that each satisfy a copy of the traditional Lagrangian [209, 210, 212, 196]. In the constrained formalism, the two vector potentials of the dual-symmetric Lagrangian describe the *same* (measurable) vacuum field $\mathbf{F}_{\text{meas}}$ in a symmetrized way [68, 106]. Note that with this constraint the dual-symmetric Lagrangian formally vanishes; however, the constraint can be implemented using a Lagrange multiplier, or as a final step.

Constrained dual-symmetric Lagrangian

The fact that the dual-symmetrized Lagrangian (217) explicitly involves the second constituent field $\mathbf{F}_m$ as an independent but necessary field prompts the question whether this second field is really independent in vacuum, or should be further constrained. In particular, if one believes the *total* dual-symmetric field $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m I$ should be the true electromagnetic field, then one can postulate that the different constituent fields $\mathbf{F}_e = \nabla \wedge a_e$ and $\mathbf{F}_m = \nabla \wedge a_m$ actually describe the *same* total field. We can thus consider imposing an additional nontrivial *constraint* to force these two constituent fields to give equal contributions to the measurable vacuum field

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_m I = \frac{\mathbf{F}_{\text{meas}}}{\sqrt{2}}, \quad (219)$$

so $\vec{E}_e = \vec{E}_m = \vec{E}_{\text{meas}}/\sqrt{2}$ and $\vec{B}_e = \vec{B}_m = \vec{B}_{\text{meas}}/\sqrt{2}$, and the total field magnitude is preserved:

$$|\mathbf{F}|^2 = \mathbf{F}^* \mathbf{F} = \mathbf{F}_e^* \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m^* \mathbf{F}_m \rightarrow \mathbf{F}_{\text{meas}}^* \mathbf{F}_{\text{meas}} = |\mathbf{F}_{\text{meas}}|^2. \quad (220)$$

With this constraint we find that $\mathbf{F}_m = \mathbf{F}_{\text{meas}} I^{-1}/\sqrt{2} = \mathbf{G}_{\text{meas}}/\sqrt{2}$, so the two constituent fields become precisely proportional to the measurable field $\mathbf{F}_{\text{meas}}$ and its Hodge-dual $\mathbf{G}_{\text{meas}} = \mathbf{F}_{\text{meas}} I^{-1}$.

Inserting the constraint (219) into (218) produces

$$\mathcal{L}_{\text{dual}}(x) \rightarrow \frac{\langle \mathbf{F}_{\text{meas}}^2 \rangle_0 + \langle \mathbf{G}_{\text{meas}}^2 \rangle_0}{4} = \frac{1}{8} \sum_{\mu\nu} (F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} + G_{\mu\nu} G^{\nu\mu}). \quad (221)$$

The functional form of this constrained Lagrangian density is then precisely equal to the dual-symmetric form recently postulated in [68, 106]. Curiously, this constrained form identically *vanishes* since $\mathbf{G}_{\text{meas}}^2 = (\mathbf{F}_{\text{meas}} I^{-1})^2 = -\mathbf{F}_{\text{meas}}^2$. Thus, the constraint (219) should be imposed either as a Lagrange multiplier constraint in the dual-symmetric Lagrangian (217), or as a final step in derivations that retain both constituent fields $\mathbf{F}_e$ and $\mathbf{F}_m$ [68, 106].

Notably, the constraint (219) also forces the vector potential z to be *irreducibly complex*. Indeed, if one could rotate z to a pure vector potential a_0 with some phase rotation $z = a_0 \exp(\theta I)$, then the constraint (219) would force the measurable field $\mathbf{F}_{\text{meas}}$ to identically vanish. To see this, note that $z = a_e + a_m I = a_0 \exp(\theta I)$, so $a_e = a_0 \cos \theta$ and $a_m = a_0 \sin \theta$. Therefore, $\mathbf{F}_e = \cos \theta \mathbf{F}_0$ and $\mathbf{F}_m = \sin \theta \mathbf{F}_0$ where $\mathbf{F}_0 = \nabla \wedge a_0$. The constraint (219) then implies: $\cos \theta \mathbf{F}_0 = \sin \theta \mathbf{F}_0 I = \mathbf{F}_{\text{meas}}/\sqrt{2}$. Due to the factor of I , this relation is only satisfiable if $\mathbf{F}_0 = 0$ for any θ , making $\mathbf{F}_{\text{meas}} = 0$. Therefore, to obtain nontrivial vacuum fields that satisfy the constraint (219), the vector potential z must remain complex under *all* phase rotations.

However, the irreducible complexity of z forced by the constraint (219) presents a significant problem for *coupling to matter*. The equation $\nabla z^* = \nabla(a_e - a_m I) = \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_m I \rightarrow 0$ vanishes with this constraint, which is inconsistent with Maxwell's source equation (156), written in its conjugated form $\nabla^2 z^* = j^*$. Specifically, $\nabla^2 z^* = \nabla(\nabla z^*) \rightarrow 0$ with the constraint, so any source j must vanish. Thus, the constraint (219) can only describe *vacuum* fields that are not coupled to matter, which corroborates our general discussion about the fundamental difference between the irreducibly complex vacuum and reducibly complex source parts of the complex vector potential z in Section 34.7.7

Since fields must couple to matter (charges) to be physically measured, the constraint (219) in its current form is problematic. Either we must modify the constraint (219) to properly accommodate sources (see, e.g., [239] for ideas regarding how this modification could be accomplished), or the constrained Lagrangian becomes inconsistent with the presence of sources. At the same time, the independent “electric” and “magnetic” parts of the unconstrained dual-symmetric Lagrangian (218) can be coupled to the corresponding charges. In this case one

can speculate that the presence of “electric matter” explicitly breaks the dual-symmetry by coupling to only one of the constituent fields $\mathbf{F}_e = \nabla \wedge a_e$. In the absence of other fields in the model, the remaining constituent field $\mathbf{F}_m$ in the dual-symmetric Lagrangian (217) would then be undetectable and only contribute to gravity as an invisible and noninteracting energy density (e.g., a *dark light* contribution to dark matter [196]). We will revisit this issue of the second constituent field more carefully in Section 34.7.8.

Maxwell’s equation of motion

We can obtain the equation of motion for z implied by all three candidate Lagrangians (Table 17) by treating the constituent vector potentials a_e and a_m independently, and applying the appropriate Euler–Lagrange equation [9, 127] to each one. For example,

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} a_e)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_e} = \nabla^2 a_e = 0, \quad (222)$$

is the proper equation of motion for a_e , where $x = \sum_{\mu} x^{\mu} \gamma_{\mu}$. The equation for a_m can be obtained similarly, yielding $\nabla^2 a_m = 0$. It follows that the equation of motion for $z = a_e + a_m I$ is the Maxwell’s vacuum equation (90) in a manifestly dual-symmetric form,

$$\nabla^2 z = \nabla \mathbf{F} = 0, \quad (223)$$

for any of the three candidate Lagrangians. This means, that the above three Lagrangian theories are indistinguishable from each other on the level of vacuum equations of motion. However, they do differ from each other in other field-theory aspects [68].

Field invariants: Noether currents

According to Noether’s theorem [123], any continuous symmetry of a Lagrangian leads to a conservation law. We can use this theorem to systematically find the *canonical* conserved currents for the vacuum electromagnetic field, using each of the three Lagrangian densities (214), (217), and (221) in Table 17.

Recall the general procedure for obtaining the conserved currents [127, 9]:

1. Suppose one transforms each field a (and possibly the coordinates x) in a Lagrangian density $\mathcal{L}[a(x), \nabla a(x)]$ according to a group transformation $\underline{U}_{\alpha, g}$ that depends on a continuous scalar parameter α , as well as a generating element g

$$a'(x') = \underline{U}_{\alpha, g}[a(x)], \quad (224a)$$

$$x' = \underline{U}_{\alpha, g}^{-1}(x) = \overline{U}_{\alpha, g}(x), \quad (224b)$$

$$\nabla' = \underline{U}_{\alpha, g}(\nabla). \quad (224c)$$

If $\mathcal{L}[a'(x'), \nabla' a'(x')] = \mathcal{L}[a(x), \nabla a(x)]$ then $\underline{U}_{\alpha, g}$ is a symmetry of the Lagrangian density²⁶.

2. The infinitesimal field and coordinate increments are then

$$\delta a(g) \equiv \partial_{\alpha} a'(x')|_{\alpha=0} = \partial_{\alpha} a'(x)|_{\alpha=0} + (\delta x(g) \cdot \nabla) a(x), \quad (225a)$$

$$\delta x(g) \equiv \partial_{\alpha} x'|_{\alpha=0}, \quad (225b)$$

and depend on the chosen generator g .

²⁶Note that if both the coordinates x and the fields a are transformed, then one should typically transform ∇ in the same way as a so that the kinetic terms ∇a transform similarly to a . Since ∇ and x are inversely related, this implies that x and a should transform oppositely with the group transformation.

3. The change in the transformed Lagrangian $\mathcal{L}'$ is therefore

$$\partial_\alpha \mathcal{L}'(x')|_{\alpha=0} = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} \delta a(g) \right\rangle_0 + \sum_\mu \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu a)} \partial_\mu \delta a(g) \right\rangle_0 + (\delta x(g) \cdot \nabla) \mathcal{L}, \quad (226)$$

which must vanish from the symmetry. In the presence of multiple independent fields (such as a_e and a_m), the right hand side contains corresponding terms for each independent field.

4. After applying the Euler–Lagrange equation (222) for each a in the first term (i.e., essentially using Maxwell’s equation), (226) simplifies to a divergence

$$\partial_\alpha \mathcal{L}'|_{\alpha=0} = \nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}_N(g) = 0, \quad (227)$$

of a *conserved Noether current* (tensor) that depends on the generator g

$$\underline{\mathbf{J}}_N(g) \equiv \sum_\mu \gamma_\mu \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu a)} \delta a(g) \right\rangle_0 + \mathcal{L} \delta x(g). \quad (228)$$

5. In any reference frame $\underline{\mathbf{J}}_N(g) = [\xi_N(g) + \vec{J}_N(g)]\gamma_0$, it follows from this conservation law that $\partial_0 \xi_N(g) - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_N(g) = 0$. Hence, we can integrate over the spatial coordinates (assuming $\vec{J}_N(g)$ vanishes at infinity) to find a conserved *Noether charge*

$$\underline{\mathbf{Q}}_N(g) = \int d^3x \xi_N(g), \quad \partial_0 \underline{\mathbf{Q}}_N(g) = 0. \quad (229)$$

We now use this procedure to find the Noether currents for the various electromagnetic Lagrangians. Note that it will be sufficient to compute everything using the dual-symmetric Lagrangian (217), and then constrain the final results appropriately. For the traditional Lagrangian (214), we will simply neglect all terms related to the constituent field $\mathbf{F}_m$ associated with magnetic charges. For the constrained Lagrangian, we will enforce the additional constraint $\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_m = \mathbf{F}/\sqrt{2}$, Eq. (219), which makes both vector potentials a_e and a_m correspond to the same electromagnetic field. We will distinguish the expressions for the constrained Lagrangian using an arrow symbol “ $\rightarrow$ ” for clarity in what follows.

Canonical energy-momentum stress tensor

We first consider translations of spacetime, which will produce the conservation of the energy-momentum of the field. Suppose we translate the position vectors x in the Lagrangian density by a small amount α in an arbitrary direction b , so $x' = x - \alpha b = \exp[-\alpha(b \cdot \nabla)]x$. This translation leaves the Lagrangian (217) invariant since $\nabla' = \nabla$. It follows from (225) that the increment for x is simply b , while the increment for a_e is the corresponding directional derivative

$$\delta x[b] = -b, \quad (230a)$$

$$\delta a_e[b] = -(b \cdot \nabla) a_e, \quad (230b)$$

and similarly for a_m . Computing the change from this translation according to (226) thus produces the conserved Noether current

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbb{T}}(b) &= \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} a_e)} (-b \cdot \nabla) a_e + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} a_m)} (-b \cdot \nabla) a_m \right\rangle_0 - b \mathcal{L}, \\
&= \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \langle (\partial_{\mu} a_e) (-b \cdot \nabla) a_e + (\partial_{\mu} a_m) (-b \cdot \nabla) a_m \rangle_0 - b \mathcal{L}, \\
&= \nabla a_e \cdot [(-b \cdot \nabla) a_e] + \nabla a_m \cdot [(-b \cdot \nabla) a_m] - b \mathcal{L}, \\
&= (b \cdot \dot{\nabla}) \langle \dot{a}_e \mathbf{F}_e + \dot{a}_m \mathbf{F}_m \rangle_1 - \frac{b}{2} (\langle \mathbf{F}_e^2 \rangle_0 + \langle \mathbf{F}_m^2 \rangle_0), \\
&\rightarrow \frac{1}{2} (b \cdot \dot{\nabla}) \langle \dot{a}_e \mathbf{F} + \dot{a}_m \mathbf{G} \rangle_1,
\end{aligned} \tag{231}$$

Recall that the overdots indicate that only the potentials are being differentiated. This conserved tensor $\underline{\mathbb{T}}(b)$ is the *canonical energy-momentum stress tensor* [127, 68], which was first derived while preserving dual symmetry by Gaillard and Zumino [112].

The canonical energy-momentum tensor is *not* symmetric with respect to its adjoint: $\underline{\mathbb{T}} \neq \overline{\mathbb{T}}$, which can be obtained as

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{T}}(b) &= \partial_d \langle \underline{\mathbb{T}}(d) b \rangle_0 = \dot{\nabla} \langle (\dot{a}_e \mathbf{F}_e + \dot{a}_m \mathbf{F}_m) b \rangle_0 - \frac{b}{2} (\langle \mathbf{F}_e^2 \rangle_0 + \langle \mathbf{F}_m^2 \rangle_0), \\
&\rightarrow \frac{1}{2} \dot{\nabla} \langle (\dot{a}_e \mathbf{F} + \dot{a}_m \mathbf{G}) b \rangle_0.
\end{aligned} \tag{232}$$

This adjoint form involves the scalar (real) parts of total bivector contractions.

Importantly, in contrast to the symmetric energy-momentum tensor in (190), the canonical tensor in (231) and (232) explicitly involves the vector-potentials a_e and a_m , making it *gauge-dependent*. Note also that the first summand (involving $\mathbf{F}_e$ and a_e) in the non-constrained tensor is equivalent to the conserved canonical tensor for the traditional Lagrangian (214). Hence, the two summands in the unconstrained tensor are *separately conserved* energy-momentum tensors for the two constituent fields $\mathbf{F}_e$ and $\mathbf{F}_m$. We detail the canonical energy-momentum tensor in Table 18 for reference.

For comparison, we also compute the *symmetric* energy-momentum tensor from (190) explicitly in terms of the constituent fields to find

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbb{T}}_{\text{sym}}(b) &= \overline{\mathbb{T}}_{\text{sym}}(b) = \frac{1}{2} \mathbf{F} b \tilde{\mathbf{F}} = -\frac{1}{2} (\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m I) b (\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m I), \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{F}_e b \tilde{\mathbf{F}}_e + \frac{1}{2} \mathbf{F}_m b \tilde{\mathbf{F}}_m.
\end{aligned} \tag{233}$$

The cross-term involves a vector minus its reverse, so it vanishes to leave the sum of the symmetric tensors for each constituent field. This form as a sum is consistent with the canonical tensors derived from Noether's theorem. In particular the identity (233) implies that the energy density $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_m$ and the Poynting vector $\vec{P} = \vec{P}_e + \vec{P}_m$ decompose into sums of the corresponding quantities for the constituent fields.

It is instructive to find the difference between the symmetric (Section 34.7.7) and canonical energy-momentum tensors:

$$\underline{\mathbb{K}} \equiv \underline{\mathbb{T}}_{\text{sym}} - \underline{\mathbb{T}}, \quad \overline{\mathbb{K}} \equiv \overline{\mathbb{T}}_{\text{sym}} - \overline{\mathbb{T}}. \tag{234}$$

Using the identity $(b \cdot \nabla) a = b \cdot (\nabla a) + \nabla(b \cdot a)$, as well as the identity $2[b \cdot (\nabla a)] \cdot (\nabla a) - b \langle (\nabla a)^2 \rangle_0 =$

$-(\nabla a)b(\nabla a)$, we find the explicit forms

$$\underline{K}(b) = (\mathbf{F}_e \cdot \nabla)(a_e \cdot b) + (\mathbf{F}_m \cdot \nabla)(a_m \cdot b), \quad (235)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}[(\mathbf{F} \cdot \nabla)(a_e \cdot b) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)(a_m \cdot b)],$$

$$\overline{K}(b) = \langle b\mathbf{F}_e \dot{\nabla} \rangle_0 \dot{a}_e + \langle b\mathbf{F}_m \dot{\nabla} \rangle_0 \dot{a}_m, \quad (236)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \left[\langle b\mathbf{F} \dot{\nabla} \rangle_0 \dot{a}_e + \langle b\mathbf{G} \dot{\nabla} \rangle_0 \dot{a}_m \right].$$

Since both the symmetric and canonical energy-momentum tensors satisfy the continuity equations, the difference term $\underline{K}(b)$ must vanish under a divergence, i.e., it does not contribute to the energy-momentum transport. Using the vacuum Maxwell's equation (90), we can make this property apparent by writing (235) as a total derivative:

$$\underline{K}(b) = -\nabla[(b \cdot a_e)\mathbf{F}_e + (b \cdot a_m)\mathbf{F}_m], \quad (237)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}\nabla[(b \cdot a_e)\mathbf{F} + (b \cdot a_m)\mathbf{G}].$$

Historically, the canonical energy-momentum tensor $\underline{T}$ that is produced by Noether's theorem was considered problematic due to its non-symmetric and gauge-dependent form (as well as the enigmatic appearance of the spin in the angular momentum tensor, as we shall see in the next section). Then, in 1940, Belinfante and Rosenfeld [240, 241, 242] suggested a general symmetrization procedure by adding a “virtual” contribution $\underline{K}$ (i.e., a total divergence) to the canonical tensor, which resulted in the familiar symmetric tensor $\underline{T}_{\text{sym}}$. Usually, the symmetric Belinfante–Rosenfeld energy-momentum tensor is considered to be the physically meaningful tensor, because it is gauge-invariant and is naturally coupled to gravity [127]. However, recent studies of the *local* momentum and angular momentum densities of optical fields have shown that it is actually the *canonical* momentum density from $\underline{T}$ (in the Coulomb gauge) that determines the optical pressure on small dipole particles or atoms that is observed in experiments [52, 53, 54, 71, 72, 66, 59, 60, 61, 68, 69, 70, 74, 85, 75]. Furthermore, as we will see in the next section, the observable separation of the spin and orbital angular momenta of light [46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56] is also described by the *canonical* tensors rather than the symmetrized Belinfante–Rosenfeld tensors [68, 58]. Notably, this need for the canonical energy-momentum and corresponding angular momentum tensors has also been actively discussed in relation to the separation of the spin and orbital angular momenta of gluon fields in quantum chromodynamics (QCD) [88].

To obtain more familiar expressions for the canonical energy-momentum tensor, we expand Eqs. (231) and (232) in terms of a relative frame, using the spacetime splits $\mathbf{F}_{e,m} = \vec{E}_{e,m} + \vec{B}_{e,m}I$ (that become constrained to $\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I$, with $\mathbf{G} = \mathbf{F}I^{-1} = \vec{B} - \vec{E}I$), as well as the (transverse) Coulomb gauge $a_e = \vec{A}\gamma_0$ and $a_m = \vec{C}\gamma_0$ for the potentials²⁷:

$$\underline{T}(\gamma_0)\gamma_0 = \varepsilon + \vec{P}, \quad (238)$$

$$\begin{aligned} \underline{T}(\gamma_i)\gamma_0 &= -(\vec{\sigma}_i \cdot \dot{\nabla}) \left[\vec{E}_e \cdot \dot{\vec{A}} + \dot{\vec{A}} \times \vec{B}_e + \vec{B}_m \cdot \dot{\vec{C}} - \dot{\vec{C}} \times \vec{E}_m \right], \\ &\rightarrow -\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_i \cdot \dot{\nabla}) \left[\vec{E} \cdot \dot{\vec{A}} + \vec{B} \cdot \dot{\vec{C}} + \dot{\vec{A}} \times \vec{B} - \dot{\vec{C}} \times \vec{E} \right], \end{aligned}$$

²⁷Recall from Section 34.7.6 that this choice of gauge is equivalent to using the gauge-invariant transverse bivector potential $\mathbf{Z} = z_\perp \gamma_0$ in the frame γ_0 , and then fixing the gauge to make the gauge-dependent longitudinal spinor potential $\psi_z = z_\parallel \gamma_0$ vanish, since it is arbitrary and thus unmeasurable.

Canonical Energy-Momentum Tensor		
$\underline{T}(\gamma_0) = (\varepsilon + \vec{P})\gamma_0, \quad \bar{T}(\gamma_0) = (\varepsilon + \boxed{\vec{P}_o})\gamma_0, \quad \vec{P} = \vec{P}_o + \boxed{\vec{P}_s}$		
Traditional:	$\boxed{\underline{T}(b) = (b \cdot \dot{\nabla})\langle \dot{a}\mathbf{F} \rangle_1 - \frac{b}{2}\langle \mathbf{F}^2 \rangle_0}$	$\boxed{\bar{T}(b) = \dot{\nabla}\langle \dot{a}\mathbf{F}b \rangle_0 - \frac{b}{2}\langle \mathbf{F}^2 \rangle_0}$
$z = a_e \equiv a$	$\vec{P}_o = \dot{\nabla}(\vec{E} \cdot \dot{\vec{A}}), \quad \vec{P}_s = -(\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$	
$\mathbf{F} = \nabla a_e = \mathbf{F}_e$	$T^{\mu\nu} = \sum_{\alpha} F^{\alpha\mu} \partial^{\nu} a_{\alpha} - \frac{\eta^{\mu\nu}}{4} \sum_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha}$	
Dual-symmetric:	$\boxed{\underline{T}(b) = (b \cdot \dot{\nabla})\langle \dot{a}_e \mathbf{F}_e + \dot{a}_m \mathbf{F}_m \rangle_1 - \frac{b}{2} [\langle \mathbf{F}_e^2 \rangle_0 + \langle \mathbf{F}_m^2 \rangle_0]}$	$\boxed{\bar{T}(b) = \dot{\nabla}\langle (\dot{a}_e \mathbf{F}_e + \dot{a}_m \mathbf{F}_m)b \rangle_0 - \frac{b}{2} [\langle \mathbf{F}_e^2 \rangle_0 + \langle \mathbf{F}_m^2 \rangle_0]}$
$z = a_e + a_m I$	$\vec{P}_o = \dot{\nabla} [\vec{E}_e \cdot \dot{\vec{A}} + \vec{B}_m \cdot \dot{\vec{C}}] \quad \vec{P}_s = -[(\vec{E}_e \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{B}_m \cdot \vec{\nabla})\vec{C}]$	
$\mathbf{F} = \nabla z$ $= \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m I$	$T^{\mu\nu} = \sum_{\alpha} ((F_e)^{\alpha\mu} \partial^{\nu} (a_e)_{\alpha} + (F_m)^{\alpha\mu} \partial^{\nu} (a_m)_{\alpha})$ $- \frac{\eta^{\mu\nu}}{4} \sum_{\alpha\beta} [(F_e)_{\alpha\beta} (F_e)^{\beta\alpha} + (F_m)_{\alpha\beta} (F_m)^{\beta\alpha}]$	
Constrained:	$\boxed{\underline{T}(b) \rightarrow \frac{(b \cdot \dot{\nabla})}{2} \langle \dot{a}_e \mathbf{F} + \dot{a}_m \mathbf{G} \rangle_1}$	$\boxed{\bar{T}(b) \rightarrow \frac{\dot{\nabla}}{2} \langle (\dot{a}_e \mathbf{F} + \dot{a}_m \mathbf{G})b \rangle_0}$
$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_m I \rightarrow \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{2}}$	$\vec{P}_o \rightarrow \frac{1}{2} \dot{\nabla} [\vec{E} \cdot \dot{\vec{A}} + \vec{B} \cdot \dot{\vec{C}}] \quad \vec{P}_s \rightarrow -\frac{1}{2} [(\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{C}]$	
$\mathbf{F} = \mathbf{G} I$	$T^{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (F^{\alpha\mu} \partial^{\nu} (a_e)_{\alpha} + G^{\alpha\mu} \partial^{\nu} (a_m)_{\alpha})$	

Table 18: Canonical energy-momentum stress tensors, conserved by translation symmetry. Unlike the symmetric tensor in Table 15, the canonical tensor naturally separates the Poynting vector $\vec{P}$ into an *orbital* part $\vec{P}_o$ and a separate *spin* part $\vec{P}_s$ that does not contribute to energy-momentum transport (for all three Lagrangians) [64, 243, 244, 68]. The traditional Lagrangian produces field-asymmetric parts that are *electric*-biased [127, 68]. The dual-symmetric Lagrangian in Table 17 adds the complementary constituent field that is *magnetic*-biased. Constraining this Lagrangian makes both contributions describe the same total field [68].

$$\begin{aligned}
\overline{T}(\gamma_0)\gamma_0 &= \varepsilon + \vec{\nabla} \left[\vec{E}_e \cdot \vec{A} + \vec{B}_m \cdot \vec{C} \right], \\
&\rightarrow \varepsilon + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left[\vec{E} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{C} \right], \\
\overline{T}(\gamma_i)\gamma_0 &= -\vec{P} \cdot \vec{\sigma}_i - \vec{\nabla} \left[(\vec{A} \times \vec{B}_e - \vec{C} \times \vec{E}_m) \cdot \vec{\sigma}_i \right], \\
&\rightarrow -\vec{P} \cdot \vec{\sigma}_i - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left[(\vec{A} \times \vec{B} - \vec{C} \times \vec{E}) \cdot \vec{\sigma}_i \right].
\end{aligned} \tag{239}$$

Here $\varepsilon = \frac{1}{2}(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)$ and $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{B}$ are the energy density and Poynting vector derived in Section 34.7.7, and we have used the fact that the energy densities and Poynting vectors for the constituent fields, $\varepsilon_e, \varepsilon_m, \vec{P}_e, \vec{P}_m$, sum to the total field quantities according to (233): $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_m$, $\vec{P} = \vec{P}_e + \vec{P}_m$. The vector part of $\overline{T}(\gamma_0)\gamma_0$ represents the canonical (orbital) momentum density $\vec{P}_o$, i.e., $\overline{T}(\gamma_0)\gamma_0 = \varepsilon + \vec{P}_o$ (we describe this quantity below).

The associated Noether charges from (229) are the integrals of the energy and momentum densities over all space, i.e., the total energy and momentum of the field:

$$\int \varepsilon d^3x = \text{const}, \quad \int \vec{P} d^3x = \int \vec{P}_o d^3x = \text{const}. \tag{240}$$

These 4 conserved charges are derived from (229) and (231) by choosing the generator b to be the 4 orthogonal vector directions γ_μ . Note that these equations are valid only for sufficiently localized square-integrable fields. Importantly, the second equation shows that the difference between the canonical and Poynting momentum densities (i.e., the difference between the canonical and symmetric energy-momentum tensors) does not affect the integral momentum value.

We also expand the correction Belinfante tensor (235) and (236) in a similar way:

$$\underline{K}(\gamma_0)\gamma_0 = 0, \tag{241}$$

$$\begin{aligned}
\underline{K}(\gamma_i)\gamma_0 &= - \left[(\vec{E}_e \cdot \vec{\nabla})(\vec{A} \cdot \vec{\sigma}_i) + (\vec{B}_m \cdot \vec{\nabla})(\vec{C} \cdot \vec{\sigma}_i) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[\vec{E}_e(\vec{E}_e \cdot \vec{\sigma}_i) + \vec{B}_e(\vec{B}_e \cdot \vec{\sigma}_i) + \vec{E}_m(\vec{E}_m \cdot \vec{\sigma}_i) + \vec{B}_m(\vec{B}_m \cdot \vec{\sigma}_i) \right] \\
&\quad + \left[\vec{B}_e \times \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{\sigma}_i) - \vec{E}_m \times \vec{\nabla}(\vec{C} \cdot \vec{\sigma}_i) \right], \\
&\rightarrow -\frac{1}{2} \left[(\vec{E} \cdot \vec{\nabla})(\vec{A} \cdot \vec{\sigma}_i) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})(\vec{C} \cdot \vec{\sigma}_i) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[\vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{\sigma}_i) + \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{\sigma}_i) - \vec{B} \times \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{\sigma}_i) + \vec{E} \times \vec{\nabla}(\vec{C} \cdot \vec{\sigma}_i) \right],
\end{aligned}$$

$$\overline{K}(\gamma_0)\gamma_0 = - \left[(\vec{E}_e \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{B}_m \cdot \vec{\nabla})\vec{C} \right], \tag{242}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow -\frac{1}{2} \left[(\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{C} \right], \\
\overline{K}(\gamma_i)\gamma_0 &= \frac{1}{2} \left[(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{E}_e)\vec{E}_e + (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{B}_e)\vec{B}_e + (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{E}_m)\vec{E}_m + (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{B}_m)\vec{B}_m \right] \\
&\quad - \left[\vec{\sigma}_i \cdot (\vec{B}_e \times \vec{\nabla})\vec{A} - \vec{\sigma}_i \cdot (\vec{E}_m \times \vec{\nabla})\vec{C} \right], \\
&\rightarrow \frac{1}{2} \left[(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{B})\vec{B} \right] - \frac{1}{2} \left[\vec{\sigma}_i \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla})\vec{A} - \vec{\sigma}_i \cdot (\vec{E} \times \vec{\nabla})\vec{C} \right].
\end{aligned}$$

For all the above tensors, the terms involving only the “electric” parts (i.e., $\mathbf{F}_e, a_e, \vec{E}_e, \vec{B}_e$, and $\vec{A}$) are equivalent to the corresponding tensors for traditional electromagnetism [127, 68].

The dual-symmetric Lagrangian adds complementary “magnetic” terms to these traditional tensors. In turn, the constrained dual-symmetric Lagrangian makes both these halves correspond to the same field, producing dual-symmetrized canonical tensors that agree with those obtained very recently in [68].

Orbital and spin momentum densities

In the above expressions for the energy-momentum tensors, it is important to analyze the energy-momentum densities, which are given by the vector terms in $\underline{T}_{\text{sym}}(\gamma_0)\gamma_0$, $\underline{K}_{\text{sym}}(\gamma_0)\gamma_0$, and their adjoints. As we shall see in the next section, these densities will be responsible for the generation of the angular momentum of the field in a way similar to (198), but with a clear separation of the spin and orbital contributions.

First, observe in (241) that the correction to the timelike component vanishes: $\underline{K}(\gamma_0) = 0$, so the canonical tensor $\underline{T}(\gamma_0)$ yields precisely the same energy-momentum density as the symmetric tensor $\underline{T}_{\text{sym}}(\gamma_0)$. That is, both the correct energy density $\varepsilon = (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)/2$ and Poynting vector $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{B}$ are obtained in (238). These quantities satisfy a continuity equation, i.e., the Poynting theorem, or energy-transport equation [155].

In contrast, the adjoint correction in (242) is nonzero. Remarkably, the vector terms in $\overline{T}(\gamma_0)\gamma_0$ and $\overline{K}(\gamma_0)\gamma_0$ are the so-called *canonical (orbital) and spin momentum densities* [64, 65, 73, 68, 74]:

$$\begin{aligned}\vec{P}_o &= \overline{T}(\gamma_0)\gamma_0 - \varepsilon, \\ &= \dot{\vec{\nabla}}[\vec{E}_e \cdot \vec{A} + \vec{B}_m \cdot \vec{C}], \\ &\rightarrow \frac{1}{2}\dot{\vec{\nabla}}[\vec{E} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{C}],\end{aligned}\tag{243}$$

$$\begin{aligned}\vec{P}_s &= \overline{K}(\gamma_0)\gamma_0, \\ &= -[(\vec{E}_e \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{B}_m \cdot \vec{\nabla})\vec{C}], \\ &\rightarrow -\frac{1}{2}[(\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{C}].\end{aligned}\tag{244}$$

Together, the orbital and spin momentum densities form the Poynting vector in the corresponding sector of the symmetric tensor $\overline{T}_{\text{sym}}(\gamma_0)\gamma_0$: $\vec{P}_o + \vec{P}_s = \vec{P}$. Furthermore, the wedge products of these momentum densities generate, respectively, the orbital and spin angular momenta of the field [65, 68, 74, 243, 244, 127], as we shall see in the next section. It follows from Eq. (240) that the spin momentum density does not contribute to the integral momentum of the localized field:

$$\int \vec{P}_s d^3x = 0.\tag{245}$$

Importantly, although it is the total Poynting vector that is gauge-invariant and coupled to gravity [127], the spin and orbital degrees of freedom manifest themselves drastically differently in local interactions with matter. Optical and quantum measurements of the momentum density of light reveal the canonical (orbital) momentum (in the Coulomb gauge) (243), while the spin momentum (244) remains largely unobservable and virtual [68, 69, 74, 85]. The appearance of the canonical momentum density in optics can be explained by the fact that it has a clear physical interpretation. Namely, for monochromatic optical fields, it is given by the local expectation value of the quantum momentum operator $\hat{p} \propto -i\vec{\nabla}$, which makes it proportional to the local gradient of the phase, i.e., the *local wavevector* of the field [64, 69]. In contrast, the Poynting vector does not have such intuitively-clear wave interpretation.

Canonical angular momentum tensor

We are now in a position to consider rotational symmetries of spacetime, which produces the conservation of the relativistic angular momentum of the field. Suppose that we perform a general restricted Lorentz transformation (i.e., a spatial rotation, boost, or combination thereof). As we discussed in Section 34.7.3, the bivectors themselves are the generators of this group, so the appropriate transformation is $\underline{U}(a, \alpha) = U_\alpha a \tilde{U}_\alpha$, where $U_\alpha = \exp(\alpha \mathbf{R}/2)$ and $\mathbf{R}$ is a unit bivector corresponding to the plane of rotation. A symmetry of the Lagrangian follows if we first transform the fields $a' = \underline{U}(a, \alpha) = U_\alpha a \tilde{U}_\alpha$ then counter-transform the coordinates $x' = \overline{U}(x, \alpha) = \tilde{U}_\alpha x U_\alpha$, as discussed in (224).

From this symmetry transformation, the corresponding increments (225) have the form

$$\delta x(\mathbf{R}) = -\mathbf{R} \cdot x, \quad (246a)$$

$$\delta a(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot a + [(-\mathbf{R} \cdot x) \cdot \nabla]a. \quad (246b)$$

The change (226) of the Lagrangian thus produces the conserved Noether current

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{R}) &= \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \langle (\partial_{\mu} a_e) \delta a_e(\mathbf{R}) + (\partial_{\mu} a_m) \delta a_m(\mathbf{R}) \rangle_0 - \delta x(\mathbf{R}) \mathcal{L}, \\ &= (a_e \cdot \mathbf{R} + [(\mathbf{R} \cdot x) \cdot \nabla]a_e) \cdot \mathbf{F}_e + (a_m \cdot \mathbf{R} + [(\mathbf{R} \cdot x) \cdot \nabla]a_m) \cdot \mathbf{F}_m - (\mathbf{R} \cdot x) \cdot \nabla \mathcal{L}, \\ &\rightarrow \frac{1}{2} [(a_e \cdot \mathbf{R} + [(\mathbf{R} \cdot x) \cdot \nabla]a_e) \cdot \mathbf{F} + (a_m \cdot \mathbf{R} + [(\mathbf{R} \cdot x) \cdot \nabla]a_m) \cdot \mathbf{G}]. \end{aligned} \quad (247)$$

This conserved current is the *canonical angular momentum tensor*, which transforms bivectors (i.e., Lorentz transformation generators) into vectors (linear momenta), as we discussed in Section 34.7.7.

After comparing (247) to the form of $\underline{\mathbf{T}}$ in (231), we can make the simplification

$$\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{R}) = \underline{\mathbf{L}}(\mathbf{R}) + \underline{\mathbf{S}}(\mathbf{R}), \quad \underline{\mathbf{L}}(\mathbf{R}) = \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{R} \cdot x), \quad (248)$$

where

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{S}}(\mathbf{R}) &\equiv (a_e \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_e + (a_m \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_m, \\ &\rightarrow \frac{1}{2} [(a_e \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F} + (a_m \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{G}]. \end{aligned} \quad (249)$$

Here, $\underline{\mathbf{L}}(\mathbf{R})$ is the *orbital angular momentum* of the field (including the boost momentum), which is related to the canonical energy-momentum tensor in the same way as in Eq. (200) for the symmetric (Belinfante–Rosenfeld) tensors. The additional term $\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{R})$ that appears is the *spin angular momentum* tensor. Importantly, this spin tensor describes *intrinsic* (i.e., independent of the radius-vector x) angular momentum, and it *cannot* be obtained from the energy-momentum tensor.

The corresponding adjoint angular momentum tensors transform unit vectors b (linear momentum directions) into bivectors (associated angular momenta), so can be easier to interpret physically. The symmetric and canonical adjoint angular momentum tensors have the intuitive forms

$$\overline{\mathbf{M}}_{\text{sym}}(b) = x \wedge \overline{\mathbf{T}}_{\text{sym}}(b), \quad \overline{\mathbf{M}}(b) = x \wedge \overline{\mathbf{T}}(b) + \overline{\mathbf{S}}(b) \equiv \overline{\mathbf{L}}(b) + \overline{\mathbf{S}}(b), \quad (250)$$

where the adjoint spin angular momentum tensor is

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{S}}(b) &= a_e \wedge (b \cdot \mathbf{F}_e) + a_m \wedge (b \cdot \mathbf{F}_m), \\ &\rightarrow \frac{1}{2} [a_e \wedge (b \cdot \mathbf{F}) + a_m \wedge (b \cdot \mathbf{G})]. \end{aligned} \quad (251)$$

Canonical Angular Momentum Tensor	
$\boxed{\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{R}) = \underline{\mathbf{L}}(\mathbf{R}) + \underline{\mathbf{S}}(\mathbf{R})}$	$\boxed{\overline{\mathbf{M}}(b) = \overline{\mathbf{L}}(b) + \overline{\mathbf{S}}(b)}$
$\underline{\mathbf{L}}(\mathbf{R}) = \underline{\mathbf{T}}(\mathbf{R} \cdot x)$	$\overline{\mathbf{L}}(b) = x \wedge \overline{\mathbf{T}}(b)$
$\overline{\mathbf{S}}(\gamma_0) = \boxed{\vec{\mathbf{S}}} I^{-1}$	$\overline{\mathbf{L}}(\gamma_0) = [\varepsilon \vec{x} - (ct) \boxed{\vec{\mathbf{P}}_o}] + \vec{x} \times \boxed{\vec{\mathbf{P}}_o} I^{-1}$
$M^{\alpha\beta\gamma} = L^{\alpha\beta\gamma} + S^{\alpha\beta\gamma}$	$L^{\alpha\beta\gamma} = x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma}$
Traditional:	$\boxed{\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{R}) = (a \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}} \quad \boxed{\overline{\mathbf{S}}(b) = a \wedge (b \cdot \mathbf{F})}$
$z = a_e \equiv a$	$\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{A}}$
$\mathbf{F} = \nabla a_e = \mathbf{F}_e$	$S^{\alpha\beta\gamma} = F^{\gamma\alpha} a^\beta - F^{\gamma\beta} a^\alpha$
Dual-symmetric:	$\boxed{\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{R}) = (a_e \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_e + (a_m \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F}_m}$
	$\boxed{\overline{\mathbf{S}}(b) = a_e \wedge (b \cdot \mathbf{F}_e) + a_m \wedge (b \cdot \mathbf{F}_m)}$
$z = a_e + a_m I$	$\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{E}}_e \times \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}_m \times \vec{\mathbf{C}}$
$\mathbf{F} = \nabla z = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m I$	$S^{\alpha\beta\gamma} = F_e^{\gamma\alpha} a_e^\beta - F_e^{\gamma\beta} a_e^\alpha + F_m^{\gamma\alpha} a_m^\beta - F_m^{\gamma\beta} a_m^\alpha$
Constrained:	$\boxed{\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}[(a_e \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{F} + (a_m \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{G}]}$
	$\boxed{\overline{\mathbf{S}}(b) = \frac{1}{2}[a_e \wedge (b \cdot \mathbf{F}) + a_m \wedge (b \cdot \mathbf{G})]}$
$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_m \rightarrow \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{2}}$	$\vec{\mathbf{S}} \rightarrow \frac{1}{2}[\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{C}}]$
$\mathbf{F} = \mathbf{G} I$	$S^{\alpha\beta\gamma} \rightarrow \frac{1}{2} [F^{\gamma\alpha} a_e^\beta - F^{\gamma\beta} a_e^\alpha + G^{\gamma\alpha} a_m^\beta - G^{\gamma\beta} a_m^\alpha]$

Table 19: Canonical angular momentum tensors, conserved by Lorentz transformations. Unlike the symmetric tensor in Table 15, the canonical tensor naturally separates into an extrinsic *orbital* part $\underline{\mathbf{L}}$ that contains the wedge product of the orbital part $\vec{\mathbf{P}}_o$ of the Poynting vector $\vec{\mathbf{P}}$ in Table 18, as well as a separate *intrinsic spin* part $\underline{\mathbf{S}}$ containing the spin vector $\vec{\mathbf{S}}$. As with the energy-momentum tensor, the traditional Lagrangian produces electric-biased quantities, while the dual-symmetric Lagrangian adds complementary magnetic-biased terms. Constraining the Lagrangian symmetrizes the field contributions.

We detail these angular momentum tensors in Table 19 for reference.

The appearance of the spin angular momentum in (249) and (251) indicates the principal difference between the canonical and symmetrized pictures of the angular momentum in field theory. Namely, the Belinfante–Rosenfeld angular momentum tensor $\overline{M}_{\text{sym}}$ in (250) (and Section 34.7.7) is simply the wedge product of the symmetric energy-momentum tensor $\overline{T}_{\text{sym}}$ with a coordinate radius x , so does not contain any new information about local properties of the field. In contrast, the canonical angular momentum tensor $\overline{M}$ has both an extrinsic orbital part $\overline{L}$ and an independent intrinsic spin part $\overline{S}$, which signifies additional degrees of freedom for the field. Critically, the *spin and orbital degrees of freedom are separated only in the canonical picture*. As we mentioned before, these degrees of freedom have been historically considered to have no separate meaning in both orthodox quantum electrodynamics and classical electromagnetic field theory, but nonetheless they clearly correspond to separate observable effects in local light-matter interactions in optical experiments [48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56]. Furthermore, the integral values (Noether charges) of the spin and orbital angular momenta are *separately conserved* quantities [47], and the corresponding Noether currents $\overline{L}$ and $\overline{S}$ can also be brought to meaningful separately conserved forms [58]. Thus, akin to the local momentum densities, the optical angular momentum properties are described by the *canonical* Noether currents rather than the symmetrized Belinfante–Rosenfeld currents [68, 69, 74, 58] (see also [88] for a discussion of this same issue in QCD).

For simplicity, we only compute the timelike components of these tensors in a relative frame (in the Coulomb gauge):

$$\overline{M}_{\text{sym}}(\gamma_0) = [\varepsilon \vec{x} - (ct)\vec{P}] + \vec{x} \times \vec{P}I^{-1} \equiv \vec{N} + \vec{J}I^{-1}, \quad (252)$$

$$\overline{L}(\gamma_0) = [\varepsilon \vec{x} - (ct)\vec{P}_o] + \vec{x} \times \vec{P}_o I^{-1} \equiv \vec{N}_o + \vec{L}I^{-1}, \quad (253)$$

$$\begin{aligned} \overline{S}(\gamma_0) &= [\vec{E}_e \times \vec{A} + \vec{B}_m \times \vec{C}] I^{-1} \equiv \vec{S}I^{-1}, \\ &\rightarrow \frac{1}{2}[\vec{E} \times \vec{A} + \vec{B} \times \vec{C}]I^{-1}. \end{aligned} \quad (254)$$

For the orbital angular momentum $\overline{L}$, the associated orbital linear momentum $\vec{P}_o$ is given by (243), while the energy density ε and full Poynting vector $\vec{P}$ are the usual expressions. Recall from our discussion in Section 34.7.7 that each bivector term in the angular momentum that involves I generates spatial rotations, while the remaining bivectors generate boosts. One can then clearly see that the intrinsic spin angular momentum (254) is a purely spatial rotation (around the axis $\vec{S}$) that appears explicitly only in the canonical angular momentum tensor [68].

The Noether charges (integral conserved quantities) associated with the symmetric and canonical angular-momentum tensors are as follows:

$$\int \vec{J} d^3x = \int (\vec{L} + \vec{S}) d^3x = \text{const}, \quad \int \vec{N} d^3x = \int \vec{N}_o d^3x = \text{const}. \quad (255)$$

These 6 conserved charges represent the integral angular momentum and boost momentum of the field, and are derived from (229) and (248) by choosing the generator $\mathbf{R}$ to be the 6 orthogonal bivector directions $\gamma_{\mu\nu}$. Together with the 4 energy-momentum integrals (240) they form 10 Poincaré invariants of the field associated with the 10-parameter Poincaré group of spacetime symmetries [19, 31, 127, 68].

The seeming absence of the intrinsic spin contribution in the Belinfante–Rosenfeld angular momentum (252) causes the so-called “spin-of-a-plane-wave paradox” [127, 243, 244, 245, 246,

74]. Namely, the local density of the total angular momentum $\overline{M}_{\text{sym}}(\gamma_0)$ vanishes in a circularly polarized plane electromagnetic wave, while the spin density $\overline{S}(\gamma_0)$ is non-zero, as it should be. The explanation of this paradox lies in the fact that, in contrast to the extrinsic orbital angular momentum (253), the relation between the spin angular momentum density (254) and the spin part of the momentum density (244) is essentially *nonlocal*:

$$\int \vec{S} d^3x = \int \vec{x} \times \vec{P}_s d^3x, \quad (256)$$

so applies only for sufficiently localized fields, such as wave packets.

We can see that the concepts of the canonical (orbital) momentum and independent spin density is more physically meaningful and intuitive than the concept of the Poynting vector and its corresponding Belinfante–Rosenfeld angular momentum. Akin to the canonical momentum density, the spin angular momentum density has a clear physical meaning in the case of monochromatic optical fields. Namely, it is proportional to the ellipticity of the local polarization of the field and is directed along its normal axis. In other words, the rotation of the electric and magnetic field vectors in optical fields generates a well-defined spin angular momentum density.

Most importantly for our study, the separation of the spin and orbital degrees of freedom is closely related to the *dual symmetry* between the electric and magnetic contributions. The constrained forms of the spin momentum density in (254), as well as the orbital momentum density in (243), are dual-symmetric in the fields (as recently emphasized in [68]), while the traditional Lagrangian produces dual-asymmetric spin and orbital characteristics, containing only the electric part (e.g., $\mathbf{F}_e$ and a_e) [127, 68]. This asymmetry is closely related to the fact that the spin and orbital degrees of freedom of electromagnetic waves are coupled to dual-asymmetric matter via the *electric*-dipole coupling. Nonetheless, for vacuum fields, the dual-symmetric canonical Noether currents provide a more natural and self-consistent picture [68].

Helicity pseudocurrent

In addition to the Poincaré symmetries of spacetime (translations and rotations) considered above, the Lagrangian $\mathcal{L}_{\text{dual}}$ in (217) exhibits one more continuous symmetry, namely, the *dual symmetry*. Hence, we can determine the proper conserved quantity that should be associated with the Lagrangian invariance with respect to the dual “electric-magnetic” rotations $\psi = \exp(\theta I/2)$. Importantly, this symmetry does *not* exist in the traditional Lagrangian (214) since only the *electric* vector potential a_e is usually considered, which has no complex phase.

The proper field increment for the transformations $a' = \psi a \psi^*$ is

$$\delta a(I) = a I^{-1}. \quad (257)$$

Notably, this field increment is simply the Hodge-dual of a . Noether’s theorem (228) thus produces a conserved *helicity pseudovector current*

$$\begin{aligned} \underline{X}(I) &= \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \langle (\partial_{\mu} a_e) a_e I^{-1} + (\partial_{\mu} a_m) a_m I^{-1} \rangle_4, \\ &= \sum_{\mu} \gamma_{\mu} [(\partial_{\mu} a_e) \cdot a_e + (\partial_{\mu} a_m) \cdot a_m] I^{-1}, \\ &= a_e \wedge (\nabla a_e) + a_m \wedge (\nabla a_m), \\ &= a_e \wedge \mathbf{F}_e + a_m \wedge \mathbf{F}_m, \\ &= [a_e \cdot (\mathbf{F}_e I^{-1}) + a_m \wedge (\mathbf{F}_m I^{-1})] I, \\ &\rightarrow \frac{1}{2} [a_e \cdot \mathbf{G} + a_m \cdot \mathbf{F}] I. \end{aligned} \quad (258)$$

Interestingly, after factoring out I from the pseudovector, each constituent potential becomes coupled to the *Hodge-dual* of its associated field. If the additional constraint in the last line is imposed, then the vector potentials effectively cross-couple through the total field $\mathbf{F} = \mathbf{G}I$. We detail this pseudovector current in Table 20 for reference. It is also worth noting that the Weinberg–Witten theorem [38, 22, 26] that forbids conserved vector currents for massless spin-1 electromagnetic fields is not violated here, for two reasons: first, the conserved helicity pseudovector current here is not a grade-1 vector, but is rather a grade-3 pseudovector; second, as noted by Gaillard and Zumino [112], this conserved current is not gauge-invariant.

Writing this result in a relative frame using the Coulomb gauge yields

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{X}}(I) &= (\chi I + \vec{S}I^{-1})\gamma_0, & \chi &= \vec{A} \cdot \vec{B}_e - \vec{C} \cdot \vec{E}_m, \\ & & &\rightarrow \frac{1}{2}(\vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{C} \cdot \vec{E}).\end{aligned}\tag{259}$$

The pseudoscalar term is the *helicity density* χ of the electromagnetic field. When integrated over the spatial coordinates, it produces the conserved integral helicity, i.e., the corresponding Noether charge (229):

$$\int \chi d^3x = \text{const.}\tag{260}$$

This integral helicity is equal to the difference between the numbers of right-hand and left-hand circularly polarized photons [99, 98, 100, 103, 104, 78, 105].

The pseudovector term in the helicity pseudocurrent (259) is the helicity flux density $\vec{S}(\gamma_0) = \vec{S}I^{-1}$, which is precisely equal to the *spin density* (254) [105, 68, 106]. Intriguingly, the constrained form of the helicity χ matches the known expression for the conserved optical helicity in vacuum [99, 103, 104, 78, 105, 68, 106]. Indeed, the field-asymmetric electric part (or magnetic part) is not independently conserved since the corresponding symmetry in the Lagrangian does not exist unless the dual-symmetric form (217) is used. This fact gives strong indirect support for the requirement of the additional field $\mathbf{F}_m$ in the Lagrangian: without its complementary contribution, the conserved optical helicity χ is not obtainable as a Noether current from the Lagrangian²⁸.

Sources and symmetry-breaking

Thus far we have focused on what can be said by constructing the general dual-symmetric Lagrangian in (217) for a pure vacuum field that corresponds to an intrinsically complex vector potential z with the appropriate gauge freedom. We found that we could reproduce (and generalize) all the traditional results that stem from the Lagrangian (214) using this ansatz. In particular, we derived dual-symmetrized formulas for the various canonical Noether currents (i.e., the energy-momentum, angular-momentum, spin, and helicity currents). However, an isolated vacuum field is an incomplete picture, since such a field can only be measured through coupling to charged probes.

We now detail how the dual symmetry of the vacuum field is broken by the gauge mechanism that couples it to charge. We will find that a charge essentially introduces a preferred angle of rotation for the dual symmetry, and thus will couple only to a (conventional) electric part of the field that is governed by a pure electric vector potential a_e . The magnetic potential a_m

²⁸We note, however, that by carefully considering the symmetries of the integrated *action* it is still possible to derive the conserved integral helicity (260) using the traditional Lagrangian [99, 102, 204]. Curiously, this alternative method reproduces the *constrained* form of the dual-symmetric helicity density that we derive here, even though the form of the spin vector $\vec{S}$ for the traditional Lagrangian is not the same as for the constrained dual-symmetric Lagrangian [68].

Helicity Pseudocurrent	
$\underline{X}(I) = [\chi I + \vec{S}I^{-1}]\gamma_0$	
Traditional:	$z = a_e \equiv a, \quad \mathbf{F} = \nabla a_e = \mathbf{F}_e$
No dual symmetry of the Lagrangian.	
Dual-symmetric:	$z = a_e + a_m I, \quad \mathbf{F} = \nabla z = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m I$
$\boxed{\underline{X}(I) = [a_e \cdot (\mathbf{F}_e I^{-1}) + a_m \cdot (\mathbf{F}_m I^{-1})]I}$	
$\chi = \vec{A} \cdot \vec{B}_e - \vec{C} \cdot \vec{E}_m$	
Constrained:	$\mathbf{F}_e \rightarrow \mathbf{F}_m \rightarrow \mathbf{F}/\sqrt{2} = \mathbf{G}I/\sqrt{2}$
$\boxed{\underline{X}(I) \rightarrow \frac{1}{2}[a_e \cdot \mathbf{G} + a_m \cdot \mathbf{F}]I}$	
$\chi \rightarrow \frac{1}{2}(\vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{C} \cdot \vec{E})$	

Table 20: Canonical helicity pseudocurrent, conserved by the continuous *dual symmetry* of the vacuum Lagrangian. This symmetry does not exist for the traditional Lagrangian, for which the conserved *integral* helicity can only be obtained from the symmetry of the *action* [99, 102, 204]. The pseudoscalar part of the helicity pseudocurrent is the helicity density χ , while the relative pseudovector part is precisely the spin density $\vec{S}$ from Table 19. Curiously, only the *constrained* Lagrangian produces the field-symmetrized expression for the helicity density that is known in the literature [99, 102, 103, 104, 106, 105, 68, 214]; this Lagrangian also produces the corresponding dual-symmetric spin density $\vec{S}$, which differs from the dual-asymmetric spin produced by the traditional Lagrangian [68] (see Table 19).

can remain after breaking the symmetry, but it is uncoupled to the electric charge and is thus unmeasurable (except by its effect on gravity, in principle [196]). However, one can speculate that this extra potential is still required for the complete description of the vacuum field, and may be measurable by its coupling to other fields not considered in isolated electromagnetism (e.g., gravity).

Gauge mechanism

Physically, a pure vector potential a_e acts as a *connection field* for the proper parallel transport of a coupled charged field across spacetime, which provides spacetime with an effective *curvature* that corresponds to the electromagnetic field $\mathbf{F} = \nabla \wedge a_e$ [159, 160, 161, 162, 163, 165, 167, 168, 169, 170]. This curvature alters the geodesics for the charged field from its typically straight lines, which can be understood as the effect of the electromagnetic force on the charged field. The gauge freedom of a_e does not affect this induced curvature, so is not directly observable in terms of this physical force. However, the influence of a_e as a dynamical field can be indirectly observed in other topologically-induced field dynamics, such as the Aharonov–Bohm effect [164, 247, 166].

From this point of view, a gauge field like a_e can be understood as a dynamical mechanism for effectively *warping the spacetime metric* by using a simpler flat spacetime metric as an static embedding space. The curvature of the effective metric then depends on the charge configuration, in an entirely analogous manner to how the curvature of the actual spacetime metric depends on the configuration of the energy-momentum density in the gravitational theory of General Relativity [127, 189]. Indeed, it has been shown that all currently measured predictions of General Relativity may be reproduced by a simpler dynamical gauge field reformulation over a flat and static spacetime metric [175, 8, 9]; this gauge theory of gravity only appreciably differs in its (as-yet-unmeasured) predictions for spin-fields and torsion, and in its inability to handle global changes to the topology of spacetime (which may be unmeasurable or unphysical anyway).

To make the gauge origins of electromagnetism evident, we consider a complex scalar field $\phi(x)$ as the simplest prototype for a charged matter spinor field [168]. The complexity of the field is the origin of its charge; indeed, the two possible signs of the charge correspond to the two possible orientations of the pseudoscalar I of the spacetime 4-volume.

The field Lagrangian density for this complex field ϕ must be a proper scalar field so it must involve only quadratic terms like

$$\mathcal{L}(x) = \nabla\phi^* \cdot \nabla\phi - m^2\phi^*\phi. \quad (261)$$

According to the Euler-Lagrange equations $\nabla \cdot (\delta\mathcal{L}/\delta\nabla\phi^*) = \delta\mathcal{L}/\delta\phi^*$, this bare Lagrangian produces the relativistic Klein-Gordon equation for the scalar field: $(\nabla^2 + m^2)\phi = 0$, as well as its complex conjugate. This Lagrangian is invariant under the *global* phase transformation $\phi(x) \mapsto \phi(x) \exp(\theta I)$ (which is in fact identical to the dual-symmetry phase transformation for the electromagnetic field from Section 34.7.5).

The idea for a gauge field then arises from the observation that the mass term involving $\phi^*\phi = |\phi|^2$ is also invariant under a *local* phase rotation of the complex field $\phi \mapsto \exp[q_e\theta(x)I]\phi$, but the kinetic term that involves derivatives $\nabla\phi$ is not. Here $q_e = \pm|q_e|$ is an appropriate coupling strength (i.e., charge) that also indicates the orientation for the pseudoscalar I . Performing the phase rotation with the derivative yields $\nabla\phi \mapsto \exp(q_e\theta I)(\nabla\phi + q_e[\nabla\theta]\phi I)$. The extra term involving the gradient of the local phase spoils the invariance of the Lagrangian.

To fix this problem, the phase gradient can be absorbed into the definition of an auxiliary vector field a_e that must be the same type of blade as the phase gradient $\nabla\theta$ (i.e., a pure vector

field). Specifically, we can modify the derivative in the Lagrangian to a *covariant derivative* that includes this field

$$D \equiv \nabla - q_e a_e I. \quad (262)$$

The extra term from the phase rotation of ϕ can then be canceled by a corresponding modification of the vector field

$$a_e \mapsto a_e + \nabla\theta. \quad (263)$$

Since this shift of the vector field must not change anything fundamental, the field a_e must be defined only up to the addition of an arbitrary gradient term, which is the origin of the gauge freedom of a_e . After the introduction of this gauge field, the phase rotation commutes with the covariant derivative

$$D\phi \mapsto (D - q_e[\nabla\theta]I)(\exp[q_e\theta I]\phi) = \exp(q_e\theta I)D\phi. \quad (264)$$

We then rewrite the Lagrangian (261) in a properly invariant form by replacing all bare derivatives with covariant derivatives

$$\mathcal{L}(x) = D\phi^* \cdot D\phi - m^2\phi^*\phi \quad (265)$$

$$= \nabla\phi^* \cdot \nabla\phi + q_e w \cdot a_e I + (|q_e a_e|^2 - m^2)|\phi|^2,$$

$$w \equiv (\nabla\phi^*)\phi - (\nabla\phi)\phi^* = 2[\phi_1(\nabla\phi_2) - \phi_2(\nabla\phi_1)]. \quad (266)$$

Note that the addition of the gauge field results in a linear coupling between a_e and the proper 4-current $q_e w$, which is the charge q_e times the proper 4-velocity w of the complex field $\phi = \phi_1 + \phi_2 I$. The gauge field also renormalizes the mass term; however, this term is an artifact of the quadratic kinetic term for the scalar field. Spinor fields with linear kinetic terms (such as the Dirac electron field) do not acquire such a term.

The linear coupling in (265) implies that a_e must *itself* be a dynamical field with its own kinetic term. However, the form of this kinetic term is initially unspecified. Adding the simplest quadratic contraction of ∇a_e as a kinetic term produces the gauge-invariant *scalar electrodynamics* Lagrangian

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= D\phi^* \cdot D\phi + \frac{1}{2}\langle(\nabla a_e)^2\rangle_0 - m^2\phi^*\phi \\ &= \nabla\phi^* \cdot \nabla\phi + \frac{1}{2}\langle(\nabla a_e)^2\rangle_0 + q_e w \cdot a_e I + (|q_e a_e|^2 - m^2)|\phi|^2. \end{aligned} \quad (267)$$

If we define the bivector field $\mathbf{F}_e = \nabla a_e = \nabla \wedge a_e$ as before, then we find that the postulated kinetic term for a_e in (267) is precisely the traditional Lagrangian (214).

Applying the Euler-Lagrange equation $\nabla \cdot (\delta\mathcal{L}/\delta\nabla a_e) = \delta\mathcal{L}/\delta a_e$ to the gauge-invariant Lagrangian (267) produces Maxwell's equation (156) as the equation of motion for the dynamical gauge field a_e

$$\nabla^2 a_e = \nabla \mathbf{F}_e = j_e, \quad (268)$$

where the pure vector current (for scalar electrodynamics) has the explicit form

$$j_e = q_e w + j_a, \quad j_a = [q_e |\phi|^2][q_e a_e]. \quad (269)$$

The charge-current of the field $q_e w$ is modified in this case by an extra nonlinear term j_a that couples the charge density $q_e |\phi|^2$ back to the gauge field itself. Again, this term does not appear for fields with linear kinetic terms (like the Dirac electron).

Importantly, the extra term that is being canceled by the gauge approach is the (vector) phase gradient $\nabla\theta$ arising from the transformation $\exp(q_e\theta I)$. As such, only a pure vector potential a_e can be modified as in (263) to cancel this extra term, in accordance with the standard treatment of electromagnetism. An additional trivector potential $a_m I$ is thus not motivated by the usual gauge transformation $\exp(q_e\theta I)$.

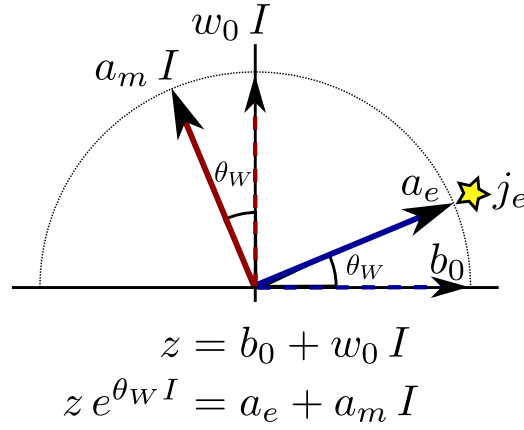


Figure 10: Breaking dual symmetry. The neutral complex vector potential $z = b_0 + w_0 I$ that includes the neutral b_0 and w_0 bosons in the electroweak theory is dual-symmetric in vacuum, meaning that it is invariant under any global phase rotation $z \mapsto z \exp(\theta I)$. The Brout-Englert-Higgs-Guralnik-Hagan-Kibble (BEHGHK, or Higgs) mechanism fixes a particular (Weinberg) angle θ_W that couples the field to a purely electric source, breaking this dual symmetry. The vector part $a_e = \langle z \exp(\theta_W I) \rangle_1$ of the doublet becomes the electric vector potential for the photon (γ) that couples to vector electric source j_e . The pseudovector part $a_m I = \langle z \exp(\theta_W I) \rangle_3$ acquires mass from the Higgs mechanism to become the neutral (Z_0) boson of the weak force, which is the analogy to the magnetic vector potential that appears in the dual-symmetric formalism.

Breaking dual symmetry

Notably, there is no overt restriction from the gauge mechanism itself that forbids adding a second kinetic term to the Lagrangian that corresponds to the second potential a_m (as in (217)) and then treating $z = a_e + a_m I$ as an intrinsically complex vector field. The gauge mechanism only motivates the necessary introduction of a_e , but it does not specify whether a_e is the *complete* gauge field. The gauge mechanism only implies that if additional symmetry for a_e exists in vacuum prior to coupling, then it must be *broken* by the coupling to the charged field.

In fact, we already know that the electromagnetic theory does in fact arise from precisely such a symmetry-breaking process. In the Glashow-Weinberg-Salam electroweak theory [248, 249, 250] the vector potential a_e is itself a hybridization of two massless vector boson fields w_0 and b_0 that each obey Lagrangians $\langle (\nabla w_0)^2 \rangle_0 / 2$ and $\langle (\nabla b_0)^2 \rangle_0 / 2$ that are identical in form to the traditional electromagnetic Lagrangian (214). After constructing a complex boson field for this electroweak doublet $z = b_0 + w_0 I$, it then behaves identically to the (unconstrained) dual-symmetric formalism explored in this report. In particular, the sum of Lagrangians for b_0 and w_0 can be rewritten as the single complex field Lagrangian $\langle (\nabla z)(\nabla z^*) \rangle_0 / 2$, which is precisely our dual-symmetric form (217) motivated by the intrinsic complex structure of spacetime. Furthermore, there is evidence that performing a gauge-procedure (as in the previous section) to convert the global dual symmetry of this doublet to a local symmetry in its own right recovers additional structure of the electroweak theory [196].

For the electroweak theory, the Brout-Englert-Higgs-Guralnik-Hagan-Kibble (BEHGHK, or Higgs) mechanism [251, 252, 253] is responsible for breaking the dual symmetry of this doublet, as schematically shown in Fig. 10. In effect, the gauge coupling to the scalar BEHGHK boson (Higgs) field fixes a specific dual symmetry (Weinberg) rotation angle θ_W that fixes $a_e = \langle z \exp(\theta_W I) \rangle_1$ and $a_m = \langle z \exp(\theta_W I) \rangle_3 I^{-1}$ as the appropriate matter-coupled vector fields.

The field a_e becomes the massless electromagnetic field vector potential for the photon (γ), while the field a_m acquires mass and corresponds to the neutral (Z_0) boson of the weak force. The details of this emergent coupling are much more involved than the simple electromagnetic model considered here, but the essential character of the broken dual symmetry is identical.

We can therefore understand the dual-symmetric formulation of electromagnetism as a simpler model of the neutral vacuum vector boson fields before the symmetry is broken by coupling to matter. In this dual-symmetric model, the gauge field a_m is not coupled to matter at all, but is still left over as a massless part of the total vacuum field. It is needed to preserve the symmetry of the vacuum, which *a priori* has no preferred reference axis for the dual-symmetric rotation $\exp(\theta I)$. The introduction of charged matter breaks this symmetry to force a particular reference axis for the dual symmetry, exactly as discussed in Section 34.7.7. It follows that the only quantities that can be measured (according to this model) from all the calculated conserved quantities will be the electric quantities (involving the potential a_e , its field $\mathbf{F}_e$, and the source j_e) just as with the standard formulation of electromagnetism. This does not, however, prevent the magnetic parts ($a_m, \mathbf{F}_m, j_m$) from being measurable in principle using other interactions that are not considered in this simple model, such as the additional isospin interaction that is acquired by the neutral (Z_0) boson that mediates the weak force.

The more remarkable note for the purposes of this report is that this dual-symmetric structure appears almost entirely from the assumption of spacetime. It is the geometry of spacetime itself that produced the intrinsically dual-symmetric bivector field $\mathbf{F}$ and associated complex vector potential z , as well as the especially simple forms of Maxwell's equation $\nabla \mathbf{F} = \nabla^2 z = j$ and the Lorentz force law $dp/d\tau = \langle \mathbf{F}j \rangle_1$. The use of spacetime algebra makes the geometric origin of all these quantities especially apparent.

34.7.9 Conclusion

It requires a much higher degree of imagination to understand the electromagnetic field than to understand invisible angels. ... I speak of the $\vec{E}$ and $\vec{B}$ fields and wave my arms and you may imagine that I can see them ... [but] I cannot really make a picture that is even nearly like the true waves.

Richard P. Feynman [254]

In this report we have presented a detailed introduction to the natural (Clifford) algebra of the Minkowski spacetime geometry, and have demonstrated its practicality and power as a tool for studying electromagnetism. Spacetime algebra not only preserves the existing electromagnetic formalisms, but also generalizes and unifies them into one comprehensive whole. This unification produces tremendous insight about the electromagnetic theory in a comparatively simple way. Below, we briefly review a few of the most important features that have emerged from the spacetime algebra approach, noting that we have also summarized a more complete list in the introductory Section 34.7.1, which we encourage the reader to review.

In particular, we emphasize that spacetime has an *intrinsic complex structure*, where the *ad hoc* scalar imaginary i is replaced with the physically meaningful unit 4-volume (pseudoscalar) I . Within this algebra, the electromagnetic field is an intrinsically complex bivector field $\mathbf{F} = \vec{E} + \vec{B}I$ on spacetime, which is a reference-frame-independent generalization of the Riemann-Silberstein complex field vector. Similarly, the vector potential for this field becomes complex, with associated complex bivector and scalar (Hertz) potentials. In all these representations, Maxwell's equations reduce to a single, and inexorable, equation. Similarly, the proper Lorentz force reduces to the simplest contraction of a current with the field, while the symmetric

energy-momentum tensor is the simplest quadratic function of the field (identical in form to the energy-momentum current of the relativistic Dirac electron) and produces the associated angular momentum tensor as a wedge product.

The global phase of each complex field representation is arbitrary in vacuum (just like the global phase of a quantum wavefunction), and is responsible for the continuous dual (electric-magnetic field-exchange) symmetry of the vacuum electromagnetic field. Adding a source breaks this dual symmetry of the vacuum; however, making the charge of the source similarly complex (with separate electric and magnetic parts) preserves a similar global phase symmetry of the total system. Choosing the source to be purely electric fixes this arbitrary global phase by convention, but the same physics will be described for any choice of global phase, which will produce equivalent descriptions that use both electric and magnetic charges. The dual symmetry of the complex field can be broken, however, by coupling to matter or other fields (as is the case in the electroweak theory).

In the Lagrangian treatment, the dual symmetry of the vacuum motivates the complex vector potential to be the primary dynamical field. Its constituent “electric” and “magnetic” parts effectively satisfy two separate traditional electromagnetic Lagrangians. As such, the traditionally conserved Noether currents (i.e., the canonical energy-momentum and angular-momentum tensors) are reproduced, but in an appropriately field-symmetrized form. The additional dual symmetry also immediately produces a conserved helicity current that cannot be easily derived in the traditional electromagnetic theory. Notably, the canonical Noether currents explicitly separate the orbital and spin parts of the local linear and angular momentum densities of the field, which are currently under active discussion in relation to both theoretical and experimental aspects of optics, QED, and QCD.

We also emphasize that the representation-free nature of spacetime algebra exposes deep structural relationships between mathematical topics that are seemingly disconnected in standard approaches. A detailed list of the remarkable and beneficial features of the spacetime algebra approach is provided in Section 34.7.1. Some of the most poignant examples of this unification include:

- The Hodge-star duality operation from differential forms is equivalent to multiplication by I^{-1} .
- The 4 Dirac matrices γ_μ from the relativistic electron theory are representations of unit 4-vectors in spacetime algebra (which require no such matrix representation).
- The 3 Pauli matrices $\vec{\sigma}_i = \gamma_i \gamma_0$ are representations of relative spatial directions, which are unit plane segments (bivectors) that drag the spatial coordinates γ_i along the proper-time direction γ_0 .
- Their duals $\vec{\sigma}_i I^{-1}$ are spacelike planes that are equivalent to the quaternions. (There is thus nothing intrinsically quantum mechanical about any of these objects.)
- The commutator brackets of these 6 bivectors are precisely the Lie algebra of the Lorentz group, and reduce to the Pauli spin commutation relations in a relative frame.
- The spin commutation relations are simply the Hodge-duals of the usual 3-vector cross product relations.
- Exponentiating the bivector for a spatial plane produces a rotation spinor, while exponentiating a timelike plane produces a Lorentz boost spinor.
- These spinors can Lorentz-transform any geometric object with a double-sided product, in precisely the same way as the unitary transformations familiar from quantum mechanics, or the quaternionic formulation of spatial rotations.

It is our hope that this review will prompt continued research into the applications of spacetime algebra for both electromagnetic theory and other relativistic field theories. We feel that the language of spacetime algebra is practical, mature, and provides tremendous physical insight that can be more difficult to obtain when using other mathematical formulations of spacetime. Moreover, we feel that it is a natural extension of the existing electromagnetic formalisms in use, which gives it the distinct advantage of preserving (and augmenting) prior intuition and experience gained from working with those formalisms.

35 Hypothetical Properties of Nature and Fields

35.1 Supersymmetry, Supergravity

(see the note on special field theories)
(discussion why it can be? or why can't)

35.2 Deeper Understanding of Time

now according to A. K. Guts “Elements of the Theory of Time”
(!!! Запрещено этим заниматься, пока нет уверенного владения основами на уровне уверенных семинаров!!! скорее всего перемещу это в отдельную запись, тут оставлю лишь указания.)

35.2.1 Overview of the Philosophies of Time

(по сути тут много от Гуца)

35.2.2 Absolute World of Events

1 Постулат абсолютного Мира событий и его следствия 27 1.1. Теория абсолютного пространства-времени 29 1.2. Абсолютный мир событий и сознание 34 1.3. Абсолютный мир событий и память 37 1.4. Speculatio 38

2

35.2.3 Time and Topology of the Human Body

2.1. Иллюзия времени 4 45 2.2. Время топологически нетривиального четырехмерного тела 47 2.2.1. «Провалы в памяти 48 2.2.2. Информационная изолированность органов 50 2.2.3. Интерактивное существование (бытие) 50 2.3. Психическое время 53 2.4. Априорность времени 54 2.5. Speculatio 55

35.2.4 Time Loops and a Time Machine in a Service Station

(там еще по ОТО будет это.)

Типы машин времени

3.1.1.

Машина времени Курта Гёделя

3.1.2.

Курт Гёдель

3.1.3.

Машина времени Кипа Торна

3.1.4. Машина времени как 4-мерная кротовая нора 3.2. Условия существования временных петель в пространстве-времени с евклидовой топологией 3.3. Пример временных петель в мире с евклидовой топологией 3.3.1. Метрика и тензор энергии-импульса 3.3.2. Первая интерпретация тензора энергии-импульса 3.3.3. Вторая интерпретация тензора энергии-импульса 3.3.4. Оценки Ω и Λ 3.3.5. Машина времени 3.4. Слабые поля, стягиваемые временные петли и сингулярность метрики 3.5. Процесс рождения кротовых нор 3.5.1. Изменение топологии физического пространства в замкнутой вселенной 3.6. Теория слоений и машина времени 3.6.1. Переход к 5-мерному Миру событий 3.6.2. Пружинное пространство-время

Машина времени в случае нетривиального класса Годбийона-Вея

Машина времени в случае тривиального класса Годбийона-Вея

3.7.

Поиск источника энергии для машины времени

3.8. Почему мы не выходим в Гиперпространство? 3.9. Можно ли выйти в Гиперпространство? 3.10. Машина времени в Сибири

II

35.2.5 Stochastic Properties of Time and Space

(????)

35.2.6 Uncertainty Relation for Time and Space

4.1. Законы времени

4.1.1. Принцип Байеса

4.1.2. Закон о неопределенности описания

4.1.3. Закон о взаимодействии эпох

4.1.4. Время рождает факты

4.1.5. Закон об асимметрии прогнозирования

4.2. Двойственная природа пространства-времени

4.3. Вероятностное пространство и пространство-время

4.4. Второй закон времени

4.4.1. Связь с теорией времени Н.А. Козырева

4.4.2. Что такое время-эпоха?

4.4.3. Соотношение неопределенности для пространства

4.5. Третий закон времени

4.6. Обобщенный закон времени и его следствия

4.6.1. Как вычисляется вероятность даты?

4.6.2. Почему древние вещи старше современных?

4.6.3. Можно ли видеть будущее?

4.6.4. Если мы «можем видеть факты будущего, то как отличить природные факты от социальных?»

4.7. Speculatio

35.2.7 Stochastic Evolution of the Topology and Geometry of the Event World

5.1. Случайные изменения топологии Мира событий

5.2. Топология $\mathcal{T}_V$ в фазовом пространстве $\mathcal{V}$

5.3. Конечная стадия эволюции топологии Вселенной

5.4. Среднее число 4-мерных кротовых нор во Вселенной

5.5. Спонтанное рождение машины времени во Вселенной

35.2.8 More About Gutz's Theory of Time

Взаимодействие прошлого параллельных вселенных

6.1. Гиперпространство Реба 6.2. Оценка флуктуации метрики 6.3. Взаимодействие прошлого параллельных вселенных 6.4. Где находятся параллельные вселенные?

7

Крупномасштабные флуктуации времени в пятимерном гиперпространстве

7.1. Крупномасштабные флуктуации времени в компактном пространстве и изменение сигнатуры 7.1.1. Базовое гиперпространство 7.1.2. Флуктуации 7.1.3. Изменение сигнатуры пространства-времени. 7.2. Флуктуации времени в некомпактном пространстве с гравитацией 7.2.1. Описание модели 7.2.2. Построение метрических флуктуаций 7.3. Двумерные флуктуации метрики 7.3.1. Модель четырехмерного и пятимерного пространства-времени 7.3.2. Двумерные флуктуации времени в V^5 7.3.3. Влияние двумерных флуктуаций времени в V^5 на метрику четырехмерного пространства-времени 7.4. Speculatio

8

Флуктуации и силовые эффекты фрактального времени

8.1. Пространство-время с дробной размерностью 8.2. Уравнения Эйнштейна в пространстве-времени с дробной размерностью 8.3. Дробномерное пространство-время в отсутствии флуктуаций 8.4. Построение метрических флуктуаций 8.5. Скачок приливных сил 8.6. Ход времени изменяет момент вращения системы 8.7. Плотность времени 8.8. Speculatio

III

Многовариантный Мир

9

Теория Мультиверса

9.1. Варианты Мира событий 9.3. Формальная теория мультиверса 9.3.1. Синтетическая дифференциальная геометрия Ловера-Кока 9.3.2. Формальное пространство-время 9.4. Гладкие топосные модели мультиверса

9.4.1. Объекты из топоса $\text{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ 9.4.2. Переходы между параллельными гиперпространствами 9.5. Существование времени и сознания в Мультиверсе 9.5.1. Время и мозг 9.5.2. Вариации физических констант 9.5.3. Машина времени 9.5.4. Сознание, мозг и направление времени 9.5.5. Переходы между средами $R_{\ell A}^4$. Хрональное поле. Расчет судеб 9.6. Наиболее вероятное гиперпространство 9.6.1. Вычисление физических констант по Бартини 9.7. Физические константы и многовариантность Вселенной 9.7.1. Получение уравнений мультиверса: уравнений Эйнштейна и уравнений времени 9.7.2. Об уравнении хронального поля 9.7.3. Значения физических констант в параллельных гиперпространствах 9.8. Квантовые свойства геометрии параллельных вселенных 9.8.1. Флуктуации геометрии как влияние параллельных вселенных 9.8.2. Уравнение Де Витта-У Улера для мультиверса 9.9. Виртуальные реальности как топосные модели формального мультиверса. 9.10. Теневые электроны 9.12. Параллельные вселенные Эверетта и мультиверс. 9.13. Speculatio

10

Мультиверс Минковского-Шварцильда

10.1. Синтетическая теория гравитации 10.2. Сферически-симметричное поле 10.2.1. Поле вакуума 10.2.2. Поле газового шара 10.3. Почтивакuumные уравнения Эйнштейна в моделях СДГ 10.3.2. Стадия $D = \ell C^\infty(\mathbb{R})/\{a^2\}$ 10.3.3. Стадия $D_p = \ell C^\infty(\mathbb{R})/\{a^{p+1}\}$. 10.3.4. Стадия $D_n(k) = \ell J_n^k = \ell C_0^\infty(\mathbb{R}^n)/m^{k+1}$ 10.3.5. Стадия $\ell C^\infty(\mathbb{R}^2)/\{a_1 - a_2\}$ 10.3.6. Стадия $\ell C^\infty(\mathbb{R})/\{\sin \pi a, \cos \pi a\}$ 10.3.8. Переходы от стадии к стадии 10.4. Физическая интерпретация 10.5. Вариации физических констант в мультиверсе Минковского

11

Космология мультиверса

11.1. Мультиверс Гёделя-Дойча 11.2. Мультиверс Фридмана-Дойча

Квантовое взаимодействие параллельных вселенных

12.1. Спинорные духи, теневые частицы и интерференция квантовых частиц 12.2. Условия зануления тензора энергии-импульса 12.3. Интерференция и взаимодействие реальной волны и спинорного духа 12.3.1. Флуктуации материи во вселенной 12.3.2. Интерференция между спинорным духом и реальной частицей..... 12.3.3. Интерференция на двух щелях и спинорные духи

12.3.4. Возможность экспериментальной проверки существования параллельных вселенных 12.4. Изменение тока переноса при взаимодействии электрона с теневым электроном 12.5. Speculatio A1 Приложение 1.

Псевдоевклидовы пространства в синтетической дифф. геометрии

(А.А. Звягяцев) A2 Приложение 2.

Существование моделей псевдоримановых пространств в Синтетической дифф. геометрии

(Е.Б. Гриккевич)

(??)

35.2.9 Physical Models Without Time (??)

(??)

35.2.10 Other about Time

(да многое еще можно было бы сказать.)

35.3 Chronogeometry According to A.K. Guts

Гуц А.К. Хроногеометрия: аксиоматическая теория относительности. - Омск: УниПак, 2008. - 339 с.

(!!! Запрещено этим заниматься, пока нет уверенного владения основами на уровне уверенных семинаров!!! скорее всего перемещу это в отдельную запись, тут оставлю лишь указания.)

35.3.1 Overview and Prospects of Chronogeometry (???)

(тут распишу суть этого, пока сомнения, что это принесет пользу, так что не занимаюсь этим.)

1

35.3.2 Structure of the World of Events

26 1.1. Временной порядок 27 1.1.1. Направление времени 29 1.2. Причинный порядок 29 1.2.1. Первичность временного порядка? 31 1.3. Мир Минковского 32 1.3.1. Преобразования Лоренца 33 1.3.2. Световые конусы 34 1.4. Теория абсолютного пространства-времени Минковского 37 1.4.1. Относительность пространства и времени 37 1.4.2. Относительность одновременности 38 1.4.3. Объединение пространства и времени 39 1.5. Реальность пространства-времени Минковского 41 1.5.1. Эксперименты Н.А. Козырева 42 1.5.2. Павел Флоренский о реальности пространства-времени 44 1.5.3. Что такое реальность, реальный мир? 45 1.6. Причинная структура лоренцевых многообразий 47 1.6.1. Локальный причинный порядок 49 1.6.2. Кинематики Пименова 50 1.7. Причинная аксиоматика пространства-времени 52 1.7.1. Программа А.Д. Александрова построения специальной теории относительности 52 1.7.2. Три задачи хроногеометрии по Пименову 53 1.7.3. Итоги решения трех задач хроногеометрии 55 1.7.4. Классы пространств однозначного решения задач хроногеометрии 57 1.8. Интерактивная аксиоматика пространства-времени 59 1.9. Проблема четырехмерности пространства-времени 61

2

35.3.3 Causal Theory of the World of Events

63 2.1. Понятие пространства-времени 64 2.2. Аксиомы A1,A2 66 2.3. Теорема о непрерывности 68 2.4. Теоремы о контингенции 71 2.5. Отображение конусов 75 2.6. Конусы с транзитивной группой 78 2.7. Аксиоматики А.Д. Александрова 80 2.8. Аксиоматика Г. Буземана 83 2.9. Лоренцевы и галилеевы кинематики Р.И. Пименова 86 2.10. Неточно измеренная причинность влечет группу Лоренца 87

3

35.3.4 Interactive Theory of the World of Events

89 3.1. Теорема Александрова-Овчинниковой 91 3.2. Отображение семейств эллиптических конусов 95 3.3. Конформное пространство 98 3.4. Простые системы аксиом 100 3.5. Теоремы о конечном числе источников света 101 3.6. Отображение

строго выпуклых конусов 103 3.7. Сколько инерциальных систем отсчёта? 106 3.8. Аксиоматика теории относительности 110 3.9. Аксиоматика Ю.Ф. Борисова 111 3.10. Размерность Мира событий по Борисову 112 3.11. Аксиоматика В.К. Ионина 114
4

35.3.5 Connected Relativistic Orders in A^n

118 4.1. Отображение семейства параллельных конусов 118 4.2. Отображения связно упорядоченных пространств 120 4.3. Сильно связные и квазисвязные предпорядки 121

35.3.6 Disconnected Relativistic Orders in A^n

125 5.1. Порядковые автоморфизмы несвязно упорядоченного аффинного пространства 126 5.1.1. Внешний конус 128 5.1.2. Линейчатый порядок 131 5.1.3. Доказательство теоремы А 137 5.2. Теоремы о несвязном порядке 138 5.3. Асимптотически линейчатый порядок 142
6

35.3.7 Homogeneous Orders in A^n

146 6.1. Определение однородных порядков и примеры 147 6.2. Несвязные гранично однородные порядки 148 6.3. Классификация несвязных гранично однородных порядков 151 6.4. Внешне однородные порядки 153 6.5. Внутренне однородные порядки 154 6.6. Нерелятивистские однородные порядки 154
7

35.3.8 Connected Chronogeometry

157 7.1. Профизические и философские предпосылки причинной аксиоматики 157 7.2. Связная аксиоматика Мира Минковского 160

35.3.9 Other on Chronogeometry According to Guts

8

Несвязная хроногеометрия

163 8.1. Отказ от микропричинности 163 8.2. Аксиоматика, основанная на предположении о макропричинности 165
9

Хроногеометрия пространств

172 9.1. Отображение произвольных конусов 172 9.2. Отображение конусов в пространстве Лобачевского 174 9.3. Отображения дискретных конусов в гильбертовом пространстве 175 9.4. Отображения псевдоевклидовых пространств 176 9.4.1. Теоремы об отображениях конусов Ю.Ф. Борисова и А.Н. Астракова 176 9.4.2. Теорема Дж. Лестер 178 9.5. Хроногеометрия лоренцевых многообразий 179 9.6. Аналог теоремы Александрова в классе частично упорядоченных полей 182 9.7. Вселенные с некоммутативной группой 184 9.7.1. Хроногеометрия вселенной Гёделя 184 9.7.2. Хроногеометрия стационарной вселенной де Ситтера 185 9.8. Причинная аксиоматизация общей теории относительности 186

10

Левоинвариантные конечные прядки в $\mathbb{IR}^n$

190 10.1.Определения 191 10.2.Существование левоинвариантных конических порядков 194 10.3.Единственность абелевой хроногеометрии 195 10.4.Порядковые автоморфизмы 196 10.5.Разрывные расширения группы $\text{Aut}(P)$ 198 10.6.Однородные порядки 199 10.7.Плотные порядки 201 10.8.Аксиоматизация трёхмерной псевдоевклидовой геометрии 203

11

Топосная хроногеометрия

206 11.1.Переход к теории топосов. Новые возможности 206 11.2.Элементарные топосы 209 11.2.1.Категории 209 11.2.2.Функторы. Категория функторов $\mathbf{E}^k$ 213 11.2.3.Топосы 214 11.2.4.Логика топоса 217 11.2.5.Топосы $\mathbf{Bn}(X)$, $\mathbf{Top}(X)$, $\mathbf{Set}^{\text{sp}}$ и $\mathbf{M}\text{-Set}$ 218 11.3.Причинная категорная теория пространства-времени 221 11.4.Теоретико-топосное решение проблемы четырёхмерности пространства-времени 225 11.5.Топос $\mathbf{Set}^{\text{sp}}$ как пространство-время 229

12

Хроногеометры

232 12.1.А.А. Робб 233 12.1.1.А. Робб и сэр Дж.Дж. Томпсон 235 12.1.2.Оптическая геометрия Робба 236 12.1.3.Причинная теория времени Робба 237 12.2.Г. Минковский 238 12.3.Н.А. Умов и В.А. Фок 241 12.4.А.Д. Александров 242 12.4.1.Ученики А.Д. Александрова 245 12.4.2.А.В. Левичев: воспоминания об А.Д. Александрове 246 12.5.Р.И. Пименов 248 12.5.1.Обзор научных достижений Р.И. Пименова 249 12.5.2.Научные труды Р.И. Пименова 251 12.5.3.Воспоминания об А.Д. Александрове 254 12.5.4.Политическая деятельность Р.И. Пименова 256 12.6.Ю.Ф. Борисов 258 12.7.М. Аксёнов 259 12.8.М. Паладьи 260 12.9.Э. Мах 261 12.10.Э.К. Зиман 262

13

Семинар по хроногеометрии

264 13.1.Первая статья по хроногеометрии 266 13.2.Новосибирский университет. 1965-1970 гг 268 13.3.Предыстория семинара. 1968 год 269 13.4.Предыстория семинара. 1971 год 272 13.5.1971-72 учебный год 273 13.6.1972-73 учебный год 275 13.7.1973-1974 учебный год 277 13.8.А.В. Кузьминых 279 13.9.После лета 1974 года 281 13.10.В.Я. Крейнович: после 1974 г. (воспоминания) 283 13.11.Осень 1985 года 290 13.12.После 1985 года 292 13.13.С.Н. Астраков: воспоминания 293 13.14.Зарубежные исследования по хроногеометрии 297

14

Философия хроногеометрии

298 14.1.События 299 14.2.Взаимодействие событий 303 14.3.Причинный порядок и временной порядок 307 14.4."Божественное" понимание Мира событий 308 14.5.Причинность 310

Заключение 311

Приложение.

Уравнения для физических полей и времени в мультиверее

(А.К. Гуц) 313 15.1.Уравнения Максвелла 314 15.2.Уравнение для гравитационного поля в пустом пространстве316 15.3.Уравнение для гравитационного поля 317

35.4 Hypothetical Experiments and inventions in scope of SR

35.4.1 Idea of a Photon Rocket

(идея неплохая, но такого быть не может, тем не менее, указать стоит. когда-то подумаю, абсолютно не актуальная пока тема)

36 Worldview Questions from the Point of View of Field Theory

Disclaimer: these parts should not be considered seriously, because I don't know any reason for them to have physical significance. I wrote them because they inspire for thinking about new ideas and motivate to learn field theory. It is a big question, if some idea from this part makes indeed sense or no?

36.1 Physics of Reality, Classical Theory According to A.K. Guts

Disclaimer: these parts should not be considered seriously, because I don't know any reason for them to have physical significance. I wrote them because they inspire for thinking about new ideas and motivate to learn field theory. It is a big question, if some idea from this part makes indeed sense or no?

1

36.1.1 Space, Time, and Space–Time

1.1. Пространство 1.1.1. Внешний Мир → сознание → пространство 1.1.2. Сознание → Внешний Мир → пространство 1.2. Время 1.2.1. Время как акт созерцания. Формализация созердания фактов 1.2.2. Время как акт созидания 1.2.3. Сознание и Вселенная 1.2.4. Исторические эпохи 1.2.5. Исторические последовательности 1.2.6. Раздвоение материи и сознания 1.2.7. Многовариантная история 1.3. Пространство-время

1.3.1. Мир событий Минковского 1.3.2. Абсолютность пространства-времени 1.3.3. Реальность пространства-времени 1.3.4. Двойственный характер пространства-времени 1.4. Гравитация 1.5. Антигравитация 1.6. Кривизна. 1.7. Speculatio

2

36.1.2 Classical Logic and Classical Analysis

2.1. Классическая логика 2.2. Классическое дифференциальное исчисление 2.2.1. Дифференциальное уравнение: что оно означает? 2.2.2. Допустимые траектории дифференциальных уравнений 2.3. Speculatio

3

36.1.3 Gravitational Field and Space-Time

3.1. Искривленное псевдориманово пространство- 3.2. Уравнения гравитационного поля 3.2.1. Уравнения Эйнштейна 3.2.2. Модификация уравнений Эйнштейна 3.2.3. Случай слабого поля 3.2.4. Теорема Картана 3.3. Принцип эквивалентности Эйнштейна 3.4. Сферически-симметричное решение Шварц- 3.5. Проблема энергии-импульса гравитационного 3.5.1. Отсутствие законов сохранения энергии и импульса материи в общей теории относительности 3.5.2. Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля 3.5.3. Неразрешимость проблемы энергии-импульса в ОТО. 3.6. Причинная структура пространства-времени 3.6.1. Классификация причинных структур пространства-времени ... 3.6.2. Лоренцева функция расстояния 3.6.3. Теорема Романова 3.7. Speculatio

4

36.1.4 Exotic Smooth Spacetimes

4.1. Гладкие структуры и диффеоморфизмы 4.1.1. Гладкая структура по Борисову 4.1.2. Касательные векторы и касательное расслоение 4.1.3. Погружения, вложения, подмногообразия 4.1.4. Гладкая структура по де Раму 4.1.5. Гладкая структура по Телеману 4.2. Э Экзотические $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ 4.2.1. Построение малых $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ 4.2.2. Построение больших $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ 4.2.3. Автодиффеоморфизмы и принцип общей ковариантности 4.2.4. Свойства экзотических $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ 4.2.5. Неоднородность экзотических $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ 4.2.6. Невосстановимость проплого 4.2.7. Причинные свойства $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ 4.2.8. Экзотическое $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ и не может быть слоем в 5-мерном Гиперпространстве? 4.3. Физическая наблюдаемость изменения гладкой структуры 4.3.1. Изменение тензора Эйнштейна при переходе к экзотической гладкой структуре 4.3.2. Экзотичность как источник спинорного поля

5

36.1.5 Jumps in the Dimension of Space and Time

5.1. Четырёхмерное пространство-время как базовая модель Реальности 5.2. Формула Гаусса-Бонне-Черна для псевдоримановых многообразий M^{2k} 5.3. Скачки размерности пространства-времени. Случай замкнутого многообразия 5.4. Вероятности переходов при смене размерности 5.5. Формула Черна-Гаусса-Бонне для псевдоримановых многообразий M^{2k} с краем 5.6. Скачки размерности пространства и времени. Общий случай 5.7. Расчет изменения размерности физического пространства 5.8. Speculatio

6

36.1.6 Gaps in Space and Wormholes

6.1. Физика образования 4-мерных кротовых нор 6.1.1. Разрыв пространства 6.1.2. Оценка скачка энергии, необходимого для разрыва пространства 6.1.3. Учет скачка внешней кривизны 3-пространства 6.2. Топологическое описание образования 4-мерной кротовой норы 6.2.1. Топология и её задание 6.2.2. Нарушения связности отрезка 6.2.3. Нарушение связности для сфер S^2 и S^3 . 6.3. Топологическое описание образования 3-мерной кротовой норы 6.3.1. Нарушение односвязности $\mathbb{R}^2$. 6.3.2. Нарушение односвязности $\mathbb{R}^3$ 6.4. Энергетическое условие в случае кротовых нор 6.4.1. Нарушение энергетического условия в случае 3-мерной кротовой норы в четырёхмерном пространстве-времени

6.4.2. Выоление энергетического условия в случае 3-мерной кротовой норы в пятимерном пространстве-времени

7

36.1.7 Spring-Loaded Space-Time

7.1. Слоения 7.1.1. Топологическое поведение слоев 7.1.2. Когомологии де Рама. 7.2. Характеристические классы слоений на многообразиях 7.2.1. Класс Годбийона-Вея 7.2.2. Обобщенный класс Годбийона-Вея 7.2.3. Характеристические классы слоений коразмерности $q = 2$ 7.3. Деформация слоений 7.4. Машина времени в слоении 7.4.1. Плотные слои 7.4.2. Пружинные слои 7.4.3. Возможность свёртывания пространствавремени в пружину в случае тривиального класса Годбийона-Вея 7.4.4. Оценка энергии, необходимой для свертывания пространства-времени в пружину 7.4.5. Ручки в пружинных слоях 7.5. Связь характеристических классов слоений с физическими полями 7.5.1. Случай 5-мерной теории ($q = 1$) гравиелектро-скалярных взаимодействий 7.5.2. Случай 6-мерной теории ($q = 2$) гравиелектро-слабых взаимодействий 7.5.3. Случай 7-мерной теории ($q = 3$) гравиелектро-сильных взаимодействий

8

36.1.8 Topology of Godel's Universe

8.1. Вселенная Гёделя 8.2. Группа симметрий Вселенной Гёделя 8.2.1. Цилиндрическая Вселенная Гёделя M_1^4 8.2.2. Торическая Вселенная Гёделя M_2^4 8.3. Временные петли во Вселенных Гёделя

9

36.1.9 Dynamics of Space Symmetries

9.1. G-бордантные многообразия 9.2. Эволюция симметрии пространства 9.2.1. Однородность пространства 9.2.2. Изотропность пространства 9.2.3. Аксиальная симметрия 9.2.4. Дискретные симметрии 9.2.5. Внутренние симметрии 9.3. Speculatio

10

36.1.10 Anti-Gravity

10.1. Космологическая антигравитация 10.1.1. Модель Вселенной Фридмана-Робертсона-Уолкера 10.1.2. Статичная Вселенная Эйнштейна 10.2. Антигравитация на малых расстояниях 10.2.1. Гильбертово отталкивание 10.2.2. Переход притяжения в отталкивание 10.3. Speculatio

11

36.1.11 Ghosts and Shadow Particles of Deutsch

11.1. Гравитационное излучение нейтринного потока 11.1.1. Учет поляризации нейтрино 11.1.2. Решения специального вида 11.2. Нейтринные духи 11.3. Спинорные духи 11.3.1. Спинорные духи в пространстве-времени 11.3.2. Спинорные духи в искривленном пространстве-времени

11.4. Спинорные духи как теневые частицы Дойча 12 Гравитационная волна как защитный экран 12.1. Отражение электромагнитных волн 12.1.1. Описание гравитационного волнового пакета 12.1.2. Отражение электромагнитных волн 12.2.

Отражение скалярных частиц 12.2.1. Плоская гравитационная волна Переса 12.2.2. Отражение скалярных частиц 12.2.3. Примеры экранов

13

36.1.12 Tetrad Theory of Gravity

13.1. Формулы тетрадного формализма 13.2. Решение проблемы гравитационной энергии импульса в ТТГ. 13.3. Гравитационно-тетрадный аналог эффекта Зеемана 13.3.1. Формула для гравитационного эффекта Зеемана 13.3.2. Свойства величины $\mathcal{Z}$ 13.3.3. Уравнение Паули 13.4. Уравнение скалярного поля в тетрадной теории гравитации 13.4.1. Вывод уравнения скалярного поля 13.4.2. Второй способ получения уравнения 13.4.3. Разница в описании скалярного поля в ОТО и ТТГ 13.4.4. Физический смысл добавочного члена $G^k \partial \varphi / \partial x^k$ 13.5. Внешнее скалярное поле черной дыры в тетрадной теории гравитации 13.6. Определение гравитационно-инерциального излучения 13.6.1. Гравитационно-инерциальное излучение 13.6.2. Слабое поле 14

36.1.13 The Uncertainty Ratio for the Radius of the Universe

14.1. Случайность даты события 14.2. Соотношение неопределенности для даты события: 14.3. Соотношение неопределенности для радиуса Вселенной

15

36.1.14 Some Ideas of Quantum Gravity

15.1. Геометродинамика Уилера 15.2. Суперпространство Уилера 15.3. Геометрия суперпространства 15.3.1. Суперметрика 15.3.2. Сигнатура суперметрики 15.3.3. Аффинная связность и уравнение геодезических 15.4. Уравнения Эйнштейна как геодезические в суперпространстве 15.4.1. Уравнения Эйнштейна как кинематически-инвариантные канонические уравнения 15.4.2. Уравнения Эйнштейна как геодезические 15.5. Уравнение Уилера-ДеВитта 15.5.1. Вывод WDV-уравнения 15.5.2. Граничное условие ДеВитта 15.5.3. Граничное условие Хоукинга-Хартли 15.5.4. Граничное условие туннелирования 15.6. Уравнение Эйнштейна-Гамильтона-Якоби 15.7. Классическое пространство-время, удовлетворяющее уравнениям Эйнштейна, как интерференция волн вида $\exp(iS/\hbar)$ 15.7.1. Условие интерференции волновых функций 15.7.2. Вывод уравнений Эйнштейна в гамильтоновой форме 15.7.3. Десять вакуумных уравнений поля 15.8. Минисуперпространство 15.8.1. Примеры минисуперпространств

15.8.2. Принцип конструктивной интерференции 15.9. Многомировая трактовка квантовой механики Эверетта 15.9.1. Измерение 15.9.2. Относительные состояния Эверетта 15.9.3. Результат наблюдения (измерения) квантовой системы по Эверетту

16

36.1.15 Some Ideas of Quantum Cosmology

16.1. Условия рождения классического пространства-времени в суперпространстве 16.2. Возникновение классической вселенной Фридмана из «ничего» 16.2.1. Классическая эволюция вселенной 16.2.2. Квантование, минисуперпространство и уравнение Уилера-ДеВитта 16.2.3. Граничные условия и волновая функция 16.2.4. Возникновение классической вселенной 16.2.5. Что означает термин «спонтанность» в описании рождения Вселенной 16.3. Появление классической вселенной Фридмана 16.4. Speculatio

36.1.16 Quantum Creation of the Universe by Consciousness

17.1. Сознание 17.2. Реальность: что это? 17.3. О реальности социального и ментального полей 17.3.2. О реальности социального поля 17.3.3. О реальности ментального поля 17.4. Квантовая механика 17.5. Макроскопические квантовые эффекты 17.5.1. Физические макроскопические квантовые эффекты 17.5.2. Нефизические макроскопические квантовые эффекты 17.6. Дальнодействующая квантовая связь 17.6.1. Квантовые корреляции 17.6.2. Вневременность квантовых корреляций 17.7. Реализация «умонастроений» 17.8. Осознание 17.9. Как разум заменяет вселенную-реальность 17.10. В какой форме создается Вселенная? 17.11. Паттерны: по какому образцу построена Вселенная 17.11.1. Структуры Кулакова как паттерны 17.11.2. Определение структур Кулакова 17.11.3. Структуры Кулакова и логика 17.12. Speculatio

36.2 Physics of Reality, Classical Theory According to A.K. Guts

Disclaimer: these parts should not be considered seriously, because I don't know any reason for them to have physical significance. I wrote them because they inspire for thinking about new ideas and motivate to learn field theory. It is a big question, if some idea from this part makes indeed sense or no?

36.2.1 Nonclassical Logic and Nonclassical Analysis

18.1. Неклассическая логика. 18.2. Интуиционистская логика 18.3. Метаязык физической теории 18.5. Гладкий инфинитозимальный анализ Кока 18.5.1. Аксиомы кольца R 18.5.2. Интуиционизм аксиомы Кока-Ловера 18.5.3. Инфинитозимальное дифференциальное исчисление 18.6. Гладкая псевдориманова геометрия в СДГ 18.6.1. Касательное пространство. 18.6.2. Псевдориманова метрика. 18.6.3. Линейная связность 18.6.4. Параллельный перенос 18.6.5. Геодезические 18.6.6. Риманова связность 18.6.7. Кривизна

18.6.8. Использование векторных полей 18.7. Интерпретации. Стадии “ 18.7.1. Топос Sets L^{op} как интерпретация гладкого анализа 18.7.2. Стадии (сцены, stages) 18.7.3. Вложение Ионеды 18.7.5. Объекты из топоса Sets L^{pp} 18.7.6. Переходы от стадии (сцены) к стадии (сцене) 18.8. Многовариантный Мир 18.9. Speculatio

36.2.2 Intuitionistic Theory of Gravity

19.1. Интуиционистские уравнения Эйнштейна 19.1.1. Случай, когда физические константы это действительные числа 19.1.2. Случай, когда физические константы не являются действительными числами 19.2. Принцип эквивалентности 19.3. Интуиционистское сферически-симметричное решение Шварцшильда-Котлера 19.3.1. Почтивакуумные уравнения Эйнштейна 19.3.2. Сферически-симметричное решение 19.3.3. Интерпретации интуиционистского решения Шварцшильда-Котлера 19.4. Изменение ситнатуры пространства-времени 19.5. Антигравитация 19.6. Speculatio Приложение А.

36.2.3 Elementary Toposes

A.1. Категории A.2. Функторы. Категория функторов $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}$ A.4. Логика топоса
A.5. Топосы $\mathbf{Bn}(X)$, $\mathbf{Top}(X)$, $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}}$ и $\mathbf{M} - \mathbf{Set}$ A.5.1. Топос $\mathbf{Bn}(X)$ A.5.2. Топос $\mathbf{Top}(X)$... A.5.3. Топос $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}}$. A.5.4. Топос $\mathbf{M} - \mathbf{Set}$ A.6. Гладкие топосы A.6.1. C^∞ -кольца
A.6.2. Гладкий топос ... A.6.3. Объекты топоса $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^\circ}$

37 Other about Field Theory

37.1 Selected Applications of Field Theory Except Electrodynamics

(I'll think about this later. I mean, what can we do, create with this knowledge? I don't know yet how to answer it well?)

37.2 History of the Creation of Field Theories

(если будет нужно - пропишу. вопросов интересных тут много, но вообще не до этого. пока лишь накидываю темы.)

37.2.1 History of Electrodynamics

Emergence of concept of field for people

(я совсем не уверен, как исторически она формировалась)

Об открытии уравнений Максвелла

(там какая-то история про виноградную лозу мб есть, потом напишу)

О теориях магнетизма, ушедшие в историю

(вкратце их упомяну, вообще, тут много всего разного было, подробнее - в записи про классическую ЭД)

37.2.2 History of Development of Particle Physics and Theories of Interactions of Fields

(там Ферми и другие многое изучали, опишу потом, как это было.)

О вкладе Ферми

(что-то развивал)

О взглядах Пуанкаре о сплошном электроны и существовании эфира

(Киселев говорил, что такое есть, потом почитаю, если захочу.)

37.2.3 History of Attempts to Combine Electrodynamics and Gravity

(в одной статье про это рассуждается, потом допишу)

О важности понимания связи электродинамики и геометрии пространства-времени

(тут укажу, какую роль это играет. в статье написано, пока не тот уровень, чтобы своими словами говорить.)

37.3 Unresolved Problems of Field Theory in 2023

(пока не знаю, узнаю - укажу.)

37.4 Possible Applications and Other Phenomena

37.4.1 Some Strange Applications of Field Theory

О теории поля для лесных пожаров

(Может, такое может быть, скорее всего нет, но какие-то статьи есть. Пока лучше не думать про это, маловероятно, что такое приложение может быть и скорее всего вообще удалю этот раздел.)

(????????????????????????/)

37.4.2 Some Other Hypothetical Fields

О поле тахионов (??)

(?? потом мб из Вики напишу, не актуально пока что.)

37.5 Some Incorrect Theories

(тоже укажу, иногда это нужно.)

37.5.1 Theory of Ether

Обсудим вкратце суть этой теории, подробнее она написана в дополнениях. вообще лень рыться в этом.

Суть (??)

(??хз)

О случаях применения (??)

(вроде там какая набор осцилляторов есть аналогия, но я хз про это)

37.6 Other Philosophical Issues of Field Theory (?)

(вообще многое можно было бы еще спросить, тут на это раздел.)

37.7 Probably Indescribable Phenomena

37.7.1 Field Theory for Dark Matter

(????? is there a model that can describe it??? I'll discuss it here, there is some progress about it. there will be more about it in the note on gravity, here, I'll just write general important ideas about how to even guess about this models)

37.7.2 Field Theory in Esotericism

(?????)

Общие закономерности теории поля в эзотерике

Лучше это не трогать

Потому что это странные занятия, которые мне не по уровню. Может, когда созрею, подумаю над этим, но скорее всего такое будет точно не скоро.

О конструкции поля в психологических расстановках

(если будут идеи - напишу, пока что мне вообще не до таких вопросах)

Скорее всего этого вообще нет (??)

Потому что никто не может сказать, что это вообще такое и других объяснений расстановок тоже можно придумать много.

О поле любви

(если будут идеи - напишу, пока что мне не до таких вопросах. хотя, вообще, интересно было бы заняться этим)

Part X

Appendix

A Overview and Introduction

Обсудим подробно общие соображения о теории поля.

A.1 Another motivation for field theory

A.1.1 Another motivation for field theory in general

(нужно будет - разделю по разделам потом, пока не думаю, что это нужно.)
(потом пропишу)

Именно в рамках теории поля мы можем понять на вузовском уровне время

Никакой другой раздел физики этим не занимается.
(тут примеры будут.)

Удивительные факты

Множество приложений в других разделах физики

Множество приложений к квантово-полевым явлениям

(потом раскрою подробнее)

A.1.2 Motivation for sections of field theory

Есть множество мотивации изучать разделы теории поля, которую изложим в этом разделе.

Мотивация изучать пространство-время

Обсудим причины, почему следует глубоко изучать свойства пространств-времени.
(с опытом пропишу)

Квантовая теория поля использует поля, выводящиеся из группы Пуанкаре

В основном для применений в КТП мы и учим этот раздел.

Полевые уравнения напрямую следуют из свойств пространства-времени

(потом верю и пропишу подробно, почему так)

Вид лагранжианов следует из свойств пространства-времени

(пока не выводил, но вроде это так, потом обосную)

Глубокое понимание спиноров следует из свойств пространства-времени (?)

(тут раскрою, зачем оно мне и как следует. пока слабо вижу, как, но все-таки это очень крутые темы, которые в КТП и квантмехе всплывут. потом пропишу.)

В квантовой теории поля, в задачах про распады и рассеяния всюду предполагается понимание формализма, а для этого нужно открыть в точности СТО и именно в рамках нее прорешать задачи

Конечно, СТО - это в некотором смысле обобщение механики, так что такими же рассуждениями можно заняться рападами и в механике, и вообще, счесть эти разделы самыми основными. Это если кто-то хочет научиться КТП.

А без рассеяний в КТП не так глубоко будет понятна теория, потому что очень очень многие задачи именно на эффекты, а эффекты - именно от столкновений.

Мотивация к классической электродинамике и её разделам

Обсудим вкратце, зачем изучать те или иные вопросы классической электродинамики. (пока слабо понимаю. подробнее про каждый раздел ЭД - в записи по ЭД)

В простейшем виде теория поля есть электродинамика

Поэтому его и изучают в первую очередь, и этого хватает даже на многое, нужное в жизни.

Электродинамика дает инструмент описания всех электромагнитных явлений

Поэтому круто ей заниматься.

Существует множество оптических явлений

(потом опишу их)

О применениях электростатики

(тут всё про неё. обсудим, зачем она нужна, в каких разделах всплывает? мб кстати и много где, пока что просто не знаю это)

Мотивация к теории гравитации

крутая теория

а вот в плане нормальной мотивации как-то не уверен.

A.2 The mindset of professional in field theory

Обсудим особенности мышления профессионала в теории поля.

A.2.1 General philosophy in field theory (!!?)

(я не уверен, что тут следует писать, но потом точно многое пойму про это, пока не рылся в этом.)

Основная идея теории поля (!?!?!?!?)

(очень важно ответить на этот вопрос.)

Пока так:

Основная идея в том, что можно перейти от конечномерных механических систем к бесконечномерным, и все будет работать.

(не знаю...)

Место теории поля в современной картине мир

О важности аксиоматического подхода

(созрею - пропишу, насколько он нужен. конечно, нужен, но прямо что он главный - тут не уверен.)

О том, что теория поля это гораздо больше, чем электродинамика

(есть такой взгляд, я пока хз, ЭД итак хватает)

О том, что есть поле

Уже на простейших вопросах можно заметить, что у людей крайне различные понимания этого.

Определение поля

Под полем мы понимаем объект, который заполняет пространство и эволюционирует согласно уравнению своей динамики.

Например, это может быть электрическое, магнитное поле, скалярное, дираковское или многие другие.

Траекторией поля называется совокупность $\Phi(\mathbf{r}, t), \partial\Phi(\mathbf{r}, t)$.

Идея о существовании поля

Взаимодействие частиц друг с другом можно описывать с помощью понятия силового поля. Идея в том, что одна частица создает вокруг себя поле, которое и действует на всякую другую частицу, находящуюся в нем, действует некоторая сила.

Поле считается физическим объектом, имеющим свою динамику, хотя в классической механике его можно считать просто некоторым способом описания взаимодействия частиц.

(как из голой идеи реализовать её в уравнения теории поля?)

поле - как объект в пространстве-времени удобнее мыслить, а не в 3d пространстве

так думает Володя лол

отождествление частиц и полей

под частицами часто понимается уже квантовое поле
так сказал Володя

теория поля это гораздо больше, чем электродинамика

(конкретно примеры эти кстаи тоже пропишу в разных местах записи!!)

(пока я слишком мало усвоил, чтобы это писать)

это важно.

она много где.

пропишу потом.

всё по сути, что Володя говорит, в этом огромная ценность.

теория поля дает общий формализм, который применяется в самых разных сферах.

стандартная модель.

твердое тело.

КТП.

(??)

о том, что пространство тоже поле и по сути они эквивалентны

вопрос)мб плохо сформулирован?): по сути пространство определяется метрикой, а метрика это тоже поле ведь.

так что поля и пространство эквивалентны друг другу?

насколько верно утверждение, что поле распространяется в пространстве?

О частицах с точки зрения теории поля

(это больше в КТП будет. обсудим, насколько частицы есть поля? с точки зрения теории поля в принципе это иногда и так. пока не готов ответить, отдельно тут подумать нужно. Большие вопросы)

Философский смысл теории поля

(если о нем задумаюсь, то здесь буду указывать его.)

О том, насколько теория поля математика

(есть мнение, что теория поля сполна математизирована. созрею - напишу, так ли это)

Я думаю, что математика тут сильно используется, но тем не менее, если думаем про физику, то она лишь инструмент.

О связи полей с пространством-временем (???)

(??? там философия в том, что они очень связаны, обсудим это подробнее тут.)

О принципе причинности (????)

(укажу его суть, в теории подробно он обсуждится.)

A.2.2 What Happens in Field Theory

Do we really need other fields except electromagnetic one?

(here, I'll write a professional discussion of it. there are many reasons why no, but there are many people that are assured that yes, but they don't have good arguments)

(here, there will be a list of examples of phenomena which are described in this note, which is impossible to describe only with EM field)

О большой разноплановости теории поля

(напишу потом)

Типа можно 2 месяц заниматься группой Пуанкаре, потом дадут на экзамене релятивистское столкновение, ты не решишь, и будто бы ты вообще ничего не знаешь.

Так что очень сложно оценивать уровень в теории поля. Очень много разделов и очень много совершенно разных вопросов.

Это скорее собирательный предмет.

О важности математики в теории поля

(тут к вопросу о том, что у Киселева много математики, нужна ли вообще она??)

обзор применений алгебры в теории поля

с опытом пропишу

Плюсы подхода математической физики

хз

Минусы подхода математической физики

замороженно и заумно.

Область применимости

говорят, где-то нужно, пока для меня это только заморочка.

Are differential forms really important in field theory?

(a discussion of it will be here. some people say yes, but currently, i think that most likely no. it is a big topic, I'll write it later)

О подходах к электродинамике

Электродинамика как завершенная теория, в которой хорошо набивать руку

(раскрою, насколько это так. вроде к ЛЛ2 именно такое и отношение.)

О способах решений уравнений Максвелла

(в 1ю часть добавлю лучше это мб.)

Решать уравнения Максвелл только через функцию Грина

(обсудим тут плюсы и минусы)

Использование электродинамики без функции Грина (?)

(это то, что я делаю, пока не понимаю, правильно это или нет. пойму - пропишу)

О глубокой связи ЭД и гравитации

(на неё во многих статьях идут указания, я так и не понял. тут место моего понимания этого вопроса. там статей много будет указано потом про это.)

О взгляде на частицы в теории поля

Мы рассматриваем многие явления на уровне частиц, что противоречит общей философии теории поля, однако мы всегда говорим, что вот КТП позаботится о том, чтобы описать все эти же явления, только если частицы мы имеем соответствующее поле. По факту мало кто может ответить на вопрос, как же делать те же задачи, но считая, что у нас только поля?

(потом мб что-то про это напишу. Это большая вообще мотивация переделать все разделы класс теории поля через КТП, дираковские поля, диаграммы. хорошая тренировка была бы, понять, где конкретно квантовые эффекты возникают???? А то пока еще вопросы большие, квантовые эффекты я совершенно пока не четко вижу.)

О любителях модифицированных теорий, суперсимметрий и тп (!?!?!)

(!! напишу. плюсы и минусы в таких людях есть)

Кто не выводит или не акцентирует экспериментальные следствия, тот точно не эксперт, на темах того супер фокусироваться не нужно, хотя некоторые такие люди могут мастерски преобразовывать поля

Потому что тупиковая теория, получается.
(распишу потом)

Об использование теории поля в обычной жизни (!)

Укажем, как предмет используется теория поля в обычной жизни.

(параграф мелкий, потому что нет, в обычной жизни это не нужно, и изначально предмет - теоретическое кручение теорий разных, круте методы, крутые теории, но про бытовое применение можно вообще забить. так тут и напишу, но еще и порассуждаю про это тут.)

A.2.3 How Not to Make Mistakes in Typical Field Theory Problems (!!!?)

Как не ошибаться в задачах на преобразование уравнений поля в каком-то модельном потенциале

Если происходит переход к конкретным сигма- или гамма-матрицам, то следует сперва написать, как они выглядят, чтобы не было путаниц, потом только использовать их!

Потому что иначе можно думать, что они как-то одним образом устроены, а автор книги/статьи их использует просто в другом представлении. В итоге будет просто впустую тратиться время, только потому что изначально путаница в представлениях.

Конкретно:

- может быть разный знак в метрике
 - может быть разное представление
- (допишу потом подробнее)

A.2.4 An Effective Approach to Field Theory Problems (!!)

(с опытом напишу)

Есть пара разделов, в которых пара основных формул

Вот так теорию поля и вижу. Все очень просто.

(укажу точнее)

(2 недели на конец 2023 по модиф теории поля работы будут достаточны для того, чтобы этот раздел я написал.)

Typical goals and activities

Check if theory is consistent: find that variation is 0. Modify theory meanwhile.

On dimensions (?!?!?!)

(потом напишу, пока не хочу про это думать, других важнее тем полно.)

Basic dimensional analysis.

We have

$$[\text{length}^{-1}] = [\text{time}^{-1}] = [\text{mass}] = 1$$

Starting from the action $[S] = 0$, we conclude

$$[\mathcal{L}] = 4, \quad [d^4x] = -4, \quad [\partial_\mu] = 1, \quad [\phi] = [A_\mu] = 1$$

However, spinor fields will have dimension 3/2. (??????)

Typical transformations

С частными и полными производными всегда аккуратно (!!!!!)

Иногда нужно дифференцировать как сложную функцию, а иногда и как простую. Тут только по смыслу следует догадываться, что же происходит?

(приведу пару коротко примеров, из космологии и т.п.)

(я на самом деле пока не готов написать полную картину, почему там один раз они как частные, потом как полные используются. потом напишу)

Estimate terms that will survive

Часто члены преобразования мы сразу не пишем, потому что они обнуляются. Если так не делать, то формулы получаются большие и запутаться гораздо легче.

(напишу потом подробнее)

Antisymmetry will kill many terms

Это очевидно, но это часто используется.

(напишу потом подробнее)

Forget about position of indexes, then restore, because we will save time.

Очень часто так мы и делаем, потому что иначе много мыслей о лишнем.

(напишу потом подробнее)

Typical tricks for spinors

Majorana flip

A.2.5 Ways to Earn Money by Knowing Field Theory (!!)

Обзор наиболее прикладных тем теории поля (??)

Обсудим наиболее важные темы теории поля для применений их в научной деятельности.

(пока я на стадии изучения)

A.2.6 Ways to Guess the Main Ideas

незаменимая часть нормального понимания предмета.

Осознание, что без пространства-времени не изучить объекты, которые в ней изменяются

уравнения должны откуда-то браться, а так как изначально у нас есть пространство-время, можно взять общий формализм их получения из него.

A.2.7 Which Topics There is a Real Sense To Study?

(important discussion)

О целесообразности изучать альтернативные теории поля (??)

(черт в них ногу сломит, пока не уверен, что это нужно)

Следует позаботиться, что начальные темы будут хорошо выучены

И на этот моменте альтернативные теории закрываются на много лет, потому что паралет так точно уйдет разобратся сполна в установившихся теориях.

О целесообразности изучать теории с вариациями физических констант (???)

см. Мировые постоянные и предельный переход Г.Гамов, Д.Иваненко, Л.Ландау
Там вообще жсть.

A.2.8 How To Study Field Theory Effectively?

По сути все просто берется и учится без всяких проблем. Просто шаг за шагом все и проходите, фокусируясь на нужном, расставляя приоритеты, решая задачи и повторяя. Особо важно глубоко понимать эти обычные принципы, что по сути и дело опыта. Но какие-то еще особенности тут укажу.

Необходимые знания и навыки для изучения теории поля

подготовка по дифференциальной геометрии

Подготовка по механике

потом пропишу связь

там в механике много отдельных глав должно быть проработано, чтобы теория поля отлично заходила.

потом пропишу это, а вообще, в механике многие и подглавы и параграфы отдельно заготовлю!

важная связка.

Дополнительные предметы для теории поля

Алгоритм изучения теории поля

берешь и делаешь, пока нечего особенно сказать.

Сперва минимальная теория для задач

Очень важно, чтобы теория была минимальная, ибо отлететь можно в теорию на супер долго, это не нужно.

Далее долго тренируемся на задачах, потом копаем в теорию

хотя это очевидно, я несколько лет тупил и думал иначе.

так что крайне важно это понимать

Особенности эффективного изучения разделов теории поля

Группа Пуанкаре и СТО лучше всего заходят, если заниматься ими раз в 2 недели после первого ознакомления

(потом раскрою эту мысль.)

Потому что надоедает это, если делать постоянно. Первый раз конечно следует посидеть над этими темами достаточно много, чтобы как можно лучше понять то, о чем

речь в принципе. Но потом двигать эти темы становится очень втягость и скучно. Вообще, это такие чисто теоретические вопросы.

Так что лучше перерывы делать. Не большие, типа как месяц или больше, но и не малые, типа 5 дней. Так больше всего мотивации и не выгоришь. Время нужно, чтобы понимать эту тему, без времени не верю, что возьмется она. Кроме этого, ничего в ней и нет сложного. И так или иначе, она не такая прикладная как другие, так что занимаясь периодически ей, ничего и не потеряешь.

Конечно, я имею в виду старательно работать, всерьез вдумываться и хорошо отрабатывать темы в каждом подходе, я ни в коем случае не говорю о раздолбстве. Между подходами примерно раз в 2 недели и раздолбством и безответственностью большая разница.

неверные понимания теории поля

акцентирую их, вообще эту главу писать и не обязательно.

(мб не так уж много будет их, ибо не столько много кто думал всерьез про нее)

Различные подходы к решению задач

(этот раздел будет создаваться по ходу решения задач, разные общие замечания обсудим)

о целесообразности решать через функцию Грина

(?? работать с ней или нет - не знаю всё еще)

О поиске решений в статьях

(вроде отличная идея, я за такой подход! но тут порассуждаю, насколько он верен.)

Мышление для изучения теории поля

(потом нормально пропишу)

О важности изучения свойств уравнений

(порассуждаю, стоит ли на это тратить время или пойти решать задачи?)

О важности математической подготовки

(порассуждаю, насколько нужно умф, другие темы. да, нужны, но не так, как я думал раньше. и отдельно уходить в них тоже далеко не обязательно. перечислю, что нужно, собственно, это у меня в дополнениях и написано.)

A.2.9 How Some People See Field Theory

(тут тоже многое разное будет, просто для меня это не так актуально, у меня свой подход итак развит. потом допишу когда-то.)

О подходах математической физики

(ну есть такие любители, ну и что? параграф потом большой будет, многое можно сказать. В целом, можно забыть, особого внимания не вижу смысла ему уделять, потому что как только с такими людьми перестаешь общаться, их приколы мышления становятся совершенно не нужными для понимания.)

A.3 Acknowledgements

Currently, no one except me has worked on the sections of this note (with the exception of sections taken from books).

A.4 Literature

A.4.1 Main Literature

Обсудим литературу, достаточную для хорошего владения теорией поля.

Минимальная основная литература

David Tong Statistical Field Theory

Много интересных тем раскрыто, думаю, идеальная для профессиональной теории поля. 144 страницы, наверное, приятно будет читать, выглядит как конспект интересных тем.

[1] Dr. Walter Greiner Relativistic Quantum Mechanics

Очень крутая книга со многими примерами, точно одна из основных для изучения моделей теорпола, без нее очень все туго будет.

David Tong General Relativity

290 страниц полезной вводной теории в ОТО, как всегда, отличный вариант для первого прохождения. Очень важно начать формировать минимальный уровень именно с этой книги, потому что много очень хорошо написано, это очень ускорит понимание.

Tong Gauge Theory

Большая скорее всего хорошая книга Тонга на 455 страниц. Больше по квантовой теории поля, многое и именно по обычной теории поля есть. Так или иначе, без нее (или аналогичной) не понятно, зачем мы вообще так думаем про конструкции обычных полей много.

Тонг Д. Электродинамика

потом пару дней посижу на ней, вроде ничего сверх нового нет, тем не менее, скорее всего тоже много интересных тем рассмотрено.

Основная литература для крепкого минимума

[2] Степаньянц Классическая теория поля

про построение полей, обычная теория, которую очень хорошо бы знать, прежде чем заниматься интересными моделями.

[3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля

Хорошая книга, раскрывающая многие вводные вопросы электродинамики и теории относительности. Однако, изложение не везде достаточное для её понимания и применения, а часто вообще ощущение, что в помойке роешься, думая про то, что там авторы хотели сказать и как получили некоторую формулу. Так что с учетом многих плюсов, на основную книгу она не тянет.

[4] Киселев В. В. Теория поля

Хорошие лекции, относительно необычные темы, много особенных конструкций. Всё из них присутствует в этой записи.

[4] Киселев В. В. Классическая электродинамика. Семинары по курсу "теория поля"

Много хороших задач решено, очень хорошее дополнение и тренировки по обычным темам. Прорешаю как только сделаю основы.

[5] Бухбиндер И. Л. Релятивистская симметрия

По идее неплохая методичка с теорией пространства-времени и следствий для неё.

А. В. Максимычев и др. Лабораторный практикум по общей физике: учеб. пособие. В трёх томах. Т. 2. Оптика

Много моделей разобрано, одна из основных книг для вузовского курса общей физики.

[6] Бухбиндер И. Л. Модели теории поля

удобное собрание всех подделей, читается очень быстро, прекрасно для тренировок. первые части скорее всего по ней и будут написаны. пропишу как начну теорпол создавать, пока нет времени просто, так-то это дело 2х дней.

Основные задачки и книги с многими задачами

Лайтман Пресс Прайс Тюкольски Сборник задач по ОТО и гравитации

Шикарный задачник, из которого многое прорешаю. Займусь теорией поля - добавлю десяток задач из него!

[7] Белоусов Задачник по теоретической физике

Типичный вузовский задачник, который обязательно прорешаю, когда сделаны структуры. Займусь теорией поля - добавлю десяток задач из него!

[8] Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике

Хороший задачник, но он больше про электродинамику, так что тут не столько много этих задач будет, как в электродинамике.

В.П. Корявов Методы решения задач в общем курсе физики Электричество и магнетизм

Крайне полезная книга для усвоения обычных вузовских методов, много задач разобраны. Одна из основных для достижения базового уровня.

Основная по профессиональной теории поля, калибровочным полям, типичным приложениям

Поляков Gauge fields and strings

Типичная книга, с которой входят в теоретическую физику. Чтобы ее понять нужно многое знать, так что она просто как указание результатов, по хорошему другие книги нужно читать.

Пескин Шредер Введение в квантовую теорию поля

Я имею в виду первые разделы и некоторые темы в других разделах, только их. В первой главе подробно разбираются скалярные и дираковские поля, что очень важно для классической теории поля. Также очень полезная книга для понимания того, что делать с теорией дальше, а именно как начинать считать квантовые взаимодействия?

[9] D. Z. Freedman, A. Van Proeyen Supergravity

Очень полезная книга, многому в ней можно научиться теоретику в теории поля, много моделей современной теорфизики обсуждены. Особенно полезна она будет тем, кто суперсимметрией занимается. Минусы в том, что некоторые обозначения в ней не очень близки мне, я бы иначе написал мысли из ней, также она слишком теоретическая, так что экспериментаторам она мало полезна была бы.

A.4.2 Professional Literature

Углубленная литература про пространство-время, СТО, группу Пуанкаре

<https://www.youtube.com/@dialectphilosophy/videos> Dialect YouTube channel

Очень крутой канал, который обсуждает относительность так подробно, как вообще ни в каком вузе в мире (готов поспорить, что это так). Разве что это слишком подробное обсуждение и без этих размышлений можно очень многое сделать в науке. Конечно, вторым Эйнштейном без таких размышлений скорее всего не стать, однако даже с ними - тем не менее крайне мало вероятности им стать, поэтому не большая потеря тем, кто не посмотрел. Но видео - одни из самых вообще лучших в популярной теории поля. А казалось бы, очевидные темы раскрывают.

[10] Justin Dressel and Konstantin Y. Bliokh and Franco Nori Spacetime algebra as a powerful tool for electromagnetism

Крутая статья про электродинамику, кватернионы. Насколько я понял, выписывается и обсуждается электродинамика в разных умных формах. Думаю, отличная задача для того, кто будет ими заниматься в форме теофиза. Другим же вряд ли это нужно знать, слишком много нужно математику для нее доработать.

Пенроуз Риндлер Спиноры и пространство время 1

открывал, крутая книга вроде. Не актуально, не до кривого пространства.

Пенроуз Риндлер Спиноры и пространство время 2

наверное, мощная. Не актуально, не до кривого пространства.

[11] Mansouri, Reza and Sexl, Roman

Обсуждаются тесты СТО. Кто профессионал - знать обязательно, кто хочет минимально подготовиться - не до этого, отдельно размышлять про это нужно много, не на неделю занятие.

R. Anderson, I. Vetharaniam, G.e. Stedman Conventionality Of Synchronisation, Gauge Dependence And Test Theories Of Relativity

Аж целых 88 страниц про синхронизацию и особенности СТО. Слишком подробное изложение, даже для моей записи. Может, когда-то почитаю, известная статья, разве что вряд ли кто-то из не профессионалов в СТО всерьез разобрался в ней.

[4] Киселев В. В. Квантовая механика, курс лекций 2022

Хоть и лекции по квантовой механике, очень много обсуждается группа Пуанкаре, что особо полезно для понимания теории поля. Компактная такая теория, очень качественная для первого знакомства.

[12] Lindner, H. H. On the Philosophical Inadequacy of Modern Physics and the Need for a Theory of Space <https://cosmosandhistory.org/index.php/journal/article/view/392>

Статья, по которой Дialect на ютубе делал видео и набрал 70к просмотров за 1 месяц. Можно посидеть, много подумать, интересные темы, но точно не нужно этим заниматься без минимального уровня и нарезивания задач! Автор - большая молодец, однако не уверен, что она профессионал.

Jacob A. Barandes Manifestly Covariant Lagrangians, Classical Particles with Spin, and the Origins of Gauge Invariance

Небольшая статья, которая помогает лучше понять группу Пуанкаре, некоторые вписки я из неё добавил.

Стивен Вайнберг Введение в квантовую теорию поля часть 1

Там много свойств группы Лоренца и группы Пуанкаре, многие у него это переписывают и я когда-то засяду, перепишу.

Jakob Schwichtenberg Physics from Symmetry springer

очень подробная книга про симметрии, спиноры, теории полей и всё такое. дополню потом ей многое, пока нет возможности её прорабатывать.

[13] Гуц А. К. Хроногеометрия. Аксиоматическая теория относительности

Добавление в раздел про СТО, рассуждения про время. вообще, непонятно, то ли это заморочка, которая особо ничего не дает, то ли тут раскрыта истинная строгая суть СТО, а также различные дополнения? пока не разобрался, но мб Гуц - гений, который многое о физике понимает, о чем я и не догадываюсь?

Семинар А. К. Гуца “Время: исторические эпохи и последовательности...”

Очень интересный семинар, где очень много хорошего рассказано, легко и интересно смотреть. Разве что не уверен, что это высокоприоритетные темы, тем не менее, для обретения профессионализма это очень хорошее занятие. После уровня теормина очень хорошая идея - понять эти темы..

Articles, which has a theory that is are now in fundamentals of classical field theory

(see Stepanyants)

1. O. Klein. Z.Phys. 37, (1926), 895.

B. Фок. Z.Phys. 38, (1926); 39, (1926), 226.

W. Gordon. Z.Phys. 40, (1926), 117.

2. E. Noether. Göttinger Nachr., Math-phys. Klasse, 235 (1918).

3. Y. Nambu. Phys.Rev.Lett. 4, (1960), 380;

Y. Nambu, G. Jona-Lasinio. Phys.Rev. 122, (1961), 345;

J. Goldstone. Nuovo Cimento, 19, (1961), 154;

J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg. Phys.Rev., 127, (1962). 965.

4. Модель (2.196) с потенциалом (2.189) впервые была рассмотрена для описания явления сверхпроводимости в работах:

В.Л. Гинзбург, Л.Д. Ландау. ЖЭТФ, 20, (1950), 1064;

В.Л. Гинзбург. ЖЭТФ, 32, (1957), 1442;

Л.П. Горьков. ЖЭТФ, 36, (1959), 1364

и часто называется моделью Гинзбурга-Ландау. В теории поля механизм Хиггса был предложен в работах:

F. Englert, R. Brout. Phys. Rev. Lett. 13, (1964), 321;

G. S. Guralnik, C. R. Hagen, T. W. B. Kibble. Phys. Rev. Lett. 13, (1964), 585;

P.W. Higgs. Phys.Rev.Lett. 12, (1964), 132; 13, (1964), 508; Phys.Rev. 145, (1966), 1156.

Некоторая углубленная литература по квантовой теории поля и калибровочным полям

Рубаков Классические калибровочные поля. Бозонные теории

300 страниц скорее всего не такой сложной теории, так что пройду её однажды, если займусь основами. Вроде не сложно, чисто на недельку работы, просто пока что не актуально абсолютно.

[14] Л. Райдер Квантовая теория поля

много тем классической теории поля тоже там, в планах многое добавить. Пара хороших моделей, схожих со Стандартной моделью описывается. мб и нормальная книга, просто мб это же и в других дается, тут не знаю...

Степаньянц Константин Викторович Лекции осенью 2017 [Link](#)

80 страниц лекций про точные решения, много крутой информации. Думаю, хорошие лекции, когда-то в дополнение к основам додумаю и эти модели.

Р.Раджараман «Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля».

Степаньянц рекомендует.

К.Хуанг «Кварки, лептоны и калибровочные поля».

Степаньянц рекомендует.

Michel Bellac Thermal field theory

Here, there is a discussion of thermal field theory, as is written in the title. Maybe 2 weeks will be enough to understand basics, how it works? QFT is needed a lot for it.

Углубленная литература по электродинамике

[10] Justin Dressel and Konstantin Y. Bliokh and Franco Nori Spacetime algebra as a powerful tool for electromagnetism

Крутая статья про электродинамику, кватернионы. Насколько я понял, выписывается и обсуждается электродинамика в разных умных формах. Думаю, отличная задача для того, кто будет ими заниматься в форме теофиза. Другим же вряд ли это нужно знать, слишком много нужно математику для нее доработать.

[15] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред

Много тем раскрыто, много моделей рассмотрено, есть чему научиться. Разве что некоторые темы не такие актуальные сейчас, так что курсы по электродинамике по другим книгам преподаются.

Боровик Е. С, Еременко В. В., Мильнер А. С. Лекции по магнетизму. — 3-е изд.

Большая книга по магнетизму со многими ответами, указаниями на эксперименты и моделями. Подход часто общефизовский, тем не менее, многое понять по ней можно.

[16] How Does the Electromagnetic Field Couple to Gravity, in Particular to Metric, Non-metricity, Torsion, and Curvature?

интересная статья про электродинамику и гравитацию, глубже можно понять обе.

Сивухин электричество и магнетизм

Много общефиза, истории, размышлений, которые не актуальны, но когда-то додумать в ней темы полезно было бы, а потом просто знать и жить, зная. На 2 недели додумывать все, что там, пусть все это примерно и известно.

Углубленная литература по оптике

Борн Вольф Оптика

Стану умным - обязательно месяц буду в ней развиваться, пока не тот уровень однозначно.

Углубленная литература по гравитации

Мизнер Торн Уиллер т. 1

Наверное, крутая книга, очень подробная, очень многое прописать нужно, прежде чем будет потребность в этих деталях.

Мизнер Торн Уиллер т. 2

Наверное, крутая книга, очень подробная, очень многое прописать нужно, прежде чем будет потребность в этих деталях.

Мизнер Торн Уиллер т. 3

Наверное, крутая книга, очень подробная, очень многое прописать нужно, прежде чем будет потребность в этих деталях.

Preface to Polyakov's book

For many years I have been keeping notes on different topics in physics-a kind of scientific diary. They contain occasional new results and mostly derivations of known things, done in a way that seemed nice to me. The notes were very helpful when I needed to recall some subject. It is surely best to consult with one's own self.

This book has arisen from these notes, or better to say, from the part of them devoted to field theory. I decided to publish it because it seems that there are some people who may find it useful.

In many cases I discuss things that have never been completely understood. I do this in the hope that the approach I suggest, although imperfect, will stimulate deeper penetration into the subject.

I do not give many references in this book (except for very recent results). The reason is that although to study the history of physics and to distribute credits is an interesting enterprise, I am not yet prepared for it.

The reader can find extra information and references in many review papers, e.g. J. Kogut and K.G. Wilson, Physics Reports, 12, 75-199 (1974); J. Kogut, Reviews of Modern Physics, 55, 775-836 (1983); A.A. Migdal, Physics Reports, 102, 199-290 (1983); Patashinsky, Pokrovsky, "Fluctuation Theory of Phase Transitions" Pergamon Press, Oxford (1979) and "Superstrings" (J. Schwarz ed.), World Scientific Pub (1985).

Also, below I list (in arbitrary order) some of my favorite papers that had a profound influence on this book. The choice is, by definition, subjective and incomplete:

1. A. Patashinsky and V. Pokrovsky, ZhETF 46, 994 (1964).
2. V. Gribov and A. Migdal, ZhETF 55, 1498 (1968).
3. V. Vaks and A. Larkin, ZhETF 49, 975 (1975).
4. V. Berezinsky, ZhETF 61, 1144 (1971).
5. K. Wilson, Phys. Rev. D 10, 2445 (1974).
6. M. Gell-Mann and F. Low, Phys. Rev. 111, 582 (1954).
7. L. Landau, A. Abrikosov, and I. Khalatnikov, Dan. 95, 497 (1954).
8. L. Faddeev and V. Popov, Phys. Lett. B 25, 29 (1967).

9. T. Skyrme, Proc. Roy. Soc. London Section A 260, 127 (1961).
10. J. Schwinger, Phys. Rev. 94, 1362 (1954).
11. M. Atiyah, V. Pathody, and I. Singer, Math. Proc. Camb. Phys. Soc. 77, 43 (1975).
12. R. Jackiw and K. Rebbi, Phys. Rev. D 14, 517 (1971).
13. J. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. D 11, 395 (1975).
14. G. t'Hooft, Phys. Rev. Lett. 37, 8 (1976).
15. G. t'Hooft, Nucl. Phys. B 72, 461 (1974).
16. L. Brink, P. DiVecchia, and P. Howe, Phys. Lett. B 65, 471 (1976).
17. S. Deser and B. Zumino, Phys. Lett. B 65, 369 (1976).
18. C. Marshall and P. Raymond, Nucl. Phys. B 85, 375 (1975).
19. M. Green and J. Schwartz, Nucl. Phys. B 255, 93 (1985).
20. A. Migdal, Nucl. Phys. B 180, 71 (1981).
21. D. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30, 1345 (1973).
22. H. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30, 1346 (1973).
23. A. Zamolodchikov, ZhETF Lett. 17, 28 (1986).
24. K. Wilson, Phys. Rev. 25, 2003 (1969).
25. D. Amati and M. Testa, Phys. Lett. B 48, 227 (1974).

Литература по фундаментальной физике и философии для теории поля

Мах Э. Механика

Тоже очень много скорее всего глубокий мыслей. Дойти до этой книги не просто, нужно много стабилизировать типичные темы. Иначе просто потратишь время, читая Маха. Поэтому пока не дошел, но потом когда-то дополню запись его соображениями, скорее всего многие очень глубокие.

Кант И. Критика чистого разума

Там есть раздел про пространство, который говорит гораздо больше, чем любые книги, которые просто формально вывели все формулы СТО и пару задач привели. Возможно, это очень важная книга для понимания пространства.

Литература про разные модели релятивистской теории поля

[17] Андреев А. В Восемьдесят лет парадоксу Клейна 2010

40 страниц интересной обзорной статьи, много полезного там есть.

[18] Christillin, Paolo and d'Emilio, Emilio Role of the slope of realistic potential barriers in preventing relativistic tunneling in the Klein zone

Очень хорошая статья с обзором и разными формулами, приведено решение Саутера.

[19] Huai-Yu Wang Solving Klein's paradox

Обзорная статья про парадокс Клейна, вроде в меру известная.

A.4.3 Extra, Pedagogical Literature

Дополнительная методическая литература

[20] Киселев В. В. Нерелятивистская механика частиц и полей: векторный анализ и симметрии

Раскрыто много типичных и важных тем, очень хороша для первого понимания основных концепций, однозначно одна из первых, которые нужно изучать. Однако, она скорее как введение в теорфиз, и не только о теорполе, так что многому в теорполе по ней не понять нормально.

Троицкий С. В. Лекции http://ppc.inr.ac.ru/troitsky_data/c8.pdf

(тут можно цифру менять - разные лекции читать.) Выглядит как очень хороший конспект о разных моделях, мб себе многое перепишу потом! Пока не особо смотрел это, не до этого пока было. Также есть много интересных задач на понимание, их скорее всего во многом добавлю!!!

[21] Лашкевич Общая теория относительности.

Хорошие лекции, но крайне непонятные, хороши в основном как конспект типичного подхода к ОТО, плюс некоторые специальные интересные вопросы обсуждаются, но так или иначе, сложно по ним что-то понять.

D.M. Gingrich Lecture notes phys 512 advanced quantum mechanics ii <https://sites.ualberta.ca/~gingrich/courses/phys512/phys512.html>

Сайт-книга по типичным темам теории поля, есть пара тем, которых в других книг не видел. Изложение может быть понятнее, чем в других местах.

В.В.Киселев Релятивистские уравнения квантовой механики лекционный поток–2023

Небольшая методичка, которая суммирует пару тем квантовой механики и теории поля, но особо многому по ней не научиться.

[22] Иванов М. Г. Электродинамика

Интересная небольшая книга о очень многих вещах в теории поля. Много возьму в дополнения.

[23] Болибрух А. А. Уравнения Максвелла и дифференциальные формы

Хорошая методичка на 20 страниц про дифф формы, разве что вряд ли она нужна, если не дошел до задач, где они используются.

Популярная литература по теории поля

[24] Л. Саскинд, А. Фридман Специальная теория относительности и Классическая теория поля теоретический минимум

Интересная простая небольшая популярная книга. Также в конце про тензор энергии-импульса хорошая теория. Потом просмотрю и добавлю её.

[25] Гиперпространство: Научная одиссея через параллельные миры, дыры во времени и десятое измерение

интересные наверное там темы раскрыты, есть в планах добавить это в часть про пространство-время!

Особо полезная математическая литература

Mikio Nakahara Geometry, topology and physics 2 edition

Большая книга про калибровочные поля, много типичных моделей этой теории. Много дополнительной математики можно по ней изучить и нужно понимать, чтобы понять физические утверждения. Большой отдельный мир теории поля-дифференциальной геометрии.

Другая математическая литература, статьи для теории поля

[26] Иванов М. Г. Некоторые геометрические методы в классической теории хорошая методичка, добавлю ее позже тоже. Пока не читал, тут по потребности почитаю.

А. Барут, Р. Рончка, Теория представлений групп и ее приложения, Том 1, Том 2, Москва, Мир, 1980.

Бухбиндер рекомендует, мб посмотрю потом, пока итак над математикой много работы еще мне остается.

И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца, Москва, ГИФМЛ, 1958.

Бухбиндер рекомендует, мб посмотрю потом, пока итак над математикой много работы еще мне остается.

Wu-Ki Tung, Group theory in physics, World Scientific, 1999.

Бухбиндер рекомендует, мб посмотрю потом, пока итак над математикой много работы еще мне остается.

Nicholas Wheeler Remarks concerning the explicit construction of SPIN MATRICES FOR ARBITRARY SPIN <https://www.reed.edu/physics/faculty/wheeler/documents/Quantum%20Mechanics/Miscellaneous%20Essays/Angular%20Momentum,%20Spin/D3.%20Spin%20Matrices.pdf>

Хорошая статья про матрицы произвольного спина, по ней в этом и разбирался.

John F Cornwell Group Theory in Physics Volume 1 и 2 мб

вроде крутая книга про спиноры. Слишком они еще не актуальны, чтобы их смотреть.

[27] Арнольд Особенности дифференцируемых отображений

Специфика про каустики. Может быть полезной, но пока что очень давно нужна была, а понять - дело большого времени.

Литература про разные теоретические поля, спинорные теории

[28] Редьков В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца

Большая теоретическая книга, где очень много обсуждаются спиноры, формализмы, уравнения Дирака. Очень много особых уравнений и спиноров. Есть ли от них польза, используются ли они? Пока не знаю.

A.4.4 Articles on Effects, Models, Special Sections

(тут по большей части статьи, но пока что не до них)

Статьи и книги про особые модели полей

M. Born and L. Infeld Foundations of the New Field Theory

Оригинальная статья про модель Борна-Инфельда, по сути во многом лучше, чем многие другие. там сигнатура странная и нумерация индексов несовременная, нужно это не забывать!!! потом многие разделы доработаю, делая их такими, что этой теорией можно будет заниматься!! сейчас я слаб для того, чтобы самому вывести эти все формулы, так что нужно подрасти до этого уровня!!!

[29] Rarita, William and Schwinger, Julian On a Theory of Particles with Half-Integral Spin

Первая статья про частицу со спином $3/2$ на 1 страницу, потом подумаю про нее больше, скорее всего там пара мыслей есть, над которыми можно подумать. Гуглится спокойно.

Dmitri P. Sorokin Conformal and duality-invariant non-linear electrodynamics of Bialynicki-Birula

открывал, ничего не понял, потом пройду еще раз.

Warren Siegel Fields

Более 800 страниц интересной теории по теории поля, минимум месяц доработок записи можно делать по этой книге (статье). Может, когда-то дополню свою теорию, но итак много дел есть и итак сама по себе работа идет, нет потребности и уровня дополнять запись ей. Выглядит вообще профессионально и очень необычно.

Bars Steinhard Turok Local conformal symmetry in physics and cosmology

Интересная статья Турока про симметрии, которую потом посмотрю. Хз, насколько она нужная и полезная.

Philip Schuster, Natalia Toro On the Theory of Continuous-Spin Particles: Wavefunctions and Soft-Factor Scattering Amplitudes, 2018

Статья про непрерывный спин, четко не увидел, чтобы было написано доказательство, что это возможно. Мб когда-то поизучаю и это пойму. Пока пусть статья и больше показывает деталей малой группы Вигнера, считаю ее какой-то далекой от реальности теорией для прикола, так что не вижу смысл на ней сидеть.

Статьи про эффекты СТО и методы группы Пуанкаре

[30] V. V. Varlamov Convergence of quantum electrodynamics on the Poincare group

Варламов имеет кучу статей, многие очень похожие, вот одна из них. Его можно почитать, но там особо нет объяснений, так что по итогу придется много думать и другие книги/статьи читать, что я пока не планировал.

[31] Loebbert, Florian The Weinberg-Witten theorem on massless particles: An Essay

Разжевана теорема Вайнберга-Виттена, по идее не должно быть проблем в понимании ее после прочтения. Когда-то разберу ее, пока не до этого.

Статьи о моделях и особых методах в электродинамике

[32] Andrij Rovenchak, Yuri Krynytskyi Radiation of the electromagnetic field beyond the dipole approximation

приятная подробная статья про вывод квадрупольного и анапольного излучения.

[33] Francisco Cabral, Francisco S. N. Lobo Electrodynamics and spacetime geometry: Astrophysical applications

статья про пару задач, читал бегло, потом разберусь в них лучше и впишу. Не до ЭД в искривленном пространстве уже, хотя и интересно было бы прорешать. Мб задачи простые, так что в каталоге их размещу.

[34] P. A. Horvthy “The biederharn approach to relativistic coulombtype problems”

Интересная статья про другой способ решать движение в кулоновском поле, посмотрю, интересная и не сложная. просто пока не до этого.

[35] Gravitational waves and electrodynamics: new perspectives

[36] Francisco Cabral, Francisco S. N. Lobo Electrodynamics and spacetime geometry I: Foundations

статья про уравнения максвелла в искривленном пространстве, будет нужно - пропишу, хорошо описана теория, но мало примеров. Нужно будет - по ней этот раздел пропишу.

Статьи про особые модели гравитации

(не такие важные перенесу в запись про гравитацию, тут итак хватает книг)

Francisco Cabral and Francisco S. N. Lobo Gravitational waves and electrodynamics: New perspectives

Разобраны несколько эффектов взаимодействия гравитационных волн с электромагнитным полем. Вроде ничего сложного, тем не мене, отдельно в них посидеть нужно, чтобы научиться ур Максвелла решать в простых случаях искривленного пространства. Может, потом разберу, в каталог добавлю, а также потренирую электродинамику на них.

Статьи про полевые эффекты в оптике

[37] Job Feldbrugge, Neil Turok Gravitational lensing of binary systems in wave optics

приведен обзор решение про линзирование бинарных систем. чтобы его понять, нужно нормально теорию поля знать, иначе это будет почти бесполезно и непонятно. тем не менее, в ОТО это изучал, а тут параграф скорее всего сделаю тоже.

Г.Б. Малыкин Эффект Саньяка. Корректные и некорректные объяснения УФН
Декабрь 2000 г. То.п 170, No 12

вроде норм теория про Саньяка, будет нужен - прочитаю здесь.

Takahiro T. Nakamura, Shuji Deguchi Wave Optics in Gravitational Lensing

17 страниц неплохого описания, того, что по сути мы делаем

По физике частиц и стандартной модели

[38] Е. Бюклинг, К. Каянти Кинематика элементарных частиц

Много кинематики и ее применений добавлено. очень полезная книга для применений теории поля к задачам о частицах.

Про основы космологии

Job Feldbrugge, Jean-Luc Lehnars, Neil Turok Lorentzian Quantum Cosmology

44 страницы обсуждения каких-то деталей и различные крутейшие иллюстрации, которые обязательно прочитаю и вставлю сюда!

A.5 A Review of Field Theory

Приведем обзор и основные идеи теории поля.

(пока тут каша, я еще созреваю)

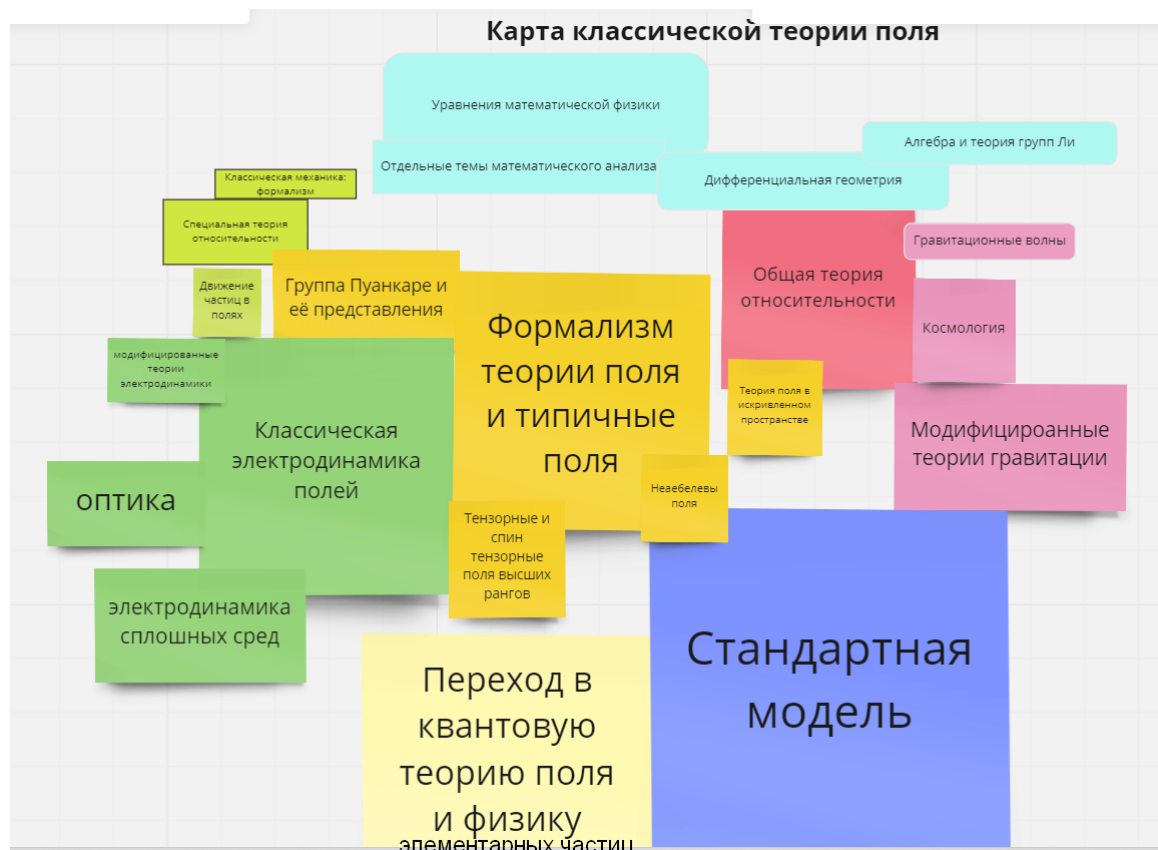
A.5.1 General Overview of Field Theory

Обсудим, что из себя представляет предмет наиболее кратко, выделяя самую суть.

(вся первая часть, но в одной подподглаве.)

Map of field theory

(update the picture and add discussion about it!!!)



(общий поверхностный обзор, 1 страница примерно будет)

Основные формулы всей теории поля

Лагранжиан классической электродинамики:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(E^2 - B^2)$$

Обзор классических полей

О полевых формализмах

(суть лагранжева, гамильтонова, других пропишу)

Обзор симметрий и их применений

(с опытом впишу, пока не занимался)

Особенности излучения и рассеяния волн различных полей

(продумаю это, какие особенности. пока рассеяние дираковских и гравитационных полей даже не смотрел, так что это не знаю, как сделать.)

Что такое нерелятивистские поля? (!??!)

(??? к сожалению, пока не вижу ответ на этот вопрос)

A.5.2 Review of Spacetime Theories

(сперва 1ю часть пишу, потом самую суть сюда напишу тоже.)

Основные формулы группы Пуанкаре и Лоренца

вкратце выводы всей теории

Основные формулы преобразований Лоренца и релятивистской механики

О типичном подходе переходов в другую систему преобразованиями Лоренца

тут просто важно не считать это очевидным, потому что деталей много и отработать её важно до сделанного уровня.

Очень легко подумать, что тут всё очевидно и упустить возможность хорошо собрать эту теорию.

потом будут проблемы, ибо эта теория обычных переходов крайне важная и фундаментальная.

так что она на первом месте, именно понимание её открывает многое.

хотя и можно пользоваться в жизни только группой Пуанкаре и даже не вспоминать её, тем не менее, чуть что - именно эта теория решит.

Обзор явлений СТО

(тут про все что есть приведу описание, уже почти понимаю, чуть потренируюсь - и напишу.)

О группе Пуанкаре

(потом напишу что-то, пока в 1й части суть её писать буду)

О схеме Вигнера (???)

(пока это написано в самой теории группы Пуанкаре, потом придумаю, как компактно написать суть её. нужно очень мало занять объема и сказать самые важные идеи эти!)

Обзор группы Пуанкаре (??)

A.5.3 Review of Classical Electrodynamics

Классическая электродинамика - одна из важнейших и наиболее больших тем теории поля, так что обсудим разные ее разделы.

Обзор свойств электромагнитного поля

Сравнение постоянного электрического и магнитного полей

В однородном электрическом поле функция Лагранжа системы с равным нулю полным зарядом и дипольным моментом содержит член

$$L_E = \mathbf{dE},$$

являющийся в этом случае потенциальной энергией системы зарядов, взятой с обратным знаком (?? про это позже пропишу!!).

В магнитном:

$$\overline{\mathbf{K}} = [\mathbf{m}\mathbf{H}]$$

В электрическом:

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{r}_a \cdot e_a \mathbf{E}_0] = [\mathbf{d}\mathbf{E}_0].$$

Обзор типичных явлений электродинамики

типичные классические задачи, которые решены, где применяются познания теории поля.

их же чаще всего в каждом курсе и рассказывают.

движение частицы в магнитном поле

Обзор оптики

Связь оптики и теории поля (!!!)

(очень важная связка, потом пропишу, пока не тот уровень у меня)

Обзор теории рассеяния

необходимые темы для теории рассеяния

вроде бы главу про излучение в квантмехе, в оптике и в теории поля.
но пока что не уверен.
потом подробно напишу.

о важности теории рассеяния в передовых исследованиях

типа это на самом деле супер важная вещь.
очень важный вопрос, может быть что-то или нет.

различные рассеяния и их особенности

хз какие?

Обзор теории излучения

Чаще всего они тормозного характера

Переходное, обычное тормозное разных порядков

A.5.4 A Review of Special Field Models

Обзор гравитационного поля

чем гравитационное поле отлично от самого пространства

связь с неинерциальными системами отчета

то ли она есть, то ли нет, непонятно.

суть квантования гравитационного поля

это как вообще, квант пространства что ли?

Обзор применений теории поля в описании фундаментальных взаимодействиях

A.5.5 Connections of Field Theory with Other Sciences

Обсудим, какие разделы физики открывает понимание классической теории поля.
(потом эти все связки отдельно проработаю)

Связь со стандартной моделью и физикой частиц (!!)

(интересно, но пока не актуально)

Связь с квантовой теорией поля

(типичная связка, которую проработать нужно)

Связь с теорией струн

Хороший уровень теории поля открывает двери в теорию струн, переход к которой обсудим подробно в этом разделе.

есть действия, которые очень похожи на действие теории струн

(? название его?)

Важность релятивистской механики для теории поля

(тут напишу про то, что там с ней все и начинается, так что она у меня хорошо прописана в записи по механике и чуть в дополнениях тут. там её сделаю нормальной - потом тут буду указывать важность.)

О связях с другими разделами физики и науками

A.6 Description of the Note

(мб сделаю это последней главой в предисловии, пока тут)

Описание разделов

описание записи в целом

В данной записи подробно разобрана теория пространства Минковского, преобразования Лоренца, (???)

Также ниже прописано множество приложений теории поля, например (????).
(пока ни одного)

первая часть

часть с математическими методами

По сути именно какая-то деталь этой части используется в решении любой задачи.

И по сути большая часть времени решения задач сводится к обсуждению применений этих методов, так что постоянно эта глава и используется и рассказывается.

Поэтому я и поставил ее в конце, чтобы в частях выше не отклоняться от математики.

приложения

какие вообще приложения я разбирал?

обозначения

Приведем достаточно большой список обозначений, который чуть что следует использовать, так как в других местах они пояснены лишь минимально.

Координаты пространства Минковского обозначим $x = (x^\mu)$.

Особенности записи

Минимально физических явлений описано

потому что мы занимаемся тут моделями. На конкретно явления - есть записи по оптике, по электродинамике, по другим предметам. Здесь этих явлений особенно мало, потому что акцент на самих моделях, а не на природе.

Обозначения

быстро упомянем их, прежде чем начать.

обозначения

Вспомним про определения, с которыми дальше постоянно придется работать.

Значок " $\bullet$ " обозначает все вообще индексы, которые были у данного объекта: $\{x_\bullet\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Принцип суммирования Эйнштейна: если повторяются два индекса, знак суммы опускают.

$g \equiv \det g_{\mu\nu}$ - определитель ковариантного метрического тензора.

Система обозначений 3- и 4-мерных величин по Киселеву

При изложении релятивистской квантовой механики в качестве логически ясного мостика в рассуждениях мы используем как величины 3-мерного евклидова пространства, так и величины 4-мерного пространства-времени Минковского, причем величины как векторные, так и тензорные. А в соответствии с координатным подходом, который мы описали чуть выше, это предполагает использование ковариантных и

контрвариантных компонент тензоров. Эти компоненты связаны друг с другом посредством метрики или обратной метрики: метрика опускает контрвариантный индекс и обращает его в ковариантный, а обратная метрика поднимает ковариантный индекс и обращает его в контрвариантный. Поэтому становится необходимым указывать, в каком векторном пространстве определена тензорная величина, так как для евклидовых величин необходимо использовать евклидову метрику для связи ковариантных и контрвариантных компонент, а для пространственновременных величин - метрику Минковского. Дело в том, что эти метрики имеют разные сигнатуры. Сигнатурой называют значения диагональных элементов метрики в декартовом базисе, т.е. в базисе, где ненулевыми являются только диагональные элементы метрики. Наше изложение строится именно в декартовых координатах, так что сигнатура евклидовой метрики равна $(+1, +1, +1)$

$$g_{\alpha\beta}^{\mathbb{E}} = \mathbb{1}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \{\overline{1}, 3\} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{g}^{\mathbb{E}} = \text{diag}(+1, +1, +1),$$

где мы использовали маркер $\mathbb{E}$ для указания на то, что величина относится к тензорам в евклидовом пространстве, и обозначили 3-компонентные индексы в этом пространстве буквами из начальной части греческого алфавита, а шляпку поставили над символом матрицы.

Сигнатура пространственно-временной метрики Минковского в данной книге принята равной $(+1, -1, -1, -1)$,

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - \delta_{\mu}^1 \delta_{\nu}^1 - \delta_{\mu}^2 \delta_{\nu}^2 - \delta_{\mu}^3 \delta_{\nu}^3 \quad \mu, \nu \in \{\overline{0}, 3\} \quad \Leftrightarrow \\ \hat{g} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$$

а 4-компонентные индексы обозначены буквами из второй части греческого алфавита. Ясно, что совместное использование привычных обозначений, например, для векторов-столбцов и ковекторов-строк в рамках формализма с метриками разных сигнатур является противоречивым 1. Чтобы избежать путаницы в использовании индексов для евклидовых величин и величин в пространстве-времени Минковского, мы будем придерживаться следующих правил в обозначениях: - 3-мерные векторы евклидова пространства обозначаются жирным шрифтом, например, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \dots$, а их скалярное произведение с евклидовой метрикой обозначаться точкой, например, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, - тензорные величины в 3-мерном евклидовом пространстве маркируются символом $\mathbb{E}$ (исключительно в виде нижнего маркера!) с 3-значными индексами, которые нумеруются греческими буквами из первой части алфавита исключительно в виде верхних индексов; например, полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты $\epsilon_Z^{\alpha\beta\gamma}$ с выбором знака $\epsilon_Z^{123} = 1$ на правой тройке декартова базиса, - для индексов в 3-мерном евклидовом пространстве в декартовом базисе нет отличия между ковариантными и контрвариантными компонентами, так что для евклидовых величин нет никакой надобности следить в формулах за балансом верхних и нижних индексов 11, поскольку в заданном декартовом базисе имеет место эквивалентность, например, таких выражений

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = g_{\alpha\beta}^{\mathbb{E}} a_{\mathbb{E}}^{\alpha} b_{\mathbb{E}}^{\beta} = a_{\mathbb{E}}^{\alpha} b_{\mathbb{E}}^{\alpha},$$

- для величин в пространстве-времени Минковского строго соблюдается баланс ковариантных и контрвариантных индексов, которые мы обозначаем буквами из второй части греческого алфавита, если они 4-компонентные, а также при надобности выделяем временные компоненты с индексом, равным нулю, а пространственные компоненты греческими буквами из начальной части алфавита, как и для евклидовых тензорных величин, которые пробегают значения $\{1, 2, 3\}$, но учитывают правило баланса индексов. К примеру, скалярное произведение 4-векторов

$$a \cdot b = a_{\mu} b^{\mu} = g_{\mu\nu} a^{\nu} b^{\mu} = a_0 b^0 + a_{\alpha} b^{\alpha} = a_0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_0 b^0 - a_{\Sigma}^{\alpha} b_{\Sigma}^{\alpha},$$

- используется стандартное обозначение для дифференцирования по компонентам координат, справедливое как в 3-мерном евклидовом пространстве, так и в 4-мерном пространстве-времени Минковского,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu, \quad \frac{\partial}{\partial r^\alpha_{\mathbb{Z}}} \equiv \partial_\alpha.$$

Подчеркнем, что евклидов вектор с верхним индексом автоматически совпадает с пространственными компонентами 4-вектора в пространстве-времени Минковского. Эти правила обозначений позволят нам, во-первых, ясно показать, какими величинами мы оперируем на произвольно открытой странице книги, даже не вникая в контекст изложения на этой странице. Во-вторых, мы избежим излишнего использования метрического тензора в формулах, где важна алгебраическая структура, а не баланс индексов, как, например, при изучении коммутаторов генераторов изометрий.

Системы единиц

гауссова система единиц

про это пара абзацев

Она используется, когда....(?)

$$1 \text{ ГэВ} = 10^3 \text{ МэВ} = 10^9 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-10} \square M$$

$$1 \text{ эрг} = 10^{-7} \text{ Дж} = 624 \text{ ГэВ} = 642 \cdot 10^9 \text{ эВ}.$$

(еще что?)

натуральная система единиц

Она самая простая.

Она используется, когда лень думать про константы, когда много итак принципиально непонятных преобразований.

В этой системе единиц $\hbar = c = 1$.

$$[\text{длина}] = [\text{время}] = [\text{энергия}]^{-1} = [\text{масса}]^{-1}.$$

Например,

$$m_e = 9.109 \times 10^{-28} \text{ г} = 0.511 \text{ МэВ} = (3.862 \times 10^{-11} \text{ см})^{-1}$$

A.7 Puzzles for various cases

Обсудим интересные загадки теории поля.

(потом с опытом сгруппирую по интересности, а также найду новые классные загадки. некоторые перенесу в раздел про каталог, которые не такие крутые, как те, что тут.)

A.7.1 Interesting questions about general field theory just for a nice chat

(не знаю, соберу что-то интересное)

A.7.2 Interesting questions about special field theories just for a nice chat

(а тут очень много интересного! пока понять теории эти нужно сперва.)

A.7.3 Questions to check if a person knows field theory minimally or not?

Если большинство вопросов тут не отвечаются - ставим 2/10 баллов и отправляем на доучивание человека.

A.7.4 Questions to check if a person knows field theory professionally?

(пока что это из курса Степаньянца по точным решениям, потом мб их в каталог задач напишу)

1. Понятие о солитонах. Кинк.
2. Вихревые линии Абрикосова.
3. Гомотопии. Степень отображения и её свойства. Топологическая классификация отображения сфер.
4. Магнитный монополь т'Хофта - Полякова.
5. Ограничение Богомольского. Решение Прасада - Зоммерфельда.
6. Магнитный монополь Ву-Янга и его связь с монополем Дирака.
7. Дионы. Ограничение Богомольского на массу дионного решения.
8. Понятия об инстантонах. Топологическая классификация инстантонных решений.
9. $5n + 3$ - параметрическое инстантонное решение и его свойства.
10. Многоинстантонные решения в формализме АДХМ.

A.7.5 Questions for those who say they know field theory, to show that it is not true

(соберу потом, но тут вообще специфика)

A.7.6 Puzzles for learning typical concepts

Допустим, видим человека, который в принципе хотел бы понять суть, опишем, какие в какой последовательности будем задавать, чтобы в типичном случае ему было бы интереснее въезжать. В частности это могут быть младшие студенты или редко школьники.

Головоломки для освоения теории поля школьного уровня

Головоломки для освоения основ СТО

Головоломки для освоения основ электродинамики

Головоломки для освоения основ калибровочных полей

Головоломки для освоения основ гравитации

Головоломки для освоения других особенностей теории поля

A.8 History of the Development of Field Theory in a Nutshell

A.8.1 History of SR

(тоже может быть важно, потом напишу, там многое было.)

A.8.2 History of Electrodynamics

(тоже может быть важно, потом напишу, там многое было.)

A.8.3 About the history of gauge fields, QFT, particle physics

(тоже может быть важно, потом напишу, там многое было.)

A.8.4 History of other parts of field theory

(тоже может быть важно, потом напишу, там многое было.)

A.8.5 Biographical Notes about Field Theory Specialists

(????)

Biographical Notes by Greiner

KLEIN, Oskar Benjamin, Swedish physicist, * 15.9.1894, 1984. Professor for Theoretical Physics at the University Stockholm from 1931 to 1962. Important achievements apart from the formulation of the KleinGordon equation: Klein's paradox (see Chap. 13), Klein-Nishina formula, Kaluza-Klein theory. In 1960 he was awarded with the Max-Planck Medaille of the Deutsche Physikalische Gesellschaft (German Physical Society).

GORDON, Walter, * 3.8.1893 in Apolda (Thuringen, Germany), 24.12. 1939 in Stockholm, formulated in 1926 independently from O. Klein a relativistic wave equation for free particle without spin (Klein-Gordon equation) and derived in 1928 simultaneously with C.G. Darwin the finestructure of the hydrogen spectrum from Dirac's wave equation [BR].

LAGRANGE, Joseph Louis, * 25.01.1736 in Torino, 10.04.1813 in Paris. L. originated from a French-Italian family, and in 1755 became professor in Torino. In the year 1766 he went to Berlin as the director of the mathematical-physics department. In 1786, after the death of Frederick II, he went to Paris, where he gave considerable support to the reform of the measuring system, and where he was professor at several universities. - His very extensive work contains a new foundation of variational calculus (1760) and its application on dynamics, contributions to the three-body problem (1772), the application of the theory of chain fractions on the solution of equations (1767), number-theoretical problems, and an unsuccessful reduction of infinitesimal calculus on algebra. With his "Mcanique Analytique" (1788), L. became the initiator of analytic mechanics. Important for function theory is his "Theorie des

Fonctions Analytiques, Contenant les Principes du Calcul Diffrentiel" (1789), and for algebra his "Traité de la Résolution des Equations Numériques de tous Degrés" (1798).

SCHRODINGER, Erwin, *08.12.1887 in Vienna, 01.04.1961 *ibidem*, professor in Zürich, Berlin, Oxford, Graz, Dublin and Vienna; worked in theoretical physics, especially on quantum theory. Based on L. de Broglie's idea of matter waves. S. developed the wave mechanics in 1926, established the wave equation named after him and proved the equivalence between the latter and the matrix mechanics of Heisenberg. With these principles S. created a homogeneous base of quantum and atomic theory. In fact, S. found first the relativistic wave equation known today as Klein-Gordon-equation, but he dismissed it. Later S. worked on problems of relativistic quantum theory, gravitation theory and on a new field theory. He also was concerned with philosophical questions. In 1933 he received the Nobel Prize in physics, together with P.A.M. Dirac.

FESHBACH, Herman, * 02.02.1917 in New York, from 1955 university professor at the Massachusetts Institute of Technology (MIT) in Boston, from 1973 head of the MIT physics department. He is one of the most distinguished theoretical nuclear scientists of his times. Among other things he is distinguished by his works in the field of nuclear reactions.

VILLARS, Felix Marc, *06.01.1921 in Biel (Switzerland), student of W. Pauli, university professor at the Massachusetts Institute of Technology (MIT) in Boston. Among others he is distinguished by his work on the microscopic structure of collective motions in nuclei. The Pauli-Villars regularization procedure will be discussed in Vol. 4 of this series, Quantum Electrodynamics (Springer, Berlin, Heidelberg, to be published).

SCHIFF, Leonard Isaac, * 29.03.1915 in Fall River (MA), 19.01.1971 in Stanford. From 1941 at the University of Pennsylvania, becoming associate professor in 1944. In 1947 he moved to the Physics Department, Stanford (where he was Head of Physics from 1948 to 1966). Main fields: scattering theory, general relativity. A main part of his academic work was the education of young students. His excellent book on quantum mechanics made him world famous. In 1966 he received the Oerstedt-medal of the American Association of Physics Teachers.

WEINBERG, Steven, * 03.05.1933 in New York, today at the University of Texas, before this at Harvard University. W. worked on cosmology and together with S.L. Glashow and A. Salam propounded the unified theory of weak and electromagnetic interaction ("standard model"), which, after this theory, only appear as different forms of one single force. For this they were awarded the Nobel Prize in physics in 1979.

HEISENBERG, Werner Karl, *05.12.1901 in Würzburg, 01.02.1976 in München, from 1927 to 1941 professor at Leipzig University, from 1941-45 director of the Kaiser-Wilhelm Institut für Physik in Berlin, 1946-57 director of the newly founded Max-Planck-Institut für Physik in Göttingen and 1958-70 in München. H. demanded in 1925, that only "principally measurable quantities" should be used to describe atomic phenomena (positivistic principle). With his "multiplication rules for quadratic schemes" he initiated the new "Göttinger Matrix Mechanics", which was further established in 1925 by M. Born, P. Jordan and H. In collaboration with Niels Bohr he succeeded in explaining the physical and philosophical background of the new formalism. Heisenberg's uncertainty relation (1927) became the basis of the "Copenhagen interpretation" of quantum theory. - After the discovery of the neutron by J. Chadwick in 1932 Heisenberg recognized that this particle is, in addition to the proton, an element of the nucleus, and he developed a theory of nuclear structure (concept of iso-spin). In 1932 he was awarded the Nobel Prize in physics. From 1953 Heisenberg worked on a unified theory of matter ("world formula"), which should be able to describe all elementary particles occurring in nature and all natural laws. In 1932 he received the Nobel Prize and 1957 the peace class of the order "Pour le mérite" [BR].

B Supplementary Information

B.1 Some Mathematics for Assistance

B.1.1 Vector and Tensor Analysis for Field Theory

Тензоры

Обсудим все необходимые методы работы с тензорами в теории поля.
(?? мб потом добавлю больше методов программирования, пока не владею ими.)

преобразования тензоров

??применительно к теории поля все выпишу

Об инвариантных тензорах (????)

(полезное понятие для усреднения или еще для чего-то, потом пропишу.)

Псевдотензоры

Псевдотензор и пространственная четность

(? хз, к чему ксл это писал)

Здесь уместно определить понятие псевдотензора: при зеркальном отражении координат векторного пространства, например, в евклидовом пространстве $r \mapsto -r$, тензор ранга k , $T^{(k)}$, переходит в $\lambda_{\mathbb{P}} T^{(k)}$, где $\lambda_{\mathbb{P}} = (-1)^k$ для тензора и $\lambda_{\mathbb{P}} = -(-1)^k$ для псевдотензора.

Собственное значение $\lambda_{\mathbb{P}}$ называется пространственной четностью тензорной величины.

Конечно, сложение тензорных величин одного ранга с разной четностью в произвольной пропорции приводит к тензорам, которые не обладают определенной четностью, т.е. не являются собственными для оператора зеркальной инверсии пространства.

В евклидовом пространстве символ $\nabla = \partial/\partial \mathbf{r}$ является вектором, скорость $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{r}$ - вектором, а следовательно, и импульс $\mathbf{p}$ - вектор. Электрический заряд - скаляр. Вектор-потенциал $\mathcal{A}$ является вектором поскольку он входит как сумма с кинетическим импульсом в обобщенный импульс (4.3) $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathcal{A}$: если бы вектор-потенциал был псевдовектором, то электромагнитное взаимодействие (обобщенный импульс) менялось бы при зеркальном отражении пространства, чего не наблюдается; говорят, что электромагнитное взаимодействие сохраняет пространственную четность.

По этой же причине электрическое поле, включающее векторный вклад $-\partial_t \mathcal{A}/c$ является вектором, а отсюда следует, что и вклад $-\nabla \mathcal{A}_0$ - тоже вектор, а следовательно, $\mathcal{A}_0$ - скаляр.

Примеры псевдотензоров в теории поля

В евклидовом пространстве символ Леви-Чивиты $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ меняет знак при отражении, но при этом правая тройка переходит в левую, так что символ Леви-Чивиты по прежнему принимает положительные значения на правых тройках и отрицательные на левых, т.е. его значения не изменяются при зеркальной инверсии пространства.

Отсюда следует, что векторное произведение двух векторов - псевдовектор, и в частности, магнитное поле как ротор вектора $\mathcal{H} = \nabla \times \mathcal{A}$ - псевдовектор: при зеркальной инверсии магнитное поле не отражается.

(?!!)

Орбитальный момент $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ - тоже псевдотензор.

Скалярное произведение электрического поля на магнитное - псевдоскаляр $\mathcal{E} \cdot \mathcal{H}$: оно меняет знак при зеркальной инверсии пространства.

Индексы у тензоров (!!!)

Поднятие и опускание индексов

Домножаем на метрику.

(напишу явно!)

Если опустить один индекс метрикой Минковского $(-, +, +, +)$, то просто верхняя строчка домножится на (-1)

Если дважды опустить или поднять индекс метрикой Минковского, то останется тот же тензор, что и был (???? спрошу еще у кого-то.)

Примеры поднятий и опусканий индексов (!!!!!)

$$B^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a \cdot x & -b \cdot y & 0 \\ -a \cdot x & 0 & f \cdot xy & -h \cdot z \\ b \cdot y & -f \cdot xy & g \cdot y^2 & -f \cdot yz \\ 0 & h \cdot z & f \cdot yz & 0 \end{pmatrix} - \text{тензор.}$$

Напишите выражение для B_j^i , и $B_{i,j}$

Вычисление преобразований тензоров на компьютере

Вычисление в Wolfram:

```
{ {-1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1} },
{ {Subscript[a, 1], Subscript[a, 2], Subscript[a, 3], Subscript[a, 4]},
  {Subscript[b, 1], Subscript[b, 2], Subscript[b, 3], Subscript[b, 4]},
  {Subscript[c, 1], Subscript[c, 2], Subscript[c, 3], Subscript[c, 4]},
  {Subscript[d, 1], Subscript[d, 2], Subscript[d, 3], Subscript[d, 4]} }
// MatrixForm
```

(мб когда-то понадобится, посмотрим.)

Симметризация

Симметризация обозначается круглыми скобками:

$$a_{(\mu_1 \dots \mu_n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} a_{\mu_{\sigma_1} \dots \mu_{\sigma_n}}$$

а иногда и скобками $\{\}$

Например, две формулы ниже об одном и том же

$$R_{ik} = \frac{1}{2} \left(-g^{lm(0)} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 h_i^l}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_k^l}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k} \right)$$

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(-\eta^{\lambda\kappa} h_{\mu\nu,\lambda\kappa} + 2h_{(\mu,\nu)\lambda}^{\bar{\lambda}} - h_{,\mu\nu} \right)$$

Альтернирование

Антисимметризация обозначается квадратными скобками:

$$t_{[\mu_1 \dots \mu_k] \nu_1 \dots} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma t_{\mu_{\sigma_1} \dots \mu_{\sigma_k} \nu_1 \dots}$$

Свертка симметричного и антисимметричного равна нулю

$$t_{[ij]} s_{\{ij\}} = 0.$$

(ниже потом четко доказательство напишу)

Легко показать, что

$$C = t_{ij} s_{ij} = \langle \text{перестановка индексов } i \leftrightarrow j \rangle = (-t_{ji}) s_{ji} = -C,$$

где последнее равенство получается, если переобозначить индексы свертки. Из равенства $C = -C$ следует $C = 0$:

Свертка тензоров (!!!!!)

Свертка тензоров

Примеры свертки тензоров (!!!!!!)

свертка $B_{ij} B^{ij}$

.

Вычислите свертку тензоров $B_{ij} B^{ij}$ для $B^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a \cdot x & -b \cdot y & 0 \\ -a \cdot x & 0 & f \cdot xy & -h \cdot z \\ b \cdot y & -f \cdot xy & g \cdot y^2 & -f \cdot yz \\ 0 & h \cdot z & f \cdot yz & 0 \end{pmatrix}.$

Тензорные поля

вообще, это по идее в первых частях писать нужно, где шаблоны.

конструкция тензорных полей

Рассмотрим, как стандартное представление тензорного поля связано с его индексным представлением. По компонентам в декартовом базисе евклидова пространства.

Для скалярного поля ответ элементарен, поскольку скалярная функция с $s = 0$ имеет лишь одну единственную компоненту, так что $\langle \Phi | 0, 0 \rangle = \Phi(r)$. Для векторного поля $s = 1$, и вопрос был уже рассмотрен нами выше:

$$\mathcal{A}_\pm = \langle \mathcal{A} | \pm 1 \rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{A}_x \pm i \mathcal{A}_y), \quad \mathcal{A}_0 = \langle \mathcal{A} | 0 \rangle = \mathcal{A}_z$$

причем было рассмотрено и действие повышающей и понижающей матриц на эти компоненты, которое согласуется с общим выражением (3.36)

$$s_+ \mathcal{A}_+ = 0, \quad s_+ \mathcal{A}_0 = \sqrt{2} \mathcal{A}_+, \quad s_+ \mathcal{A}_- = \sqrt{2} \mathcal{A}_0$$

и

$$s_- \mathcal{A}_+ = \sqrt{2} \mathcal{A}_0, \quad s_- \mathcal{A}_0 = \sqrt{2} \mathcal{A}_-, \quad s_- \mathcal{A}_- = 0$$

Заметим теперь, что любое тензорное поле с заданным значением $s^2 = s(s+1)$ легко построить, если начать со старшего собственного вектора, действуя понижающей матрицей.

Например, для поля $T_{\alpha\beta}$ с $s = 2$, матрицы спина являются суммой двух матриц по каждому из индексов, $S = s^{(1)} + s^{(2)}$, а значит, старший вектор -

$$T_{(+2)} = \langle T | 2, +2 \rangle = T_{++}, \quad S_+ T_{++} = \left(s_+^{(1)} + s_+^{(2)} \right) T_{++} = 0, \quad S_z T_{++} = \left(s_z^{(1)} + s_z^{(2)} \right) T_{++} = 2T_{++}$$

т.е., проводя замену по каждому индексу также, как и для вектора, найдем

$$T_{++} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (T_{x+} + iT_{y+}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} (T_{xx} + iT_{xy}) - \frac{1}{\sqrt{2}} i (T_{yx} + iT_{yy}) \right)$$

и после приведения подобных членов

$$T_{++} = \frac{1}{2} \{ T_{xx} - T_{yy} + i(T_{xy} + T_{yx}) \}$$

$$\text{Затем, поскольку } S_- |2, +2\rangle = \sqrt{2 \cdot 3 - 2 \cdot 1} |2, +1\rangle = 2 |2, +1\rangle$$

$$T_{(+1)} = \frac{1}{2} \left(s_-^{(1)} + s_-^{(2)} \right) T_{++} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} T_{0+} + \sqrt{2} T_{+0} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{z+} + T_{+z}) = -\frac{1}{2} (T_{zx} + iT_{zy} + T_{xz} + iT_{yz})$$

Т.е.

$$T_{(+1)} = -\frac{1}{2} \{ T_{zx} + T_{xz} + i(T_{zy} + T_{yz}) \}$$

$$\text{Далее, } S_- |2, +1\rangle = \sqrt{2 \cdot 3 - 1 \cdot 0} |2, 0\rangle = \sqrt{6} |2, 0\rangle, \text{ а значит,}$$

$$T_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(s_-^{(1)} + s_-^{(2)} \right) T_{(+1)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(s_-^{(1)} + s_-^{(2)} \right) (T_{0+} + T_{+0}) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{2} (T_{-+} + T_{00}) + \sqrt{2} (T_{00} + T_{+-}) \right)$$

что после несложных арифметических действий дает

$$T_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \{ 2T_{zz} - T_{xx} - T_{yy} \}$$

Аналогично найдем, что

$$T_{(-2)} = T_{--} = T_{++}^*, \quad T_{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{z-} + T_{-z}) = -T_{(+1)}^*$$

Итак, тензорное поле с заданным значением спина s можно построить из старшего вектора путем действия понижающей матрицы и, при этом, это тензорное поле имеет $2s+1$ компонент.

Заметим, что тензорное поле с заданным спином $s = 2$ описывается симметричным вкладом тензора $T_{\alpha\beta}$, что ясно уже из того, что старший вектор является симметричным по перестановке индексов, а понижающая матрица также построена симметрично по перестановке индексов. Отсюда следует, что спин $s = 2$ отвечает симметричным тензорам ранга 2. При этом этот тензор обладает еще и нулевым следом, поскольку след дает нулевой вклад в компоненты стандартного представления для тензорного поля с $s = 2$, что следует из явного вида построенных нами компонент (3.39)-(3.42). Кроме того, если посчитать число степеней свободы, симметричный тензор второго ранга имеет 6

независимых компонент, след тензора является инвариантом и не преобразуется при поворотах, так что требование нулевого следа симметричного тензора второго ранга как раз оставляет пять независимых компонент, как это и должно быть у тензорного поля со спином 2.

В частности, инвариантный тензор Кронекера хоть и обладает рангом, равным 2, дает при подстановке в формулы (3.39)-(3.42) тензорное поле спина 2, тождественно равное нулю, так как, в самом деле, тензор Кронекера не преобразуется при поворотах. т.е. ведет себя как инвариант. Иными словами, старший вектор стандартного представления $\delta_{++} \equiv 0$, а значит, действием на него понижающей матрицей получаются только нулевые вектора спина 2.

Компоненты символа Кронекера в базисе $\{+, -, 0\}$.

Задача 48. Вычислите все компоненты символа Кронекера в базисе $\{+, -, 0\}$.

Ответ: ненулевые компоненты $\delta_{00} = -\delta_{+-} = -\delta_{-+} = 1$.

Теперь, поскольку любой симметричный тензор $T_{\alpha\beta\gamma\dots}$ можно представить в виде суммы тензора с нулевым следом $\tilde{T}_{\alpha\beta\gamma\dots} = T_{\alpha\beta\gamma\dots} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T'_{\gamma\dots}$ и тензора меньшего ранга $T'_{\gamma\dots} = \delta_{\alpha\beta}T_{\alpha\beta\gamma\dots}$, умноженного на символ Кронекера: $\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T'_{\gamma\dots}$, можно рассматривать независимо преобразования при поворотах бесследовых тензоров ранга s и тензоров с рангом на две единицы меньше. При этом, вклад тензора $\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T'_{\gamma\dots}$ в старший вектор спина s равен $\frac{1}{3}\delta_{++}T'_{++}\dots \equiv 0$, а значит, он не дает вклада в спин s . Следовательно, симметричный тензор спина s - бесследовый.

Число степеней свободы симметричного бесследового тензора

Рассмотрим число степеней свободы такого симметричного бесследового тензора методом математической индукции:

- вектор, т.е. тензор ранга $s = 1$, имеет $2s + 1 = 3$ независимых компоненты, а симметричный бесследовый тензор второго ранга ($s = 2$) имеет $2s + 1 = 5$ компонент, так что стартовые условия в методе математической индукции выполнены.

- Если симметричный бесследовый тензор $T'_{\alpha_1\dots\alpha_s}$ ранга s обладает $2s + 1$ независимыми компонентами, то добавление еще одного индекса к нему, т.е. введение тензора $T_{\alpha_1\dots\alpha_s\beta}$, симметричного и бесследового по первым s индексам, означает, что построен тензор ранга $s + 1$ с числом независимых компонент, равным $(2s + 1) \cdot 3$, т.е. трем независимым наборам с $2s + 1$ независимыми компонентами. Тогда взятие свертки по любому индексу α и индексу β дает симметричный бесследовый тензор ранга $s - 1$

$$\tilde{T}_{\alpha_2\dots\alpha_s} = T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\beta}\delta^{\alpha_1\beta},$$

у которого $2(s-1)+1 = 2s-1$ независимых компонент, которые представляют компоненты тензора спина $s-1$. Ясно, что в силу симметричности по перестановкам индексов α взятие свертки по индексу β и любому из индексов α приводит к одному и тому же тензору $\tilde{T}$. Исключим из числа компонент тензора $T_{\alpha_1\dots\alpha_s\beta}$ компоненты тензора $\tilde{T}_{\alpha_2\dots\alpha_s}$, которые имеют другое значение спина, условия бесследовости.

Далее, в тензоре $T_{\alpha_1\dots\alpha_s\beta}$ выделим часть, антисимметричную по перестановкам индексов α и β , т.е. в декартовых координатах построим тензор

$$\tilde{T}'_{\alpha_2\dots\alpha_s\gamma} = \epsilon_{\alpha_1\beta\gamma}T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\beta}.$$

Этот тензор является бесследовым, поскольку, если взять свертку индекса γ с любым из индексов α , то

$$\tilde{T}'_{\alpha_2\dots\alpha_s\gamma}\delta_{\alpha_2\gamma} = T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\beta} \cdot \epsilon_{\alpha_1\beta\gamma}\delta_{\alpha_2\gamma} = T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\beta} \cdot \epsilon_{\alpha_1\beta\alpha_2} = 0,$$

так как свертка по двум немym индексам симметричного тензора с антисимметричным тензором Леви-Чивиты обращается в нуль. Антисимметричная по перестановкам индекса γ с любым из индексов α часть тензора $\tilde{T}'$ также равна нулю, поскольку свертка с антисимметричным тензором Леви-Чивиты по двум немym индексам равна

$$\begin{aligned}\tilde{T}'_{\alpha_2 \dots \alpha_s \gamma} \cdot \epsilon_{\alpha_2 \gamma \gamma'} &= T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s \beta} \cdot \epsilon_{\alpha_1 \beta \gamma} \epsilon_{\alpha_2 \gamma \gamma'} = T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s \beta} (-\delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\beta \gamma'} + \delta_{\alpha_1 \gamma'} \delta_{\beta \alpha_2}) = \\ &= -T_{\alpha_1 \alpha_1 \dots \alpha_s \gamma'} + T_{\gamma' \alpha_2 \dots \alpha_s \alpha_2} = -0 + T_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_s \gamma' \alpha_2} = \tilde{T}_{\alpha_3 \dots \alpha_s \gamma'}\end{aligned}$$

где первое слагаемое обращается в нуль по условию бесследовости по любой паре из первых s индексов тензора $T_{\alpha_1 \dots \alpha_s \beta}$, а последнее слагаемое равно нулю в силу того, что это тензор спина $s - 1$, равенство нулю которого диктуется уже наложенным нами условием бесследовости тензора $T_{\alpha_1 \dots \alpha_s \beta}$ при свертке по индексу β и любому из индексов α . Но тогда тензор $\tilde{T}'_{\alpha_2 \dots \alpha_s \gamma}$ является бесследовым и симметричным по любой паре индексов, а значит, его ранг равен спине s , так что он имеет $2s + 1$ независимую компоненту. Таким образом, в рассматриваемом тензоре $T_{\alpha_1 \dots \alpha_s \beta}$ после наложения условия бесследовости его часть, антисимметричная по перестановкам индексов α и β , содержит в себе $2s + 1$ независимых компонент. Следовательно, в тензоре $T_{\alpha_1 \dots \alpha_s \beta}$ из $3(2s + 1)$ компонент после наложения условий бесследовости и симметричности останется

$$3(2s + 1) - (2s - 1) - (2s + 1) = 2s + 3 = 2(s + 1) + 1$$

независимых компонент, что и требовалось. - По индукции заключаем, что симметричные бесследовые тензоры ранга s имеют $2s + 1$ независимых компонент и отвечают тензорным полям спина s в том случае, когда компонента старшего состояния $T_{+ \dots +}$ с максимальной проекцией на ось z отлична от нуля, так как иначе весь тензор оказывается равным нулю.

Например, если исходный тензор был символом Кронекера, то его бесследовая часть тождественно равна нулю, что отвечает нулевому полю со спином 2 для символа Кронекера. Тензор Леви-Чивиты бесследовый и имеет ранг, равный 3, но он антисимметричен, так что его спин равен нулю, и это инвариантный тензор ¹³.

Итак, тензорные поля с определенным значением квадрата спина s описываются симметричными тензорами ранга s с нулевым следом по любой паре индексов. Они представляют собой неприводимые представления группы поворотов мультиплетностью $2s + 1$.

примеры тензорных полей

хз

Обзор применений тензорных полей

хз, посмотрим.

Разложение приводимых тензоров на неприводимые (!!!)

(очень важно!)

конструкция разложения

Рассмотрим тензорное произведение двух векторов a и b , т.е. тензор с компонентами

$$T_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta$$

Выделим в этом тензоре симметричный и антисимметричный вклады,

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha\} + \frac{1}{2} \{a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha\}$$

и запишем отдельно бесследовый симметричный тензор и его след:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} (a \cdot b) \right\} + \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} (a \cdot b) + \frac{1}{2} \{a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha\}$$

Бесследовый симметричный тензор

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} (a \cdot b) \right\}$$

отвечает тензору спина $s = 2$, а значит, его компоненты при вращениях преобразуются друг в друга без наличия инвариантных подмножеств, т.е. это неприводимое представление группы вращений. Скалярному вкладу спина $s = 0$ отвечает слагаемое

$$s_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} (a \cdot b)$$

так как скалярное произведение векторов - это инвариант, также как инвариантом является и символ Кронекера. Антисимметричный тензор

$$t_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha\}$$

как матрица 3×3 имеет на диагонали нули, над диагональю 3 независимых элемента, а под диагональю все элементы являются отражением элементов над диагональю с противоположным знаком, так что этот тензор имеет 3 независимых компоненты, причем все они могут быть записаны с помощью символа Леви-Чивиты в виде

$$t_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (a \times b)_\gamma.$$

Здесь символ Леви-Чивиты - инвариантный тензор, а $a \times b$ - вектор, т.е. тензорное поле спина $s = 1$. В итоге, составной тензор второго ранга, который представляет собой тензорное произведение двух тензоров со спином $s = 1$, $T = 3 \otimes 3$, разложен в прямую сумму тензоров со спином 0, 1 и 2 - синглет, триплет и квинтет:

$$SO(3) : \quad 3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5.$$

Каждый член этой суммы - неприводимый тензор группы вращений. Таким образом, мы описали пример разложения приводимого тензора по неприводимым, так что для тензора второго ранга это разложение имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} T_{\gamma\gamma} \right\} + \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} T_{\gamma\gamma} + \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha'\beta'} T_{\alpha'\beta'}.$$

Изложенная нами в случае прямого произведения векторов схема действий при разложении тензора на неприводимые слагаемые: выделение симметричной бесследовой части, следа и антисимметричной части, - остается в силе и при рассмотрении тензоров высших рангов и при описании прямого произведения неприводимых тензоров, т.е. при произведении тензоров с определенным спином.

Явное разложение $SO(3)$

Постройте в явном виде результат разложения в сумму неприводимых слагаемых тензорного произведения в задаче $SO(3) : 5 \otimes 3$.
(задача киселева, пока хз)

примеры разложения

примеры применений разложений

Поперечные векторные и тензорные поля

В релятивистской теории поля могут возникать особые условия, когда не все поляризации спина реализуются в природе. Например, для свободного электромагнитного поля уравнения Максвелла дают

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathcal{H} = 0,$$

так что для плоской монохроматической волны, скажем, электрического поля с волновым вектором $\mathbf{k}$,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \omega = ck,$$

найдем, что

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = i\mathbf{k} \cdot \mathcal{E} = 0,$$

т.е. поле является поперечным по отношению к волновому вектору в силу уравнений Максвелла. Значит, если в качестве оси z выбрать направление волнового вектора, то нулю должна быть равна компонента вектора с нулевой проекцией спина на ось волнового вектора, а отличными от нуля будут лишь две компоненты: с проекцией спина на ось волнового вектора, равной $+1$ и -1 .

Такая ситуация характерна для теорий с калибровочной инвариантностью, когда, например, электромагнитное поле - это калибровочное поле с массой, равной нулю.

Другой пример - это свободное безмассовое гравитационное поле, которое описывается симметричным бесследовым тензором второго ранга $h_{\mu\nu}$. Оно тоже является поперечным по каждому из индексов,

$$\nabla_\mu h^{\mu\nu} = 0.$$

Значит, опять же рассматривая плоскую монохроматическую волну с волновым вектором, направленным вдоль оси z , мы устанавливаем, что с учетом симметричности тензора

$$h_{zz} = h_{zx} = h_{zy} = h_{xz} = h_{yz} \equiv 0.$$

Кроме того, теперь вследствие бесследовости

$$h_{\gamma\gamma} = h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_{xx} + h_{yy} = 0.$$

Отсюда, согласно общим формулам описания тензора спина $s = 2$ в разделе 17. Тензорные поля, следует, что равны нулю все компоненты тензора с проекциями спина на ось волнового вектора, равными ± 1 и 0 :

$$h_{(\pm 1)} = h_{(0)} \equiv 0.$$

Таким образом, поперечное безмассовое свободное гравитационное поле отвечает проекциям спина на ось волнового вектора $m_s = \pm 2$.

В релятивистской теории свободных полей доказывается, что безмассовые поля - поперечные, и поэтому для них реализуются только максимальное и минимальное значения проекции спина на ось волнового вектора.

Символы Кронекера и Леви-Чивиты

Тензор Леви-Чивиты

Часто в ковариантных уравнениях возникает так называемый символ Леви-Чивиты, поэтому подробному обсуждению способа работы с ним посвящен этот раздел.

Основные формулы тензора Леви-Чивиты

Антисимметричный тензор максимального ранга, нормированный на единицу называют символом Леви-Чивиты. Рассмотрим следующее представление для символа Леви-Чивиты

$$\epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha_1}^1 & \delta_{\alpha_1}^2 & \dots & \delta_{\alpha_1}^n \\ \delta_{\alpha_2}^1 & \delta_{\alpha_2}^2 & \dots & \delta_{\alpha_2}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\alpha_n}^1 & \delta_{\alpha_n}^2 & \dots & \delta_{\alpha_n}^n \end{pmatrix}$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}.$$

Упрощая этот тензор по одной, двум и трем парам индексов, получим:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu} = \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\lambda}, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = 6.$$

Произведение двух

Антисимметричность следует из антисимметрии детерминанта относительно перестановки строк, а нормировка - из $\epsilon_{12\dots n} = \det \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = 1$.

Имеется тождество

$$\epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_n} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_2} & \dots & \delta_{\alpha_1}^{\beta_n} \\ \delta_{\alpha_2}^{\beta_1} & \delta_{\alpha_2}^{\beta_2} & \dots & \delta_{\alpha_2}^{\beta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\alpha_n}^{\beta_1} & \delta_{\alpha_n}^{\beta_2} & \dots & \delta_{\alpha_n}^{\beta_n} \end{pmatrix}$$

где $\epsilon^{\beta_1 \dots \beta_n}$ - контравариантный аналог $\epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ с теми же свойствами симметрии и нормировкой. Выведем её. Пользуясь представлением символа Леви-Чивиты через детерминант, получаем

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_n} &= \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha_1}^1 & \delta_{\alpha_1}^2 & \dots & \delta_{\alpha_1}^n \\ \delta_{\alpha_2}^1 & \delta_{\alpha_2}^2 & \dots & \delta_{\alpha_2}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\alpha_n}^1 & \delta_{\alpha_n}^2 & \dots & \delta_{\alpha_n}^n \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \delta_1^{\beta_1} & \delta_2^{\beta_1} & \dots & \delta_n^{\beta_1} \\ \delta_1^{\beta_2} & \delta_2^{\beta_2} & \dots & \delta_n^{\beta_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_1^{\beta_n} & \delta_2^{\beta_n} & \dots & \delta_n^{\beta_n} \end{pmatrix} = \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} \delta_{\alpha_1}^1 & \delta_{\alpha_1}^2 & \dots & \delta_{\alpha_1}^n \\ \delta_{\alpha_2}^1 & \delta_{\alpha_2}^2 & \dots & \delta_{\alpha_2}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\alpha_n}^1 & \delta_{\alpha_n}^2 & \dots & \delta_{\alpha_n}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1^{\beta_1} & \delta_2^{\beta_1} & \dots & \delta_n^{\beta_1} \\ \delta_1^{\beta_2} & \delta_2^{\beta_2} & \dots & \delta_n^{\beta_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_1^{\beta_n} & \delta_2^{\beta_n} & \dots & \delta_n^{\beta_n} \end{pmatrix}^T \right] \end{aligned}$$

(??? и что??? очень слабый раздел!!!)

Появление

Рассмотрим тензорное поле $T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(x)$ типа $(0, p)$ на n -мерном многообразии. В общем случае $T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, очевидно, будет иметь n^p независимых компонент. Пусть теперь $T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ антисимметричен относительно перестановки любой пары индексов, т.е. является полностью антисимметричным:

$$T_{\dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots} = -T_{\dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots}, \quad i \neq j$$

Ввиду антисимметрии, число независимых компонент тензора будет меньше, чем n^p . Чтобы найти число независимых компонент антисимметричного тензора, заметим, что компоненты с хотя бы двумя одинаковыми индексами равны нулю, а компоненты с одинаковым набором индексов, но взятым в различном порядке может отличаться только знаком. Тогда число независимых компонент антисимметричного тензора равно числу способов выбрать p различных чисел от одного до n , то есть

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Из проведённого выше рассуждения следует, что антисимметричный тензор с n индексами в n -мерном пространстве имеет $C_n^n = 1$, то есть всего одну независимую компоненту. Тогда любой такой тензор можно представить в виде

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x) = T(x) \cdot \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$$

где $T(x)$ - некоторая функция, а $\epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ является «базисным» тензором в пространстве антисимметричных тензоров максимального ранга, определённый с точностью до нормировки. Зафиксируем эту нормировку условием $\epsilon_{12 \dots n} = +1$. Тогда $T(x) = T_{12 \dots n}(x)$.

Свертка n -мерных тензоров Леви-Чивиты (?)

$$\epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = n!$$

Это следует из

$$\epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k \dots \alpha_n} \epsilon^{\beta_1 \dots \beta_{k-1} \alpha_k \dots \alpha_n} = n(n-1) \dots k \cdot \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} & \delta_{\alpha_1}^{\beta_2} & \dots & \delta_{\alpha_1}^{\beta_{k-1}} \\ \delta_{\alpha_2}^{\beta_1} & \delta_{\alpha_2}^{\beta_2} & \dots & \delta_{\alpha_2}^{\beta_{k-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\alpha_{k-1}}^{\beta_1} & \delta_{\alpha_{k-1}}^{\beta_2} & \dots & \delta_{\alpha_{k-1}}^{\beta_{k-1}} \end{pmatrix},$$

и

Они следуют из сверток по каждому индексу (??? проделаю это потом)

Обзор использования символа Леви-Чивиты

(? мб удалю, вряд ли важно это знать, итак используется много где)

в дуальном преобразовании.

непонятно вообще, зачем это.

Тензор Леви-Чивиты естественным образом возникает при рассмотрении римановых многообразий: форму риманова объёма можно переписать в виде $\tau_g = \frac{1}{n!} \tau_{\alpha_1 \dots \alpha_n} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n}$ где

$$\tau_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \sqrt{|\det g|} \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad \epsilon_{12 \dots n} = +1$$

Тензор Леви-Чивиты в криволинейных координатах

В случае искривленных пространств в трехмерных координатах единичный антисимметричный тензор определяется как

$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma},$$

$$\eta^{\gamma\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma}$$

где $e_{123} = e^{123} = 1$, а при перестановке двух индексов меняют знак.

Дуальный вектор в искривленных координатах

Соответственно этому вектор $\mathbf{c} = [\mathbf{ab}]$, определенный как вектор, дуальный антисимметричному тензору $c_{\beta\gamma} = a_\beta b_\gamma - a_\gamma b_\beta$, имеет компоненты

$$c_\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} c^{\beta\gamma} = \sqrt{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} a^\beta b^\gamma,$$

$$c^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} c_{\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma$$

Обратно:

$$c_{\alpha\beta} = \sqrt{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} c^\gamma,$$

$$c^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} c_\gamma$$

(???? про этот вектор лучше подумаю, что за такой вектор?? разве так мы делаем??)

Понятие вектора в искривленных координатах (??)

Под компонентами вектора подразумеваются величины $\sqrt{g_{11}}A^1 (= \sqrt{A_1 A^1}), \sqrt{g_{22}}A^2, \sqrt{g_{33}}A^3$
(??? там скорее всего всплывут важные детали??!)

Усреднение векторов и тензоров

(тут все про них)

Интуитивное понимание и суть метода усреднения

Суть в том, что если у нас есть задача с распределением по углам какой-то величины, то можно решать задачу для одного направления, далее записать получившееся выражение в виде, инвариантном относительно вращений, а дальше усреднить, используя готовые формулы для усреднения единичного вектора. Чаще всего это задачи про излучение и рассеяние. Других задач про это ещё не видел.

(?? интуитивно как понимаем?)

Усреднение $\overline{n_\alpha n_\beta}$ на единичной сфере

Усреднение по направлениям. Найти средние значения произведений компонент единичного вектора n_α

$$\langle n_\alpha \rangle, \langle n_\alpha n_\beta \rangle, \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma \rangle, \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu \rangle, \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu n_\nu \rangle$$

Указания: интегралов не брать, использовать свёртки и соображения симметрии.
(потом посмотрю)

Укажем удобный способ усреднения произведений компонент единичного вектора. Тензор $\overline{n_\alpha n_\beta}$, будучи симметричным, может выражаться только через единичный тензор $\delta_{\alpha\beta}$. Учитывая также, что его след равен 1, имеем:

$$\overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}.$$

Усреднение $\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta}$ на единичной сфере $n_\alpha n_\alpha = 1$

Среднее же значение произведения четырех компонент равно

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = \frac{1}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}).$$

Правая часть составляется из единичных тензоров как тензор четвертого ранга, симметричный по всем индексам; общий коэффициент определяется затем путем свертывания по двум парам индексов, которое должно дать в результате 1.

Усреднение $\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma}$ на единичной сфере

(тут нормальный ответ, почему это ноль)

Усреднение $\overline{n_\alpha n_\beta}$ на окружности

Усреднение $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}$, $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}$

$$\overline{\text{Re} \mathbf{A} \text{Re} \mathbf{B}} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{A} \mathbf{B}^* \}$$

Действительно, имеем:

$$\text{Re} \mathbf{A} \text{Re} \mathbf{B} = \frac{1}{4} (\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{A}_0^* e^{i\omega t}) (\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{B}_0^* e^{i\omega t})$$

При усреднении члены, содержащие множители $e^{\pm 2i\omega t}$, обращаются в нуль, так что остается

$$\overline{\text{Re} \mathbf{A} \text{Re} \mathbf{B}} = \frac{1}{4} (\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^* + \mathbf{A}_0^* \mathbf{B}_0) = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{A} \mathbf{B}^*)$$

Усреднение $\langle (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) \rangle$

Усреднение по всем направлениям единичного вектора $\mathbf{n}$ в 3-мерном пространстве, считая $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ постоянными векторами: $\langle (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) \rangle$

Усреднение $\langle [(\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}] \rangle$

Провести усреднение по всем направлениям единичного вектора $\mathbf{n}$ в 3-мерном пространстве, считая $\mathbf{a}$ постоянным вектором: $\langle [(\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}] \rangle$

Усреднение по окружности $\langle (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) \rangle$

Двумерное усреднение $\langle (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) \rangle$, предполагая, что единичный вектор $\mathbf{n}$ равновероятно направлен во всех направлениях, перпендикулярных единичному вектору $\mathbf{k}$ (считать $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ постоянными векторами)

Усреднение $\langle (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\vec{\nabla} \ln r) \rangle$

Усреднение $\langle (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\vec{\nabla} \ln r) \rangle$ по единичной сфере, считая $\mathbf{a}$ постоянным вектором

Другое о векторах и матрицах

(все остальное касающееся теории поля и не такое важное - тут)

Отличие вектора от ковектора

(типичный вопрос, отвечу на него)

Совместный базис двух эрмитовых матриц

(?? зачем это???)

Пусть две эрмитовы матрицы $A^\dagger = A$, $B^\dagger = B$ имеют совместный базис:

$$A|a, b\rangle = a|a, b\rangle, \quad B|a, b\rangle = b|a, b\rangle.$$

Тогда

$$AB|a, b\rangle = Ab|a, b\rangle = bA|a, b\rangle = ba|a, b\rangle, \quad BA|a, b\rangle = Ba|a, b\rangle = aB|a, b\rangle = ab|a, b\rangle$$

а значит,

$$(AB - BA)|a, b\rangle = [A, B]|a, b\rangle = 0,$$

для любых базисных векторов, следовательно, коммутатор таких матриц равен нулю:

$$[A, B] = 0$$

Справедливо и обратное утверждение: если коммутатор двух эрмитовых матриц равен нулю, то может быть выбран совместный базис их собственных векторов. В самом деле, если спектр матрицы A невырожден, $A|a\rangle = a|a\rangle$, то введем

$$|f\rangle = B|a\rangle$$

Тогда в силу равенства нулю коммутатора

$$A|f\rangle = AB|a\rangle = BA|a\rangle = Ba|a\rangle = aB|a\rangle = a|f\rangle$$

а значит, вектор $|f\rangle$ является собственным для матрицы A со значением a , т.е. в силу невырожденности собственного значения

$$|f\rangle = f|a\rangle, \quad \Rightarrow \quad B|a\rangle = f|a\rangle,$$

и следовательно, f - собственное значение для эрмитовой матрицы B , которое должно быть вещественным, и базисный вектор $|a\rangle$ общий для обеих матриц.

Если собственное значение a вырождено, $A|a, \alpha\rangle$, со степенью вырождения k , $\alpha = \{1, k\}$, то введем

$$|f, \alpha\rangle = B|a, \alpha\rangle,$$

так что

$$A|f, \alpha\rangle = AB|a, \alpha\rangle = BA|a, \alpha\rangle = Ba|a, \alpha\rangle = aB|a, \alpha\rangle = a|f, \alpha\rangle$$

т.е. мы имеем вектор в k -мерном пространстве собственных векторов с собственным значением a , а значит, он разлагается по исходному базису $|a, \alpha\rangle$, который мы считаем ортонормированным,

$$|f, \alpha\rangle = C_\beta^\alpha |a, \beta\rangle = B|a, \alpha\rangle \Rightarrow \langle a, \beta|B|a, \alpha\rangle = C_\beta^\alpha.$$

Здесь квадратная матрица C размерности $k \times k$ является эрмитовой как результат действия в k -мерном пространстве матрицы B в силу эрмитовости матрицы B :

$$C_\beta^\alpha = \langle a, \beta|B|a, \alpha\rangle = (B|a, \beta\rangle)^\dagger |a, \alpha\rangle = \left(C_{\alpha'}^\beta\right)^* \langle a, \alpha'|a, \alpha\rangle = \left(C_\alpha^\beta\right)^*$$

Это означает, что можно перейти от базиса $|a, \alpha\rangle$ к базису собственных вещественных значений матрицы C :

$$C|a, \gamma\rangle = c_{(\gamma)} |a, \gamma\rangle, \quad \text{нет суммирования по } \gamma.$$

В этом базисе,

$$B|a, \gamma\rangle = c_{(\gamma)} |a, \gamma\rangle, \quad \text{нет суммирования по } \gamma$$

а значит, $c_{(\gamma)}$ - собственное значение матрицы B , и мы построили совместный базис собственных векторов для двух коммутирующих эрмитовых матриц.

Итак, для классификации полей по собственным значениям эрмитовых генераторов группы симметрии, в частности, группы вращения, необходимо выбрать максимальный набор попарно коммутирующих генераторов, для которого можно построить совместный базис собственных векторов. Такой набор называют полным набором наблюдаемых для генераторов симметрии.

Проведенное рассмотрение показало физический смысл коммутатора генераторов группы симметрии: собственное значение одного генератора группы не изменяется при действии бесконечно малого преобразования группы с другим генератором, который коммутирует с первым. Если генераторы не коммутируют, то собственные значения генератора меняются при действии преобразования с другим генератором. Осуществим такое рассмотрение для генераторов спина тензорных полей.

Векторный анализ для теории поля

Типичные преобразования уравнений сводятся к тому, чтобы выражать одни операторы векторного анализа через другие, так что соберем и подготовим все эти формулы перехода.

О выводе формул векторного анализа

(по идее если не помню формулы, то этот раздел даст все, чтобы их вывести)

о переходе из интегральной формы в дифференциальную

давно задумывался, почему этот переход такой?

вот тут и пропишу, потому что в теории поля это частый переход.

grad

Основные формулы grad

$$\text{grad } f = (df)^\flat$$

Градиент изменяется как дифференциал

Градиент меняется как дифференциал функции, а не как вектор.
(??? напишу сам потом, тут кривой был текст, удалил.)

Дивергенция div**Основные формулы div**

$$\operatorname{div} v = \star d(\star v^b),$$

в частности:

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$$

Найдём формулы для дивергенции, ротора и градиента в декартовых координатах. Векторное поле v имеет вид $v = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$, откуда $v^b = v_x dx + v_y dy + v_z dz$, Далее действуем звездой Ходжа

$$\star v^b = v_x dy \wedge dz + v_y dz \wedge dx + v_z dx \wedge dy,$$

далее берем внешний дифференциал

$$d(\star v^b) = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \tau_g$$

Значит,

$$\operatorname{div} v = \star d(\star v^b) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

div в искривленном пространстве (???)

актуально и непонятно!

div как производная Ли (??)

(?? вообще хз связь)

Докажите, что определение дивергенции для риманова многообразия согласовано с определением (2.49) дивергенции относительно бормы объёма как

$$\operatorname{div} v \tau_g = E_v \tau_g$$

div в искривленных координатах

Трёхмерная дивергенция вектора равна

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{\gamma} a^\alpha),$$

что схоже с $A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^i}$.

Ротор rot**Основные формулы rot**

определение:

$$\text{rot } v = (\star dv^b)^\#$$

в частности:

$$\text{rot } \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

rot в $\mathbb{R}^3$

(?? упущена теория)

$$\begin{aligned} dv^b &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} dx + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy \right) \wedge dz = \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dx + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dy + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dz \end{aligned}$$

Поэтому

$$\text{rot } v = (\star dv^b)^\# = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z}$$

rot в искривленном пространстве

актуально и непонятно!

rot в искривленных координатах

rot а определяется как вектор, дуальный тензору $a_\beta; \alpha - a_\alpha; \beta$, а для него $a_\beta; \alpha - a_\alpha; \beta = \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\beta}$, так что

$$(\text{rot } \mathbf{a})^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma} \right)$$

rot в 4D пространстве (???)

(??? хз, не знаю, не доучил.)

Формулы векторного анализа (!!!??)

(по актуальности потом соберу!! также укажу применения. Почему нигде тут методы диффгема не используются в доказательстве формул? мб диффгем про искривленные пространства и все, а тут он бесполезен?)

$$\text{rot grad } f = 0$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3), v \in \text{Vect}(\mathbb{R}^3)$$

хз, как доказать

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3), v \in \operatorname{Vect}(\mathbb{R}^3)$$

Ротор ротора

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

Действительно....

ее применения:...

Скалярное произведение двух векторных произведений $[a, b] \cdot [c, d]$

$$[a, b] \cdot [c, d] = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c).$$

Действительно, Запишем покомпонентно векторы

$$[a, b] \cdot [c, d] = g \cdot h = \epsilon_{ijk} a_j b_k \epsilon_{lmn} c_l d_n = (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) a_j b_k c_l d_n = (a_j c_j)(b_k d_k) - (a_j d_j)(b_k c_k)$$

Зная это, например, в электродинамике можно записать $(\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}) \cdot (\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}) = \ddot{\mathbf{D}} \cdot \ddot{\mathbf{D}} - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{D}})(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{D}})$

(? используется вообще формула эта?)

Скалярное произведение векторного произведения и с векторным произведением векторных произведений

$$[a, b] \cdot [[b, c], [c, a]] = ([a, b] \cdot c)^2.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} [a, b] \cdot [[b, c], [c, a]] &= \epsilon_{ijk} a_j b_k \cdot \epsilon_{ilp} \cdot \epsilon_{lmn} b_m c_n \cdot \epsilon_{pqr} c_q a_r = (\delta_{iq} \delta_{lr} - \delta_{ir} \delta_{lq}) \epsilon_{ijk} a_j b_k \cdot \epsilon_{lmn} b_m c_n \cdot c_q a_r \\ &= \epsilon_{ijk} a_j b_k \cdot \epsilon_{lmn} b_m c_n \cdot c_i a_l - \epsilon_{ijk} a_j b_k \cdot \epsilon_{lmn} b_m c_n \cdot c_l a_i = ([a, b] \cdot c)^2. \end{aligned}$$

где мы использовали, что $\epsilon_{ijk} a_j b_k a_i = [a, a] \cdot b = 0$, $\epsilon_{ijk} a_j b_k c_i = [a, b] \cdot c$, $\epsilon_{lmn} b_m c_n a_l = [a, b] \cdot c$
(?? где встречается?)

$$\text{Формула } \operatorname{div}(\psi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{div} \mathbf{A}$$

(хз)

$$\text{Формула } \operatorname{rot}(\psi \mathbf{A}) = \operatorname{grad} \psi \times \mathbf{A} + \psi \operatorname{rot} \mathbf{A} (!!!)$$

(?? почему именно её используем для волнового уравнения в искривленном пространстве???)

Формула $\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot}\mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot}\mathbf{A}$

Формула $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot}\mathbf{B}$

Формула $\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\text{div}\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\text{div}\mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$

Формула $\frac{1}{2} \text{grad} A^2 = \mathbf{A} \times (\text{rot}\mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

Примеры преобразований векторов в теории поля

(?? это мб и в математику перенесу, посмотрим.)

Формула $\text{div} \frac{[\vec{b} \times \vec{r}]}{r^2}$

Найдем $\text{div} \frac{[\vec{b} \times \vec{r}]}{r^2}$, где $\vec{b}$ - постоянный вектор;

$$\begin{aligned} \text{div} \frac{[\vec{b} \times \vec{r}]}{r^2} &= (8, l_{ijk} b_j r_k / r^2) = \frac{\partial}{\partial x_i} l_{ijk} b_j r_k / r^2 = l_{ijk} b_j \left(\frac{\partial r_k}{\partial x_i} + \frac{r_k}{r^3} (-2) \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \\ \text{div} \frac{[b_k r]}{r^2} &= l_{ijk} b_j \left(\frac{\delta_{ki}}{r^2} - 2 \frac{r_k}{r^3} \frac{x_i}{r} \right) = 0 - 2 e_{iju} b_j \frac{r_* x_i}{r^4} = -2 \frac{lr, [\vec{b}, \vec{r}]}{r^4} \end{aligned}$$

Формула $\nabla (\vec{a}(r) e^{f(\vec{r})})$

$\nabla (\vec{a}(r) e^{f(\vec{r})});$

(?? тут ничего интересного или я не так понял?)

Формула $[\nabla \times (\vec{A}(\vec{r}) f(t - r/c))]$

$[\nabla \times (\vec{A}(\vec{r}) f(t - r/c))].$

$$\begin{aligned} [\nabla \times A(v) f(t - v/c)] &= l_{ijn} \nabla_j (A_k(v) f(t - v/c)) = \\ &= l_{iju} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} A_k(v) \cdot f \left(t - \frac{c}{c} \right) + A_k(v) f'(t - v/c) \frac{\partial(t - v/c)}{\partial x_j} \right) = \\ &= \left(l_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_u \right) \cdot l \left(t - \frac{1}{c} \right) + l_{ij} A_k \frac{x_j}{r} \left(-\frac{l'(t - 1/c)}{c} \right) = \\ &= [\nabla, A_n] f(t - r/c) - \frac{1}{c} [\vec{A}_k, \vec{r}/r] f'(t - r/c) \end{aligned}$$

Формула $\text{div}(\vec{r}\varphi)$

$\text{div}(\vec{r}\varphi)$, где φ - функция координат;

Формула $\text{div} \frac{[\vec{a} \times \vec{r}]}{r^2}$

$\text{div} \frac{[\vec{a} \times \vec{r}]}{r^2}$, где $\vec{a}$ -постоянный вектор;

Формула $\text{grad} \left(\frac{\exp(ikr)}{r} \right)$

$\text{grad} \left(\frac{\exp(ikr)}{r} \right)$, где k -постоянная величина.

Интегральные формулы векторного анализа в теории поля

Очень часто, например, в классической ЭД нужны разные переходы в интегралах, эти методы тут и приведем.

(из ЛЛ8 многое беру)

(????)

я хз, что это и почему

$$\int \mathbf{H} \mathbf{H}^* dV = \frac{c^2}{\omega^2} \int \text{rot } \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{E}^* dV$$

Второй интеграл преобразуем по частям:

$$\int \text{rot } \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{E}^* dV = \oint \text{rot } \mathbf{E}^* [d\mathbf{f} \mathbf{E}] + \int \mathbf{E} \text{rot rot } \mathbf{E}^* dV$$

Поскольку на границе объема $\mathbf{E}_t = 0$, то интеграл по поверхности обращается в нуль и остается

$$\int |\mathbf{H}|^2 dV = \frac{c^2}{\omega^2} \int \mathbf{E} \text{rot rot } \mathbf{E}^* dV = -\frac{c^2}{\omega^2} \int \mathbf{E} \Delta \mathbf{E}^* dV,$$

Элементы линейной алгебры

Матрицы и индексы

(разные параграфы потом сделаю.)

Для исследования свойств матриц спина векторной частицы напомним ряд определений для квадратных матриц $\hat{A}$ размером $n \times n$, которые действуют на n -мерные столбцы, т.е. в n -мерном комплексном пространстве. Транспонированная матрица A^T имеет элементы

$$(A^T)_{\beta}^{\bullet\alpha} = A_{\bullet\beta}^{\alpha}.$$

Эрмитово сопряженная матрица $A^{\dagger}$ имеет элементы, комплексно сопряженные элементам транспонированной матрицы:

$$(A^{\dagger})_{\beta}^{\bullet\alpha} = (A^*)_{\alpha}^{\bullet\beta}.$$

Эрмитово самосопряженная матрица или просто эрмитова матрица совпадает со своей эрмитово сопряженной,

$$A^{\dagger} = A \quad \Leftrightarrow \quad A_{\beta}^{\alpha} = (A^*)_{\alpha}^{\beta}$$

Из определений матриц спина векторной частицы

$$s_x = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

следует, что эти матрицы являются эрмитовыми. Элементы комплексного векторного n -мерного пространства, т.е. столбцы, будем обозначать символом кет-вектора:

$$|\mathcal{A}\rangle \equiv \mathcal{A} = \sum_{\alpha=1}^n \mathcal{A}^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \mathcal{A}^\alpha \mathbf{e}_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathcal{A}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Например, в трехмерном евклидовом пространстве векторы базиса -

$$|\mathbf{e}_x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{e}_y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{e}_z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

а вектор

$$|\mathcal{A}\rangle = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^x \\ \mathcal{A}^y \\ \mathcal{A}^z \end{pmatrix}$$

Эрмитово сопряженные ковекторы, т.е. строки с комплексно сопряженными элементами столбца, будем обозначать бра-векторами ⁶

$$\langle \mathcal{A}| = (\mathcal{A}^{*(1)}, \dots, \mathcal{A}^{*(n)})$$

Для квадратных матриц ставится задача на собственные значения:

$$A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle, \quad |\lambda\rangle \neq 0$$

Собственный вектор $|\lambda\rangle$ не равен нулю, что может иметь место лишь, если у матрицы $A - \lambda \cdot \mathbb{1}$ нет обратной, т.е. при условии

$$\det(A - \lambda \cdot \mathbb{1}) = 0$$

поскольку

$$(A - \lambda \cdot \mathbb{1})|\lambda\rangle = 0$$

и если матрица $(A - \lambda \cdot \mathbb{1})$ имеет обратную, то домножение этого уравнения на обратную матрицу приводило бы к $|\lambda\rangle = 0$, так что условие отсутствие обратной матрицы в виде (3.19) означает существование ненулевого собственного вектора $|\lambda\rangle$. Уравнение (3.19) носит название секулярного уравнения на собственные значения матрицы A . Эрмитово сопряжение секулярного уравнения показывает, что собственные значения эрмитово сопряженной матрицы $A^\dagger$ являются комплексно сопряженными значениями λ^* матрицы A . Отсюда следует, что эрмитовы матрицы, $A^\dagger = A$, имеют вещественные собственные значения, $\lambda^* = \lambda$, так как

$$A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \Rightarrow \langle \lambda|A|\lambda\rangle = \lambda\langle \lambda|\lambda\rangle$$

и

$$(A|\lambda\rangle)^\dagger = \lambda^* \langle \lambda| = \langle \lambda|A^\dagger = \langle \lambda|A \Rightarrow \langle \lambda|A|\lambda\rangle = \lambda^* \langle \lambda|\lambda\rangle$$

Секулярное уравнение является полиномом степени n по искомому собственному значению, а значит, оно имеет n решений с учетом кратности каждого решения. Спектр собственных значений эрмитовой матрицы может быть невырожден или вырожден, т.е., если одному собственному значению отвечает единственный собственный вектор, то это значение невырождено, если пространство собственных векторов для заданного собственного значения не одномерно, а k -мерно, то говорят о степени

вырождения, равной $k > 1$. В базисе собственных векторов эрмитова матрица диагональна: на диагонали стоят собственные значения с учетом кратности их вырождения.

Собственные вектора эрмитовой матрицы с различными собственными значениями ортогональны, поскольку из уравнений

$$A|\lambda_1\rangle = \lambda_1|\lambda_1\rangle, \quad A|\lambda_2\rangle = \lambda_2|\lambda_2\rangle$$

следует, что после умножения слева на строку бра-вектора

$$\langle\lambda_2|A|\lambda_1\rangle = \lambda_1\langle\lambda_2|\lambda_1\rangle, \quad \langle\lambda_1|A|\lambda_2\rangle = \lambda_2\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle,$$

что при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ возможно, только если

$$\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0,$$

поскольку

$$\langle\lambda_1|A|\lambda_2\rangle^\dagger = \lambda_2^\dagger\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle^\dagger \Rightarrow \langle\lambda_2|A|\lambda_1\rangle^\dagger = \lambda_2\langle\lambda_2|\lambda_1\rangle,$$

в силу эрмитовости матрицы и вещественности её собственного значения.

Бра- кет- формализм (!!)

(напишу достаточно подробно, как пользуемся им.)

Сферические гармоники единичного вектора

(суть лучше напишу, пока хуже нужного понимаю это. в дополнения перенесу)

В терминах компонент декартовых координат эти собственные состояния задаются полями

$$\mathcal{A}_\pm = \langle\mathcal{A}|\pm 1\rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{A}_x \pm i\mathcal{A}_y), \quad \mathcal{A}_0 = \langle\mathcal{A}|0\rangle = \mathcal{A}_z.$$

Например, поле единичного радиус-вектора $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ в переменных сферических координат

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

имеет компоненты с определенными значениями проекции спина на ось z :

$$n_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(n_x \pm in_y) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta e^{\pm i\phi}, \quad n_0 = n_z = \cos\theta.$$

Наряду с (3.22) вводят сферические гармоники этого вектора $y_{1,\pm 1}$ и $y_{1,0}$, которые отличаются только нормировкой:

$$\int d\Omega \mathbf{y}_{1,m}^* \mathbf{y}_{1,m'} = \delta_{mm'},$$

так что

$$y_{1,m} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} n_m, \quad m = \{\pm 1, 0\}$$

Представление поля в виде сферических гармоник называют стандартным в отличие от покомпонентного представления в декартовых координатах.

Полнота базиса и измерение среднего значения

Разложение вектора по базису собственных векторов матрицы проекции спина на ось z имеет стандартный вид:

$$|\mathcal{A}\rangle = \sum |m\rangle \langle m|\mathcal{A}\rangle$$

где берется сумма по значениям проекции $m = \{\pm 1, 0\}$. Смысл этого выражения прост: вычисляется проекция базисного вектора на заданный вектор $\mathcal{A}$, в наших обозначениях

$$\langle m|\mathcal{A}\rangle = \mathcal{A}_m^*$$

а затем суммируются это проекции по базисным векторам. В этой связи полнота базиса отвечает условию

$$\sum |m\rangle \langle m| = \mathbb{1}.$$

Заметим теперь, что действие матрицы спина s_z на условие полноты базиса дает нам, как говорят, операторное представление для этой матрицы, записанное в терминах бра- и кет-векторов:

$$s_z \left(\sum |m\rangle \langle m| \right) = \left(\sum |m\rangle \langle m| \right) s_z = \sum |m\rangle m \langle m|$$

поскольку матрица эрмитова и ее действие на собственные бра- и кет-векторы дает вещественное собственное значение, равное m . Если вектор собственный и он имеет единичную нормировку, то

$$\langle m | s_z | m \rangle = m.$$

Если же вектор является суперпозицией

$$|\mathcal{A}\rangle = \sum |m\rangle \mathcal{A}_m^*$$

то для нормированного на единицу вектора

$$|\tilde{\mathcal{A}}\rangle = \frac{\sum |m\rangle \mathcal{A}_m^*}{\sqrt{\sum \mathcal{A}_k^* \mathcal{A}_k}}$$

величина

$$\langle \tilde{\mathcal{A}} | s_z | \tilde{\mathcal{A}} \rangle = \sum m w_m$$

где вес собственного значения

$$w_m = \frac{\mathcal{A}_m^* \mathcal{A}_m}{\sum \mathcal{A}_k^* \mathcal{A}_k}, \quad 0 \leq w_m \leq 1$$

причем сумма весов равна единице

$$\sum w_m = 1$$

Всем эти построениям следует придать вполне ясный физический смысл: - соотношение полноты базиса (3.25) описывает идеальный измерительный прибор, который «видит» все компоненты вектора, - величина

$$\langle s_z \rangle = \langle \mathcal{A} | s_z | \mathcal{A} \rangle \frac{1}{\sum \mathcal{A}_k^* \mathcal{A}_k}$$

описывает среднее значение матрицы, в данном случае, проекции спина на ось z ,

- причем каждое измерение проекции спина прибором дает одно из собственных значений заданной матрицы спина:

$$s_z = \sum |m\rangle m \langle m|$$

- каждое собственное значение имеет вероятность

$$w_m = \tilde{\mathcal{A}}_m^* \tilde{\mathcal{A}}_m$$

причем для нормированного на единицу вектора $\tilde{\mathcal{A}}$ проекцию

$$\tilde{\mathcal{A}}_m = \langle \tilde{\mathcal{A}} | m \rangle$$

называют амплитудой вероятности для значения проекции спина, равной m , при усреднении по вектору $\tilde{\mathcal{A}}$.

В случае, когда все эти построения проводятся в базисе, который не является собственным для эрмитовой матрицы, физический смысл проведенных построений не изменяется, хотя операторное представление становится не диагональным. Например, в декартовом базисе

$$\langle \mathbf{e}^\alpha | s_z | \mathbf{e}^\beta \rangle = (s_z)^\alpha_\beta, \quad s_z = \sum |\mathbf{e}_\alpha\rangle (s_z)^\alpha_\beta \langle \mathbf{e}^\beta|$$

Наконец отметим, что, поскольку для вектора квадрат матрицы спина - это число, $s^2 = 2$, собственные вектора s_z являются собственными и для квадрата спина векторной матрицы.

Здесь логично поставить вопрос о том, в каком случае две эрмитовы матрицы могут иметь совместный базис собственных векторов. Такой базис может служить основой для классификации полей по собственным значениям генераторов группы симметрии, в нашем случае, группы вращений.

Совместный базис двух эрмитовых матриц

Пусть две эрмитовы матрицы $A^\dagger = A$, $B^\dagger = B$ имеют совместный базис:

$$A|a, b\rangle = a|a, b\rangle, \quad B|a, b\rangle = b|a, b\rangle.$$

Тогда

$$AB|a, b\rangle = Ab|a, b\rangle = bA|a, b\rangle = ba|a, b\rangle, \quad BA|a, b\rangle = Ba|a, b\rangle = aB|a, b\rangle = ab|a, b\rangle,$$

а значит,

$$(AB - BA)|a, b\rangle = [A, B]|a, b\rangle = 0,$$

для любых базисных векторов, следовательно, коммутатор таких матриц равен нулю:

$$[A, B] = 0.$$

Справедливо и обратное утверждение: если коммутатор двух эрмитовых матриц равен нулю, то может быть выбран совместный базис их собственных векторов. В самом деле, если спектр матрицы A невырожден, $A|a\rangle = a|a\rangle$, то введем

$$|f\rangle = B|a\rangle.$$

Тогда в силу равенства нулю коммутатора

$$A|f\rangle = AB|a\rangle = BA|a\rangle = Ba|a\rangle = aB|a\rangle = a|f\rangle,$$

а значит, вектор $|f\rangle$ является собственным для матрицы A со значением a , т.е. в силу невырожденности собственного значения

$$|f\rangle = f|a\rangle, \quad \Rightarrow \quad B|a\rangle = f|a\rangle,$$

и следовательно, f - собственное значение для эрмитовой матрицы B , которое должно быть вещественным, и базисный вектор $|a\rangle$ общий для обеих матриц.

Если собственное значение a вырождено, $A|a, \alpha\rangle = a|a, \alpha\rangle$, со степенью вырождения k , $\alpha = \{1, \bar{k}\}$, то введем

$$\begin{aligned} |f, \alpha\rangle &= B|a, \alpha\rangle \\ A|f, \alpha\rangle &= AB|a, \alpha\rangle = BA|a, \alpha\rangle = Ba|a, \alpha\rangle = aB|a, \alpha\rangle = a|f, \alpha\rangle \end{aligned}$$

так что т.е. мы имеем вектор в k -мерном пространстве собственных векторов с собственным значением a , а значит, он разлагается по исходному базису $|a, \alpha\rangle$, который мы считаем ортонормированным,

$$|f, \alpha\rangle = C_{\bullet\beta}^{\alpha}|a, \beta\rangle = B|a, \alpha\rangle \Rightarrow \langle a, \beta|B|a, \alpha\rangle = C_{\bullet\beta}^{\alpha}.$$

Здесь квадратная матрица C размерности $k \times k$ является эрмитовой как результат действия в k -мерном пространстве матрицы B в силу эрмитовости матрицы B :

$$C_{\bullet\beta}^{\alpha} = \langle a, \beta|B|a, \alpha\rangle = (B|a, \beta\rangle)^{\dagger}|a, \alpha\rangle = \left(C_{\bullet\alpha'}^{\beta}|a, \alpha'\rangle\right)^{\dagger}|a, \alpha\rangle = (C^*)_{\alpha'}^{\bullet\beta} \langle a, \alpha'|a, \alpha\rangle = (C^*)_{\alpha}^{\bullet\bullet}.$$

$$C_{\bullet\beta}^{\alpha} = \langle a, \beta|B|a, \alpha\rangle = (B|a, \beta\rangle)^{\dagger}|a, \alpha\rangle = (C^{\beta \cdot \alpha'}|a, \alpha'\rangle)^{\dagger}|a, \alpha\rangle = (C^*)_{\alpha'}^{\bullet\beta} \langle a, \alpha'|a, \alpha\rangle = (C^*)_{\alpha}^{\bullet\bullet}.$$

Это означает, что можно перейти от базиса $|a, \alpha\rangle$ к базису собственных векторов матрицы C с вещественными значениями $c_{(\gamma)}$:

$$C|a, \gamma\rangle = c_{(\gamma)}|a, \gamma\rangle, \quad \text{нет суммирования по } \gamma.$$

В этом базисе,

$$B|a, \gamma\rangle = c_{(\gamma)}|a, \gamma\rangle, \quad \text{нет суммирования по } \gamma,$$

а значит, $c_{(\gamma)}$ - собственное значение матрицы B , и мы построили совместный базис собственных векторов для двух коммутирующих эрмитовых матриц.

Полный набор наблюдаемых

(полное обсуждение его для теории поля!!)

Стандартный базис (!!!?)

(полное обсуждение его для теории поля!!)

Построенный базис в задаче про квантование спина называют стандартным, он решает задачу классификации полей по базису собственных векторов генераторов спина

Алгоритм (!!)

(в 1ю часть перенесу!)

Итак, для классификации полей по собственным значениям эрмитовых генераторов группы симметрии, в частности, группы поворотов, необходимо выбрать максимальный набор попарно коммутирующих генераторов, для которого можно построить совместный базис собственных векторов. К этим генераторам, образующим подалгебру Картана, необходимо добавить независимые операторы Казимира, число которых совпадает с

рангом алгебры генераторов, и такой набор называют полным набором наблюдаемых для генераторов симметрии.

Проведенное рассмотрение показало физический смысл коммутатора генераторов группы симметрии: собственное значение одного генератора группы не изменяется при действии бесконечно малого преобразования группы с другим генератором, который коммутирует с первым. Если генераторы не коммутируют, то собственные значения генератора меняются при действии преобразования с другим генератором.

Стандартный базис (!!!)

(про него многое, ибо часто в него и переходим!)

Определитель экспоненты матрицы $\det e^A = e^{\text{tr } A}$ (???)

$$\det e^A = e^{\text{tr } A},$$

где матрицы вида $M = e^A$ обратимы, а $\text{tr } A$ означает взятие следа матрицы A .

Докажем. Рассмотрим решение уравнений для матриц $X(\tau)$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} X(\tau) = A \circ X(\tau)$$

с граничными условиями

$$X(0) = \mathbb{1}, \quad X(1) = M.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \det X(\tau) &= \det X(\tau) (X^{-1}(\tau))^{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} X(\tau)_{\alpha\beta} = \\ &= \det X(\tau) (X^{-1}(\tau))^{\beta\alpha} (A \circ X(\tau))_{\alpha\beta} = \\ &= \det X(\tau) \text{tr} (X^{-1}(\tau) \circ A \circ X(\tau)) = \det X(\tau) \text{tr } A. \end{aligned}$$

Элементарное интегрирование этого уравнения с учетом граничных условий дает требуемое равенство.

О применениях (??)

B.1.2 Some Differential Geometry

Во многих случаях изучение теории поля напрямую упирается в дифференциальную геометрию, поэтому соберем все необходимые методы, чтобы продолжать изучать поля.

Основы дифференциальной геометрии (?)

(мб удалю потом раздел этот, пока пусть повесит)

Основные понятия дифференциальной геометрии

Обсудим полезные понятия диффгема для теории поля.

(!! ненужные - удалю.)

Расслоения

Связность

Вектор

Системы координат

Определение замены координат

это диффеоморфизм

Сферическая система координат для теории поля

соберем её суть, самое основное.

типичные веткорные операции

Бимоль

Бимоль делает именно из вектора 1-форму с помощью обратной метрики, в координатах это превращение нижний индекс в верхний.

определение:

$$b : X \rightarrow X^b$$

$$X^b(Y) := g(X, Y)$$

Для $v = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$ получаем

$$v^b = v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

ибо

$$X^b(Y) = g_{ab} X^a Y^b$$

это можно делать, потому что есть изоморфизм между касательным и кокасательным пространством.

Диес

Переход из безкоординатной работы в координатный (??!!!)

очень актуально.

выбираем базис, переходим к нему.

Элементы теории дифференциальных форм

(тупо выгрузки Болибруха, так до ур М и не дошел, как-то много очень подготовки к ним нужно. мб потом дойду уже, если будет потребность)

мотивация писать уравнения Максвелла на языке форм

(с опытом впишу)

Напряженность $\vec{E}$ электрического и магнитного поля $\vec{H}$ не вектора (??)

Покажем, что $\vec{E}, \vec{H}$ и $\text{rot} \vec{v}$ не являются векторами, а являются формами, для этого рассмотрим их изменение при замене координат.

хз

модуль векторных полей над кольцом гладких функций

Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ пространство векторных полей $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Под векторным полем мы будем понимать выражение

$$\vec{v}(x^1, \dots, x^n) = \sum_{j=1}^n v_j(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

где $v_j(x^1, \dots, x^n)$ - гладкие функции, а через $\partial/\partial x^j$ обозначен вектор e_j стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$.

Такие поля еще иногда называют касательными.

Множество гладких функций на $\mathbb{R}^n$ будем обозначать $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Множество векторных полей является линейным пространством: векторные поля можно складывать (покоординатно) и умножать на числа.

Более того, их можно умножать на любые гладкие функции, заданные на всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

К сожалению, гладкие функции образуют не поле, а кольцо, поэтому говорят не о линейном пространстве векторных полей, а о модуле векторных полей над кольцом гладких функций.

пространство дифференциальных форм

Рассмотрим сопряженное пространство к $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, пространство $\mathcal{F}$ -линейных функционалов $\alpha : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$, т.е. таких отображений, что $\alpha(f\vec{v}) = f\alpha(\vec{v})$ для любой гладкой функции $f(x)$ и любого векторного поля $\vec{v}$ и $\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha(\vec{v}_1) + \alpha(\vec{v}_2)$.

Это сопряженное пространство также является модулем над кольцом гладких функций. (???? таким языком не владею, качать алгебру нужно)

Оно называется пространством дифференциальных 1-форм и обозначается $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$.

У этого модуля есть образующие, сопряженные к образующим $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, которые мы будем обозначать через dx^j :

$$dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Любая 1-форма может быть представлена в виде $\mathcal{F}$ -линейной комбинации этих образующих:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x^1, \dots, x^n) dx^i,$$

где $\alpha_i(x^1, \dots, x^n)$ - гладкие функции из $\mathcal{F}$.

При изменении координат в исходном пространстве соответственно меняются координаты и в сопряженном пространстве.

дифференциал функции является частным случаем 1 -формы

Компоненты 1-формы при этом меняются по тому же закону, что и компоненты дифференциала.

Это означает, что дифференциал функции f является частным случаем 1 -формы (что оправдывает введение таких обозначений для базиса сопряженного пространства), т.е. у нас имеется отображение $d: \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$.

Не всякая дифференциальная 1-форма является образом некоторой функции при взятии дифференциала (??)

нпр какая?

Не всякая дифференциальная 1-форма является образом некоторой функции при взятии дифференциала, но имеет место включение: образ d лежит в пространстве 1-форм.

Таким образом, дифференциал является не вектором, а ковектором - так принято называть дифференциальные 1 -формы.

2-ковекторы

Можно ли расширить это определение, т.е. рассмотреть не только 1-формы, но и, например, 2-формы? Оказывается, это сделать совсем нетрудно. Для этого нужно лишь вместо векторного поля рассмотреть пару векторных полей, и каждой паре поставить в соответствие гладкую функцию.

И если это отображение является $\mathcal{F}$ -линейным по каждому аргументу, то мы приходим к понятию 2-ковектора на множестве векторных полей: это просто $\mathcal{F}$ -билинейное отображение $\alpha: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

Пример: евклидова метрика

Рассмотрим два векторных поля $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в $\mathbb{R}^3$ и отображение, сопоставляющее паре векторов их скалярное произведение:

$$r: \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \quad r(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos \gamma$$

Легко проверить что это отображение $\mathcal{F}$ -билинейно; к тому же оно ещё и симметрическое: если поменять местами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, то результат не изменится.

Это отображение можно записать и в матричной форме:

$$r(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (x^1 y^1 z^1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix},$$

где x^i, y^i, z^i - координаты вектора $\vec{v}_i$.

Получаем симметрическую 2 -форму, которая называется евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$.

Пример: ориентированная площадь параллелограмма

А вот пример антисимметрического 2-ковектора, или внешней формы.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^2$ два векторных поля $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ и поставим им в соответствие ориентированную площадь $\tau(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ параллелограмма, построенного на этих векторах, которая в координатах равна

$$\begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix} = x^1 y^2 - x^2 y^1$$

Это отображение также является линейным по каждому из аргументов, но уже обладает свойством антикоммутативности: $\tau(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\tau(\vec{v}_2, \vec{v}_1)$.

Определение дифференциальной формы степени k

Внешней дифференциальной формой степени k называется отображение $\alpha : \underbrace{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}_k \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ называется, если оно $\mathcal{F}$ -линейно по каждому аргументу и

$$\alpha(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_n) = -\alpha(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n)$$

для любых i, j .

Пространство $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ внешних дифференциальных форм степени k и станет объектом нашего дальнейшего изучения.

Естественно, что всякий 1-ковектор можно рассматривать как внешнюю дифференциальную форму (впрочем, точно так же его можно рассматривать и как симметрическую форму).

Внешнее произведение

Основные свойства

Для того, чтобы записывать формы в координатах, мы введем новую операцию на дифференциальных формах - внешнее произведение.

Сначала определим ее для пары 1-форм. Эта операция будет тоже $\mathcal{F}$ -линейной, поэтому мы определим ее только на базисных 1-ковекторах, а затем распространим на все 1-формы по $\mathcal{F}$ -линейности. Каждой паре 1-форм эта операция ставит в соответствие 2-форму, причем на базисных ковекторах она определяется следующим образом:

$$(dx^i \wedge dx^j)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = dx^i(\vec{v}_1) dx^j(\vec{v}_2) - dx^i(\vec{v}_2) dx^j(\vec{v}_1)$$

Легко проверить, что полученная форма кососимметрична.

Замечательно, что таким образом можно получить весь базис в пространстве 2-форм. Поэтому любой элемент ω из $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ записывается очень просто:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \alpha_{i_1 i_2}(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$$

Аналогично можно определить внешнее произведение для форм произвольной степени.

Пусть α и β - p - и q -формы соответственно.

Тогда внешним произведением форм α и β называется $(p+q)$ -форма

$$(\alpha \wedge \beta)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum \varepsilon(s) \alpha(\vec{v}_s - 1_{(1)}, \dots, \vec{v}_s - 1_{(p)}) \times \beta(\vec{v}_s - 1_{(p+1)}, \dots, \vec{v}_{s-1(p+q)}),$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам $p+q$ элементов, а $\varepsilon(s)$ - знак перестановки S .

Инвариантность внешнего произведения относительно замены координат

Приведенное определение инвариантно, т.е. не зависит от выбора системы координат. (хз, почему)

Базис в пространстве 2-форм

Но если система координат фиксирована, то из него сразу следует, что базис в пространстве k -форм состоит из элементов вида $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

Поэтому произвольная форма α имеет вид

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} (x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Перестановка сомножителей во внешнем произведении

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

Отсюда, в частности, следует, что если степень α нечетна, то $\alpha \wedge \alpha = 0$.

Внешнее дифференцирование для произвольной формы

Заметим, что операция дифференцирования каждой функции сопоставляет 1-форму. А можно ли определить операцию дифференцирования Для произвольной формы? Оказывается, это очень легко сделать.

По определению полагаем

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\alpha_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Видно, что дифференциал повышает на единицу степень формы.

Кроме того, из этого определения сразу следует, что $d^2\alpha = 0$.

Действие дифференциала на внешние формы можно представить следующей диаграммой:

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \dots$$

Этот объект называется комплексом де Рама, и в нем содержится большой объем информации о пространстве, на котором заданы дифференциальные формы.

В данном случае мы имеем дело с $\mathbb{R}^n$, которое устроено довольно просто, но если бы мы стартовали с другого пространства,

скажем, со сферы, то по этому комплексу мы бы узнали очень многое о топологии пространства.

Нетрудно проверить, что введенная с помощью координат операция внешнего дифференцирования на самом деле от координат не зависит, т.е. является инвариантной (проверьте это самостоятельно).

Внутреннее произведение

Наконец, последняя операция, которую нам осталось ввести - операция внутреннего произведения.

Пусть у нас есть векторное поле $\vec{v}$ и внешняя форма α порядка p .

Тогда мы можем построить форму степени $p - 1$, которая называется внутренним произведением формы α и поля $\vec{v}$

$$(i_v \alpha)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p-1}) = \alpha(\vec{v}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p-1})$$

Это определение также не зависит от выбора системы координат.

примеры использования

покажем, как использовать теорию дифференциальных форм

общие соображения о пространстве

как понять, находясь в пространстве, что оно кривое

Посчитать нужно тензор Римана

как конкретно сделать это - Володя не знает, так что потом узнаю

клинометры какие-то есть там.

Дуальность Ходжа: суть

Соберем всю необходимую теорию дуальности Ходжа, ибо она супер часто используется.

(вот про это нужно подумать)

Суть дуальности Ходжа

Определение.

В присутствии (полу)римановой структуры $\mathfrak{g}$ на ориентированном многообразии M формула

$$\omega \wedge \star \lambda = \bar{\mathfrak{g}}(\omega, \lambda) \tau_{\mathfrak{g}}$$

корректно определяет линейный оператор $\star: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$, т.н. звёздочку Ходжа.

с помощью обратной метрики определяю

она есть, потому что:

Точнее можно сказать, что $\star$ определяется как композиция изоморфизмов в каждой точке

$$\Omega_p^k(M) \rightarrow (\Omega_p^k(M))^* \rightarrow \Omega_p^{n-k}(M)$$

Доказательство теоремы Ходжа

(потом дойду)

Поточечность дуальности Ходжа (???)

(?? хз)

Оператор звёздочки является поточечным, то есть линейным относительно умножения на функцию, $\star(f\omega) = f \star \omega$.

Дуальность Ходжа в $\mathbb{R}^3$

Например, в $\mathbb{R}^3$ с евклидовой метрикой

$$\begin{aligned}\star 1 &= dx \wedge dy \wedge dz, & \star(dx \wedge dy \wedge dz) &= 1, \\ \star dx &= dy \wedge dz, & \star dy &= dz \wedge dx, & \star dz &= dx \wedge dy, \\ \star(dx \wedge dy) &= dz, & \star(dy \wedge dz) &= dx, & \star(dz \wedge dx) &= dy.\end{aligned}$$

Действительно, по определению

$$\begin{aligned}dx \wedge \star dx &= \mathbf{g}(dx, dx) dx \wedge dy \wedge dz = g^{11} dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz, \\ \star dx &= dy \wedge dz\end{aligned}$$

(?? другие потом потренируюсь доказывать!?!)

В сферических координатах

Найдём сначала компоненты метрики $g_{\alpha\beta}$ в сферических координатах $(r, \vartheta, \varphi) : x = r \sin \vartheta \cos \varphi, y = r \sin \vartheta \sin \varphi, z = r \cos \vartheta$. Метрика в сферических координатах имеет диагональный вид

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \vartheta, \quad g_{\alpha\beta}|_{\alpha \neq \beta} = 0$$

Значит, обратная метрика также диагональна:

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}, \quad g^{\alpha\beta}|_{\alpha \neq \beta} = 0$$

Отсюда оператор звёздочки в сферических координатах имеет вид

$$\star dr = r^2 \sin \vartheta d\vartheta \wedge d\varphi, \quad \star d\vartheta = \sin \vartheta d\varphi \wedge dr, \quad \star d\varphi = \frac{1}{\sin \vartheta} dr \wedge d\vartheta,$$

тогда

$$\begin{aligned}\star 1 &= \tau_{\mathbf{g}} = \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi = r^2 \sin \vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi \\ dr \wedge \star dr &= g^{11} r^2 \sin \vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi = r^2 \sin \vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi \\ d\vartheta \wedge \star d\vartheta &= g^{22} r^2 \sin \vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi = \sin \vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi \\ d\varphi \wedge \star d\varphi &= g^{33} r^2 \sin \vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi = \frac{1}{\sin \vartheta} dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi\end{aligned}$$

И в итоге

$$\begin{aligned}\star(d\vartheta \wedge d\varphi) &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} dr, \\ \star(d\varphi \wedge dr) &= \frac{1}{\sin \vartheta} d\vartheta \\ \star(dr \wedge d\vartheta) &= \sin \vartheta d\varphi, \\ \star(dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi) &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta}\end{aligned}$$

Двойная звезда Ходжа

На n -мерном римановом многообразии M с полуримановой структурой $\mathbf{g}$ для звёздочки $\star : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$ выполняется

$$\star \star \omega = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn} \det \mathbf{g} \cdot \omega.$$

(??? почему так?)

Применения дуальности Ходжа (??)

Обсудим места, где нужна дуальность Ходжа.
(?? не уверен еще.)

Дуальности Ходжа в электродинамике (??)

Дуальный тензор напряженности ЭМ поля
типичная конструкция, на языке форм обсудим её.

Дуальность Ходжа в группе Пуанкаре (???)

Тензор спина (???)

я хз, что это и где это находится, но тоже там Л-Ч нужен, вроде.

Другие вопросы римановой геометрии для теории поля**Изменение знака нормы вектора при изменении системы координат (???)**

(Киселев написал, что он может меняться, проверю, пока такое не знаю.)

основные идеи дифференциальной геометрии

приведем основные понятия, которые далее будут нам помогать искривлять

ковариантное дифференцирование

(лл2 п85)

(все диффгемовское перекину в диффгем!! обязательно!! тут скорее всего очень многое не нужное для теории поля)

О введении ковариантной производной от Лашкевича

(мб просто у Володи спишу нормальную теорию, а не буду эту разбирать, ибо суть такая же)

$$\forall f \in C(U) : \dot{\varphi}(0)f = \left. \frac{df(\varphi(\tau))}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} \right|_{x=\varphi(0)} \left. \frac{d\varphi^\mu(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0}$$

$$\alpha a + \beta b = (\alpha a^\mu + \beta b^\mu) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$f(x^\bullet + \varepsilon a^\bullet) = f(x) + \varepsilon a^\mu \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} + O(\varepsilon^2) = f(x) + \varepsilon a f(x) + O(\varepsilon^2)$$

$$dx^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = \delta_\nu^\mu$$

$$\nabla_{b(\tau)} a(\tau) = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla_{fb} a &= f \nabla_b a \\ \nabla_b(fa) &= (bf)a + f \nabla_b a \quad (\forall f \in C(M), a, b \in C(TM)) \end{aligned}$$

$$\nabla(fa) = df a + f \nabla a$$

$$\nabla_\mu(fa) = \partial_\mu f a + f \nabla_\mu a$$

$$\nabla_\mu(a^\nu \partial_\nu) = (\partial_\mu a^\nu) \partial_\nu + a^\nu \nabla_\mu \partial_\nu$$

$$\nabla_\mu(a^\nu \partial_\nu) = (\nabla_\mu a)^\lambda \partial_\lambda$$

$$\nabla_\mu \partial_\nu = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda$$

тут вводятся символы кристоффеля

$$\ddot{a}^\lambda(\tau) + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \dot{\varphi}^\mu(\tau) a^\nu(\tau) = 0$$

$$(\nabla_b \omega)(a) + \omega(\nabla_b a) = b\omega(a), \quad \omega \in C(T^*M), a \in C(TM)$$

$$(\nabla_\mu \omega)_\kappa = \partial_\mu \omega_\kappa - \Gamma_{\kappa\mu}^\nu \omega_\nu$$

$$(\nabla_\mu t)_{\kappa_1 \dots \kappa_n}^{\lambda_1 \dots \lambda_m} = \partial_\mu t_{\kappa_1 \dots \kappa_n}^{\lambda_1 \dots \lambda_m} + \sum_{i=1}^m \Gamma_{\nu_i \mu}^{\lambda_i} t_{\kappa_1 \dots \kappa_n}^{\lambda_1 \dots \nu_i \dots \lambda_m} - \sum_{j=1}^n \Gamma_{\kappa_j \mu}^{\nu_j} t_{\kappa_1 \dots \nu_j \dots \kappa_n}^{\lambda_1 \dots \lambda_m}$$

$$\nabla_{\dot{\varphi}(\tau)} \dot{\varphi}(\tau) = 0$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\kappa} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\prime\kappa}} \frac{\partial x^{\prime\rho}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\prime\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x^{\prime\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\prime\kappa}}$$

$$\left(\nabla_{fb} - \tilde{\nabla}_{fb}\right)a = f\left(\nabla_b - \tilde{\nabla}_b\right)a$$

$$\left(\nabla_b - \tilde{\nabla}_b\right)(fa) = f\left(\nabla_b - \tilde{\nabla}_b\right)a$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu})$$

вкратце

хз

Ковариантная производная для связности Леви-Чивиты в координатах по Ландау

В галилеевых координатах дифференциалы dA_i вектора A_i образуют вектор, а производные $\partial A_i / \partial x^k$ от компонент вектора по координатам образуют тензор.

В криволинейных же координатах это не имеет места; dA_i не есть вектор, а $\partial A_i / \partial x^k$ не есть тензор.

Это связано с тем, что dA_i есть разность векторов, находящихся в разных (бесконечно близких) точках пространства; в разных же точках пространства векторы преобразуются различно, так как коэффициенты в формулах преобразования (83.2), (83.4) являются функциями координат.

В сказанном легко убедиться и непосредственно.

Для этого выведем формулы преобразования дифференциалов dA_i в криволинейных координатах.

Ковариантный вектор преобразуется согласно формулам

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k$$

Поэтому

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l$$

Таким образом, dA_i преобразуется вовсе не как вектор (то же относится, конечно, и к дифференциалам контравариантных векторов).

Только в случае, если вторые производные $\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} = 0$, т.е. если x'^k являются линейными функциями от x^k , формулы преобразования имеют вид

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k$$

т.е. dA_i преобразуется как вектор.

Мы займемся теперь определением тензора, который играет в криволинейных координатах роль тензора $\partial A_i / \partial x^k$ в галилеевых координатах.

Другими словами, мы должны преобразовать $\partial A_i / \partial x^k$ от галилеевых координат к криволинейным.

Для того чтобы получить в криволинейных координатах дифференциал вектора, являющийся вектором, надо,

чтобы оба вычитаемых один из другого вектора находились в одной точке пространства.

Другими словами, надо каким-то образом «перенести» один из двух бесконечно близких векторов в точку, где находится второй,

после чего определить разность обоих векторов, относящихся теперь к одной и той же точке пространства.

Сама операция переноса должна быть при этом определена таким образом, чтобы в галилеевых координатах указанная разность совпадала с обычным дифференциалом dA_i .

Поскольку dA_i есть просто разность компонент двух бесконечно близких векторов, то это значит, что в результате операции переноса при пользовании галилеевыми координатами компоненты вектора не должны изменяться.

Но такой перенос есть не что иное, как перенос вектора параллельно самому себе.

При параллельном переносе вектора его компоненты в галилеевых координатах не меняются; если же пользоваться криво-

линейными координатами, то при таком переносе компоненты вектора, вообще говоря, изменяются.

Поэтому в криволинейных координатах разность компонент обоих векторов после перенесения одного из них в точку, где находится второй, не будет совпадать с их разностью до переноса (т. е. с дифференциалом dA_i).

Таким образом, при сравнении двух бесконечно близких векторов мы должны один из них подвергнуть параллельному переносу в точку, где находится второй.

Рассмотрим какой-нибудь контравариантный вектор; если его значение в точке с координатами x^i есть A^i , то в соседней точке $x^i + dx^i$ он равен $A^i + dA^i$.

Вектор A^i подвергнем бесконечно малому параллельному переносу в точку $x^i + dx^i$; его изменение при этом обозначим посредством δA^i .

Тогда разность DA^i между обоими векторами, находящимися теперь в одной точке, равна

$$DA^i = dA^i - \delta A^i$$

Изменение δA^i компонент вектора при бесконечно малом параллельном переносе зависит от величины самих компонент, причем эта зависимость должна, очевидно, быть линейной.

Это следует непосредственно из того, что сумма двух векторов должна преобразовываться по тому же закону, что и каждый из них.

Таким образом, δA^i имеет ВИД

$$\delta A^i = -\Gamma_{kl}^i A^k dx^l$$

где Γ_{kl}^i - некоторые функции координат, вид которых зависит, конечно, от выбора системы координат; в галилеевой системе все $\Gamma_{kl}^i = 0$.

Уже отсюда видно, что величины Γ_{kl}^i не образуют тензора, так как тензор, равный нулю в одной системе координат, равен нулю и во всякой другой.

В искривленном пространстве нельзя, конечно, никаким выбором координат обратить все Γ_{kl}^i везде в нуль.

Принцип эквивалентности требует, однако, чтобы надлежащим выбором системы координат можно было исключить гравитационное поле в данном бесконечно малом участке пространства, т.

е.

обратить в нем в нуль величины Γ_{kl}^i , играющие, как мы увидим ниже в §87, роль напряженностей этого поля.

Величины Γ_{kl}^i называют коэффициентами связности или символами Кристоффеля.

Мы будем ниже пользоваться также и величинами $\Gamma_{i,kl}^2$, определяемыми следующим образом:

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im} \Gamma_{kl}^m$$

Обратно:

$$\Gamma_{kl}^i = g^{im} \Gamma_{m,kl}$$

Легко связать и изменение компонент ковариантного вектора при параллельном переносе с символами Кристоффеля.

Для этого заметим, что при параллельном переносе скаляры, очевидно, не меняются.

В частности, не меняется при параллельном переносе скалярное произведение двух векторов.

Пусть A_i и B^i - некоторый ковариантный и некоторый контравариантный векторы.

Тогда из $\delta(A_i B^i) = 0$ имеем:

$$B^i \delta A_i = -A_i \delta B^i = \Gamma_{kl}^i B^k A_i dx^l$$

или, меняя обозначение индексов,

$$B^i \delta A_i = \Gamma_{il}^k A_k B^i dx^l$$

Отсюда имеем ввиду произвольности B^i .

$$\delta A_i = \Gamma_{il}^k A_k dx^l$$

чем и определяется изменение ковариантного вектора при параллельном переносе.

Подставляя (85.2) и $dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} dx^l$ в (85.1), имеем:

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k \right) dx^l$$

Аналогично находим для ковариантного вектора:

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^k A_k \right) dx^l$$

Выражения, стоящие в скобках в (85.6) – (85.7), являются тензорами, так как умноженные на вектор dx^l они дают снова вектор.

Очевидно, что они и являются теми тензорами, которые осуществляют искомое обобщение понятия производной от вектора на криволинейные координаты.

Эти тензоры носят название ковариантных производных соответственно векторов A^i и A_i .

Мы будем обозначать их посредством $A^i{}_{;k}$ и $A_{i;k}$.

Таким образом,

$$DA^i = A^i{}_{;l} dx^l, \quad DA_i = A_{i;l} dx^l$$

а сами ковариантные производные:

$$A^i{}_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k$$

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^k A_k$$

В галилеевых координатах $\Gamma_{kl}^i = 0$ и ковариантные производные переходят в обычные.

Легко определить также ковариантную производную от тензора.

Для этого надо определить изменение тензора при бесконечно малом параллельном переносе.

Рассмотрим, например, какой-нибудь контравариантный тензор, являющийся произведением двух контравариантных векторов $A^i B^k$.

При параллельном переносе имеем:

$$\delta(A^i B^k) = A^i \delta B^k + B^k \delta A^i = -A^i \Gamma_{lm}^k B^l dx^m - B^k \Gamma_{lm}^i A^l dx^m$$

В силу линейности этого преобразования оно должно иметь место и для любого тензора A^{ik} :

$$\delta A^{ik} = - (A^{lm} \Gamma_{ml}^k + A^{mk} \Gamma_{ml}^i) dx^l$$

Подставляя это в

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} \equiv A^{ik}{}_{;l} dx^l$$

находим ковариантную производную тензора A^{ik} в виде

$$A^{ik}{}_{;l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma_{ml}^i A^{mk} + \Gamma_{ml}^k A^{im}$$

Совершенно аналогично находим ковариантные производные смешанного и ковариантного тензоров в виде

$$A^i{}_{k;l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} - \Gamma_{kl}^m A_m^i + \Gamma_{ml}^i A_k^m$$

$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^m A_{mk} - \Gamma_{kl}^m A_{im}$$

Аналогичным образом можно определить ковариантную производную тензора любого ранга.

При этом получается следующее правило ковариантного дифференцирования; чтобы получить ковариантную производную тензора $A \cdots$ по x^l , к обычной производной $\partial A \cdots / \partial x^l$ на каждый ковариантный индекс $i (A_i)$ надо прибавить член $-\Gamma_{il}^k A_k$, член $+\Gamma_{kl}^i A \cdot k$

Можно легко убедиться в том, что ковариантная производная от произведения находится по тем же правилам,

что и обычная производная от произведения.

При этом ковариантную производную от скаляра φ надо понимать как обычную производную, т.

е.

как ковариантный вектор $\varphi_k = \partial \varphi / \partial x^k$, в согласии с тем, что для скаляров $\delta \varphi = 0$ и потому $D\varphi = d\varphi$.

Например, ковариантная производная произведения $A_i B_k$, равна

$$(A_i B_k)_{;l} = A_{i;l} B_k + A_i B_{k;l}$$

Поднимая у ковариантных производных индекс, указывающий дифференцирование, мы получим так называемые контравариантные производные.

Так,

$$A_i{}^{;k} = g^{kl} A_{i;l}, \quad A^{i;k} = g^{kl} A^i{}_{;l}$$

Выведем теперь формулы преобразования от одной системы координат к другой для символов Кристоффеля.

Эти формулы можно получить, сравнивая законы преобразования обеих частей равенств, определяющих любую из ковариантных производных, и требуя, чтобы эти законы для обеих частей были одинаковы.

Простое вычисление приводит к формуле

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{np}^m \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}$$

Из этой формулы видно, что величины Γ_{kl}^i ведут себя как тензоры лишь по отношению к линейным преобразованиям координат (когда исчезает второй член в (85.15)).

Заметим, что член, добавляющийся к кристоффелям при его преобразовании $\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{np}^m \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}$ симметричен по индексам k, l ; поэтому он выпадает при образовании разности $S_{kl}^i = \Gamma_{kl}^i - \Gamma_{lk}^i$. Она преобразуется, следовательно, по тензорному закону

$$S_{kl}^i = S_{np}^m \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l}$$

т.е. является тензором.

Его называют тензором кручения пространства.

В случае принципа эквивалентности тензор кручения равен нулю, согласно Ландау (???)

Покажем теперь, что в излагаемой теории, основанной на принципе эквивалентности, тензор кручения должен равняться нулю.

Действительно, как уже говорилось, в силу этого принципа должна существовать «галилеева» система координат, в которой в данной точке обращаются в нуль величины Γ_{kl}^i , а следовательно и S_{kl}^i .

Но поскольку S_{kl}^i - тензор, то, будучи равным нулю в одной системе, он будет равен нулю и в любой системе координат.

Это означает, что символы Кристоффеля должны быть симметричны по нижним индексам:

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i$$

Очевидно, что и

$$\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}$$

В общем случае имеется всего 40 различных величин Γ_{kl}^i - для каждого из четырех значений индекса i имеется 10 различных пар значений индексов k и l (считая пары, получающиеся перестановкой k и l одинаковыми)

Формула (85.15) позволяет доказать сделанное выше утверждение о возможности при условии (85.16) такого выбора системы координат, при котором все Γ_{kl}^i обращаются в нуль в любой наперед заданной точке (такую систему называют локально-инерциальной или локальногеодезической, см.

§87).

Действительно, пусть заданная точка выбрана в качестве начала координат и величины Γ_{kl}^i имеют в ней первоначально (в координатах x^i) значения $(\Gamma_{kl}^i)_0$.

Произведем вблизи этой точки преобразование

$$x^i = x^i + \frac{1}{2} (\Gamma_{kl}^i)_0 x^k x^l$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \right)_0 = (\Gamma_{kl}^i)_0$$

и согласно (85.15) все Γ_{np}^m обращаются в нуль.

Подчеркнем, что условие (85.16) здесь существенно: выражение в левой части равенства (85.19) симметрично по индексам k, l , поэтому должна быть симметрична и правая часть равенства.

Заметим, что для преобразования (85.18)

$$\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \right)_0 = \delta_k^i$$

поэтому оно не меняет значений любого тензора (в том числе тензора g_{ik}) в заданной точке, так что обращение символов Кристоффеля в нуль может быть осуществлено одновременно с приведением g_{ik} к галилееву виду.

Символы Кристоффеля

(мб соберу про них тут теорию, а мб и выше.)

Метрика и простейшие из нее объекты

Метрика

Определение

билинейная симметричная форма на касательных векторах
(там формула отображения)

Определение обратной метрики

а обратная метрика в безкоординатном методе?
билинейная форма на кокасательном пространстве

Обратная метрика**Суть****В сферических координатах****Геометрия искривленного пространства****формула Гаусса в искривленном пространстве**

При вычислении вариации общековариантного (?) действия нужно интегрировать по частям.

При этом используется аналог закон Гаусса с ковариантными производными.

Ковариантная дивергенция векторного поля A_μ может быть записана

$$A_{;\alpha}^\alpha \equiv \nabla_\alpha A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g} A^\alpha)$$

Предполагая, что вклад граничных членов равен нулю, получаем

$$\int d^n x \sqrt{-g} A_{;\alpha}^\alpha B = - \int d^n x \sqrt{-g} A^\alpha B_{, \alpha}$$

Эту формулу можно использовать для интегрирования по частям: полагаем $A^\mu \equiv \phi_{, \alpha} g^{\alpha \mu}$, $B \equiv \psi$ и находим

$$\int d^4 x \sqrt{-g} \phi_{, \alpha} \psi_{, \beta} g^{\alpha \beta} = - \int d^4 x \sqrt{-g} (\phi_{, \alpha} g^{\alpha \beta})_{; \beta} \psi$$

Ковариантная производная метрики равна нулю, $g_{\alpha \beta}^{; \alpha} = 0$ поэтому мы можем поднимать и опускать под индексы ковариантной производной, $A_{;\alpha}^\alpha = A_{; \alpha}^\alpha$

элемент объема искривленного пространства**вкратце про элемент объема**

Покажем, что...

$d^4 x$ - элемент объема, если координаты x декартовы (пространство-время плоское),

$d^4 x \sqrt{-g}$ - элемент объема в искривленном пространстве.

Рассмотрим двумерную евклидову плоскость с декартовыми координатами x, y и введем произвольные криволинейные координаты $\tilde{x}, \tilde{y}$ и метрику $g_{ij}(x)$ (здесь $i, j = 1, 2$)

Бесконечно малые приращения $d\tilde{x}, d\tilde{y}$ координат определяют элемент площади, соответствующий бесконечно малому параллелограмму, натянутому на векторы $(d\tilde{x}, 0)$ и $(0, d\tilde{y})$.

Длины сторон этого параллелограмма равны $l_1 = \sqrt{g_{11}}|d\tilde{x}|$ и $l_2 = \sqrt{g_{22}}|d\tilde{y}|$, а угол θ между векторами находится из теоремы косинусов, $l_1 l_2 \cos \theta = g_{12} d\tilde{x} d\tilde{y}$.

Таким образом, бесконечно малая площадь dA параллелограмма равна

$$dA = l_1 l_2 \sin \theta = \sqrt{g_{11} g_{22} - (g_{12})^2} |d\tilde{x}| |d\tilde{y}| = \sqrt{\det g_{ij}} |d\tilde{x}| |d\tilde{y}|$$

Покажем, что элемент объема в любом количестве измерений задается формулой

$$dV = d^n x \sqrt{|g(x)|}$$

...

примеры

обзор применений в теории поля

Ковариантная производная

Введение кривизны в пространство

Посмотрим, как можно сделать плоское пространство кривым.
(из диффеома структура, ее следствия сюда)

Тензор кривизны

Вывод по Лашкевичу

$$\begin{aligned} a_1^\lambda(\tau) &= - \int_0^\tau d\tau_1 \Gamma_{\nu\mu}^\lambda (x^\bullet + \delta\varphi^\bullet(\tau_1)) \dot{\varphi}^\mu(\tau_1) a^\nu \\ &= -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta\varphi^\mu(\tau) a^\nu - \partial_\kappa \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \int_0^\tau d\tau_1 \delta\varphi^\kappa(\tau_1) \dot{\varphi}^\mu(\tau_1) a^\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2^\lambda(\tau) &= -a_1^\lambda(\tau) - \int_0^\tau d\tau_1 \Gamma_{\nu\mu}^\lambda (x^\bullet + \varphi^\bullet(\tau_1)) \dot{\varphi}^\mu(\tau_1) (a^\nu + a_1^\nu(\tau_1)) \\ &= -\Gamma_{\nu\mu}^\lambda \int_0^\tau d\tau_1 \dot{\varphi}^\mu(\tau_1) a_1^\nu(\tau_1) \\ &= \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \Gamma_{\kappa\rho}^\nu \int_0^\tau d\tau_1 \dot{\varphi}^\mu(\tau_1) \delta\varphi^\kappa(\tau_1) a^\rho \end{aligned}$$

$$\delta a^\lambda \equiv a^\lambda(1) - a^\lambda(0) = a_1^\lambda(1) + a_2^\lambda(1) = -(\partial_\kappa \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \Gamma_{\nu\kappa}^\rho) a^\nu f^{\kappa\mu}$$

$$\begin{aligned} \delta_\xi a_\mu &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} a_\lambda(x^\bullet) - a_\mu(x'^\bullet) = \partial_\lambda a_\mu \xi^\lambda + a_\lambda \partial_\mu \xi^\lambda \\ &= \nabla_\lambda a_\mu \xi^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu a_\nu \xi^\lambda + a_\lambda \partial_\mu \xi^\lambda = (\nabla_\xi a)_\mu + a(\nabla_\mu \xi) \end{aligned}$$

произвольные тензорные поля:

$$\delta_\xi a_{k+1\dots 1}^{1\dots k} = \nabla_\xi a_{k+1\dots 1}^{1\dots k} - \sum_{i=1}^k a_{k+1\dots 1}^{1\dots i' \dots k} \nabla_i \xi^i + \sum_{i=k+1}^l a_{k+1\dots i' \dots i}^{1\dots k} \nabla_i \xi^{i'}$$

$$g_{\mu\nu} = g'_{\kappa\lambda} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}$$

Тензор Риччи и скаляр Риччи (???)

(тоже про них напишу тут.)

Основные формулы и смысл тензора Риччи

Тензор Риччи в линейном приближении

Например, две формулы ниже об одном и том же

$$R^{(1)}_{\mu\kappa} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h^\lambda_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 h^\lambda_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 h^\lambda_\kappa}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} \right)$$

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(-\eta^{\lambda\kappa} h_{\mu\nu,\lambda\kappa} + 2h_{(\mu,\nu)\lambda}^\lambda - h_{,\mu\nu} \right)$$

$$R_{ik} = \frac{1}{2} \left(-g^{lm(0)} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 h_i^l}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_k^l}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k} \right)$$

Например, две формулы ниже об одном и том же

$$R^{(1)}_{\mu\kappa} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h^\lambda_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 h^\lambda_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 h^\lambda_\kappa}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} \right)$$

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(-\eta^{\lambda\kappa} h_{\mu\nu,\lambda\kappa} + 2h_{(\mu,\nu)\lambda}^\lambda - h_{,\mu\nu} \right)$$

$$R_{ik} = \frac{1}{2} \left(-g^{lm(0)} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 h_i^l}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_k^l}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k} \right)$$

(?????? почему у Вайнберга другая формула????) ниже она:

$$R^{(1)}_{\mu\kappa} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h^\lambda_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 h^\lambda_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 h^\lambda_\kappa}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} \right)$$

(??? скорее всего, у Вайнберга ошибка в этом, потом в ОТО напишу про эту тему)

Преобразования тензорных полей

связь символов Кристоффеля с метрическим тензором по Ландау

ковариантная производная от метрического тензора g_{ik} равна нулю (??)

(??? в общем случае же это не так??? пока просто по Ландау.)

Докажем, что ковариантная производная от метрического тензора g_{ik} равна нулю.

Для этого заметим, что для вектора DA_i , как и для всякого вектора, должно иметь место соотношение

$$DA_i = g_{ik} DA^k$$

С другой стороны, $A_i = g_{ik} A^k$, и потому

$$DA_i = D(g_{ik} A^k) = g_{ik} DA^k + A^k Dg_{ik}$$

Сравнивая с $DA_i = g_{ik} DA^k$, имеем в виду произвольности вектора A^i .

$$Dg_{ik} = 0$$

Поэтому и ковариантная производная

$$g_{ik;l} = 0$$

Таким образом, при ковариантном дифференцировании g_{ik} надо рассматривать как постоянные.

Символы кристоффеля через метрику

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$$

Равенством $g_{ik;l} = 0$ можно воспользоваться для того, чтобы выразить символы Кристоффеля Γ_{kl}^i через метрический тензор g_{ik} .

Для этого напомним согласно общему определению (85.14):

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk} \Gamma_{il}^m - g_{im} \Gamma_{kl}^m = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,kl} = 0$$

Таким образом, производные от g_{ik} выражаются через символы Кристоффеля.

Напишем эти производные, переставляя индексы i, k, l :

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl}, \quad \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik}, \quad -\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -\Gamma_{l,ki} - \Gamma_{k,li}$$

Взяв полусумму этих равенств, находим (помня, что $\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}$)

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right)$$

Отсюда имеем для символов $\Gamma_{kl}^i = g^{im} \Gamma_{m,kl}$

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$$

Эти формулы и дают искомые выражения символов Кристоффеля через метрический тензор.

Упрощенный символ Кристоффеля Γ_{ki}^i

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}$$

Определим дифференциал dg определителя g , составленного из компонент тензора g_{ik} ; dg можно получить, взяв дифференциал от каждой компоненты тензора g_{ik} и умножив ее на свой коэффициент в определителе, т.е. на соответствующий минор.

С другой стороны, компоненты тензора g^{ik} , обратного тензору g_{ik} , равны, как известно, минорам определителя из величин g_{ik} , деленным на этот определитель.

Поэтому миноры определителя g равны gg^{ik} .

Таким образом,

$$dg = gg^{ik} dg_{ik} = -gg_{ik} dg^{ik}$$

Поскольку $g_{ik} g^{ik} = \delta_i^i = 4$, то

$$g^{ik} dg_{ik} = -g_{ik} dg^{ik}$$

Из (86.3) имеем:

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m} \right)$$

Меняя местами индексы m и i в третьем и первом членах в скобках, видим, что оба эти члена взаимно сокращаются, так что

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}$$

Или согласно (84.6)

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}$$

Полезно заметить также выражение для величины $g^{kl}\Gamma_{kl}^i$.

Имеем:

$$g^{kl}\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2}g^{kl}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) = g^{kl}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right)$$

С помощью (86.4) это можно преобразовать к виду

$$g^{kl}\Gamma_{kl}^i = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}g^{ik})}{\partial x^k}$$

При различных вычислениях бывает полезным иметь в виду, что производные от контравариантного тензора g^{ik} связаны с производными от g_{ik} соотношениями И

$$g_{il}\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^m} = -g^{lk}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^m}$$

(получающимися при дифференцировании равенства $g_{il}g^{lk} = \delta_l^k$).

Производные от g^{ik} через Γ_{kl}^i .

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma_{ml}^i g^{mk} - \Gamma_{ml}^k g^{im}$$

Это следует из тождества $g^{ik}; l = 0$.

С помощью полученных формул можно привести к удобному виду выражение $A_{;i}^i$, являющееся обобщением дивергенции вектора на криволинейные координаты.

Воспользовавшись (86.5), имеем:

$$A_{;i}^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma_{li}^i A^l = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^l \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^l}$$

Или окончательно

$$A_{;i}^i = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}A^i)}{\partial x^i}$$

Аналогичное выражение можно получить и для дивергенции антисимметричного тензора A^{ik} .

Из (85.12) имеем:

$$A_{;k}^{ik} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma_{mk}^i A^{mk} + \Gamma_{mk}^k A^{im}$$

Но поскольку $A^{mk} = -A^{km}$, то

$$\Gamma_{mk}^i A^{mk} = -\Gamma_{km}^i A^{km} = 0$$

Подставляя выражение (86.5) для Γ_{mk}^k , находим, следовательно:

$$A_{;k}^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}A^{ik})}{\partial x^k}$$

Пусть теперь A_{ik} - симметричный тензор; определим выражение $A_{i;k}^k$ для его смешанных компонент.

Имеем:

$$A_{i;k}^k = \frac{\partial A_i^k}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^k A_i^l - \Gamma_{ik}^l A_l^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (A_i^k \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^l A_l^k$$

Последний член здесь равен

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) A^{kl}$$

В силу симметрии тензора A^{kl} два члена в скобках взаимно сокращаются, и остается

$$A_{i;k}^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A_i^k)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} A^{kl}$$

В декартовых координатах $\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$ есть антисимметричный тензор.

В криволинейных координатах этот тензор есть $A_{i;k} - A_{k;i}$. Однако с помощью выражений для $A_{i;k}$ и ввиду того, что $\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i$, имеем:

$$A_{i;k} - A_{k;i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$$

Наконец, преобразуем к криволинейным координатам сумму $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x^i}$ вторых производных от некоторого скаляра φ .

Очевидно, что в криволинейных координатах эта сумма перейдет в $\varphi_{;i}^i$. Но $\varphi_{;i} = \partial \varphi / \partial x^i$, так как ковариантное дифференцирование скаляра сводится к обычному дифференцированию.

Поднимая индекс i , имеем:

$$\varphi^{;i} = g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$$

и с помощью формулы (86.9) находим:

$$\varphi_{;i}^i = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right)$$

Полезно заметить, что теорема Гаусса (83.17) для преобразования интеграла от вектора по гиперповерхности в интеграл по 4-объему может быть написана ввиду (86.9) как

$$\oint A^i \sqrt{-g} dS_i = \int A_{;i}^i \sqrt{-g} d\Omega$$

Объемы

Риманов объем

про него приведу теорию, пока что не умею считать его.

Суть

у нас есть метрика, мы хотим определить форму наивысшей степени

у нас есть изометрии метрики.

корень для того, чтобы форма не зависела от систем координат.

а можно написать формулу и доказать, что она корректно определяет плотность меры.

Другие темы дифференциальной геометрии

(всё остальное тут)

Четырёхмерные векторы

(идея в том, чтобы их подробно обсудить)

отличие векторов от ковекторов

Важно это обсудить, потому что часто возникают вопросы.

B.1.3 Some PDE

(мб про операторы также подраздел сделаю. на каждую теорему укажу потом применения. нужно будет - буду развивать эту часть, пока что не особо она была нужна)

Классические задачи математической физики

Задача Пуассона (???)

(крайне часто встречается, позже пропишу. пока так четко и не вижу, как нужна она.)

Суть

Теория

Теория Киселева о формуле Сохоцкого

(потом половину удалю, половину в теорию перенесу)

Рассмотрим диэлектрическую проницаемость ϵ , которая не имеет особых точек на оси частот, как, например, в случае квазиупругих диполей. Тогда существует (интегральная) связь между реальной и мнимой частями ϵ - дисперсионные соотношения Крамерса-Кронига. Для вывода этих соотношений нам необходимы два ингредиента. 1. Формула Сохоцкого для сингулярной (обобщенной) функции (с особой точкой):

$$\frac{1}{x \pm i0} = \text{PV} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)$$

где символ $\pm i0$ означает предел сверху или снизу соответственно, а PV - взятие интеграла от функции под этим знаком в смысле главного значения (Principal Value), определение которого станет ясным в ходе вывода этой формулы. 2. Формула Коши для "вычета" комплексной функции

$$\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z)$$

где интеграл берется по контуру от регулярной функции $f(z)$ (без особых точек).

Формула Сохоцкого, по сути, является предписанием для вычисления сингулярного интеграла от произведения регулярной функции f на сингулярную (с особой точкой):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - i0} dx$$

где для определенности мы выбрали пределы интегрирования бесконечными, хотя применимость формулы для произвольных интервалов, содержащих особую точку, будет очевидна по ходу изложения. Итак, особая точка расположена в

$$x = i0$$

т.е. сверху от вещественной оси на комплексной плоскости x :

Согласно Сохоцкому введем малый параметр $\varepsilon \rightarrow +0$ и разобьем интегрирование на три интервала, как показано на рисунке: от $-\infty$ до $-\varepsilon$, по полуокружности в нижней полуплоскости с радиусом ε и интеграл от $+\varepsilon$ до $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - i0} dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx.$$

Сумма интегралов с равным отступом от особой точки

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \text{PV} \frac{1}{x} dx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

называется интегралом в смысле главного значения. Интегрирование по полуокружности легко провести, используя замену переменных

$$x = \varepsilon e^{i\phi}, \quad \pi < \phi < 2\pi,$$

так что в пределе $\varepsilon \rightarrow +0$ в силу регулярности $f(x) \rightarrow f(0)$ и

$$\int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{i\phi}} f(0) d(\varepsilon e^{i\phi}) = i f(0) \int_{\pi}^{2\pi} d\phi = i\pi f(0)$$

что и приводит к выводу формулы Сохоцкого.

Смещение же сингулярной точки в нижнюю полусферу, т.е. интегрирование по часовой стрелке (по углу от π до 0), дает необходимый результат и в этом случае. После проведенного рассмотрения вывод формулы Коши становится прозрачным при взятии интеграла по контуру против часовой стрелки, если контур представляет собой окружность бесконечно малого радиуса. Ясно также, что если внутри такого бесконечно малого контура нет особой точки, то значение интеграла равно нулю (при условии дифференцируемости комплексной функции, но мы не будем здесь углубляться в теорию функций комплексного переменного). Отсюда сразу следует, что бесконечно малыми шагами, контур интегрирования можно деформировать произвольным образом, если при этом не пересекать особых точек.

Таким образом, у нас теперь есть математический аппарат, достаточный для вывода интересующих нас дисперсионных соотношений.

Для этого вычислим интеграл от функции $\epsilon(\omega) - 1$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon(\tilde{\omega}) - 1}{\tilde{\omega} - \omega - i0} d\tilde{\omega},$$

где единицу мы вычли для того, чтобы обеспечить сходимость интеграла на бесконечности, сначала по формуле Сохоцкого (особая точка в верхней полуплоскости):

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} [\epsilon(\tilde{\omega}) - 1] \frac{d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} - \omega} + i\pi[\epsilon(\omega) - 1]$$

Затем замкнем контур интегрирования на бесконечности, где интеграл по полуокружности равен нулю, так как функция $\epsilon(\tilde{\omega}) - 1$ достаточно быстро затухает:

В этом случае (замкнутый контур с особой точкой внутри) можно применить формулу Коши, так что

$$I_1 = \oint \frac{\epsilon(\tilde{\omega}) - 1}{\tilde{\omega} - \omega - i0} d\tilde{\omega} = i2\pi[\epsilon(\omega) - 1]$$

Сравнивая результаты вычисления интеграла двумя способами, легко найти

$$i\pi[\epsilon(\omega) - 1] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\epsilon(\tilde{\omega}) - 1] \frac{d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} - \omega}$$

Теперь сначала возьмем мнимую часть обеих сторон уравнения (Д.42), откуда получаем выражение для вещественной части ϵ в виде интеграла от мнимой:

$$\begin{aligned} \pi [\epsilon'(\omega) - 1] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon''(\tilde{\omega}) \frac{d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} - \omega} \Leftrightarrow \\ \epsilon'(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon^{+\infty}(\tilde{\omega}) \frac{d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} - \omega} \end{aligned}$$

Если теперь взять реальную часть (Д.42), то получим

$$\begin{aligned} -\pi \epsilon''(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\epsilon'(\tilde{\omega}) - 1] \frac{d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} - \omega} \Leftrightarrow \\ \epsilon''(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\epsilon'(\tilde{\omega}) - 1] \frac{d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} - \omega} \end{aligned}$$

Уравнения (Д.43)-(Д.44) и являются дисперсионными соотношениями Крамерса-Кронига. Еще раз отметим, что для применения этих соотношений необходимо, чтобы диэлектрическая проницаемость достаточно быстро убывала на бесконечности (интеграл по полуокружности - нуль) и чтобы она не имела сингулярностей на вещественной оси.

Эти условия выполнены для квазиупругих диполей с ненулевыми затуханием и собственной частотой. В качестве контрпримера укажем на предельные случаи ионосферы и металла, когда в первом случае мы имеем у $\epsilon(\omega)$ полюс второго порядка, а во втором - простой полюс. В подобной ситуации необходимо рассмотреть функцию, регуляризованную вычитанием сингулярных вкладов (здесь полюсов), для которой уже будут применимы дисперсионные соотношения, правда, в указанных примерах эти соотношения становятся тривиальными, так как регуляризованные функции равны нулю.

Пример

Применим выведенные соотношения Крамерса-Кронига в частном случае квазиупругих диполей в пределе бесконечно малой (но не равной нулю) диссипации,

$\gamma \rightarrow 0$. Мнимая часть проницаемости в этом пределе

$$\begin{aligned}\epsilon''(\omega) &= 4\pi \frac{Ne^2}{m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \\ &= 4\pi \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} - \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right\} \\ &\xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} 4\pi \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i0} - \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i0} \right\}\end{aligned}$$

так что мы можем применить формулу Сохоцкого и найти

$$\epsilon''(\omega) = 4\pi \frac{Ne^2}{m} \pi \delta(\omega_0^2 - \omega^2)$$

Подставляя (Д.45) в (Д.43), получаем

$$\begin{aligned}\epsilon'(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} - \omega} 4\pi \frac{Ne^2}{m} \pi \delta(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2) \\ &= 1 + 4\pi \frac{Ne^2}{m} \int \frac{d\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} - \omega} \left[\delta(\omega_0 - \tilde{\omega}) \frac{1}{2\omega_0} + \delta(\omega_0 + \tilde{\omega}) \frac{1}{2\omega_0} \right] \\ &= 1 + 4\pi \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{2\omega_0} \left[\frac{1}{\omega_0 - \omega} + \frac{1}{\omega_0 + \omega} \right]\end{aligned}$$

В итоге,

$$\epsilon'(\omega) = 1 + 4\pi \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

что и представляет собой предел реальной части проницаемости при диссипации, стремящейся к нулю. Таким образом, с помощью дисперсионных соотношений мы восстановили вещественную часть проницаемости по мнимой. Отметим при этом, что полученное предельное выражение содержит полюса по ω , так что обращаться с такими функциями следует чрезвычайно аккуратно.

Формула Сохоцкого-Племеля

Обсудим подробно формулу Сохоцкого-Племеля, которая утверждает, что

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x \pm i0} dx = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x} dx \mp i\pi f(0)$$

Докажем ее. Разобьем интеграл на несколько частей:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x + i0} dx = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\mathcal{S}_e^+} \frac{f(x)}{x} dx$$

где $\mathcal{S}_e^+$ - полуокружность радиуса $\epsilon \rightarrow 0$ в верхней полуплоскости.

В данном случае

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

А интеграл по полуокружности делается через замену переменных

$$\int_{S_\epsilon^+} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\pi}^0 \frac{f(0)}{\epsilon e^{i\phi}} d(\epsilon e^{i\phi}) = -i\pi f(0)$$

В итоге доказали.

интегральная теорема Коши

Она нужна в (??)

формулировка, доказательство...

...

Особые функции для теории поля

Полиномы Лежандра

в электростатике встретились, так я про них и хз, но тут про них соберу теорию.

Конструкция полиномов Лежандра

(тут теория про них потом будет)

Доказательство ортогональности полиномов Лежандра

(у Киселева скопирую, пока что не до этого)

Обзор применений

(про электростатику потом пропишу)

Другие функции

(другие не особо ключевые просто тут)

Функция Эйри

Функция Эйри $\Phi(t)$ определяется формулой

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{\xi^3}{3} + \xi t\right) d\xi$$

(см.

том III, «Квантовая механика» & b).

При больших положительных значениях t функция $\Phi(t)$ экспоненциально убывает по асимптотическому закону

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{2t^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}\right)$$

При больших по абсолютной величине отрицательных значениях t функция $\Phi(t)$ осциллирует с убывающей амплитудой по закону

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{(-t)^{1/4}} \sin \left[\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right]$$

Функция Эйри связана с функцией Макдональда (модифицированной функцией Ганкеля) порядка $1/3$:

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{t}{3\pi}} K_{1/3} \left(\frac{2}{3} t^{3/2} \right)$$

Формула (2) соответствует асимптотическому выражению функций $K_\nu(t)$

$$K_\nu(t) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t}$$

Appendix of Varlamov to maxwell equations. Complex two-sphere and hyper-spherical functions

Let us construct in $\mathbb{C}^3$ a two-dimensional complex sphere from the quantities $z_k = x_k + iy_k$, $z_k^* = x_k - iy_k$ as follows

$$\mathbf{z}^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 + 2i\mathbf{xy} = r^2$$

and its complex conjugate (dual) sphere

$$\mathbf{z}^* = z_1^{*2} + z_2^{*2} + z_3^{*2} = \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 - 2i\mathbf{xy} = r^{*2}$$

It is well-known that both quantities $\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2, \mathbf{xy}$ are invariant with respect to the Lorentz transformations, since a surface of the complex sphere is invariant (Casimir operators of the Lorentz group are constructed from such quantities, see also (A.4)). Moreover, since the real and imaginary parts of the complex two-sphere transform like the electric and magnetic fields, respectively, the invariance of $\mathbf{z}^2 \sim (\mathbf{E} + i\mathbf{B})^2$ under proper Lorentz transformations is evident. The group $SL(2, \mathbb{C})$ of all complex matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

of 2-nd order with the determinant $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$, is a complexification of the group $SU(2)$. The group $SU(2)$ is one of the real forms of $SL(2, \mathbb{C})$. The transition from $SU(2)$ to $SL(2, \mathbb{C})$ is realized via the complexification of three real parameters φ, θ, ψ (Euler angles). Let $\theta^c = \theta - i\tau, \varphi^c = \varphi - i\epsilon, \psi^c = \psi - i\varepsilon$ be complex Euler angles, where

$$\begin{aligned} 0 &\leq \operatorname{Re} \theta^c = \theta && \leq \pi, && -\infty < \operatorname{Im} \theta^c = \tau < +\infty, \\ 0 &\leq \operatorname{Re} \varphi^c = \varphi < 2\pi, && -\infty < \operatorname{Im} \varphi^c = \epsilon < +\infty, \\ -2\pi &\leq \operatorname{Re} \psi^c = \psi < 2\pi, && -\infty < \operatorname{Im} \psi^c = \varepsilon < +\infty. \end{aligned}$$

As known, for the Lorentz group there are two independent Casimir operators

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^2 &= \mathbf{X}_1^2 + \mathbf{X}_2^2 + \mathbf{X}_3^2 = \frac{1}{4} (\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 + 2i\mathbf{AB}) \\ \mathbf{Y}^2 &= \mathbf{Y}_1^2 + \mathbf{Y}_2^2 + \mathbf{Y}_3^2 = \frac{1}{4} (\tilde{\mathbf{A}}^2 - \tilde{\mathbf{B}}^2 - 2i\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}). \end{aligned}$$

Using the parameters (A.3), we obtain for the Casimir operators the following expressions

$$X^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^{c2}} + \cot \theta^c \frac{\partial}{\partial \theta^c} + \frac{1}{\sin^2 \theta^c} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^{c2}} - 2 \cos \theta^c \frac{\partial}{\partial \varphi^c} \frac{\partial}{\partial \psi^c} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^{c2}} \right],$$

$$Y^2 = \frac{\partial^2}{\partial \dot{\theta}^{c2}} + \cot \dot{\theta}^c \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}^c} + \frac{1}{\sin^2 \dot{\theta}^c} \left[\frac{\partial^2}{\partial \dot{\varphi}^{c2}} - 2 \cos \dot{\theta}^c \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}^c} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}^c} + \frac{\partial^2}{\partial \dot{\psi}^{c2}} \right].$$

Matrix elements of unitary irreducible representations of the Lorentz group are eigenfunctions of the operators (A.5):

$$\begin{aligned} [X^2 + l(l+1)] \mathfrak{M}_{mn}^l(\varphi^c, \theta^c, \psi^c) &= 0, \\ [Y^2 + i(i+1)] \mathfrak{M}_{\dot{m}\dot{n}}^i(\dot{\varphi}^c, \dot{\theta}^c, \dot{\psi}^c) &= 0, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{mn}^l(\varphi^c, \theta^c, \psi^c) &= e^{-i(m\varphi^c + n\psi^c)} Z_{mn}^l(\theta^c), \\ \mathfrak{M}_{\dot{m}\dot{n}}^i(\dot{\varphi}^c, \dot{\theta}^c, \dot{\psi}^c) &= e^{-i(\dot{m}\dot{\varphi}^c + \dot{n}\dot{\psi}^c)} Z_{\dot{m}\dot{n}}^i(\dot{\theta}^c). \end{aligned}$$

Substituting the functions (A.7) into (A.6) and taking into account the operators (A.5), we obtain a complex analog of the Legendre equations:

$$\begin{aligned} \left[(1-z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} - \frac{m^2 + n^2 - 2mnz}{1-z^2} + l(l+1) \right] Z_{mn}^l &= 0, \\ \left[\left(1-\overset{*}{z}\right) \frac{d^2}{dz^*} - 2\overset{*}{z} \frac{d}{dz^*} - \frac{\dot{m}^2 + \dot{n}^2 - 2\dot{m}\dot{n}z}{1-\overset{*}{z}} + \dot{l}(\dot{l}+1) \right] Z_{\dot{m}\dot{n}}^{\dot{l}} &= 0, \end{aligned}$$

where $z = \cos \theta^c$ and $\overset{*}{z} = \cos \dot{\theta}^c$. The latter equations have three singular points $-1, +1, \infty$. Solutions of (A.8) have the form

$$\begin{aligned} Z_{mn}^l &= \sum_{k=-l}^l i^{m-k} \sqrt{\Gamma(l-m+1)\Gamma(l+m+1)\Gamma(l-k+1)\Gamma(l+k+1)} \times \\ &\cos^{2l} \frac{\theta}{2} \tan^{m-k} \frac{\theta}{2} \times \\ &\sum_{j=\max(0, k-m)}^{\min(l-m, l+k)} i^{2j} \tan^{2j} \frac{\theta}{2} \times \\ &\sum_{j=\max(0, k-m)}^2 \frac{1}{\Gamma(j+1)\Gamma(l-m-j+1)\Gamma(l+k-j+1)\Gamma(m-k+j+1)} \times \\ &\sqrt{\Gamma(l-n+1)\Gamma(l+n+1)\Gamma(l-k+1)\Gamma(l+k+1)} \cosh^{2l} \frac{\tau}{2} \tanh^{n-k} \frac{\tau}{2} \times \\ &\sum_{s=\max(0, k-n)}^{\min(l-n, l+k)} \frac{\tanh^{2s} \frac{\tau}{2}}{\Gamma(s+1)\Gamma(l-n-s+1)\Gamma(l+k-s+1)\Gamma(n-k+s+1)}. \end{aligned}$$

We will call the functions Z_{mn}^l in (A.10) as hyperspherical functions⁹. The functions Z_{mn}^l can be written via the hypergeometric series as follows:

$$\begin{aligned} Z_{mn}^l &= \cos^{2l} \frac{\theta}{2} \cosh^{2l} \frac{\tau}{2} \sum_{k=-l}^l i^{m-k} \tan^{m-k} \frac{\theta}{2} \tanh^{n-k} \frac{\tau}{2} \times \\ &{}_2F_1 \left(\begin{matrix} m-l+1, 1-l-k \\ m-k+1 \end{matrix} \middle| i^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} n-l+1, 1-l-k \\ n-k+1 \end{matrix} \middle| \tanh^2 \frac{\tau}{2} \right). \end{aligned}$$

Therefore, matrix elements are expressed by means of the function) a generalized hyperspherical function)

$$\mathfrak{M}_{mn}^l(\mathfrak{g}) = e^{-m(\epsilon+i\varphi)} Z_{mn}^l(\cos \theta^c) e^{-n(\epsilon+i\psi)}$$

where

$$Z_{mn}^l(\cos \theta^c) = \sum_{k=-l}^l P_{mk}^l(\cos \theta) \mathfrak{P}_{kn}^l(\cosh \tau),$$

here $P_{mn}^l(\cos \theta)$ is a generalized spherical function on the group $SU(2)$ (see Ref. 66), and $\mathfrak{P}_{mn}^l$ is an analog of the generalized spherical function for the group $QU(2)$ (so-called Jacobi function [58]). $QU(2)$ is a group of quasiunitary unimodular matrices of second order. As well as the group $SU(2)$, the group $QU(2)$ is one of the real forms of $SL(2, \mathbb{C})$ ($QU(2)$ is noncompact). Other designation of this group is $SU(1, 1)$ known also as three-dimensional Lorentz group (this group is isomorphic to $SL(2, \mathbb{R})$). Associated hyperspherical functions are derived from (A.12) at $n = 0$. They have the form

$$\mathfrak{M}_l^m(\mathfrak{g}) = e^{m(\epsilon+i\varphi)} Z_l^m(\cos \theta^c).$$

⁹ The hyperspherical functions (or hyperspherical harmonics) are known in mathematics for a long time (see, for example, Ref. 65). These functions are generalizations of the three-dimensional spherical functions on the case of n -dimensional euclidean spaces. For that reason we retain this name (hyperspherical functions) for the case of pseudo-euclidean spaces.

Алгебры Ли

Определения

Напомним базовые понятия теории групп Ли, которые далее будут широко использоваться.

Группой G называется множество элементов $g_1, g_2, \dots$, в котором определено произведение элементов, называемое также операцией умножения или композицией и удовлетворяющее следующим условиям:

1. Замкнутость. Для любых двух элементов $g_1, g_2 \in G$ их произведение $g_1 g_2 \in G$
2. Ассоциативность. Для любых трех элементов $g_1, g_2, g_3 \in G$ выполняется $g_1 (g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3 = g_1 g_2 g_3$.
3. Существование единичного элемента. Существует такой элемент $e \in G$, что для любого элемента $g \in G$ выполняется $eg = ge = g$. Элемент e называется единичным элементом или единицей группы.
4. Существование обратного элемента. Для любого элемента $g \in G$ существует элемент $g^{-1} \in G$, такой что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$. Элемент g^{-1} называется элементом обратным к элементу g .

Используя эти свойства можно доказать единственность и единичного и обратного элементов и соотношение $e^{-1} = e$.

Группа называется коммутативной или абелевой, если для любых двух ее элементов $g_1, g_2 \in G$ выполняется $g_1 g_2 = g_2 g_1$. В противном случае группа называется некоммутиативной или неабелевой. Последнее означает, что существуют два элемента $g_1, g_2 \in G$ такие, что $g_1 g_2 \neq g_2 g_1$.

Подмножество $H \subset G$ называется подгруппой группы G , если H есть группа относительно той же операции умножения, что и в группе G . Другими словами, единичный элемент $e \in G$ принадлежит H , если $h \in H$, то $h^{-1} \in H$ и если $h_1 h_2 \in G$, то $h_1 h_2 \in H$.

Группа, состоящая из конечного числа элементов называется конечной, а число ее элементов - порядком группы. В этом случае можно записать явно произведение всех элементов группы, то есть составить таблицу g_i, g_j , называемую таблицей умножения группы.

Иногда конечную группу называют конечной дискретной группой. Если множество G счетно, то соответствующая группа называется бесконечной дискретной группой. Если множество G несчетно и является топологическим пространством, то соответствующая группа называется непрерывной. Мы в основном будем рассматривать специальный класс непрерывных групп, называемых группами Ли.

Две группы G и G' являются гомоморфными, если существует отображение f группы G в группу G' , такое, что для любых элементов $g_1, g_2 \in G$ выполняется

$$\begin{aligned} f(g_1 g_2) &= f(g_1) f(g_2) \\ f(g^{-1}) &= f^{-1}(g) \end{aligned}$$

Указанное отображение называется гомоморфизмом. При этом можно показать, что $f(e) = e'$ где e' - это единица в группе G' . Взаимно однозначный гомоморфизм называется изоморфизмом, а соответствующие группы называются изоморфными. По существу изоморфные группы неотличимы друг от друга. Изоморфизм группы обычно записывается как $G = G'$.

Группа называется группой Ли, если любой ее элемент является непрерывной, дифференцируемой функцией набора вещественных параметров $\theta^a, a = 1, 2, \dots, N$. То есть $g = g(\theta)$. При этом без потери общности параметры θ можно выбрать так, что $g(\theta)|_{\theta^a=0} = e$. Таким образом, группа Ли, обладает тремя структурами:

1. G - это группа;
2. G - это топологическое пространство, то есть для элементов множества G определено понятие близости;
3. G - это дифференцируемое многообразие, то есть каждый элемент g есть дифференцируемая функция конечного числа вещественных координат.

Рассмотрим множество обратимых линейных операторов, действующих в линейном пространстве. Очевидно, что это множество является группой относительно умножения операторов. Такая группа используется для определения представления группы. Представление R группы G называется отображение группы G в группу линейных операторов, действующих в некотором линейном пространстве V

$$g \rightarrow D_R(g)$$

причем

$$\begin{aligned} D_R(g^{-1}) &= D_R^{-1}(g) \\ D_R(g_1 g_2) &= D_R(g_1) D_R(g_2) \end{aligned}$$

Можно сказать, что представление группы - это гомоморфизм группы в группу линейных операторов. Операторы $D_R(g)$ называются операторами представления, а пространство в котором они действуют - пространством представления.

Мы в основном будем рассматривать матричные представления, где элементу группы g сопоставляется $n \times n$ матрица $D_R(g)^i_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. В этом случае число n называется размерностью представления. Концепция представления позволяет трактовать абстрактную группу как группу преобразований в некотором линейном пространстве. Пусть v вектор пространства представления с координатами $v^1, v^2, \dots, v^n$ относительно некоторого базиса. Преобразования генерируемые матрицами $D_R(g)^i_j$ выглядят так

$$v'^i = D_R(g)^i_j v^j$$

здесь по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Пусть R - представление группы G в линейном пространстве V и пусть $\tilde{V} \subset V$, где $\tilde{V}$ подпространство в V . Если для любого вектора $\tilde{v} \in \tilde{V}$ и для любого оператора $D_R(g)$ выполняется $D_R(g)\tilde{v} \in \tilde{V}$, то подпространство $\tilde{V}$ называется инвариантным подпространством представления R . Любое представление имеет всегда два инвариантных подпространства называемых тривиальными. Это подпространство $\tilde{V} = V$ и $\tilde{V} = \{0\}$ (состоит из одного нулевого вектора). Все остальные инвариантные подпространства, если они существуют, называются нетривиальными. Представление R называется приводимым, если оно имеет нетривиальные инвариантные подпространства. В противном случае оно называется неприводимым. Другими словами, представление R называется неприводимым, если оно имеет только тривиальные инвариантные подпространства. Представление называется полностью приводимым, если все матрицы представления $D_R(g)$ в некотором базисе имеют блочнодиагональный вид

$$D_R(g) = \begin{pmatrix} \boxed{D_1(g)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{D_2(g)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_k(g) \end{pmatrix}$$

Это означает, что пространство представления имеет k нетривиальных инвариантных подпространств, в каждом из которых задано неприводимое представление.

Конкретная группа Ли может иметь различные представления, в каждом из которых матрицы $D_R(g)$ имеют свой специфический вид. Однако, существуют определенные свойства группы Ли, не зависящие от представления. Эти свойства формулируются в терминах алгебры Ли. Пусть $D_R(g)$ - операторы представления R и $g = g(\theta)$. Тогда все операторы $D_R(g)$ будут функциями N параметров $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^N$, то есть $D_R(g) = D_R(\theta)$ и $D_R(\theta)|_{\theta^a=0} = D_R(e) = \mathbf{1}$. Где $\mathbf{1}$ - единичная матрица. тогда в окрестности единичного элемента можно записать

$$D_R(\theta) = \mathbf{1} + i\theta^a T_{Ra},$$

$$T_{Ra} = -i \left. \frac{\partial D_R(\theta)}{\partial \theta^a} \right|_{\theta=0}$$

Операторы T_{Ra} называются генераторами группы G в представлении R . Можно показать, что любой оператор $D_R(\theta)$, который может быть получен непрерывной деформацией из единичного элемента, имеет следующий вид

$$D_R(\theta) = e^{i\theta^a T_{Ra}}$$

Мнимую единицу i удобно выделить из условия, что если матрицы D_R унитарны, $D_R^\dagger D_R = \mathbf{1}$, то матрицы T_{Ra} - эрмитовы, $T_{Ra}^\dagger = T_{Ra}$. Можно показать, генераторы удовлетворяют следующим соотношениям в терминах коммутаторов

$$[T_{Ra}, T_{Rb}] = if_{ab}^c T_{Rc}$$

где f_{ab}^c - константы, называемые структурными постоянными группы. При этом очевидно, что $f_{ab}^c = -f_{ba}^c$. Вид матриц T_R зависит от представления, однако, можно доказать, что структурные постоянные от представления не зависят и характеризуют исходную группу G .

Генераторы группы тесно связаны с понятием алгебры Ли. Пусть A линейное пространство с элементами $a_1, a_2, \dots, a_N, \dots$. Линейное пространство A называется алгеброй Ли, если для любых ее элементов определена операция умножения $[a_1, a_2] \in A$ такая, что

1. $[a_1, a_2] = -[a_2, a_1]$
2. $[c_1 a_1 + c_2 a_2, a_3] = c_1 [a_1, a_3] + c_2 [a_2, a_3]$
3. $[a_1, [a_2, a_3]] + [a_2, [a_3, a_1]] + [a_3, [a_1, a_2]] = 0$

Здесь c_1, c_2 - вещественные или комплексные числа. Последнее из приведенных выше трех соотношений называется тождеством Якоби. Нетрудно проверить, что коммутатор операторов удовлетворяет всем свойствам операции умножения в алгебре Ли. Поэтому генераторы T_{Ra} автоматически формируют алгебру Ли, ассоциированную с группой Ли. Более точно они задают представление алгебры Ли в том смысле, что задано отображение T алгебры Ли A в линейное пространство операторов такое, что

$$T : a \rightarrow T(a)$$

$$[a_1, a_2] \rightarrow [T(a_1), T(a_2)]$$

Алгебра Ли называется коммутативной или абелевой, если для любых элементов $a_1, a_2 \in A$ выполняется $[a_1, a_2] = 0$, в противном случае она называется неабелевой. Можно показать, что алгебра Ли, ассоциированная с абелевой группой Ли, является абелевой алгеброй.

При изучении представлений группы Ли важную роль играют операторы Казимира, следующим образом. Пусть T_{Ra} - генераторы представления группы, операторами Казимира C_R называются функции генераторов, коммутирующие со всеми генераторами T_{Ra} .

О лемме Шура (!?)

Имеет место лемма Шура, согласно которой в каждом неприводимом представлении оператор Казимира пропорционален единичному оператору. При этом коэффициент пропорциональности характеризует данное конкретное неприводимое представление.

(вроде всегда и можно её видеть, если с Казимирами работаем)

мотивация изучать алгебры Ли и обзор их применений в теории поля

хз

Общий подход к преобразованиям (??)

(про то, что формализм в том, что сперва свойства изучаем, далее переходим к генераторам, далее алгебре Ли, далее что???)

Непрерывные преобразования пространства в двух словах

потом пропишу, пока не владею

обзор алгебраических конструкций

Часто нам интересны преобразования, близкие к тождественному. Для таких преобразований вводятся генераторы.

среди генераторов можно выбрать попарно коммутирующие.

$$[\Gamma_a \Gamma_b] = 0$$

Далее на эти генераторы можно натянуть векторное пространство, в результате получим алгебру Ли, которая называется подалгеброй Картана.

(зачем???? и что это?)

Определение В.1. Алгебра Ли Γ - это вещественное векторное пространство Γ , в котором определена скобка Ли:

- Линейность
- антисимметрия

$$[\Gamma_1, \Gamma_2] = -[\Gamma_2, \Gamma_1]$$

- тождество Якоби, или циклическая перестановка элементов в скобке:

$$[[\Gamma_1, \Gamma_2], \Gamma_3] + [[\Gamma_2, \Gamma_3], \Gamma_1] + [[\Gamma_3, \Gamma_1], \Gamma_2] = 0$$

Инварианты называются операторами Казимира, которые обладают свойством

$$[C, \Gamma_i] \equiv 0 \quad \forall \Gamma_i$$

и строятся как однородные полиномы по Γ .

Заметим, любая функция от оператора Казимира также будет оператором Казимира, поэтому нам интересны только те, которые не выражаются друг через друга.

Таким образом, мы приходим к алгебрам Ли.

все алгебры Ли устроены по одному и тому же принципу: у них есть определенное число генераторов, определенное число повышающих и понижающих операторов.

После того, как мы нашли алгебру Ли, мы должны перейти к ее представлению.

Представления характеризуются пространством, в котором действуют генераторы, размерность которого называется размерностью представления. Она чаще всего никак не связана с размерностью алгебры.

О правилах Дынкина (?)

(что-то мб они полезное говорят, пока не знаю.)

Другое

Связность или несвязность

Односвязность

Что если учесть второй порядок для генераторов (?)

(?? мб это еще можно исследовать и что-то изучить про группы? спрошу у математиков мб. пока не понимаю, почему никогда 2м порядком не интересуюсь.)

Элементы теории групп

что делаем и зачем

связные группы Ли, генераторы

(из Володиных записей, это же применяться будет в части про группу пуанкаре)

теория

Существует класс групп, получивший название связных групп Ли, которые представляет для теоретической физики особый интерес.

По определению группа Ли называется связной, если любой её элемент можно соединить с единичным элементом гладкой кривой, целиком лежащей внутри данной группы.

Групповой закон умножения тогда принимает вид

$$g(\theta_1) g(\theta_2) = g(f(\theta_1, \theta_2))$$

Здесь $f^\alpha(\theta_1, \theta_2)$ - функция от θ_1 и θ_2 . Если принять значение $\theta^\alpha = 0$ как координаты единичного элемента группы: $g(\theta = 0) = e$, то, очевидно, должно быть выполнено условие

$$f^\alpha(\theta, 0) = f^\alpha(0, \theta) = \theta^\alpha$$

Рассмотрим некоторое представление связной группы Ли.

Напомним, что представлением F группы G на векторном пространстве представления V называется отображение, которое каждому элементу $g \in G$ ставит в соответствие обратимый линейный оператор $\hat{F}$, действующий в V ; это отображение должно быть согласовано с групповыми операциями, так что единице группы G ставится в соответствие единичный оператор, а также выполняются равенства:

$$\hat{F}(g_1) \hat{F}(g_2) = \hat{F}(g_1 g_2), \quad \hat{F}(g^{-1}) = \hat{F}^{-1}(g)$$

То есть по факту, представление группы - это гомоморфизм группы в группу линейных операторов, действующих на векторном пространстве представления.

Операторы $\hat{F}$ некоторого представления связной группы Ли (по крайней мере, в некоторой окрестности единичного элемента) можно разложить в ряд:

$$\hat{F}(g(\theta)) = 1 + i\theta^\alpha \hat{\Gamma}_\alpha + \frac{1}{2}\theta^\beta \theta^\gamma \hat{\Gamma}_{\beta\gamma} + \dots$$

где $\hat{\Gamma}_{\beta\gamma} = \hat{\Gamma}_{\gamma\beta}$; $\hat{\Gamma}_\alpha$ называют генераторами группы в этом представлении ¹.

Поскольку $\hat{F}$ являются операторами представления, то

$$\hat{F}(g(\theta_1)) \hat{F}(g(\theta_2)) = \hat{F}(g(\theta_1) g(\theta_2)) = \hat{F}(g(f(\theta_1, \theta_2)))$$

Поймём, как это условие будет выглядеть после разложения по степеням θ_1^α и θ_2^α .

Во втором порядке по θ_1, θ_2 выражение для $f^\alpha(\theta_1, \theta_2)$ должно иметь вид

$$f^\alpha(\theta_1, \theta_2) = \theta_1^\alpha + \theta_2^\alpha + \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \theta_1^\beta \partial \theta_2^\gamma} \theta_1^\beta \theta_2^\gamma + \dots \equiv \theta_1^\alpha + \theta_2^\alpha + f_{\beta\gamma}^\alpha \theta_1^\beta \theta_2^\gamma + \dots$$

В результате уравнение (1.16) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \left(1 + i\theta_1^\alpha \hat{\Gamma}_\alpha + \frac{1}{2}\theta_1^\beta \theta_1^\gamma \hat{\Gamma}_{\beta\gamma} + \dots\right) \cdot \left(1 + i\theta_2^\alpha \hat{\Gamma}_\alpha + \frac{1}{2}\theta_2^\beta \theta_2^\gamma \hat{\Gamma}_{\beta\gamma} + \dots\right) = \\ & = 1 + i\left(\theta_1^\alpha + \theta_2^\alpha + f_{\beta\gamma}^\alpha \theta_1^\beta \theta_2^\gamma + \dots\right) \hat{\Gamma}_\alpha + \frac{1}{2}\left(\theta_1^\beta + \theta_2^\beta + \dots\right)(\theta_1^\gamma + \theta_2^\gamma + \dots) \hat{\Gamma}_{\beta\gamma} + \dots \quad (270) \end{aligned}$$

Члены порядка $1, \theta_1, \theta_2, \theta_1^2$ и θ_2^2 в правой и левой частях полученного уравнения автоматически совпадают, а благодаря существованию членов, пропорциональных $\theta_1 \theta_2$, возникает нетривиальное условие

$$\hat{\Gamma}_{\beta\gamma} = -\hat{\Gamma}_\beta \hat{\Gamma}_\gamma - i f_{\beta\gamma}^\alpha \hat{\Gamma}_\alpha$$

Из этого соотношения следует, что если известна структура группы, т.е.

функция $f(\theta_1, \theta_2)$, и тем самым заданы её квадратичные коэффициенты $f_{\beta\gamma}^\alpha$, то в $\hat{F}(g(\theta))$, используя генераторы, присутствующие в слагаемых первого порядка, можно вычислять слагаемые второго порядка.

Кроме того, поскольку $\hat{\Gamma}_{\beta\gamma} = \hat{\Gamma}_{\gamma\beta}$, то с необходимостью должно быть справедливо следующее уравнение

$$[\hat{\Gamma}_\beta, \hat{\Gamma}_\gamma] = i c_{\beta\gamma}^\alpha \hat{\Gamma}_\alpha$$

где $c_{\beta\gamma}^\alpha = -f_{\beta\gamma}^\alpha + f_{\gamma\beta}^\alpha$ - т.н.

структурные константы группы.

Отсюда видно, что структурные постоянные группы не зависят от представления, что является весьма важным и полезным утверждением.

Такой набор коммутационных соотношений (1.18) для генераторов называют алгеброй Ли.

Можно показать, что коммутационные соотношения (1.18) являются единственным условием, гарантирующим, что процесс рекуррентного восстановления следующих членов разложения по предыдущим может быть продолжен: из бесконечной последовательности соотношений типа $\hat{\Gamma}_{\beta\gamma} = -\hat{\Gamma}_\beta \hat{\Gamma}_\gamma - i f_{\beta\gamma}^\alpha \hat{\Gamma}_\alpha$ можно получить весь ряд $\hat{F}(g(\theta))$, если известны члены первого порядка - генераторы группы.

Это не обязательно означает, что операторы $\hat{F}(g(\theta))$ однозначно определяются для любых θ , если известны генераторы $\hat{\Gamma}_\alpha$.

Однако $\hat{F}(g(\theta))$ действительно однозначно определяются по крайней мере в малой окрестности единичного элемента.

Найдём теперь алгебру Ли группы Пуанкаре.

Для этого можно поступить так, как предписывает нам процедура, описанная выше.

Однако, мы поступим немного иначе и рассмотрим эту процедуру в нескольких частных случаях.

Тем самым мы получим все необходимые коммутационные соотношения в алгебре Ли группы Пуанкаре.

Другие концепции линейной алгебры

Иногда может понадобится что-то и из линейной алгебры, это приведем тут.

Элементы топологии

(пока заготовка, мб и не нужно это)

Дает существование целого и полуцелого спина, а там и волновые функции с симметриями

все, ничего больше не дает.

Вариационная математика

Основы

Оказывается, эти принципы дальше будут часто встречаться, так что опишем тут их подробнее.

мы так-то ищем минимум.

вариация строго определяется так вот..

и вот пара примеров.

О случаях использования

Вариация интервала

типичная вещь, которую используем:

(?? потом разберу)

$$\delta ds^2 = 2ds\delta ds = \delta (g_{ik}dx^i dx^k) = dx^i dx^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \delta x^l + 2g_{ik} dx^i d\delta x^k$$

Элементы алгебры Клиффорда

(понадобится - пропишу)

Основные конструкции

Обзор применений в теории поля

там со спинорами работать можно научиться, но особенно не знаю пока применения.

Теория

алгебра спиноров

Для спинорных полей очень важно иметь навыки работы со спинорами, посвятим этот раздел этим навыкам, чтобы пользоваться и быстро их преобразовать.

обзор типичных преобразований

B.2 Some Physics for Assistance

Некоторые темы классической механики

Метод Гамильтона-Якоби

Суть

(потом займусь им)

Метод Гамильтона-Якоби это достаточно популярный метод решения механических систем уравнений.

поэтому разберемся, как его использовать?

Рассмотрим систему $q = (q^1, \dots, q^n)$ с действием $S[q] = \int_{t_A}^{t_B} dt L(q, \dot{q}, t)$.

Обобщенные импульсы и гамильтониан равны:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad H(q, p, t) = p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}, t)$$

Заметим, что у импульсов индексы пишутся снизу (?).

Мы хотим понять, какова траектория $q(t)$ и какой импульс частицы $p(t)$ в данный момент времени.

Для этого нужно решить уравнения движения:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

(??) Если рассмотреть действие, как функцию конечных координат и времени, то его дифференциал через функцию гамильтона можно записать так:

$$dS = d \int dt L = d \int dt (p_i \dot{q}^i - H) = p_i dq^i - H(q, p, t) dt$$

поэтому:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

Из тождества на гамильтониан получаем уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0$$

Смысл его в том, что мы через действие будем далее в квадратурах.

механические аналогии в теории поля

(пофиг на них, однажды мб запишу)

Суть

(там мб крутая идея, пока не актуально про это думать.)

теоретическая механика как частный случай теории поля

(потом укажу, что механика сполна частный случай теории поля. это же так? типа просто число степеней свободы уменьшаем с бесконечного до малого. пока не до этого.)

C Bibliography

References

- [1] Greiner, W.: *Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations.* Springer, 2000, ISBN 9783540674573. <https://books.google.bg/books?id=2DAInxwv1HYC>.
- [2] Степаньянц, К.: *Классическая теория поля.* Litres, 2018.
- [3] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М.: *Теория поля.* Наука, 2004.
- [4] Киселев, В.В.: *Семинары по курсу «Теория поля»: конспекты и упражнения.* Изд. ГИЦ РФ «Институт физики высоких энергий», Протвино, 2004.
- [5] Бухбиндер, И.Л.: *Учебное пособие «Релятивистская симметрия».*
- [6] Бухбиндер, И. Л.: *Модели теории поля.* Томск Изд-во ТГПУ, 2012.
- [7] Белоусов, Бурмистров, Тернов.: *задачи по теоретической физике.* Интеллект, 2013.
- [8] Батыгин В. В., Топтыгин И. Н.: *Сборник задач по электродинамике.* Наука, 1970.
- [9] Freedman, Daniel Z. and Van Proeyen, Antoine: *Supergravity.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, May 2012, ISBN 978-1-139-36806-3, 978-0-521-19401-3.
- [10] Dressel, Justin, Bliokh, Konstantin Y., and Nori, Franco: *Spacetime algebra as a powerful tool for electromagnetism.* Physics Reports, 589:1–71, aug 2015. <https://doi.org/10.1016%2Fj.physrep.2015.06.001>.
- [11] Mansouri, Reza and Sexl, Roman: *A test theory of special relativity: I. simultaneity and clock synchronization.* General Relativity and Gravitation, 8:497–513, January 1977.
- [12] Lindner, H. H.: *On the Philosophical Inadequacy of Modern Physics and the Need for a Theory of Space.* Cosmos and History, 2015.
- [13] К., Гуц А.: *Хроногеометрия. Аксиоматическая теория относительности.* ООО "УниПак", 2008.
- [14] Райдер, Льюис: *Квантовая теория поля.* ПЛАТОН, 1998.
- [15] Ландау, ЛД and Лифшиц, ЕМ: *Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. книга,* 1982.
- [16] Hehl, Friedrich W. and Obukhov, Yuri N.: *How does the electromagnetic field couple to gravity, in particular to metric, nonmetricity, torsion, and curvature?* Lecture Notes in Physics, page 479–504. http://dx.doi.org/10.1007/3-540-40988-2_25.
- [17] Андреев, А. В.: *Восемьдесят лет парадоксу Клейна.* Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии, 2010.
- [18] Christillin, Paolo and d’Emilio, Emilio: *Role of the slope of realistic potential barriers in preventing relativistic tunneling in the klein zone.* Phys. Rev. A, 76:042104, Oct 2007. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.042104>.
- [19] Wang, Huai Yu: *Solving klein’s paradox.* Journal of Physics Communications, 4(12):125010, dec 2020. <https://dx.doi.org/10.1088/2399-6528/abd340>.

- [20] В.В.Киселев: *Нерелятивистская механика частиц и полей: векторный анализ и симметрии*.
- [21] Лашеквич: *Лекции по общей теории относительности для 3 курса*. 2018.
- [22] Иванов, Михаил Геннадьевич: *Электродинамика*. М.: МФТИ.
- [23] А., Болибрух А.: *Уравнения Максвелла и дифференциальные формы. Учебное пособие*. 2013.
- [24] Сасскинд Л., Фридман А.: *Теоретический минимум. Специальная теория относительности и классическая теория поля*. Издательский дом "Питер".
- [25] Каку, М: *Гиперпространство: Научная одиссея через параллельные миры, дыры во времени и десятое измерение*. Альпина Паблишер, 2017.
- [26] Иванов, Михаил Геннадьевич: *Некоторые геометрические методы в классической теории поля: Учебно-методическое пособие*. М.: МФТИ, 2004.
- [27] Arnold, V. I.: *Singularity Theory*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1981.
- [28] В.М., Редьков: *Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца*, 2008, ISBN 978-985-08-1003-8.
- [29] Rarita, William and Schwinger, Julian: *On a theory of particles with half-integral spin*. Phys. Rev., 60:61–61, Jul 1941. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.60.61>.
- [30] Varlamov, V. V.: *Convergence of quantum electrodynamics on the poincare group*, 2011.
- [31] Loebbert, Florian: *The Weinberg- Witten theorem on massless particles: An Essay*. Annalen Phys., 17:803–829, 2008.
- [32] Rovenchak, Andriy and Krynytskyi, Yuri: *Radiation of the electromagnetic field beyond the dipole approximation*. American Journal of Physics, 86(10):727–732, Oct 2018, ISSN 1943-2909. <http://dx.doi.org/10.1119/1.5052427>.
- [33] Cabral, Francisco and Lobo, Francisco S. N.: *Electrodynamics and spacetime geometry: Astrophysical applications*. The European Physical Journal Plus, 132(7), Jul 2017, ISSN 2190-5444. <http://dx.doi.org/10.1140/epjp/i2017-11618-2>.
- [34] HORVÁTHY, P. A.: *The biederharn approach to relativistic coulomb-type problems*. Reviews in Mathematical Physics, 18(03):311–328, apr 2006. <https://doi.org/10.1142/2Fs0129055x06002656>.
- [35] Cabral, Francisco and Lobo, Francisco S. N.: *Gravitational waves and electrodynamics: new perspectives*. The European Physical Journal C, 77(4), Apr 2017, ISSN 1434-6052. <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-4791-z>.
- [36] Cabral, Francisco and Lobo, Francisco S. N.: *Electrodynamics and spacetime geometry: Foundations*. Foundations of Physics, 47(2):208–228, Nov 2016, ISSN 1572-9516. <http://dx.doi.org/10.1007/s10701-016-0051-6>.
- [37] Job Feldbrugge, Neil Turok: *Gravitational lensing of binary systems in wave optics*.
- [38] Бюклинг Е., Каянти К.: *Кинематика элементарных частиц*. Издательство "МИР".

- [39] T., Tao: "*einstein's derivation of $e=mc^2$* ". <https://terrytao.wordpress.com/2007/12/28/einsteins-derivation-of-emc2/>.
- [40] Лифшиц Е. М., Ландау Л. Д.: *Квантовая механика*, volume 3. Наука, 2004.
- [41] Katsnelson, M. I., Novoselov, K. S., and Geim, A. K.: *Chiral tunnelling and the klein paradox in graphene*. Nature Physics, 2(9):620–625, August 2006, ISSN 1745-2481. <http://dx.doi.org/10.1038/nphys384>.
- [42] D. H. Delphenich), Fritz Sauter (Translated by: *On the behavior of an electron in a homogeneous electric field in dirac's relativistic theory*. Zeit. f. Phys, 1931.

Список литературы from Еще раз о принципе эквивалентности by В.Л. Гинзбург, Ю.Н. Ерошенко

1. Гинзбург В Л УФН 98569 (1969)
2. Логунов А А, Мествиришвили М А, Чугреев Ю В, Препринт ИФВЭ 93-109 (Протвино, 1993); Теор. и мат. физ. 99121 (1994)
3. Паули В Теория относительности (М.: Наука, 1991)
4. Уилл К Теория и эксперимент в гравитационной физике (М.: Энергоиздат, 1985)
5. Гинзбург В Л О теории относительности (М.: Наука, 1979)
6. Гинзбург В Л, Фролов В П УФН 153633 (1987); Тр. ФИАН 1978 (1989); в кн. Эйнштейновский сборник 1986-1990 (М.: Наука, 1990) с. 190
7. Fulton T, Rohrlich F Ann. Phys. 9499 (1960)
8. Rohrlich F Nuovo Cimento 21811 (1961); Ann. Phys. 22169 (1963)
9. Rohrlich F Classical charged particles (N. Y.: Addison-Wesley Publ. Co., Reading, 1965)
10. Boulware F Ann. Phys. 124169 (1980)
11. Гинзбург В Л Теоретическая физика и астрофизика (М.: Наука, 1987)
12. Брагинский В Б, Панов В И ЖЭТФ 61873 (1971); Sov. Phys. JETP 34463 (1972)
13. Ландау Л Д, Лифшиц Е М Теория поля (М.: Наука, 1988)
14. Скобельцын Д В Парадокс близнецов в теории относительности (М.: Наука, 1966)
15. Эйнштейн А Собрание научных трудов Т. I (М.: Наука, 1965)
16. Мёллер К Теория относительности (М.: Атомиздат, 1975)
17. Darwin C G Proc. Roy. Soc. A 15461 (1936)
18. Гинзбург В Л, в кн. Сборник памяти А А Андропова (М.: Изд-во АН СССР, 1955) с. 622
19. Беллони Л, Рейна Ч, в кн. Эйнштейновский сборник 1984-1985 (М.: Наука, 1988) с. 201

Literature from The Sagnac Effect: Correct Explanations by G.B. Malykin

1. Sagnac M G C.R. Acad. Sci. 157708 (1913)
2. Sagnac M G C.R. Acad. Sci 1571410 (1913)
3. Sagnac M G J. Phys.- Paris Ser. 54177 (1914)
4. Вавилов С И "Экспериментальные основания теории относительности" Собрание сочинений Т. 4 (М.: Изд. АН СССР, 1956) с. 9
5. Post E J Rev. Mod. Phys. 39475 (1967)
6. Франкфурт У И, Френк А М Оптика движущихся тел (М.: Наука, 1972)
7. Anderson R, Bilger H R, Stedman G E Am. J. Phys. 62975 (1994)
8. Малыкин Г Б УФН 167337 (1997)
9. Hasselbach F, Nicklaus M Phys. Rev. A 48143 (1993)
10. Логунов А А, Чугреев Ю В УФН 156137 (1988)
11. Вугальтер Г А, Малыкин Г Б Изв. вузов. Радиофизика 42373 (1999)
12. Michelson A A Am. J. Sci. Ser. III 22120 (1881)
13. Michelson A A, Morley E W Am. J. Sci. Ser. III 34333 (1887)
14. Берштейн И Л ДАН СССР 75635 (1950)
15. Высоцкий В И и др. УФН 164309 (1994)
16. Neutze R, Hasselbach F Phys. Rev. A 58 557(1998)
17. Werner S A, Staudenmann J L, Colella R Phys. Rev. Lett. 421103 (1979)
18. Dresden M, Yang C N Phys. Rev. D 201846 (1979)
19. Riehle F et al. Phys. Rev. Lett. 67177 (1991)
20. Lenef A et al. Phys. Rev. Lett. 78760 (1997)
21. Gustavson T L, Bouyer P, Kasevich M A Phys. Rev. Lett. 782046 (1997)
22. Wallace A "Electromagnetic wave gyroscopes or angular velocity measuring system" US Patent No. 3102953 (Sept. 3, 1963, filed Jul. 9, 1958)
23. Newburgh R G et al. P. IEEE 621621 (1974)
24. Малыкин Г Б Изв. вузов. Радиофизика 41767 (1998)
25. Yilmaz H, in Proc. of the Fourth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity (Ed. R Ruffini) (Amsterdam: Elsevier Science Publ., 1986) p. 1753
26. Laue M Ann. Phys.- Leipzig 62448 (1920)
27. Silberstein L T J. Opt. Soc. Am. 5291 (1921)
28. Corps C.R. Acad. Sci. 190623 (1930)

29. Metz A C.R. Acad. Sci. 2321185 (1951)
30. Metz A C.R. Acad. Sci. 234597 (1952)
31. Metz A C.R. Acad. Sci. 234705 (1952)
32. Metz A J. Phys. Radium. 13224 (1952)
33. Ezekiel S, in Fiber-Optic Rotation Sensors and Related Technologies (Springer Series in Optical Sciences, Vol. 32, Eds S Ezekiel, H J Arditty) (Berlin: Springer-Verlag, 1982) p. 2
34. Ландау Л Д, Лифшиц Е М Теоретическая физика Т. 2 Теория поля (М.: Наука, 1967)
35. Тоннела М-А Основы электромагнетизма и теории относительности (М.: ИЛ, 1962) с. 295 [Tonnelat M-A Les Principes de la Théorie Électromagnétique et de la Relativité (Paris: Masson, 1959)]
36. Шереметьев А Г Волоконный оптический гироскоп (М.: Радио и связь, 1987)
37. Lefevre H C, Arditty H J Appl. Optics 211400 (1982)
38. Arditty H J, in Fiber-Optic Rotation Sensors and Related Technologies (Springer Series in Optical Sciences, Vol. 32, Eds S Ezekiel, H J Arditty) (Berlin: Springer-Verlag, 1982) p. 44
39. Ландсберг Г С Оптика 5-е изд. (М.: Наука, 1976)
40. Эйнштейн А Собрание сочинений Т. 1 (М.: Наука, 1965) с. 7 [Einstein A Ann. Phys.-Leipzig 17891 (1905)]
41. Окунь Л Б, Селиванов К Г, Телегди В Л УФН 1691141 (1999)
42. Hay Y J et al. Phys. Rev. Lett. 4165 (1960)
43. Гурьянов А Н и др. Письма в ЖЭТФ 32240 (1980)
44. Френель О Избранные труды по оптике (М.: Гостехиздат, 1955) с. 516 [Ann. Chimie Physique 957 (1818)]
45. Carvalho R T, Blake J Proc. SPIE 2837183 (1996)
46. Harress F Die Geschwindigkeit des Lichtes in Bewegten Korpern: Dissertation (Jena, 1912)
47. Harzer P Astron. Nach. 198 N4748 377 (1914)
48. Knopf O Ann. Phys. - Leipzig 62389 (1920)
49. Zernike F Physica 13279 (1947)
50. Pogany B Ann. Phys. - Leipzig 80217 (1926)
51. Pogany B Naturwissenschaften 15177 (1927)
52. Pogany B Ann. Phys. - Leipzig 85244 (1928)

53. Dufour A, Prunier F J. Phys. Radium. Ser. 83153 (1942)
54. Эйнштейн А Собрание сочинений Т. 1 (М.: Наука, 1965) с. 313 [Einstein A Astron. Nach. 1998 (1914)]
55. Vali V, Shorthill R W, Bergh M F Appl. Opt. 162605 (1977)
56. Leeb W R, Schiffner G, Scheiterer E Appl. Opt. 181293 (1979)
57. Фатеев В Ф Оптика и спектроскопия 54697 (1983)
58. Laub J Ann. Phys. - Leipzig 25175 (1908)
59. Fizeau H C.R. Acad. Sci. 33349 (1851)
60. Fizeau H Chimie Physique 57385 (1859)
61. Zeeman P Amst. Verslag. Afd. Natuurk 23245 (1914)
62. Zeeman P Amst. Verslag. Afd. Natuurk 2418 (1915)
63. Kantor W J. Opt. Soc. Am. 52978 (1962)
64. Франкфурт У И Специальная и общая теория относительности (М.: Наука, 1968)
65. Bilger H R, Stowell W K Phys. Rev. A 16313 (1977)
66. Bilger H R, Zavodny A T Phys. Rev. A 5591 (1972)
67. Witte H Verhandl. deut. Physik. Ges. 16143 (1914)
68. Witte H Verhandl. deut. Physik. Ges. 16754 (1914)
69. Лайэ М Статьи и речи (М.: Наука, 1969) с. 52 [Sitz. Bayer. Academie 405 (1911)]
70. Lunn A C J. Opt. Soc. Am. 6112 (1922)
71. Runge C Naturwissenschaften 13440 (1925)
72. Langevin P C.R. Acad. Sci. 205304 (1937)
73. Мёллер К Теория относительности 2-е изд. (М.: Атомиздат, 1975) [Møller C The Theory of Relativity (Oxford: Claredon Press, 1972)]
74. Lefevre H C, in Optical Fiber Sensors: Systems and Applications Vol. 2 (Eds B Culshaw, J Daikin) (Norwood, MA: Artech House, 1989) p. 381
75. Lefevre H The Fiber-Optic Gyroscope (Boston: Artech House, 1993)
76. Wilkinson J R Prog. Quant. Electron. 111 (1987)
77. Allan D W, Weiss M A, Ashby N Science 22869 (1985)
78. Логунов А А, Чугреев Ю В Вест. МГУ. Сер. 3: физика, астрономия 29 (1) 3 (1988)
79. Dieks D, Nienhuis G Am. J. Phys. 58650 (1990)
80. Dieks D Found. Phys. Lett. 3347 (1990)

81. Hehl F W, Ni W-T Phys. Rev. D 422045 (1990)
82. Хайкин С Э Механика 2-е изд. (М.-Л.: Гостехиздат, 1947)
83. Эддингтон А С Теория относительности (М.-Л.: ГТТИ, 1934) [Eddington A S The Mathematical Theory of Relativity (Cambridge: Univ. Press, 1924)]
84. Мандельштам Л И "Лекции по физическим основам теории относительности (1933-1934)" Полное собрание трудов Т. 5 (Л.: Изд. АН СССР, 1950) с. 90
85. Эйнштейн А Собрание сочинений Т. 1 (М.: Наука, 1965) с. 326 [Einstein A Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. 21030 (1914)]
86. Вин В "Теория относительности", в кн. Минковский Г Пространство и время (СПб.: Физика, 1911) с. 56
87. Минковский Г "Пространство и время", в кн. Принципы относительности (Л.: ОНТИ, 1935) с. 181 ["Raum und zeit" Phys. Z. 10 104 (1909)]
88. Мизнер Ч, Торн К, Уилер Дж Гравитация Т. 1 (М.: Мир, 1977) с. 207 [Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A Gravitation (San Francisco: W.H. Freeman and Co., 1973)]
89. Логунов А А Лекции по специальной теории относительности и гравитации (М.: Наука, 1987)
90. Мах Э Механика (СПб: Общественная польза, 1909) с. 186 [Mach E Die Mechanic in inder Entwicklung (Leipzig, 1904)]
91. Зоммерфельд А Оптика (М.: ИЛ, 1953) с. 111 [Zommerfeld A Optik (Wiesbaden, 1950)]
92. Ишлинский А Ю Классическая механика и сила инерции (М.: Наука, 1987)
93. Ишлинский А Ю, Препринт ИПМех РАН № 561 (Москва: ИПМех РАН 1996)
94. Журавлев В Ф Основы теоретической механики (М.: Наука, Физматлит, 1997)
95. Харламов П В Очерки об основаниях механики (Киев.: Наукова думка, 1995)
96. Эйнштейн А Собрание сочинений Т. 1 (М.: Наука, 1965) с. 452 [Einstein A Ann. Phys. - Leipzig 49769 (1916)]
97. Эйнштейн А Собрание сочинений Т. 1 (М.: Наука, 1965) с. 613 [Einstein A Ann. Phys. - Leipzig 55241 (1918)]
98. де Ситтер В, в сб. Альберт Эйнштейн и теория гравитации (М.: Мир, 1979) с. 299 [de Sitter W Mon. Not. R. Astron. Soc. 783 (1917)]
99. Хёнль Г, в сб. Эйнштейновский сборник 1968 (Ред. И Е Тамм, Г И Наан) (М.: Наука, 1968) с. 258 [Hönl H Naturwissenschaften Reihe 15 (1) (1966)]
100. Thirring H Phys. Z. 1933 (1918)
101. Lense J, Thirring H Phys. Z. 19156 (1918)
102. Thirring H Phys. Z. 19204 (1918)

103. Thirring H Phys. Z. 2229 (1921)
104. Вейль Г Пространство, время, материя 5-е изд. (М.: Янус, 1996) [Weyl H Raum Zeit Materie (Berlin: Springer, 1923)]
105. Дикке Р Гравитация и относительность (Под ред. Х Цзю, В Гоффмана) (М.: Мир, 1965) с. 221 [Dicke R F Gravitation and Relativity (Eds H Y Chiu, W F Hoffmann) (New York: W A Benjamin Inc., 1964)]
106. Уилер Дж Гравитация и относительность (Под ред. Х Цзю, В Гоффмана) (М.: Мир, 1965) с. 468 [Wheeler J A Gravitation and Relativity (Eds H Y Chiu, W F Hoffmann) (N.Y.: W A Benjamin Inc., 1964)]
107. Brans C, Dicke R H Phys. Rev. 124925 (1961)
108. Brans C Phys. Rev. 1252194 (1962)
109. Логунов А А УФН 165187 (1995)
110. Уилл К М Теория и эксперимент в гравитационной физике (М.: Энергоатомиздат, 1985) [Will C M Theory and Experiment in Gravitational Physics (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981)]
111. Волков А М, Киселев В А ЖЭТФ 581857 (1970)
112. Волков А М, Измestьев А А, Скроцкий Г В Оптика и спектроскопия 30762 (1971)
113. Коростелев А А, Фатеев В Ф Оптика и спектроскопия 45132 (1978)
114. Волков А М, Киселев В А ЖЭТФ 571353 (1969)
115. Фатеев В Ф Оптика и спектроскопия 5030 (1981)
116. Шпак И В, Соломин А В Оптика и спектроскопия 46133 (1979)
117. Беленов Э М, Маркин Е П Письма в ЖЭТФ 7497 (1968)
118. Langevin P C.R. Acad. Sci. 173831 (1921)
119. Heer C V Phys. Rev. 134799 (1964)
120. Post E J Phys. Rev. Lett. 15177 (1965)
121. Post E J J. Opt. Soc. Am. 62234 (1972)
122. Хромых А М ЖЭТФ 50281 (1966)
123. Бакаляр А И, Лукьянов Д П Основы теории лазерных гироскопов и их применение в навигационных комплексах (Л.: ЛВИКА, 1967)
124. Волков А М, Скроцкий Г В Оптика и спектроскопия 29965 (1970)
125. Волков А М, Измestьев А А, Скроцкий Г В ЖЭТФ 591254 (1970)
126. Федоров Б Ф, Шереметьев А Г, Умников В Н Оптический квантовый гироскоп (М.: Машиностроение, 1973)
127. Ashtekar A, Magnon A J. Math. Phys. 16341 (1975)
128. Бычков С И, Лукьянов Д П, Бакаляр А И Лазерный гироскоп (М.: Сов. радио, 1975)
129. Stodolsky L Gen. Relativ. Gravit. 11391 (1979)
130. Anandan J Phys. Rev. D 151448 (1977)
131. Anandan J Phys. Rev. D 24338 (1981)
132. Chow W W et al. Rev. Mod. Phys. 5761 (1985)
133. Померанцев Н М, Скроцкий Г В УФН 100361 (1970)
134. Шпак И В, Соломин А В, Разгоняев И В Оптика и спектроскопия 60210 (1986)
135. Сардыко В И Оптика и спектроскопия 82598 (1997)
136. Schulz-DuBois E O IEEE J. Quantum Elect. QE-2 (8) 299 (1966)
137. Trocheris M G Philos. Mag. Ser. 7401143 (1949)
138. Yildiz A, Tang C H Phys. Rev. 146947 (1966)
139. Anderson J L, Ryon J W Phys. Rev. 1811765 (1969)
140. Волков А М, Киселев В А Оптика и спектроскопия 29365 (1970)

141. Mo T C J. Math. Phys. 112589 (1975)
142. van Bladel J P. IEEE 61260 (1973)
143. Shiozava T P. IEEE 611694 (1973)
144. Lianis G, Whicker D Arch. Ration. Mech. Anal. 57325 (1975)
145. Шпак И В и др. ЖЭТФ 792057 (1980)
146. Prade B, Vinet J Y Nuovo Cimento B 101323 (1988)
147. Scorgie G C J. Phys. A-Math. Gen. 235169 (1990)
148. Шерклифф У Поляризованный свет (М.: Мир, 1965) [Shurkliff W A Polarized Light (Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press, 1962)]
149. Kintner E Opt. Lett. 6154 (1981)
150. Pawlath G A, Shaw H J Appl. Opt. 211400 (1982)
151. Burns W K, Moeller R P J. Lightwave Techn. LT-2 430 (1984)
152. Козел С М и др. Оптика и спектроскопия 611295 (1986)
153. Малыкин Г Б Изв. вузов. Радиофизика 34817 (1991)
154. Малыкин Г Б Изв. вузов. Радиофизика 35189 (1992)
155. Малыкин Г Б Оптика и спектроскопия 751314 (1993)
156. Малыкин Г Б Оптика и спектроскопия 76540 (1994)
157. Малыкин Г Б, Нефедов И М, Шерешевский И А Изв. вузов. Радиофизика 371473 (1994)
158. Малыкин Г Б и др. Изв. вузов. Радиофизика 371567 (1994)
159. Малыкин Г Б, Позднякова В И, Поздняков Е Л Изв. вузов. Радиофизика 381293 (1995)
160. Малыкин Г Б Оптика и спектроскопия 831013 (1997)
161. Малыкин Г Б, Позднякова В И Оптика и спектроскопия 84145 (1998)
162. Малыкин Г Б, Позднякова В И Оптика и спектроскопия 86505 (1999)
163. Малыкин Г Б, Позднякова В И Оптика и спектроскопия 86513 (1999)
164. Малыкин Г Б Оптика и спектроскопия 81474 (1996)
165. Малыкин Г Б Оптика и спектроскопия 84515 (1998)
166. Андропова И А, Геликонов Г В, Малыкин Г Б Квантовая электроника 26271 (1999)
167. Michelson A A Astrophys. J. 61137 (1925)
168. Michelson A A, Gale H G, Assisted by Pearson F Astrophys. J. 61 140 (1925)
169. Scully M O, Zubairy M S, Haugan M P Phys. Rev. A 242009 (1981)
170. Burns W K, Moeller R P J. Lightwave Tech. LT-5 1024 (1987)
171. Малыкин Г Б, Позднякова В И ЖТФ 69 (7) 140 (1999)
172. Silverman M P Phys. Lett. A 146175 (1990)
173. Гладышев В О ЖТФ 69 (5) 97 (1999)
174. Эйнштейн А Собрание сочинений Т. 1 (М.: Наука, 1965) с. 65 [Einstein A Jarb. Radioaktivität Elektronik 4411 (1907)]
175. Эйнштейн А Собрание сочинений Т. 1 (М.: Наука, 1965) с. 165 [Einstein A Ann. Phys.- Leipzig 35898 (1911)]
176. Coisson R Am. J. Phys. 41585 (1973)
177. Semon M D, Schmieg G M Am. J. Phys. 49689 (1981)
178. Opat G I Am. J. Phys. 581173 (1990)
179. Тарг С М, в кн. Физическая энциклопедия Т. 1 (М.: Сов. энциклопедия, 1988) с. 489
180. Тамм И Е Основы теории электричества 3-е изд. (М.-Л.: Гостехиздат, 1946)
181. Anandan J Nuovo Cimento A 53221 (1979)
182. Sakurai J J Phys. Rev. D 212993 (1980)
183. Hendriks B H, Nienhuis G Quantum Opt. 213 (1990)
184. Xu H H, Tsai C H Phys. Rev. A 414046 (1990)
185. Fearn H Quantum Semiclass. Opt. 7 (3) 205 (1995)

186. Linet B, Tourrenc P Can. J. Phys. 541129 (1976)
187. Aharonov Y, Bohm D Phys. Rev. 115485 (1959)
188. Olariu S, Popescu I I Rev. Mod. Phys. 57339 (1985)
189. Скаржинский В Д, в кн. Физическая энциклопедия Т. 1 (М.: Сов. энциклопедия, 1988) с. 7
190. Barnett S J Phys. Rev. Ser. II 6239 (1915)
191. Барнетт С УФН 18392 (1937) [Barnett S J Rev. Mod. Phys. 7129 (1937)]
192. Schiff L I Proc. Natl. Acad. Sci. USA 25391 (1939)
193. Harris E G Am. J. Phys. 64378 (1996)
194. Aharonov Y, Carmi G Found. Phys. 3493 (1973)
195. Aharonov Y, Carmi G Found. Phys. 475 (1974)
196. Harris J H, Semon M D Found. Phys. 10151 (1980)
197. Semon M D Found. Phys. 1249 (1982)
198. Lodge O J Philos. T. Roy. Soc. A 184727 (1893)
199. Зельдович Я Б Письма в ЖЭТФ 1 (3) 40 (1965)
200. Скроцкий Г В ДАН СССР 11473 (1957)
201. Balazs N L Phys. Rev. 110236 (1958)
202. Plebanski J Phys. Rev. 1181396 (1960)
203. Клышко Д Н УФН 163 (11) 1 (1993)
204. Berry M V P. Roy. Soc. Lond. A Mat. 39245 (1984)
205. Веницкий С И и др. УФН **160** (6) 1 (1990)
206. Berry M Phys. Today 43 (12) 34 (1990)
207. Anandan J Nature 360307 (1992)
208. Боднарчук В И, Давтян Л С, Корнеев Д А УФН 166185 (1996)
209. Малыкин Г Б Изв. вузов. Радиофизика 40265 (1997)
210. Рытов С М ДАН СССР 18263 (1938)
211. Рытов С М Труды ФИАН 2 (1) 41 (1940)
212. Владимирский В В ДАН СССР 31222 (1941)
213. Berry M Nature 326277 (1987)
214. Berry M V J. Mod. Optic. 341400 (1987)
215. Pancharatnam S Proc. Ind. Acad. Sci. A 44247 (1956)
216. Ишлинский А Ю Приборостроение (4-5) 3 (1944)
217. Ишлинский А Ю Механика гироскопических систем (М.: Изд. АН СССР, 1963)
218. Малыкин Г Б УФН 169585 (1999)
219. Малыкин Г Б ПММ 63775 (1999)
220. Малыкин Г Б, Пермитин Г В, в кн. Физическая энциклопедия Т. 5 (М.: Рос. энциклопедия, 1998) с. 123
221. Frins E M, Dultz W Opt. Commun. 136354 (1997)
222. Aharonov Y, Casher A Phys. Rev. Lett. 53319 (1984)
223. Mashhoon B Phys. Rev. Lett. 612639 (1988)
224. Appelt S, Wackerle G, Mehring M Phys. Rev. Lett. 723921 (1994)
225. Appelt S, Wackerle G, Mehring M Phys. Lett. A 204210 (1995)
226. Corum J F J. Math. Phys. 18770 (1977)
227. Burghardt R Ann. Phys.- Leipzig 40140 (1983)
228. Lodge O Philos. T. Roy. Soc. A 189149 (1897)
229. Michelson A A Philos. Mag. Ser. 68716 (1904)
230. Silberstein L The Theory of Relativity (London: MacMillan and Co., Limited, 1914)
231. Миллер Д К ПЗМ (8-9) 194 (1925) [Miller D Nature 11 July (1925)]
232. Миллер Д К УФН 5177 (1925) [Miller D Proc. Natl. Acad. Sci. USA 11311 (1925)]
233. Зильберштейн Л ПЗМ (8-9) 192 (1925) [Silberstein L Nature 23 May (1925)]

234. Тимирязев А ПЗМ (8-9) 191 (1925)
235. Shankland R S et al. Rev. Mod. Phys. 27167 (1955)
236. Winterberg F Z. Naturforsch. A 441145 (1989)
237. Marinov S Phys. Lett. A 5419 (1975)
238. Ароновиц Ф, в кн. Применения лазеров (М.: Мир, 1974) с. 182 [Aronowitz F, in Laser Applications Vol. 1 (New York: Acad. Press, (1971) p. 133]
239. Bergh R A, Lefevre H C, Shaw H J J. Lightwave Tech. LT-2 91 (1984)
240. Новаку В Введение в электродинамику (М.: ИЛ, 1963) [Novacu V Introdudere in Electrodinamica (Romine: Ed. Acad. Rep. Romine Popul, 1955)]
241. Бутиков Е И Оптика (М.: Высшая школа, 1986) с. 413
242. Иос Г Курс теоретической физики Ч. I Механика и электродинамика Т. 1 (М.: Учпедгиз, 1963) с. 490 [Joos G Lehrbuch der Theoretischen Physik (Leipzig: Geest&Porting, 1964) p. 448)]
243. Дитчберн Р Физическая оптика (М.: Наука, 1965) с. 332 [Ditchburn R W Light (London: Blackie&Son, 1963)]
244. Угаров В А Специальная теория относительности (М.: Наука, 1977)
245. Гершт Е П Квантово-генераторные (лазерные и ядерные) гироскопы (Л.: ЛВИКА, 1967)
246. Ищенко Е Ф, Климков Ю М Оптические квантовые генераторы (М.: Сов. радио, 1968) с. 432
247. Arditty H J, Lefevre H C Opt. Lett. 6401 (1981)
248. Столяров С Н, в кн. Физический энциклопедический словарь Т. 4 (М.: Сов. энциклопедия, 1965) с. 466
249. Столяров С Н, в кн. Физическая энциклопедия Т. 4 (М.: БРЭ, 1994) с. 417
250. Толмен Р Относительность, термодинамика и космология (М.: Наука, 1974) с. 199 [Talman R C Relativity, Thermodynamics and Cosmology (Oxford: Clarendon Press, 1969)]
251. Тоннела М А, в сб. Эйнштейновский сборник (Ред. И Е Тамм, Г И Наан) (М.: Наука, 1967) с. 175 [Tonnelat M A Ann. Inst. Henri Poincaré 1 (1) 79 (1964)]
252. Dufour A, Prunier F C.R. Acad. Sci. 2041322 (1937)
253. Привалов В Е, Фридрихов С А УФН 97377 (1969)
254. Калигиевский Н И Волновая оптика (М.: Высшая школа, 1995) с. 372
255. Полуэктов И А, Беленов Э М, в кн. Квантовая электроника. Маленькая энциклопедия (Отв. ред. М Е Жаботинский) (М.: Сов. энциклопедия, 1969) с. 293
256. Страховский Г М, Успенский А В Основы квантовой электроники (М.: Высшая школа, 1973) с. 277
257. Kovacs K P J. Opt. Soc. Am. 621264 (1972)
258. Leonhardt U, Piwnicki P Phys. Rev. A 604301 (1999)
259. Silberstein L Philos. Mag. Ser. 648395 (1924)
260. Молчанов В Я, Скроцкий Г В ЖПС 18485 (1973)
261. Ривлин Л А УФН 167309 (1997)
262. Скроцкий Г В, Измestьев А А ДАН СССР 17877 (1968)
263. Ферми Э Научные труды Т. 1 (М.: Наука, 1971) с. 104 [Rend. Lincei 32115 (1923)]
264. Player M A P. Roy. Soc. Lond. A Mat. 349441 (1976)
265. Jones R V P. Roy. Soc. Lond. A Mat. 349423 (1976)
266. Шпак И В, Соломин А В, Разгоняев И В Укр. физ. жс. 301637 (1985)
267. Журавлев В Ф, Климов Д М Волновой твердотельный гироскоп (М.: Наука, 1985)
268. Packard R E, Vitale S Phys. Rev. B 463540 (1992)
269. Avenel O, Hakonen P, Varoquaux E Phys. Rev. Lett. 783602 (1997)
270. Schwab K, Bruckner N, Packard R E Nature 386585 (1997)
271. Schulz-DuBois E O Am. J. Phys. 38173 (1970)

- 272. Will C M Phys. Today 25 (10) 23 (1972)
- 273. Will C M, in Experimental Gravitation (Proc. of the Intern. Scholl of Phys. "Enrico Fermi", Course 56, Ed. B Bertotti) (New York: Academic Press, 1974) p. 1
- 274. Yilmaz H Phys. Rev. 1111417 (1958)
- 275. Yilmaz H Phys. Rev. Lett. 271399 (1971)
- 276. Yilmaz H Ann. Phys. (N.Y.) 81179 (1973)
- 277. Smoot G F, Gorenstein M V, Muller R A Phys. Rev. Lett. 29898 (1977)
- 278. Chang T Phys. Lett. A 70 (1) 1 (1979)
- 279. Rembielinsky J Phys. Lett. A 78 (1) 33 (1980)
- 280. Hils D, Hall J L Phys. Rev. Lett. 641697 (1990)
- 281. Malykin G B, in Proc. of XVIII Workshop on High Energy and Field Theory, Protvino, June 26-30, 1995 (Protvino, 1996) p. 31
- 282. Ihm J Phys. Rev. Lett. 67251 (1991)
- 283. Ihm J Int. J. Mod. Phys. B 72109 (1993)
- 284. Stedman G E et al. Opt. Lett. 20324 (1995)
- 285. Kuriyagawa A, Mori S Phys. Rev. D 201290 (1979)
- 286. Forder P W J. Phys. A - Math. Gen. 171343 (1984)
- 287. Rosenbloom J H B. Am. Phys. Soc. 391152 (1994)
- 288. Шварцшильд К, в сб. Альберт Эйнштейн и теория гравитации (М.: Мир, 1979) с. 199 [Schwarzschild K Sitzungsber. d. Acad. Wiss. (Berlin, 1916) p. 189]
- 289. Nikolić H Phys. Rev. A 61032109 (2000)
- 290. Шенкланд Р С, в сб. Эйнштейновский сборник (Ред. И Е Тамм, Г И Наан) (М.: Наука, 1967) с. 57 [Shankland R S Am. J. Phys. 31 47 (1963)] }

From Spacetime algebra as a powerful tool for EM Dressel

References

- [1] F. J. Dyson, Why is Maxwell's theory so hard to understand?, in James Clerk Maxwell Commemorative Booklet, James Clerk Maxwell Foundation, Edinburgh, 1999.
- [2] E. P. Wigner, The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1) (1960) 1–14.
- [3] S. Perkowitz, Empire of Light, Joseph Henry Press, 1999.
- [4] D. Hestenes, Space-Time Algebra, Routledge, 1966.
- [5] D. Hestenes, G. Sobczyk, Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics, Dordrecht: D. Riedel Publishing, 1987.
- [6] D. Hestenes, Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics, Am. J. Phys. 71 (2) (2003) 104–121.
- [7] D. Hestenes, Spacetime Physics with Geometric Algebra, Am. J. Phys. 71 (6) (2003) 1–24.
- [8] D. Hestenes, Gauge Theory Gravity with Geometric Calculus, Found. Phys. 35 (6) (2005) 903–970.
- [9] C. Doran, A. Lasenby, Geometric Algebra for Physicists, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

- [10] O. Laporte, G. Uhlenbeck, Application of spinor analysis to the Maxwell and Dirac equations, *Phys. Rev.* 37 (1931) 1380–1397.
- [11] J. R. Oppenheimer, Note on light quanta and the electromagnetic field, *Phys. Rev.* 38 (1931) 725–746.
- [12] B. Mignani, E. Ricami, M. Baldo, About a Dirac-Like Equation for the Photon according to Ettore Majorana, *Nuovo Cimento Lett.* 11 (1974) 568.
- [13] W. J. Archibald, Field equations from particle equations, *Can. J. Phys.* 33 (1955) 565–572.
- [14] R. H. Good, Particle aspect of the electromagnetic field equations, *Phys. Rev.* 105 (1957) 1914–1918.
- [15] E. Giannetto, A Majorana-Oppenheimer formulation of quantum electrodynamics, *Lett. Nuov. Cim.* 44 (1985) 140–144.
- [16] W. I. Fushchich, A. G. Nikitin, *Symmetries of Maxwell’s Equations*, Dordrecht: D. Riedel Publishing, 1987.
- [17] M. V. Berry, in *Anomalies, Phases, Defects*, edited by U.M. Bregola, G. Marmo, and G. Morandi, Napoli: Bibliopolis, 1990.
- [18] I. Bialynicki-Birula, On the photon wave function, *Acta Phys. Pol. A* 86 (1994) 97.
- [19] I. Bialynicki-Birula, Photon wave function, *Prog. Opt.* 36 (1996) 245–294.
- [20] J. E. Sipe, Photon wave functions, *Phys. Rev. A* 52 (1995) 1875–1883.
- [21] S. Esposito, Covariant Majorana formulation of electrodynamics, *Found. Phys.* 28 (1998) 231–244.
- [22] Y. P. Stepanovsky, From Maxwell Equation to Berry’s Phase and Sonoluminescence: Problems of Theory of Electromagnetic and Other Massless Fields, *Electromagnetic Phenomena* 1 (1998) 180–218.
- [23] D. H. Kobe, A Relativistic Schrödinger-like Equation for a Photon and Its Second Quantization, *Found. Phys.* 19 (1999) 1203–1231.
- [24] A. Gersten, Maxwell Equations - The One-Photon Quantum Equation, *Found. Phys.* 31 (8) (2001) 1211.
- [25] B. Smith, M. Raymer, Two-photon wave mechanics, *Phys. Rev. A* 74 (6) (2006) 062104.
- [26] B. J. Smith, M. G. Raymer, Photon wave functions, wave-packet quantization of light, and coherence theory, *New J. Phys.* 9 (11) (2007) 414–414.
- [27] D. Dragoman, Photon states from propagating complex electromagnetic fields, *J. Opt. Soc Am. B* 24 (2007) 922–927.
- [28] F. Tamburini, D. Vicino, Photon wave function: A covariant formulation and equivalence with QED, *Phys. Rev. A* 78 (5) (2008) 052116.
- [29] B. Thidé, *Electromagnetic field theory*, Dover Publications, 2014.
- [30] S. M. Barnett, Optical Dirac equation, *New J. Phys.* 16 (2014) 093008.

- [31] B. Thidé, The physics of angular momentum radio, arXiv:1410.4268.
- [32] M. H. L. Pryce, The mass-centre in the restricted theory of relativity and its connexion with the quantum theory of elementary particles, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 195 (1948) 62–81.
- [33] T. D. Newton, W. E. P., Localized states for elementary systems, *Rev. Mod. Phys.* 21 (1949) 400–406.
- [34] A. S. Wightman, On the localizability of quantum mechanical systems, *Rev. Mod. Phys.* 34 (1962) 845–872.
- [35] B.-S. Skagerstam, Localization of Massless Spinning Particles and the Berry Phase, arXiv:hep-th/9210054.
- [36] O. Keller, On the theory of spatial localization of photons, *Phys. Rep.* 411 (2005) 1.
- [37] H. Bacry, *Localizability and Space in Quantum Physics*, Springer, Berlin, 1988.
- [38] S. Weinberg, E. Witten, Limits on massless particles, *Phys. Lett.* 96B (1980) 59–62.
- [39] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Photons and Atoms*, Wiley-Interscience, New York, 1997.
- [40] I. Bialynicki-Birula, Z. Bialynicka-Birula, The role of the Riemann-Silberstein vector in classical and quantum theories of electromagnetism, *J. Phys. A: Math. Theor.* 46 (2013) 053001.
- [41] H. Weber, *Die Partiellen Differential-Gleichungen Der Mathematischen Physik: Nach Riemann's Vorlesungen Bearbeitet*, Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn, 1901.
- [42] L. Silberstein, Elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung, *Ann. Phys.* 327 (1907) 579.
- [43] L. Silberstein, Nachtrag zur Abhandlung über ‘Elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung’, *Ann. Phys.* 329 (1907) 783.
- [44] B. E. Saleh, M. C. Teich, A. V. Sergienko, Wolf equations for two-photon light, *Phys. Rev. Lett.* 94 (22) (2005) 223601.
- [45] J. F. Nye, M. V. Berry, Dislocations in wave trains, *Proc. R. Soc. Lond. A* 336 (1974) 165–190.
- [46] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, J. P. Woerdman, Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes, *Phys. Rev. A* 45 (1992) 8185–8189.
- [47] S. van Enk, G. Nienhuis, Commutation rules and eigenvalues of spin and orbital angular momentum of radiation fields, *J. Mod. Phys.* 41 (1994) 963–977.
- [48] L. Allen, M. J. Padgett, M. Babiker, The orbital angular momentum of light, *Prog. Opt.* 39 (1999) 291–372.
- [49] D. L. Andrews, *Structured Light and Its Applications*, Academic Press, Amsterdam, 2008.
- [50] J. P. Torres, L. Torner, *Twisted Photons*, Wiley-VCH, 2011.

- [51] D. L. Andrews, M. Babiker, *The Angular Momentum of Light*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [52] A. T. O’Neil, I. MacVicar, A. Allen, M. J. Padgett, Intrinsic and Extrinsic Nature of the Orbital Angular Momentum of a Light Beam, *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002) 053601.
- [53] V. Garcés-Chávez, D. McGloin, M. J. Padgett, W. Dultz, H. Schmitzer, K. Dholakia, Observation of the Transfer of the Local Angular Momentum Density of a Multiringed Light Beam to an Optically Trapped Particle, *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003) 093602.
- [54] J. E. Curtis, D. G. Grier, Structure of Optical Vortices, *Phys. Rev. Lett.* 90 (2003) 133901.
- [55] Y. Zhao, J. S. Edgar, G. D. M. Jeffries, D. McGloin, D. T. Chiu, Spin-to-Orbital Angular Momentum Conversion in a Strongly Focused Optical Beam, *Phys. Rev. Lett.* 99 (2007) 073901.
- [56] H. Adachi, S. Akahoshi, K. Miyakawa, Orbital motion of spherical microparticles trapped in diffraction patterns of circularly polarized light, *Phys. Rev. A* 75 (2009) 063409.
- [57] B. Roy, N. Ghosh, A. Banerjee, S. D. Gupta, S. Roy, Manifestations of geometric phase and enhanced spin Hall shifts in an optical trap, *New J. Phys.* 16 (2014) 083037.
- [58] K. Y. Bliokh, J. Dressel, F. Nori, Conservation of the spin and orbital angular momenta in electromagnetism, *New J. Phys.* 16 (2014) 093037.
- [59] J. Arlt, Handedness and azimuthal energy flow of optical vortex beams, *J. Mod. Opt.* 50 (2003) 1573–1580.
- [60] J. Leach, S. Keen, M. J. Padgett, C. Saunter, G. D. Love, Direct measurement of the skew angle of the Poynting vector in a helically phased beam, *Opt. Express* 14 (2006) 11919–11924.
- [61] M. Yeganeh, S. Rasouli, M. Dashti, S. Slussarenko, E. Santamato, E. Karimi, Reconstructing the Poynting vector skew angle and wavefront of optical vortex beams via two-channel moiré deflectometry, *Opt. Lett.* 38 (2013) 887–889.
- [62] R. A. Terborg, K. Volke-Sepúlveda, Quantitative characterization of the energy circulation in helical beams by means of near-field diffraction, *Opt. Express* 21 (11) (2013) 3379–3387.
- [63] M. R. Dennis, A. C. Hamilton, J. Courtial, Superoscillation in speckle patterns, *Opt. Lett.* 33 (2008) 2976–2978.
- [64] M. V. Berry, Optical currents, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 11 (2009) 094001.
- [65] A. Bekshaev, K. Y. Bliokh, M. Soskin, Internal flows and energy circulation in light beams, *J. Opt.* 13 (2011) 053001.
- [66] S. Kocsis, B. Braverman, S. Ravets, M. J. Stevens, R. P. Mirin, L. K. Shalm, A. M. Steinberg, Observing the Average Trajectories of Single Photons in a Two-Slit Interferometer, *Science* 332 (6034) (2011) 1170–1173.
- [67] M. R. Dennis, J. B. Götte, Beam shifts for pairs of plane waves, *J. Opt.* 15 (2013) 014015.
- [68] K. Y. Bliokh, A. Y. Bekshaev, F. Nori, Dual electromagnetism: helicity, spin, momentum, and angular momentum, *New J. Phys.* 15 (3) (2013) 033026.

- [69] K. Y. Bliokh, A. Y. Bekshaev, A. G. Kofman, F. Nori, Photon trajectories, anomalous velocities, and weak measurements: A classical interpretation, *New J. Phys.* 15 (2013) 073022.
- [70] S. M. Barnett, M. V. Berry, Superweak momentum transfer near optical vortices, *J. Opt.* 15 (2013) 125701.
- [71] S. Huard, C. Imbert, Mesure de l'impulsion echangee au cours de l'interaction onde evanescente-atome, *Opt. Commun.* 24 (1978) 185–189.
- [72] S. Huard, Exchange momentum between moving atoms and a surface wave: theory and experiment, *Can J. Phys.* 57 (1979) 612–618.
- [73] K. Y. Bliokh, F. Nori, Transverse spin of a surface polariton, *Phys. Rev. A* 85 (2012) 061801(R).
- [74] K. Y. Bliokh, A. Y. Bekshaev, F. Nori, Extraordinary momentum and spin in evanescent waves, *Nature Comm.* 5 (2014) 3300.
- [75] A. Y. Bekshaev, K. Y. Bliokh, F. Nori, Transverse spin and momentum in two-wave interference, *arXiv:1407.6786*.
- [76] Y. Tang, A. E. Cohen, Optical Chirality and its Interaction with Matter, *Phys. Rev. Lett.* 104 (2010) 163901.
- [77] E. Hendry, T. Carpy, J. Johnston, M. Popland, R. V. Mikhaylovskiy, A. J. Lapthorn, S. M. Kelly, L. D. Barron, N. Gadegaard, M. Kadodwala, Ultrasensitive detection and characterization of biomolecules using superchiral fields, *Nature Nanotechnol.* 5 (2010) 783–787.
- [78] K. Y. Bliokh, F. Nori, Characterizing optical chirality, *Phys. Rev. A* 83 (2011) 021803(R).
- [79] Y. Tang, A. E. Cohen, Enhanced Enantioselectivity in Excitation of Chiral Molecules by Superchiral Light, *Science* 332 (2011) 333–336.
- [80] E. Hendry, R. V. Mikhaylovskiy, L. D. Barron, M. Kadodwala, T. J. Davis, Chiral Electromagnetic Fields Generated by Arrays of Nanoslits, *Nano. Lett.* 12 (2012) 3640–3644.
- [81] M. Schäferling, D. Dregely, M. Hentschel, H. Giessen, Tailoring Enhanced Optical Chirality: Design Principles for Chiral Plasmonic Nanostructures, *Phys. Rev. X* 2 (2012) 031010.
- [82] A. Canaguier-Durand, J. A. Hutchinson, C. Genet, T. W. Ebbesen, Mechanical separation of chiral dipoles by chiral light, *New J. Phys.* 15 (2013) 123037.
- [83] R. P. Cameron, S. M. Barnett, A. M. Yao, Discriminatory optical force for chiral molecules, *New J. Phys.* 16 (2012) 013020.
- [84] G. Tkachenko, E. Brasselet, Optofluidic sorting of material chirality by chiral light, *Nature Commun.* 5 (2014) 3577.
- [85] K. Y. Bliokh, Y. S. Kivshar, F. Nori, Magnetoelectric Effects in Local Light-Matter Interactions, *Phys. Rev. Lett.* 113 (2014) 033601.
- [86] A. I. Akhiezer, V. Berestetskii, *Quantum Electrodynamics*, Interscience, New York, 1965.

- [87] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics*, Pergamon, Oxford, 1982.
- [88] E. Leader, C. Lorcé, The angular momentum controversy: What's it all about and does it matter?, *Phys. Rep.* 541 (2014) 163–248.
- [89] H. M. Wiseman, Grounding Bohmian mechanics in weak values and Bayesianism, *New J. Phys.* 9 (2007) 165.
- [90] F. L. Traversa, G. Albareda, M. Di Ventura, X. Oriols, Robust weak-measurement protocol for Bohmian velocities, *Phys. Rev. A* 87 (2013) 052124.
- [91] J. Dressel, K. Y. Bliokh, F. Nori, Classical Field Approach to Quantum Weak Measurements, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014) 110407.
- [92] E. Madelung, Eine anschauliche Deutung der Gleichung von Schrödinger, *Naturwissenschaften* 14 (45) (1926) 1004.
- [93] E. Madelung, Quantentheorie in hydrodynamischer Form, *Z. Phys.* 40 (3–4) (1927) 322–326.
- [94] D. Bohm, A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of “Hidden” Variables. I, *Phys. Rev.* 85 (1952) 166–179.
- [95] D. Bohm, A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of “Hidden” Variables. II, *Phys. Rev.* 85 (1952) 180–193.
- [96] B. J. Hiley, R. E. Callaghan, Clifford Algebras and the Dirac-Bohm Quantum-Hamilton-Jacobi Equation, *Found. Phys.* 42 (1) (2012) 192–208.
- [97] D. L. Andrews, M. M. Coles, Measures of chirality and angular momentum in the electromagnetic field, *Opt. Lett.* 37 (2012) 3009–3011.
- [98] D. J. Candlin, Analysis of the New Conservation Law in Electromagnetic Theory, *Nuovo Cimento* 37 (1965) 1390–1395.
- [99] M. G. Calkin, An invariance property of the free electromagnetic field, *Am. J. Phys.* 33 (1965) 958–960.
- [100] R. F. O’Connell, D. R. Tompkins, Physical Interpretation of Generalized Conservation Laws, *Nuovo Cimento* 39 (1965) 391–394.
- [101] D. Zwanziger, Quantum Field Theory of Particles with Both Electric and Magnetic Charges, *Phys. Rev.* 176 (1968) 1489–1495.
- [102] S. Deser, C. Teitelboim, Duality transformations of Abelian and non-Abelian gauge fields, *Phys. Rev. D* 13 (1976) 1592–1597.
- [103] G. N. Afanasiev, Y. P. Stepanovsky, The helicity of the free electromagnetic field and its physical meaning, *Nuovo Cimento* 109 A (1996) 271–279.
- [104] J. L. Trueba, A. F. Rañada, The electromagnetic helicity, *Eur. J. Phys.* 17 (1996) 141.
- [105] R. P. Cameron, S. M. Barnett, A. M. Yao, Optical helicity, optical spin and related quantities in electromagnetic theory, *New J. Phys.* 14 (2012) 053050.

- [106] R. P. Cameron, S. M. Barnett, Electric-magnetic symmetry and Noether's theorem, *New J. Phys.* 14 (2012) 123019.
- [107] I. Fernandez-Corbaton, X. Zambrana-Puyalto, G. Molina-Terriza, Helicity and angular momentum: A symmetry-based framework for the study of light-matter interactions, *Phys. Rev. A* 86 (2012) 042103.
- [108] I. Fernandez-Corbaton, X. Zambrana-Puyalto, N. Tischier, X. Vidal, M. L. Juan, G. Molina-Terriza, Electromagnetic Duality Symmetry and Helicity Conservation for the Macroscopic Maxwell's Equations, *Phys. Rev. Lett.* 111 (2013) 060401.
- [109] M. Born, L. Infeld, Foundations of the new field theory, *Proc. Roy. Soc. (London)* A144 (1934) 425.
- [110] E. Schrödinger, Contributions to Born's new theory of the electromagnetic field, *Proc. Roy. Soc. (London)* A150 (1935) 465.
- [111] S. Ferrara, J. Scherk, B. Zumino, Algebraic properties of extended supergravity theories, *Nucl. Phys. B* 121 (1977) 393.
- [112] M. K. Gaillard, B. Zumino, Duality rotations for interacting fields, *Nucl. Phys. B* 193 (1981) 221–244.
- [113] A. Sen, Electric-magnetic duality in string theory, *Nucl. Phys. B* 404 (1993) 109–126.
- [114] J. H. Schwarz, A. Sen, Duality symmetric actions, *Nucl. Phys. B* 411 (1994) 35–63.
- [115] P. Pasti, D. Sorokin, M. Tonin, Note on manifest Lorentz and general coordinate invariance in duality symmetric models, *Phys. Lett. B* 352 (1995) 59–63.
- [116] G. W. Gibbons, D. A. Rasheed, Electric-magnetic duality rotations in non-linear electrodynamics, *Nucl. Phys. B* 454 (1995) 185–206.
- [117] C. M. Hull, P. K. Townsend, Unity of superstring dualities, *Nucl. Phys. B* 438 (1995) 109–137.
- [118] S. Deser, Ö. Sarioğlu, Hamiltonian electric/magnetic duality and Lorentz invariance, *Phys. Lett. B* 423 (1998) 369–372.
- [119] E. Cremmer, B. Julia, H. Lü, C. N. Pope, Dualisation of dualities, *Nucl. Phys. B* 523 (1998) 73–144.
- [120] J. M. Figueroa-O'Farrill, Electromagnetic Duality for Children: Lecture notes 1995-6, <http://www.maths.ed.ac.uk/~jmf/Teaching/EDC.html> (1998).
- [121] P. Aschieri, S. Ferrara, B. Zumino, Duality rotations in nonlinear electrodynamics and in extended supergravity, *Riv. Nuo. Cim.* 31 (2008) 625–707.
- [122] P. Aschieri, S. Ferrara, S. Theisen, Constitutive Relations, Off Shell Duality Rotations and the Hypergeometric Form of Born-Infeld Theory, in S. Bellucci (ed.), *Breaking of Supersymmetry and Ultraviolet Divergences in Extended Supergravity*, Springer Proc. Phys. 153 (2014) 23–41.
- [123] E. Noether, Invariante variationprobleme, *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen. Math.-Phys. Kl.* 2 (1918) 235–257.

- [124] O. Heaviside, On the Forces, Stresses, and Fluxes of Energy in the Electromagnetic Field, *Phil. Trans. R. Soc. A* 183 (1892) 423.
- [125] J. Larmor, A Dynamical Theory of the Electric and Luminiferous Medium. Part III. Relations with Material Media, *Phil. Trans. R. Soc. A* 190 (1897) 205.
- [126] S. M. Barnett, Rotation of electromagnetic fields and the nature of optical angular momentum, *J. Mod. Opt.* 57 (2010) 1339–1343.
- [127] D. E. Soper, *Classical Field Theory*, New York, Wiley, 1976.
- [128] R. J. Scully, *The Demon and the Quantum*, Weinheim: Wiley-VCH, 2007.
- [129] J. C. Maxwell, On physical lines of force, I. The theory of molecular vortices applied to magnetic phenomena, *Philos. Mag.* 21 (1861) 161–175.
- [130] J. C. Maxwell, On Physical lines of force, II. The theory of molecular vortices applied to electric currents, *Philos. Mag.* 21 (1861) 281–291, 388–348.
- [131] J. C. Maxwell, On Physical lines of force, III. The theory of molecular vortices applied to statical electricity, *Philos. Mag.* 23 (1862) 12–24.
- [132] J. C. Maxwell, On Physical lines of force, IV. The theory of molecular vortices applied to the action of magnetism on polarised light, *Philos. Mag.* 23 (1862) 85–95.
- [133] J. C. Maxwell, A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, *Roy. Soc. Trans.* 155 (1865) 459.
- [134] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Second Edition, Oxford University Press, 1881.
- [135] W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions*, Dublin: Hodges and Smith, 1853.
- [136] W. R. Hamilton, *Elements of Quaternions*, New York: Longmans, Green, and Co., 1901.
- [137] O. Heaviside, *Electro-Magnetic Theory*, London: Electrician Printing and Publishing Company, Ltd., 1893.
- [138] E. B. Wilson, *Vector Analysis: a text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs Ph.D. LL.D.*, Yale University Press, 1901.
- [139] H. Grassmann, *Die Lineale Ausdehnungslehre — Ein neuer Zweig der Mathematik*, Leipzig: Verlag von Otto Wigand, 1844.
- [140] W. K. Clifford, *Elements of Dynamic*, London: MacMillan and Co., 1878.
- [141] H. A. Lorentz, Simplified Theory of Electrical and Optical Phenomena in Moving Systems, *Proc. Roy. Neth. Acad. Arts Sci.* 1 (1899) 427–442.
- [142] H. A. Lorentz, Weiterbildung der Maxwellshen Theorie. Elektronentheorie., *Ency. Math. Wiss.* 5 (1904) 145–288.
- [143] H. A. Lorentz, Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light, *Proc. Roy. Neth. Acad. Arts Sci.* 6 (1904) 809–831.
- [144] H. Poincaré, Sur la dynamique de l'électron, *Compt. Rend.* 140 (1905) 1504–1508.

- [145] H. Poincaré, Sur la dynamique de l'électron, *Rend. Circ. Mat. Pal.* 21 (1906) 129–176.
- [146] A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Ann. Phys.* 322 (1905) 891–921.
- [147] H. Minkowski, Das Relativitätsprinzip, *Ann. Phys.* 352 (1907) 927–938.
- [148] A. Einstein, Über die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper, *Ann. Phys.* 331 (1908) 532–540.
- [149] A. Einstein, Relativität und Gravitation. Erwiderung auf eine Bemerkung von M. Abraham, *Ann. Phys.* 38 (1912) 1059–1064.
- [150] A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie I: Vierdimensionale Vektoralgebra, *Ann. Phys.* 337 (1910) 749–776.
- [151] A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie II: Vierdimensionale, *Ann. Phys.* 337 (1910) 749–776.
- [152] H. Minkowski, Raum und Zeit, *Phys. Zeit.* 10 (1908) 75–88.
- [153] E. Cartan, Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff, *Ann. Sci. l'École Norm. Sup.* 16 (1899) 239–332.
- [154] E. B. Wilson, The Space-Time Manifold of Relativity. The Non-Euclidean Geometry of Mechanics and Electromagnetics., *Proc. Amer. Acad. Arts Sci.* 48 (1911) 387–507.
- [155] J. D. Jackson, *Classical Electromagnetism*, New York: Wiley, 1999.
- [156] M. Göckeler, T. Schücker, *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*, Cambridge University Press, 1989.
- [157] A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Ann. Phys.* 49 (1916) 769–822.
- [158] A. Crumeyrolle, *Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
- [159] C. N. Yang, R. Mills, Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance, *Phys. Rev.* 96 (1954) 191–195.
- [160] C. N. Yang, Einstein's impact on theoretical physics, Lecture given at the Second Marcel Grossmann Meeting held in honor of the 100th anniversary of the birth of Albert Einstein, *Physics Today* 33 (1980) 42.
- [161] C. N. Yang, Topology and Gauge Theory in Physics, in: *In Memory of Akira Tonomura, Physicist and Electron Microscopist*, World Scientific, Singapore, 2014, pp. 41–49.
- [162] C. N. Yang, The conceptual origins of Maxwell's equations and gauge theory, *Physics Today* 67 (2014) 45.
- [163] S.-S. Chern, J. Simons, Characteristic forms and geometric invariants, *Ann. Math.* 99 (1974) 48–69.
- [164] Y. Aharonov, D. Bohm, Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory, *Phys. Rev.* 115 (3) (1959) 485 – 491.

- [165] G. 't Hooft, M. Veltman, Regularization and renormalization of gauge fields, Nucl. Phys. B 44 (1972) 189.
- [166] A. Tonomura, N. Osakabe, T. Matsuda, T. Kawasaki, J. Endo, S. Yano, H. Yamada, Evidence for Aharonov-Bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave, Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 792–795.
- [167] E. Witten, Topological Quantum Field Theory, Commun. Math. Phys. 117 (1988) 353.
- [168] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields I, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [169] M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics, Second Edition, IOP Publishing, London, 2003.
- [170] A. C. T. Wu, C. N. Yang, Evolution of the concept of the vector potential in description of fundamental interactions, Int. J. Mod. Phys. A 21 (2006) 3235–3277.
- [171] D. Hestenes, Multivector Calculus, J. Math. Anal. and Appl. 24 (2) (1968) 313–325.
- [172] D. Hestenes, Multivector Functions, J. Math. Anal. and Appl. 24 (3) (1968) 467–473.
- [173] D. Hestenes, Vectors, Spinors, and Complex Numbers in Classical and Quantum Physics, Am. J. Phys. 39 (9) (1971) 1013.
- [174] G. Sobczyk, Simplicial calculus with Geometric Algebra, in: A. Micali, R. Boudet, J. Helmstetter (Eds.), Fundamental Theories of Physics, vol. 47, Springer Netherlands, 1989, pp. 279–292.
- [175] A. Lasenby, C. Doran, S. Gull, Gravity, gauge theories and geometric algebra, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 356 (1737) (1998) 487–582.
- [176] R. Ablamowicz, G. Sobczyk, Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications, Basel: Birkhäuser, 2004.
- [177] V. de Sabbatta, B. K. Datta, Geometric Algebra and Applications to Physics, Taylor & Francis Group, 2007.
- [178] S. J. van Enk, The covariant description of electric and magnetic field lines of null fields: application to Hopf-Rañada solutions, J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 175204.
- [179] F. Colombo, I. Sabadini, F. Sommen, D. C. Struppa, Analysis of Dirac Systems and Computational Algebra, Boston: Birkhäuser, 2004.
- [180] S. Delanghe, F. Sommen, V. Soucek, Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions: A Function Theory for the Dirac Operator, Netherlands: Springer, 2012.
- [181] W. Baylis, Clifford (Geometric) Algebras with Applications in Physics, Mathematics, and Engineering vol 1, Boston, MA: Birkhäuser, 1996.
- [182] D. Hestenes, New Foundations for Classical Mechanics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [183] E. B. Corrochano, G. Sobczyk, Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering, Boston: Birkhäuser, 2001.
- [184] W. Baylis, Electrodynamics: A Modern Geometric Approach, Birkhäuser, 2002.

- [185] C. Perwass, *Geometric Algebra with Applications in Engineering*, New York: Springer, 2010.
- [186] L. Dorst, J. Lasenby, *Guide to Geometric Algebra in Practice*, New York: Springer, 2011.
- [187] A. Macdonald, *Linear and Geometric Algebra*, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2011.
- [188] A. Macdonald, *Vector and Geometric Calculus*, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2012.
- [189] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Butterworth-Heinemann, 1975.
- [190] B. J. Hiley, A Note on the Role of Idempotents in the Extended Heisenberg Algebra, *Proc. of the Int. Meeting of ANPA 22* (2001) 107–121.
- [191] B. J. Hiley, R. E. Callaghan, *The Clifford Algebra approach to Quantum Mechanics A: The Schrödinger and Pauli Particles* (2010). [arXiv:1011.4031](#).
- [192] B. J. Hiley, R. E. Callaghan, *The Clifford Algebra approach to Quantum Mechanics B: The Dirac Particle and its relation to the Bohm Approach* (2010). [arXiv:1011.4033](#).
- [193] P. A. M. Dirac, Quantised Singularities in the Electromagnetic Field, *Proc. R. Soc. Lond. A* 133 (1931) 60.
- [194] P. A. M. Dirac, The Quantum Theory of the Electron, *Proc. R. Soc. Lond. A* 117 (778) (1928) 610–624.
- [195] R. Arianrhod, *Einstein’s Heroes: Imagining the World Through the Language of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [196] C. A. Z. Vasconcellos, D. Hadjimichef, CP Violation in Dual Dark Matter (2014). [arXiv:arXiv:1404.0409](#).
- [197] P. A. M. Dirac, The Theory of Magnetic Poles, *Phys. Rev.* 74 (1948) 817–830.
- [198] N. Cabibbo, E. Ferrari, Quantum Electrodynamics with Dirac Monopoles, *Nuovo Cimento* 23 (1962) 1147.
- [199] J. Schwinger, Magnetic Charge and Quantum Field Theory, *Phys. Rev.* 144 (1966) 1087–1093.
- [200] F. Rohrlich, Classical Theory of Magnetic Monopoles, *Phys. Rev.* 150 (1966) 1104–1111.
- [201] D. Zwanziger, Local-Lagrangian Quantum Field Theory of Electric and Magnetic Charges, *Phys. Rev. D* 3 (1971) 880–891.
- [202] M. Y. Han, L. C. Biedenharn, Manifest Duality Invariance in Electrodynamics and the Cabibbo-Ferrari Theory of Magnetic Monopoles, *Nuovo Cimento* 2 (1971) 544.
- [203] B. Mignani, E. Ricami, Complex Electromagnetic Four-Potential and the Cabibbo-Ferrari Relation for Magnetic Monopoles, *Nuovo Cimento* 30 (1975) 533.
- [204] S. Deser, Off-shell electromagnetic duality invariance, *J. Phys. A: Math. Gen.* 15 (1982) 1053.

- [205] R. Gambini, S. Salamó, Null-Plane Analysis of Electromagnetism with Magnetic Charges, *Nuovo Cimento* 49 (1979) 276.
- [206] R. Gambini, S. Salamó, A. Trias, Self-Dual Covariant Lagrangian Formulation of Electromagnetism with Magnetic Charges, *Lett. Nuovo Cimento* 49 (1979) 276.
- [207] J. H. Schwartz, A. Sen, Duality symmetric actions, *Nucl. Phys. B* 411 (1994) 35.
- [208] P. Pasti, D. Sorokin, M. Tonin, Duality symmetric actions with manifest space-time symmetries, *Phys. Rev. D* 52 (1995) R4277–R4281.
- [209] D. Singleton, Magnetic charge as a ‘hidden’ gauge symmetry, *Int. J. Theor. Phys.* 34 (1995) 37–46.
- [210] D. Singleton, Electromagnetism with Magnetic Charge and Two Photons, *Am. J. Phys.* 64 (1996) 452–458.
- [211] A. Khoudeir, N. R. Pantoja, Covariant duality symmetric actions, *Phys. Rev. D* 53 (1996) 5974–5977.
- [212] A. Kato, D. Singleton, Gauging Dual Symmetry, *Int. J. Theor. Phys.* 41 (2002) 1563–1572.
- [213] Y. M. Shnir, *Magnetic Monopoles*, Berlin: Springer, 2005.
- [214] T. G. Philbin, Lipkin’s conservation law, Noether’s theorem, and the relation to optical helicity, *Phys. Rev. A* 87 (2013) 043843.
- [215] R. Battesti, C. Rizzo, Magnetic and electric properties of a quantum vacuum, *Rep. Prog. Phys.* 76 (2013) 016401.
- [216] S. Weinberg, A New Light Boson?, *Phys. Rev. Lett.* 40 (1978) 223.
- [217] J. C. Maxwell, *Adress to the Mathematical and Physical Sections of the British Associations*, Liverpool, 1865.
- [218] X.-S. Chen, X.-F. Lü, W.-M. Sun, F. Wang, T. Goldman, Spin and Orbital Angular Momentum in Gauge Theories: Nucleon Spin Structure and Multipole Radiation Revisited, *Phys. Rev. Lett.* 100 (2008) 232002.
- [219] H. Hertz, Die Kräfte electrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell’schen Theorie, *Ann. Phys.* 272 (1889) 1.
- [220] E. A. Essex, Hertz vector potentials of electromagnetic theory, *Am. J. Phys.* 45 (1977) 1099.
- [221] M. V. Berry, Lateral and transverse shifts in reflected dipole radiation, *Proc. R. Soc. A* 467 (2133) (2011) 2500–2519.
- [222] E. Kalnins, W. J. Miller, Lie theory and the wave equation in space-time: R-separable solutions of the wave equation $\Psi_{tt} - \Delta_3 \Psi = 0$, *J. Math. Phys.* 19 (1978) 1247.
- [223] E. T. Whittaker, On an expression of the electromagnetic field due to electrons by means of two scalar potential functions, *Proc. Lond. Math. Soc.* 1 (1904) 367.
- [224] P. Debye, Der lichtdruck auf kugeln von beliebigem material, *Ann. Phys.* 335 (1909) 57.

- [225] A. Nisbet, Hertzian electromagnetic potentials and associated gauge transformations, *Proc. R. Soc. A* 231 (1955) 250.
- [226] J. L. Synge, *Relativity: The Special Theory*, Amsterdam: North-Holland, 1965.
- [227] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, *Electrodynamics of Continuous Media*, Butterworth-Heinemann, 1984.
- [228] C. Castelnovo, R. Moessner, S. L. Sondhi, Magnetic monopoles in spin ice, *Nature* 451 (2008) 42–45.
- [229] S. R. Giblin, S. T. Bramwell, P. C. W. Holdsworth, D. Prabhakaran, I. Terri, Creation and measurement of long-lived magnetic monopole currents in spin ice, *Nature Phys.* 7 (2011) 252–258.
- [230] H.-B. Braun, Magnetic monopoles: Quenching the fire in spin ice, *Nature Phys.* 10 (2014) 88–89.
- [231] C. Paulsen, M. J. Jackson, E. Lhotel, B. Canals, D. Prabhakaran, K. Matsuhira, S. R. Giblin, S. T. Bramwell, Far-from-equilibrium monopole dynamics in spin ice, *Nature Phys.* 10 (2014) 137–139.
- [232] M. W. Ray, E. Ruokokowski, S. Kandel, M. Möttönen, D. S. Hall, Observation of Dirac monopoles in a synthetic magnetic field, *Nature* 505 (2014) 657–660.
- [233] P. Milonni, *Fast Light, Slow Light and Left-Handed Light*, New York: Taylor and Francis, 2004.
- [234] A. Y. Savchenko, B. Y. Zel’dovich, Birefringence by a smoothly inhomogeneous locally isotropic medium: Three-dimensional case, *Phys. Rev. E* 50 (1994) 2287–2292.
- [235] X. Zambrana-Puyalto, I. Fernandez-Corbaton, M. L. Juan, X. Vidal, G. Molina-Terriza, Duality symmetry and Kerker conditions, *Opt. Lett.* 38 (2013) 1857–1859.
- [236] N. e. a. Tischler, Experimental control of optical helicity in nanophotonics, *Light: Science and Applications* 3 (2014) e183.
- [237] H. Hertz, Über die Beziehungen Zwischen Licht und Elektrizität. Eind Vortrag gehalten bei der 62., Versammlung deutscher Naturforscher and Ärzte in Heidelberg, Bonn, 1889.
- [238] K. C. Cole, *Sympathetic Vibrations: Reflections on Physics as a Way of Life*, Bantam, 1985.
- [239] R. P. Cameron, On the ‘second potential’ in electrodynamics, *J. Opt.* 16 (2014) 015708.
- [240] F. Belinfante, *Physica* 6 (1939) 887–898.
- [241] F. Belinfante, *Physica* 7 (1940) 449–474.
- [242] L. Rosenfeld, *Mém. Acad. Roy. Belg. Sci.* 18 (1940) 1–30.
- [243] H. Ohanian, What is spin?, *Am. J. Phys.* 54 (1986) 500–505.
- [244] K. Mita, Virtual probability current associated with the spin, *Am. J. Phys.* 68 (2000) 259–264.

- [245] R. Zambrini, S. Barnett, Local transfer of optical angular momentum to matter, *J. Mod. Opt.* 52 (2005) 1045–1052.
- [246] L. Allen, M. J. Padgett, Response to Question No.79. Does a plane wave carry spin angular momentum?, *Am. J. Phys.* 70 (2002) 567–568.
- [247] E. J. Konopinski, What the electromagnetic vector potential describes, *Am. J. Phys.* 46 (1978) 499–502.
- [248] S. L. Glashow, Partial-symmetries of weak interactions, *Nucl. Phys.* 22 (1961) 579.
- [249] S. Weinberg, A model of leptons, *Phys. Rev. Lett.* 19 (1961) 1264.
- [250] A. Salam, Elementary particle physics, in: N. Svartholm (Ed.), *Proceedings of the 8th Nobel Symposium*, Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968, p. 367.
- [251] F. Englert, R. Brout, Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons, *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964) 321.
- [252] P. W. Higgs, Broken symmetries, massless particles and gauge fields, *Phys. Lett.* 12 (1964) 132.
- [253] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, T. W. B. Kibble, Global conservation laws and massless particles, *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964) 585.
- [254] R. P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. II, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1964.